Appendice A

Etude d'une ligne de production déterministe gérée en "Kanban"

Introduction

Cette étude a été réalisée à l'occasion d'un exposé au groupe de travail "Modélisation et évaluation de performance des systèmes à événements discrets"[1] sur les instances de René David, à qui l'auteur est reconnaissant d'avoir suggéré ce travail. Nous renvoyons le lecteur intéressé à Mascolo, [28], pour une description des systèmes gérés en "Kanban" et pour leur étude d'un point de vue probabiliste.

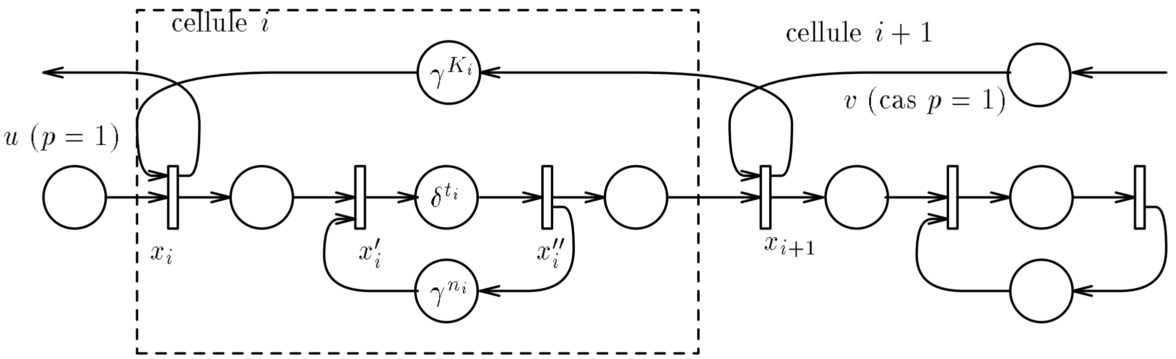
1 Modèle algébrique

1.1 Modélisation des cellules kanban

On considère la version suivante de la gestion dite "kanban", tirée de [28]. Une ligne de production est formée de i cellules. Chaque cellule contient n_i machines fonctionnant en parallèle. Chaque machine peut traiter une pièce, le traitement prenant un temps t_i. La pièce traitée est mise dans le stock en amont de la cellule suivante. On suppose en outre que les débuts de tâche sont effectués selon la politique suivante: on fixe un nombre de "kanban" (mot japonais signifiant étiquette) K_i par cellule. Au départ, les K_i kanbans sont disposés sur un tableau. Lorsque qu'un nouvelle pièce rentre dans la cellule i (venant de la cellule $i-1$), on lui attribue un kanban, que l'on enlève du tableau. S'il n'y a pas de kanban de disponible, on ne prend pas la pièce. Lorsque la pièce est acceptée par la cellule suivante, on enlève le kanban de la pièce, et on remet le kanban libéré sur le tableau. Pour la dernière cellule, on supposera que la gestion des kanbans est conditionnée par la demande, i.e. que l'on libère un kanban lorsqu'une pièce a été demandée. Nous laissons le lecteur se convaincre que le graphe d'événements temporisé représenté sur la Figure A.1 représente effectivement ce système. On trouvera un graphe équivalent dans [28]. On observe que le circuit $(x_i, x_i', x_i'', x_{i+1})$ représente le parcours effectif des kanbans de la cellule i.

En introduisant une entrée u (correspondant aux pièces entrant dans la première cellule) et une seconde entrée v (correspondant à la demande reçue par la dernière cellule), représentée sur la Figure dans le cas d'une seul cellule, on obtient le système d'équations suivant décrivant la solution

[1] GT1, Pôle Systèmes à événements discrets, Groupement de Recherche Automatique



K_i: nombre de kanbans dans la cellule i
n_i: nombre de machines dans la cellule i
t_i: temps de l'opération i

Figure A.1: Ligne de production générique gérée en "kanban"

au plus tôt:

$$\begin{cases} x_i = x''_{i-1} \oplus \gamma^{K_i} x_{i+1} \\ x'_i = x_i \oplus \gamma^{n_i} x''_i \\ x''_i = \delta^{t_i} x'_i \\ x_1 = u \oplus \gamma^{K_1} x_2 \\ x_{p+1} = v \end{cases}$$

En éliminant x''_i:

$$x'_i = x_i \oplus \gamma^{n_i}\delta^{t_i} x'_i = (\gamma^{n_i}\delta^{t_i})^* x_i$$

Finalement,

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= \delta^{t_i}(\gamma^{n_i}\delta^{t_i})^* x_i \oplus \gamma^{K_{i+1}} x_{i+2} \\ x_1 &= \gamma^{K_1} x_2 \oplus u \\ x_{p+1} &= v \end{aligned} \tag{1.1.a}$$

où u représente les matières premières et v la demande. Il résulte en particulier de (1.1.a) que la ligne de production se représente par le graphe d'événements équivalent donné sur la Figure A.2 (lequel donne lieu aux mêmes équations).

1.2 Transfert d'une ligne kanban

On peut écrire pour (1.1.a) l'équation matricielle $X = AX \oplus BU$, $y = CX$, avec:

$$A = \begin{bmatrix} \varepsilon & \gamma^{K_1} & \varepsilon & \dots & \varepsilon \\ \delta^{t_1}(\gamma^{n_1}\delta^{t_1})^* & \varepsilon & \gamma^{K_2} & \varepsilon & \vdots \\ \varepsilon & \delta^{t_2}(\gamma^{n_2}\delta^{t_2})^* & \varepsilon & \gamma^{K_3} & \varepsilon \\ \vdots & & \ddots & & \gamma^{K_p} \\ \varepsilon & \dots & \varepsilon & \delta^{t_p}(\gamma^{n_p}\delta^{t_p})^* & \varepsilon \end{bmatrix}$$

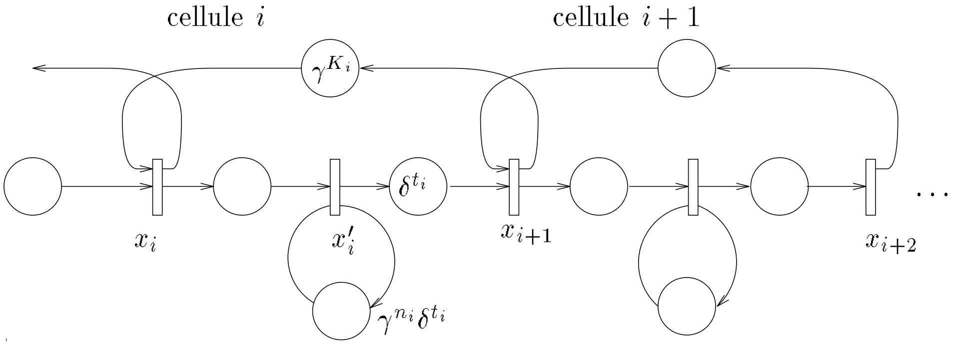


Figure A.2: Ligne de production équivalente à A.1

$$B = \begin{bmatrix} e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \vdots & \vdots \\ \varepsilon & \varepsilon' \\ \varepsilon & e \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} \varepsilon & \ldots & \varepsilon & e \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix}, \; U = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix},$$

Soit la relation $y = CA^*BU$.

1.2.1 Cas à une cellule On a alors

$$x_2 = (\gamma^{n_1}\delta^{t_1})^*\delta^{t_1}(u \oplus \gamma^{K_1}x_2) \oplus \gamma^{K_2}v$$

Il résulte de $(ab^*)^* = e \oplus a(a \oplus b)^*$ et $b^*(ab^*)^* = (a \oplus b)^*$ avec $a = \gamma^{K_1}\delta^{t_1}$ et $b = \gamma^{n_1}\delta^{t_1}$ (cf. 0,4.1.6) que

$$(a \oplus b)^* = (\gamma^{K_1}\delta^{t_1} \oplus \gamma^{n_1}\delta^{t_1})^* = (\gamma^{\min(K_1,n_1)}\delta^{t_1})^* \ .$$

D'où le transfert:

$$y = \delta^{t_1}(\gamma^{\min(K_1,n_1)}\delta^{t_1})^*u \oplus [e \oplus \gamma^{K_1}\delta^{t_1}(\gamma^{\min(K_1,n_1)}\delta^{t_1})^*]v$$

1.3 Equations générale du transfert

On peut voir (1.1.a) comme un système avec des conditions limites aux deux bouts. Une manière de le résoudre sans inverser brutalement la matrice A consiste à chercher x_i sous la forme

$$x_i = \alpha_i u_i \oplus \beta_i x_{i+1} \ .$$

1.3.1 Théorème *Le transfert de la ligne kanban à n cellules est donné par*

$$y = \alpha_{p+1}u \oplus \beta_{p+1}v$$

où les α_i et β_i vérifient la récurrence suivante:

$$\begin{aligned} &\alpha_1 = e, \quad \beta_1 = \gamma^{K_1} \\ &2 \le i \le p-1 : \begin{cases} \alpha_{i+1} = (\beta_i\delta^{t_i}(\gamma^{n_i}\delta^{t_i})^*)^*\delta^{t_i}(\gamma^{n_i}\delta^{t_i})^*\alpha_i \\ \beta_{i+1} = (\beta_i\delta^{t_i}(\gamma^{n_i}\delta^{t_i})^*)^*\gamma^{K_{i+1}} \end{cases} \\ &\beta_{p+1} = (\beta_p\delta^{t_p}(\gamma^{n_p}\delta^{t_p})^*)^*, \qquad \alpha_{p+1} = (\beta_p\delta^{t_p}(\gamma^{n_p}\delta^{t_p})^*)^*\delta^{t_p}(\gamma^{n_p}\delta^{t_p})^* \ . \end{aligned}$$

Preuve On a en effet:

$$x_{i+1} = \delta^{t_1}(\gamma^{n_i}\delta^{t_i})^* x_i \oplus \gamma^{K_{i+1}} x_{i+2} = \delta^{t_1}(\gamma^{n_i}\delta^{t_i})^*(\alpha_i u_i \oplus \beta_i x_{i+1}) \oplus \gamma^{K_{i+1}} x_{i+2} \ .$$

La récurrence ci-dessus s'obtient en éliminant x_{i+1} du second membre (cf. 0,4.1.1) et en identifiant les coefficients de u et v. ∎

1.3.2 Remarque On peut voir la récurrence donnée dans le théorème 1.3.1 ci-dessus comme une inversion "creuse" de la matrice bi-diagonale A.

1.3.3 Cas de p cellules identiques On a alors l'expression simple du transfert:

$$y = \delta^{pt}(\gamma^{\min(K,n)}\delta^t)^* u \oplus [e \oplus \gamma^K \delta^t (\gamma^{\min(K,n)}\delta^t)^*] v \ ,$$

comme il résulte d'une récurrence immédiate.

Nous interprétons maintenant ces résultats.

1.4 Réponse à la demande d'une cellule Kanban

On a représenté sur la Figure A.3 le transfert associé à une seule cellule. On considère le cas où

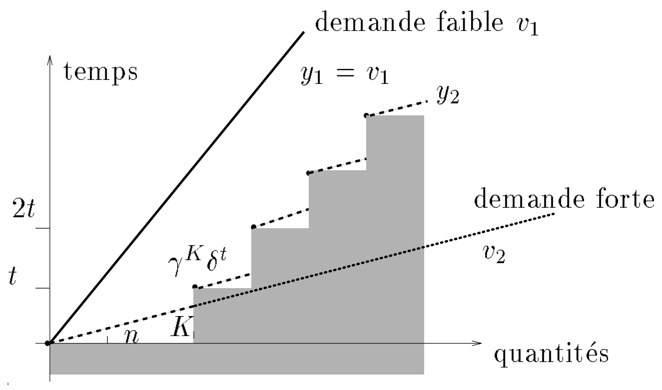


Figure A.3: Transfert d'un cellule Kanban

$u = \varepsilon$ (i.e. l'approvisionnement est non contraignant), ce qui revient à isoler le transfert liant la demande à la sortie, i.e.

$$y = [e \oplus \gamma^K \delta^t (\gamma^{\min(K,n)}\delta^t)^*] v \ .$$

On a pris le cas particulier où la demande est constante (et donc la demande cumulée v est une droite). On constate qu'une demande au plus égale au taux de production de la cellule est servie instantanément, i.e. que la sortie est égale à l'entrée (courbe pleine). Si la demande est plus forte, on sert instantanément les K pièces en stock, et le service a ensuite lieu aux taux moyen de la cellule (courbe pointillée). La partie grisée représente la série de transfert (cf. VII, Figure VII.4).

1.5 Cas à p cellules

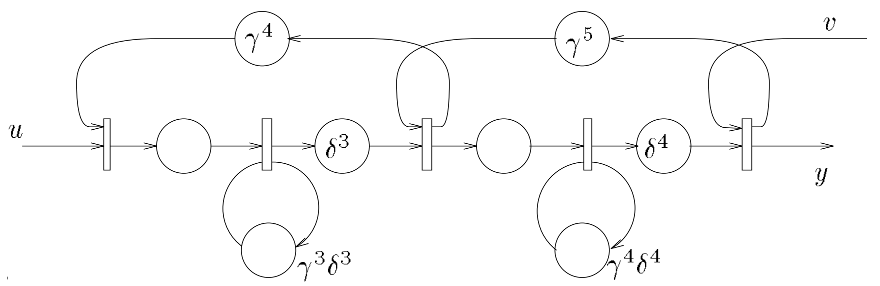
On considère maintenant une demande infinie $v = \varepsilon$. On a alors la relation fort simple:

$$y = \delta^{pt}(\gamma^{\min(K,n)}\delta^t)^* u \ .$$

Le retard δ^{pt} correspond au temps de traversée de la chaîne de production. Le terme $(\gamma^{\min(K,n)}\delta^t)^*$ est l'analogue discret du limitateur de débit au taux $\min(K,n)/t$ étudié au chapitre V.

2 Exemples

2.1 Un exemple de calcul de transfert



On a écrit une routine `makekanban` qui génère le triplet (A, B, C) relatif à la ligne de production donnée par la liste des $[K_i, t_i, n_i]$.

```
MAX> Cells_list:=[[4,3,3],[5,4,4]];
MAX> s:=makekanban(Cells_list): l2p(s);
```

$$[\begin{bmatrix} \varepsilon & \gamma^4 & \varepsilon \\ \delta^3(\gamma^3\delta^3)^* & \varepsilon & \gamma^5 \\ \varepsilon & \delta^4(\gamma^4\delta^4)^* & \varepsilon \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & e \end{bmatrix}]$$

```
MAX> h:=evald(s[3]&*star(s[1]) &*s[2]): l2p(h);
```

$$[\delta^7 \oplus \gamma^3\delta^{10} \oplus \gamma^4\delta^{11} \oplus \gamma^6\delta^{13}(\gamma\delta)^*, \quad e \oplus \gamma^5\delta^4 \oplus \gamma^9\delta^8 \oplus \gamma^{12}\delta^{10}\left(e \oplus \gamma\delta^2 \oplus \gamma^3\delta^3\right)\left(\gamma^4\delta^4\right)^*]$$

On a également programmé la récurrence du Théorème 1.3.1. La routine `kanban2bidiag` génère sous forme creuse la matrice bi-diagonale A et la routine `invertbidiag` calcule le couple $[\alpha_{p+1}, \beta_{p+1}]$.

```
MAX> m:=kanban2bidiag(Cells_list): l2p(m);
```

$$[[\gamma^4, \delta^3\left(\gamma^3\delta^3\right)^*], [\gamma^5, \delta^4\left(\gamma^4\delta^4\right)^*]]$$

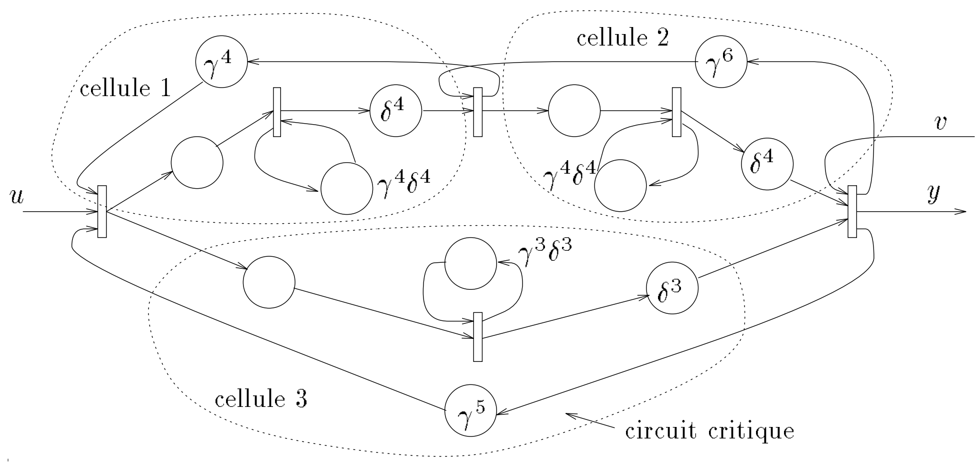
```
MAX> t:=invertbidiag(m): l2p(t);
```

$$[\delta^7 \oplus \gamma^3\delta^{10} \oplus \gamma^4\delta^{11} \oplus \gamma^6\delta^{13}(\gamma\delta)^*, \quad e \oplus \gamma^5\delta^4 \oplus \gamma^9\delta^8 \oplus \gamma^{12}\delta^{10}\left(e \oplus \gamma\delta^2 \oplus \gamma^3\delta^3\right)\left(\gamma^4\delta^4\right)^*]$$

qui coïncide avec le résultat précédent. On constate que la période du transfert liant u à la sortie est le pgcd des longueurs des circuits du graphe ("effet Frobenius"). Si la demande v est infinie, et pour une impulsion $u = e$, on aura donc un régime périodique ultime de 1 pièce produite par unité de temps.

2.2 Un exemple d'optimisation des kanbans

Afin de compliquer la situation, on a mis deux lignes de production kanban en parallèle. Le graphe d'événements ci-dessous représente ainsi un système démarrant deux tâches lorsque qu'une pièce rentre. On aura par exemple un tel système lorsque les pièces sont formées de deux parties complémentaires, et que chaque partie est traitée par une ligne de production distincte.



$$a = \begin{bmatrix} \varepsilon & \gamma^4 & \gamma^5 \\ \delta^4 (\gamma^4\delta^4)^* & \varepsilon & \gamma^6 \\ \delta^3 (\gamma^3\delta^3)^* & \delta^4 (\gamma^4\delta^4)^* & \varepsilon \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e \end{bmatrix}$$

$$c = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & e \end{bmatrix}$$

$$h = \begin{bmatrix} \delta^8 (e \oplus \gamma^4\delta^4) (\gamma^5\delta^8)^* & e \oplus \gamma^5\delta^8 (e \oplus \gamma^4\delta^4) (\gamma^5\delta^8)^* \end{bmatrix}$$

Avec 8 kanbans au lieu de 5 dans la cellule 3

$$a' = \begin{bmatrix} \varepsilon & \gamma^4 & \gamma^8 \\ \delta^4 (\gamma^4\delta^4)^* & \varepsilon & \gamma^6 \\ \delta^3 (\gamma^3\delta^3)^* & \delta^4 (\gamma^4\delta^4)^* & \varepsilon \end{bmatrix}$$

$$h' = \begin{bmatrix} \delta^8 (\gamma^4\delta^4)^* & e \oplus \gamma^6\delta^4 \oplus \gamma^8\delta^8 (\gamma^4\delta^4)^* \end{bmatrix}$$

Toutes les cellules deviennent saturées avec cette allocation de kanbans.

On peut retrouver ce résultat en introduisant des indéterminées $\gamma_i = \gamma^{K_i}$, où K_i dénote le nombre de kanbans dans la cellule i, et en optimisant les ressources. Soit
`MAX> a:=p2l(array( [[eps,g1,g3],[d^4,eps,g2],[d^3, d^4,eps]]),3);`

$$a = \begin{bmatrix} \varepsilon & \gamma_1 & \gamma_3 \\ \delta^4 & \varepsilon & \gamma_2 \\ \delta^3 & \delta^4 & \varepsilon \end{bmatrix}$$

`MAX> c:=enum(a,p2l(g^3*d^3+g^4*d^4))`
(on énumère les circuits modulo les circuits locaux).

$$c = \gamma^3\delta^3 \oplus \gamma^4\delta^4 \oplus \delta^4\gamma_1 \oplus \delta^4\gamma_2 \oplus \delta^8\gamma_3$$

`MAX> l:= p2const(c)`

$$l = \min(1, \frac{K_1}{4}, \frac{K_2}{4}, \frac{K_3}{8})$$

En retrouve bien la contrainte $K_3 \geq 8$ pour que le taux de production soit optimal ($l = 1$).

2.3 Annexe: les routines `kanban2bidiag` et `invertbidiag`

Nous donnons à titre d'exemple de programmes MAX les deux routines qui permettent de calculer le transfert d'une ligne de production d'après la récurrence du Théorème 1.3.1.

```
 #
# CALLING SEQUENCE:
#     kanban2bidiag(<list of cells>)
# SYNOPSIS
#  returns the bidiagonal matrix associated to the kanban line
#  described by the list of cells.
# PARAMETERS
# the list of cells has the following form:
# [CELL1,CELL2,...,CELLp]
# where CELLi=[number of kanbans in cell i,
#       processing time in cell i
#       number of machines in cell i]
# e.g. <list of cells>= [[3,2,2],[5,3,2]] describes two cells
# second cell with 5 kanbans, proc. time 3, 2 machines.
#
kanban2bidiag:=proc(C_LIST)
map(proc(u) [p2l(g^u[1]), p2l(d^u[2])&*star(p2l(g^u[3]*d^u[2]))] end,C_LIST)
end:
#
#
# CALLING SEQUENCE:
#     invertbidiag(<bidiagonal matrix>)
# SYNOPSIS
# Returns the two coeffs (n+1,1) and (n+1,n+1)
# of the star of the bidiagonal matrix
 #  (0,    a_1,   0,    ...    0)
 #  (b_1,   0,   a_2,   ...    0)
 #  (0,    b_2,   0,    ...    0)
 #  (0,     ...          0,   a_n)
 #  (0,     ...    0,   b_n,    0)
# given in sparse form u=[[a_1,b_1],...,[a_n,b_n]]
# u can be produced as the output of kanban2bidiag
#
invertbidiag:=proc(u)

local i,current_star,alpha,beta,n;
n:=nops(u);
alpha:=p2l(e);
beta:=u[1][1];
```

```
for i from 1 to n-1 do
   current_star:=star(u[i][2]&*beta);
   alpha:=current_star&*u[i][2]&*alpha;
   beta:=current_star&*u[i+1][1];
od;
current_star:=star(u[n][2]&*beta);
alpha:=current_star&*u[n][2] &*alpha;
[alpha,current_star];
end:
```

Appendice B

Questions algorithmiques

Introduction

Nous avons rassemblé dans cette annexe les problèmes algorithmiques liés à l'algèbre rationnelle des opérateurs γ et δ étudiés au Chapitre VII ainsi qu'à l'optimisation des ressources. Le trait commun est de travailler dans des dioïdes de polynômes et séries formelles quotientés. On montre sous des hypothèses assez générales l'existence d'un unique représentant minimal d'un polynôme, qui géométriquement s'obtient en supprimant les monômes dominés pour une relation d'ordre naturelle, dite de redondance. On donne ensuite les règles de calcul sur ces représentants. La seconde partie de cette annexe produit des formes canoniques pour les séries périodiques et les algorithmes de réduction pour les sommes, produit et autres opérations sur les séries périodiques. Nous concluons en indiquant comment les cyclicités des matrices peuvent être calculées à l'aide d'algorithmes classiques.

1 Calcul dans des dioïdes de polynômes quotientés

1.1 Représentant canonique d'un polynôme

On a eu au Chapitre VII à manipuler des polynômes de $\mathcal{M}_{\mathrm{ax}}^{\mathrm{in}}[\gamma,\delta]$, et plus généralement, des polynômes à n variables modulo certaines congruences (par exemple dans le chapitre sur l'optimisation des ressources). Il est pour cela utile d'avoir une forme canonique de ces objets (test d'égalité dans le dioïde quotient, etc). Dans le cas du dioïde $\mathcal{M}_{\mathrm{ax}}^{\mathrm{in}}[\gamma,\delta]$, on a pu prendre pour forme canonique d'un polynôme son représentant minimal, qui se déterminait aisément "géométriquement". Nous donnons trois autres exemples de dioïdes quotients pour lesquels on cherche des résultats analogues de représentant minimal.

1.1.1 Exemple (Congruence modulo p^*) Soit un polynôme $p\in\mathcal{M}_{\mathrm{ax}}^{\mathrm{in}}[\gamma,\delta]$, et

$$\varphi_p:\quad \varphi_p(s)=sp^*\ .$$

Soit $q\in\mathcal{M}_{\mathrm{ax}}^{\mathrm{in}}[[\gamma,\delta]]$. Existe-il un élément minimal dans la classe d'équivalence de q modulo φ_p.

1.1.2 Exemple (Dioïde $\mathcal{M}_{\mathrm{ax}}^{\mathrm{in}}[[\gamma_i,\delta]]$) Soient $p+2$ indéterminées δ, $\gamma_0,\dots,\gamma_p$. On introduit l'application:

$$\varphi:\ \mathbb{B}[[\gamma_i,\delta]]\to\mathbb{B}[[\gamma_i,\delta]],\quad s\mapsto(\bigotimes_i\gamma_i^*)(\delta^{-1})^*s$$

et l'on note $\mathcal{M}_{\mathrm{ax}}^{\mathrm{in}}[[\gamma_i,\delta]] = \mathbb{B}[[\gamma_i,\delta]]/\varphi$ (généralisation de $\mathcal{M}_{\mathrm{ax}}^{\mathrm{in}}[[\gamma,\delta]]$). Un polynôme $p \in \mathcal{M}_{\mathrm{ax}}^{\mathrm{in}}[\gamma_i,\delta]$ admet-il un représentant minimal?

1.1.3 Exemple (Congruence polyédrique modulo $\mathcal{C}_u$) Soient $u_1,\ldots,u_k$ des vecteurs de $\mathbb{R}^p$ et $\mathcal{C}$ le cône polyédrique

$$\mathcal{C}_u = \mathbb{R}^+ u_1 + \ldots + \mathbb{R}^+ u_k \enspace .$$

On considère le morphisme

$$\varphi:\ (\mathcal{P}(\mathbb{R}^p),\cup,+) \to (\mathcal{P}(\mathbb{R}^p)+\mathcal{C}_u,\cup,+),\ \ \varphi(s) = s+\mathcal{C}_u \enspace .$$

Une partie *finie* de $\mathbb{R}^p$ admet-elle un représentant minimal modulo la congruence associée à φ?

1.2 Un résultat général de représentant minimal

La notion suivante jouera pour nous un rôle important:

1.2.1 Définition (d-primalité) *L'élément a d'un dioïde complet $\mathcal{D}$ est dit*[1] d-premier *si pour toute famille $\{p_i\}_{i\in I}$ d'éléments de $\mathcal{D}$, on a:*

$$a \preceq \bigoplus_{i\in I} p_i \implies \exists i \in I,\ \ a \preceq p_i \enspace . \tag{1.2.a}$$

On notera $\mathsf{DP}\,\mathcal{D}$ l'ensemble des éléments d-premiers de $\mathcal{D}$.

1.2.2 Exemple Dans $\mathbb{B}[[\gamma,\delta]]$, les éléments d-premiers sont les monômes. Même résultat dans $\mathcal{M}_{\mathrm{ax}}^{\mathrm{in}}[[\gamma,\delta]]$. Dans $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}$, tous les éléments sauf $+\infty$ sont d-premiers. Dans $\overline{\mathbb{R}}_{\max}$, il n'y a pas d'élément d-premiers (car $x \preceq \sup\{t \mid t \prec x\}$ et x n'est majoré par aucun des $t \prec x$).

1.2.3 Remarque En Théorie des Treillis, cf. [43], on appelle *co-premiers* les éléments a vérifiant la propriété (1.2.a) avec des familles $\{p_i\}_{i\in I}$ *finies.* Si l'on qualifie de *compacts* les éléments a vérifiant $a \preceq \bigoplus_{i\in I} p_i \;\Rightarrow\; \exists J \subset I$ finie t.q. $a \preceq \bigoplus_{j\in J} p_j$, on constate que les éléments d-premiers sont exactement les co-premiers compacts. Le lecteur pourra vérifier que les résultats de représentation minimale qui suivent restent vrais si l'on ne suppose pas le dioïde $\mathcal{D}$ complet, à condition de ne considérer que des sommes finies.

Pour simplifier le discours, nous ferons l'hypothèse suivante:

1.2.4 Hypothèse *$\mathcal{D}$ est un dioïde complet et tout élément de $\mathcal{D}$ est somme (éventuellement infinie) de d-premiers.*

On a donc un morphisme continu et surjectif de demi-treillis:

$$\psi: \begin{cases} (\mathcal{P}(\mathsf{DP}\,\mathcal{D}),\cup) & \longrightarrow \quad (\mathcal{D},\oplus) \\ \quad S & \longmapsto \quad \bigoplus S = \bigoplus_{s\in S} s. \end{cases} \tag{1.2.b}$$

On a en particulier[2] $x = \bigoplus((\mathsf{DP}\,\mathcal{D}) \cap \downarrow(x))$.

[1] d comme dioïde

[2] On rappelle la notation $\downarrow(x) = \{u \mid u \preceq x\}$

1.2.5 Définition (Partie génératrice) *Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur $\mathcal{D}$. Soit S un ensemble de d-premiers. Nous dirons que S est une partie génératrice de x modulo $\mathcal{R}$ si $(\bigoplus S)\ \mathcal{R}\ x$.*

1.2.6 Exemple Soit E un module, $\mathcal{D} = (\mathcal{P}(E), \cup)$, et définissons la relation $\mathcal{R}$: $X\mathcal{R}Y$ ssi $\mathrm{vect}\langle X\rangle = \mathrm{vect}\langle Y\rangle$ Soit x une partie de E. Une partie $Y \subset E$ est une partie génératrice minimale de x modulo $\mathcal{R}$ ssi c'est une partie génératrice minimale (au sens usuel) du module engendré par x. On a coïncidence avec la notion classique.

On étudie l'existence éventuelle d'une partie génératrice minimale. On a tout d'abord:

1.2.7 Proposition *La somme des éléments d'une partie génératrice minimale de x est un représentant minimal de x (i.e. un élément minimal dans la classe d'équivalence de x modulo $\mathcal{R}$).*

Preuve si $y\mathcal{R}x$, avec $x = \bigoplus S$ (S minimal) et $y = \bigoplus T$, on a d'après 1.2.5 $T \supset S$ et par croissance de l'application ψ donnée en (1.2.b), $y \succeq x$. ∎

Nous exhibons une classe de congruences pour laquelle on a un résultat simple et effectif de représentant minimal.

1.2.8 Définition (Bonne congruence) *Nous dirons que $\mathcal{R}$ est une* bonne congruence *pour le demi-treillis complet $(\mathcal{D}, \oplus)$ s'il existe une application $\varphi : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ telle que $a\ \mathcal{R}\ b$ ssi $\varphi(a) = \varphi(b)$ et*

(i) *φ est croissante et continue (cf. 0,2.3.1).*

(ii) $\varphi \succeq \mathrm{Id}$,

(iii) $\varphi \circ \varphi = \varphi$,

(iv) *$\varphi(u) = \varphi(v)$ pour u et v d-premiers entraîne $u = v$.*

On en en particulier par (i),(ii) et (iii) que φ est une fermeture (cf. 0,5.1.11). Par (i), $\mathcal{R}_\varphi$ est compatible avec la structure de demi-treillis complet. On notera indifféremment le demi-treillis quotient $\mathcal{D}/\varphi$ ou $\mathcal{D}/\mathcal{R}_\varphi$. On a clairement l'isomorphisme

$$\mathcal{D}/\varphi \simeq \varphi(\mathcal{D}) \ . \tag{1.2.c}$$

Notons que la d-primalité est conservée par passage au quotient:

1.2.9 Lemme *Si x est un élément d-premier de $\mathcal{D}$, alors la classe d'équivalence de x est un d-premier dans le demi-treillis quotient de $\mathcal{D}$ par une bonne congruence.*

Preuve On n'utilise que (i),(ii) et (iii). Si $\overline{a} \preceq \bigoplus_i \overline{p_i}$ dans $\mathcal{D}/\varphi$, on a $\overline{a} \oplus \bigoplus_i \overline{p_i} = \bigoplus_i \overline{p_i}$, soit $\varphi(a \oplus \bigoplus_i p_i) = \varphi(\bigoplus_i p_i)$ d'où comme $\mathrm{Id} \preceq \varphi$ et par continuité de φ, $a \preceq \bigoplus_i \varphi(p_i)$. Par d-primalité de a, a est majoré par l'un de ces termes, disons $\varphi(p_k)$, d'où $\varphi(a) \preceq \varphi^2(p_k) = \varphi(p_k)$ d'où $\overline{a} \preceq \overline{p_k}$. ∎

1.2.10 Théorème (Partie génératrice minimale) *Tout élément a somme finie d'éléments d-premiers admet une unique partie génératrice minimale modulo une bonne congruence.*

Le lemme suivant et la notion de redondance associée sont la clé de 1.2.10.

1.2.11 Lemme *Si φ est une fermeture, alors*

$$u \preceq \varphi(v) \ \Leftrightarrow\ \varphi(u) \preceq \varphi(v) \ . \tag{1.2.d}$$

La relation $\leq_\varphi$ définie par $u \leq_\varphi v \ \Leftrightarrow\ u \preceq \varphi(v)$ est une relation de préordre sur l'ensemble des éléments d-premiers. En outre, sous l'hypothèse 1.2.8,(iv)*, c'est une relation d'ordre.*

Preuve du Lemme. Par 1.2.10,(i) φ est croissante, donc $u \preceq \varphi(v)$ entraîne $\varphi(u) \preceq \varphi^2(v) = \varphi(v)$ par 1.2.10,(iii)). Réciproquement, par 1.2.10,(ii)), $\varphi(u) \preceq \varphi(v)$ entraîne $u \preceq \varphi(u) \preceq \varphi(v)$, ce qui montre (1.2.d). Comme $u \leq_\varphi v \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(u) \preceq \varphi(v)$, il est clair que $\leq_\varphi$ est réflexive et transitive. L'antisymétrie résulte de 1.2.10,(iv). ∎

On a:

1.2.12 Propriétés (i) *Si φ est une fermeture, alors $u \preceq v \Rightarrow u \leq_\varphi v$.*

(ii) *Si φ vérifie 1.2.8,*(i), *alors u d-premier et $u \leq_\varphi \bigoplus_{i\in I} a_i$ entraîne $\exists j \in I$, $u \leq_\varphi a_j$.*

Preuve (i): résulte seulement de $\varphi \succeq \mathrm{Id}$.
(ii): on a $u \preceq \varphi(\bigoplus_i a_i)$ ssi $u \preceq \bigoplus_i \varphi(a_i)$ (car φ continu), ce qui est équivalent à $\exists j \in I$, $u \preceq \varphi(a_j)$ (par d-primalité de u). ∎

1.2.13 Définition (φ-redondance) *Soit $X = \{x_k\}$ un ensemble de d-premiers. On dira que x_i est φ-redondant dans X, ou plus simplement redondant, si $x_i \leq_\varphi \bigoplus_{k\neq i} x_k$.*

1.2.14 Lemme *Soit $\mathcal{R}$ une bonne congruence induite par φ, et X un ensemble de d-premiers. x_i est redondant dans X ssi on a un élément de X, x_j, distinct de x_i, tel que $x_i \leq_\varphi x_j$.*

Preuve Comme $x_j \preceq \bigoplus_{k\neq i} x_k$, la condition $x_i \leq_\varphi x_j$ entraîne via 1.2.12,(i) $x_i \leq_\varphi \bigoplus_{k\neq i} x_k$. Réciproquement, si $x_i \leq_\varphi \bigoplus_{k\neq i} x_k$, on a $j \neq i$ tel que $x_i \leq_\varphi x_j$ par 1.2.12,(ii). ∎

1.2.15 Lemme *Soit φ une fermeture. Une partie $X = \{x_i\}_{i\in I}$ génératrice de $x \in \mathcal{D}/\varphi$ est minimale ssi elle est sans éléments redondants.*

Preuve Si x_i est redondant, alors

$$\bigoplus_k x_k = \bigoplus_{k\neq i} x_k \oplus x_i \leq_\varphi \bigoplus_{k\neq i} x_k \tag{1.2.e}$$

L'autre inégalité étant triviale, on a que $X \setminus \{x_i\}$ est un représentant de X, et donc X n'est pas minimal. Réciproquement, si X n'est pas minimal, on a un représentant de la forme $X \setminus \{x_i\}$, d'où $\bigoplus_k x_k \leq_\varphi \bigoplus_{k\neq i} x_k$, et donc a fortiori $x_i \leq_\varphi \bigoplus_{k\neq i} x_k$. ∎

1.2.16 Proposition *Soit φ une fermeture, $X \subset \mathsf{DP}\,\mathcal{D}$. On ne change pas la classe d'équivalence de $\bigoplus X$ modulo $\mathcal{R}_\varphi$ en retirant de X un élément redondant.*

Preuve On l'a montré incidemment en prouvant l'égalité des membres extrêmes de (1.2.e). ∎

1.2.17 Lemme *Sous l'hypothèse 1.2.4, on a unicité de la partie génératrice minimale d'un élément x modulo une bonne congruence.*

Preuve Soient S et T deux représentants minimaux de a. On a $\bigoplus S \leq_\varphi \bigoplus T$, d'où par 1.2.12,(ii),

$$\forall s \in S,\ \ \exists t_s \in T,\ \ s \leq_\varphi t_s\ \ . \tag{1.2.f}$$

Semblablement

$$\forall t \in T,\ \ \exists s_t \in S,\ \ t \leq_\varphi s_t\ \ . \tag{1.2.g}$$

On a alors $s \leq_\varphi t_s \leq_\varphi s_{t_s}$, et comme s ne peut être redondant, $s = s_{t_s}$, d'où $s = t_s$. Ainsi $S \subset T$, et par symétrie, $S = T$. ■

Preuve du Théorème 1.2.10. 1/ Existence. Il résulte de 1.2.16 et de 1.2.15 qu'en retirant successivement de X les éléments redondants, on aboutit à un représentant minimal. L'unicité résulte de 1.2.17 . ■

1.2.18 Définition *Soit $x \in \mathcal{D}/\varphi$ somme finie de d-premiers, de partie génératrice minimale $X = \{x_1, \ldots, x_p\}$. On appellera* forme *canonique de x l'écriture suivante:*

$$x = \bigoplus_{i=1}^{p} x_i \ .$$

1.2.19 Remarque Si φ ne vérifie pas la condition d'injectivité sur les d-premiers (iv), on a toujours l'existence (mais non l'unicité) d'un représentant minimal de a. Deux représentants minimaux S et S' sont alors égaux modulo φ (i.e. les ensembles $\{\varphi(s) \mid s \in S\}$ et $\{\varphi(s') \mid s' \in S'\}$ coïncident.

1.2.20 Remarque La partie "existence" de la preuve ci-dessus ne requiert que le fait que φ soit une fermeture. Soit par exemple dans $(\mathcal{P}(\mathbb{R}^2), \cup)$ $\varphi(X) = \mathrm{conv}(X)$ (enveloppe convexe). Les d-premiers sont les singletons. conv est clairement une fermeture, mais on n'a pas $\mathrm{conv}(A \cup B) = \mathrm{conv}(A) \cup \mathrm{conv}(B)$, ce qui contredit (i). On retrouve de la sorte l'existence d'un ensemble minimal de points ayant même enveloppe convexe que la partie finie X. Cependant, l'argument d'unicité ci-dessus n'est pas valide: il faudra par exemple plus finement caractériser le représentant minimal comme ensemble des point extrémaux. De même, soit E un module. Dans $\mathcal{P}(E)$, les d-premiers sont les singletons, et en prenant $\varphi(X) = \mathrm{vect}\langle X \rangle$, l'argument redonne l'existence d'une famille génératrice minimale d'un sous-module de type fini (l'unicité étant ici notoirement fausse).

1.2.21 Remarque On donnera en §1.3 une généralisation partielle du Théorème 1.2.10 aux sommes infinies.

La preuve de 1.2.10 se traduit par l'algorithme suivant:

1.2.22 Algorithme (Réduction sous forme minimale) *On part d'une partie génératrice de a, $S = \{S_1, \ldots, S_n\}$.*

Soit S_i le d-premier terme non encore examiné de S
    si S_i est redondant dans S, alors
        supprimer S_i de S
    sinon
        S_i a été examiné et l'on recommence une itération.

A l'issue, S est la partie génératrice minimale de a.

Dans tous les cas, l'algorithme effectue n itérations. Dans chaque itération, on compare l'élément S_ià tous les autres éléments de S, soit au plus $n-1$ comparaisons par itération. En tout, l'algorithme requiert $n \times (n-1)$ comparaisons. Un exemple d'application de cet algorithme est donné ci-dessous en 1.2.24.

1.2.23 Application au dioïde $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\gamma,\delta]]$ Soit dans $\mathbb{B}[[\gamma,\delta]]$

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{B}[[\gamma,\delta]] & \longrightarrow & \mathbb{B}[[\gamma,\delta]] \\ a & \longmapsto & a\gamma^*(\delta^{-1})^* . \end{cases} \tag{1.2.h}$$

On a $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\gamma,\delta]] = \mathbb{B}[[\gamma,\delta]]/\varphi$. Comme $\gamma^*(\delta^{-1})^* \succeq e$ et $(\gamma^*(\delta^{-1})^*)^2 = \gamma^*(\delta^{-1})^*$, φ est une fermeture. En outre, on a

$$\varphi(\gamma^n\delta^t) = \bigoplus_{\tau,\nu\geq 0} \gamma^{n-\nu}\delta^{t+\tau}, \tag{1.2.i}$$

et donc (n,t) est égal à la borne sup (dans $(\mathbb{Z},\geq)\times(\mathbb{Z},\leq)$) du support de $\varphi(\gamma^n\delta^t)$, ce qui montre que la restriction de φ aux monômes (i.e. aux éléments d-premiers) est injective. On a par 1.2.10 l'existence d'un représentant minimal pour tous les polynômes de $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\gamma,\delta]]$.

Il résulte immédiatement de (1.2.i) que dans $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[\gamma,\delta]$, la relation $\leq_\varphi$ s'obtient de la sorte:

$$\gamma^n\delta^t \leq_\varphi \gamma^{n'}\delta^{t'} \Leftrightarrow n \geq n' \text{ et} t \leq t' \ . \tag{1.2.j}$$

Plus généralement, il suffira pour chacun des dioïdes quotients considérés en 1.1.1,1.1.2,1.1.3 de produire un test pour $u\leq_\varphi v$, u et v étant des d-premiers, pour appliquer l'algorithme de réduction ci-dessus, ce que nous ferons le moment venu.

1.2.24 Exemple Soit à déterminer dans $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\gamma,\delta]]$ le représentant minimal de $p = e \oplus \gamma^3\delta^3 \oplus \gamma^4 \oplus \gamma^2\delta^3$. Comme e est de plus petite valuation, en appliquant le Lemme 1.2.j, on voit qu'on ne peut avoir $e\leq_\varphi\gamma^3\delta^3\oplus\gamma^4\oplus\gamma^2\delta^3$ donc e est non redondant. On constate ensuite que $\gamma^3\delta^3 = \gamma\gamma^2\delta^3 \leq_\varphi \gamma^2\delta^3$, donc on élimine ce monôme, et parmi $e, \gamma^4, \gamma^2\delta^3$ qui restent, on constate encore que $\gamma^4\leq_\varphi e$, soit le nouvel ensemble formé de e et $\gamma^2\delta^3$ qui s'avère minimal, car $\gamma^2\delta^3 \not\leq_\varphi e$.

1.3 Représentant minimal des séries formelles dans $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\gamma,\delta]]$

Nous montrons dans quelle mesure le Théorème 1.2.10 de représentation minimale des polynômes s'étend aux séries formelles.

1.3.1 Théorème *Soit $s \in \mathbb{B}[[\gamma,\delta]]$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes:*

(i) *s admet une partie génératrice minimale modulo $\mathcal{R}_\varphi$ (cf. 1.2.5)*

(ii) $\forall n,t\in\mathbb{Z}$, $\mathsf{dat}\, s(n) < +\infty$, $\quad \mathsf{compt}\, s(t) > -\infty$ *(cf.2.2.7).*

Preuve de 1.3.1 Via 1.2.17, on a l'unicité de la partie génératrice minimale, si elle existe.

(ii)$\Rightarrow$ (i). Soit $X = \{x_i \mid \ i \in I\}$ une partie génératrice de s. A tout x_i, on associe une suite $\{u_k^i\}_{k\geq 1}$ définie comme suit. On pose $u_1^i = x_i$. Si x_i n'est pas redondant, alors on pose $u_k^i = x_i$ pour tout $k\geq 2$. Supposons x_i redondant. On a alors un $x'\in X$ avec $x'\neq x$ tel que $u_1^i \preceq \varphi(x')$, i.e $u_1^i = \gamma^{n_1}\delta^{-t_1}x'$ pour un certain $(n_1,t_1)\in\mathbb{N}\setminus\{(0,0)\}$. On pose alors $u_2^i = x'$. Si u_2^i n'est pas redondant, on pose $u_k^i = u_2^i$ pour $k\geq 3$, sinon on choisit de même $u_3^i \in X$ tel que $u_2^i = \gamma^{n_2}\delta^{-t_2}u_3^i$ avec $(n_2,t_2)\in\mathbb{N}\setminus\{(0,0)\}$, et ainsi de suite.
1/ chaque suite $\{u_k^i\}_k$ est constante à partir d'un certain rang. En effet, on peut écrire $u_k^i = x_i\gamma^{-\nu_k}\delta^{\tau_k}$ avec $\nu_k = n_1 + \ldots + n_{k-1}$ et $\tau_k = t_1 + \ldots + t_{k-1}$, ces deux suites étant croissantes. Si la suite $\{u_k^i\}_k$ a un nombre infini de valeurs, l'une au moins des suites ν_k et τ_k tend vers l'infini, par exemple τ_k. Soit $x_i = \gamma^u\delta^v$. On a alors par 2.2.7 $\mathsf{dat}\, x(u) \geq v + \tau_k$, d'où $\mathsf{dat}\, x(u) = +\infty$ ce qui

contredit la première condition de (ii). De manière analogue, si ν_k tend vers l'infini, on contredit la condition relative à $\mathsf{compt}\, s$.
2/ On pose $u^i_\infty = \lim_{k\to\infty} u^i_k$, qui existe trivialement d'après 1/, et l'on définit $U = \{u^i_\infty \mid i \in I\}$.
3/ Comme $U \subset X$, on a $\varphi(\bigoplus U) \preceq \varphi(\bigoplus X)$.
4/ Par construction, U est sans monômes redondants, donc minimal.
5/ Pour chaque i, la suite $\{\varphi(u^i_k)\}_k$ est croissante. Cela résulte clairement de la croissance des suites ν_k et τ_k et de la caractérisation de φ donnée en (1.2.i).
6/ Soit un monôme $m \preceq \varphi(\bigoplus X)$. On a $m \preceq \varphi(x_i)$ pour un certain x_i, et donc par 5/ $m \preceq \varphi(u^i_\infty) \preceq \varphi(\bigoplus U)$. En sommant sur tous les m vérifiant $m \preceq \varphi(\bigoplus X)$, on obtient $\varphi(\bigoplus X) \preceq \varphi(\bigoplus U)$.

Par 3/ et 6/, U est un représentant de s, par 4/, il est minimal.

(i)⇒ (ii). Supposons par exemple $\mathsf{dat}\, s(n) = +\infty$. Soit $X = \{\gamma^{n_i}\delta^{t_i} \mid i \in I\}$ un représentant de s. On a d'après 2.2.7:

$$\forall t \geq 0,\ \ \exists i \in I,\ \ n_i \leq n \ \text{ et } \ t_i \geq t \tag{1.3.a}$$

On a donc i_0 tel que $t_{i_0} \geq 0, n_{i_0} \leq n$, et de même i_1 tel que $t_{i_1} > t_{i_0}, t_{i_1} \leq n$. Supposons X minimal. On ne peut avoir $n_{i_1} \leq n_{i_0}$ (sinon $\gamma^{n_{i_0}}\delta^{t_{i_0}}$ serait redondant). On a donc $n_1 > n_0$. De même, on a i_2 tel que $t_{i_2} > t_{i_1}, n_{i_2} \leq n$, et $n_{i_2} > n_{i_1}$. On trouve de la sorte une suite infinie d'entiers strictement croissante $n_{i_0} < n_{i_1} < \ldots$ et majorée par n: absurde. Preuve analogue si $\mathsf{compt}\, s(t) = -\infty$. ∎

1.3.2 Remarque On peut généraliser le Théorème 1.3.1. Soit $\mathcal{D}$ un dioïde complet tel que tout élément est somme de d-premiers. Soit a un d-premier inversible, $\varphi_a(x) = a^* x$. Soit $x = \bigoplus_{i\in I} x_i$ somme de d-premiers. On a la proposition suivante: (P) Si pour tout i, l'ensemble $\{a^{-n}x_i\} \cap \downarrow(x)$ est fini, alors x admet un représentant minimal. La propriété (P) s'obtient en adaptant la preuve de (ii)⇒ (i) ci dessus. Réciproquement, on obtient la propriété (ii)⇒ (i) du Théorème 1.3.1 à partir de (P) en remarquant que $\mathbb{B}[[\gamma,\delta]]/\varphi_{\gamma\oplus\delta^{-1}} \simeq (\mathbb{B}[[\gamma,\delta]]/\varphi_\gamma)/\varphi_{\delta^{-1}}$, et en appliquant la proposition (P) successivement à $a = \gamma$ et $a = \delta^{-1}$.

1.3.3 Remarque Voir aussi [3] pour une autre preuve de 1.3.1. Soit Y un représentant de s, et $y = \bigoplus Y$. On montre sous des conditions équivalentes que le représentant minimal X de s satisfait

$$\bigoplus X = y \boxminus (\gamma \oplus \delta^{-1})^+ y \ .$$

1.3.4 Exemple Soit:

$$s = (\gamma^2\delta^3)^* = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} \gamma^{2i}\delta^{3i} \ . \tag{1.3.b}$$

Via 1.2.j, on a que $\gamma^{2i}\delta^{3i} \preceq_\varphi \gamma^{2j}\delta^{3j}$ entraîne $2i \geq 2j$ et $3i \leq 3j$, i.e. $i = j$. Ainsi, la somme à droite de (1.3.b) ne contient pas de monômes redondants. C'est donc l'écriture minimale de s.

1.3.5 Contre exemple La série causale $s = \delta^*$ vérifie $\mathsf{dat}\, s(0) = +\infty$. Elle n'admet pas de représentant minimal (toute série de la forme $s_N = \delta^N(\delta)^* \in \mathbb{B}[[\gamma,\delta]]$ est un représentant de s, mais la borne-inf de la famille $\{s_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ est ε). De même, $(\gamma^{-1})^*$ n'admet pas de représentant minimal.

1.4 Somme modulo une bonne congruence

On considère un demi-treillis $\mathcal{D}$ quotienté par une bonne congruence (cf. 1.2.8).

1.4.1 Algorithme (Forme canonique de la somme) *On part de deux parties génératrices minimales de a et b, respectivement $A = \{a_1, \dots, a_k\}$ et $B = \{b_1, \dots, b_p\}$. La partie génératrice minimale de $a \oplus b$ est donné par l'algorithme suivant:*

prendre le d-premier terme non encore examiné de B, soit b_i :
si $b_i \preceq_\varphi a$, supprimer b_i de B
sinon
éliminer les éléments de A dominés par b_i,
b_i a été examiné, et recommencer une itération.

A l'issue, $A \cup B$ est la famille génératrice minimale de la somme.

Chaque itération de l'algorithme requiert au plus $\mathsf{compl}(a)$ comparaisons, soit dans le pire des cas $\mathsf{compl}(b) \times \mathsf{compl}(a)$ comparaisons.

1.4.2 Exemple Soient dans $\mathcal{M}_{\mathrm{ax}}^{\mathrm{in}}[\gamma, \delta]$

$$a = \gamma\delta \oplus \gamma^5\delta^4 \oplus \gamma^6\delta^5 \oplus \gamma^8\delta^8, \quad b = \gamma^2\delta^3 \oplus \gamma^5\delta^6 \oplus \gamma^9\delta^7 \ .$$

$$A = \{\gamma\delta, \gamma^5\delta^4, \gamma^6\delta^5, \gamma^8\delta^8\}, \quad B = \{\gamma^2\delta^3, \gamma^5\delta^6, \gamma^9\delta^7\} \ .$$

Pas 1: On a $B_1 = \gamma^2\delta^3 \not\preceq_\varphi a$ (il suffit de vérifier $B_1 \not\preceq_\varphi A_1 = \gamma\delta$ en raison du lemme 1.2.j). En outre B_1 ne domine aucun terme de A.
Pas 2: de même, en comparant B_2 à A_1 et A_2 seulement, on constate $B_2 \not\preceq_\varphi a$. Par contre, $A_2 = \gamma^5\delta^4 \preceq_\varphi \gamma^5\delta^6 = B_2$ et $A_3 = \gamma^6\delta^5 \preceq_\varphi B_2$. On remplace donc A par

$$A' = \{\gamma\delta, \gamma^8\delta^8\} \ .$$

Pas 3: B_3 est dominé par $A'_2 = \gamma^8\delta^8$. On remplace donc B par

$$B' = \{\gamma^2\delta^3, \gamma^5\delta^6\} \ .$$

Le représentant minimal de $a \oplus b$ est donné par $A' \cup B'$, i.e.

$$a \oplus b = \gamma\delta \oplus \gamma^2\delta^3 \oplus \gamma^5\delta^6 \oplus \gamma^8\delta^8 \ .$$

Cela se vérifie sur le dessin de la Figure B.1. On a représenté a par l'ensemble des disques noirs, b par l'ensemble des carrés noirs. Le représentant minimal de $a \oplus b$ est donné par l'ensemble des coins "en haut à gauche" de l'union de ces deux ensembles.

1.5 Dioïde quotienté par une bonne congruence

Soit $\mathcal{D}$ un dioïde, $\varphi : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$, induisant une bonne congruence pour la structure de demi-treillis sous-jacent, et vérifiant en outre:

1.5.1 Hypothèse $\forall (a, x) \in \mathcal{D}^2, \quad \varphi(ax) = a\varphi(x).$

Il résulte de 1.5.1 que $\mathcal{R}_\varphi$ et des conditions 1.2.8 que $\mathcal{R}_\varphi$ est compatible avec la structure de dioïde de $\mathcal{D}$.

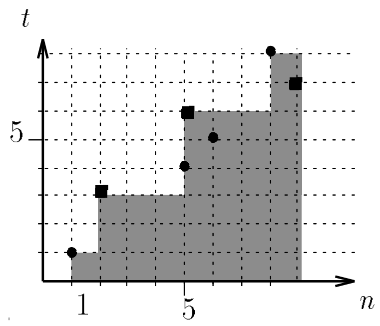


Figure B.1: Somme de $a = \gamma\delta \oplus \gamma^5\delta^4 \oplus \gamma^6\delta^5 \oplus \gamma^8\delta^8$ et $b = \gamma^2\delta^3 \oplus \gamma^5\delta^6 \oplus \gamma^9\delta^7$

1.5.2 Lemme *Soit φ une bonne congruence vérifiant 1.5.1. Soit a un d-premier inversible et un élément $b \in \mathcal{D}/\varphi$ s'écrivant sous forme canonique $b_1 \oplus \ldots \oplus b_n$. On a alors la forme canonique $ab = ab_1 \oplus \ldots \oplus ab_n$.*

Preuve Les propositions suivantes sont équivalentes:

$$\begin{array}{cl} ab_i \ \text{ redondant} & \\ ab_i \preceq \varphi(\bigoplus_{j\neq i} ab_j) & \\ b_i \preceq a^{-1}\varphi(\bigoplus_{j\neq i} ab_j) & \\ b_i \preceq \varphi(\bigoplus_{j\neq i} b_j) & \qquad (\text{via } 1.5.1) \\ b_i \ \text{ redondant} & \end{array}$$

d'où la conclusion. ■

1.5.3 Algorithme (Forme canonique du produit) *Soient a et b écrits sous forme minimale $a = \bigoplus_{i=1}^k a_i$ et $b = \bigoplus_j b_j$. Sous l'hypothèse (1.5.1), on obtient la forme canonique de ab en sommant les $a_i b$ à l'aide de l'algorithme 1.4.1.*

1.5.4 Exemple Soient les deux polynômes dans $\mathcal{M}_{\mathrm{ax}}^{\mathrm{in}}[\gamma, \delta]$

$$a = \gamma^0\delta^0 \oplus \gamma^2\delta^2, \quad b := \gamma\delta \oplus \gamma^2\delta^3 \ .$$

On a $ab = a_1 b \oplus a_2 b = (\gamma\delta \oplus \gamma^2\delta^3) \oplus (\gamma^2\delta^2 \oplus \gamma^4\delta^5) = \gamma\delta \oplus \gamma^2\delta^3 \oplus \gamma^4\delta^5$. On a représenté sur la Figure B.2 les polynômes a (disques noirs) et b (carrés noirs). On obtient graphiquement ab en prenant les coins "en haut à gauche" de la somme vectorielle des parties associées à a et à b (points cerclés).

Nous étudions maintenant le calcul des lois $\wedge$, $\boxminus$ et $\backslash$.

1.5.5 Lemme *Soit $\mathcal{D}$ un demi-treillis complet, et φ une bonne congruence. $\mathcal{D}/\varphi$ est un demi-treillis complet, où la borne inf est donnée par:*

$$\bigwedge_i \overline{a_i} = \overline{\bigwedge_i \varphi(a_i)} \ . \tag{1.5.a}$$

En outre, si les bornes inf distribuent par rapport à la somme dans $\mathcal{D}$ (cf. 0,5.2.2), alors de même dans $\mathcal{D}/\varphi$.

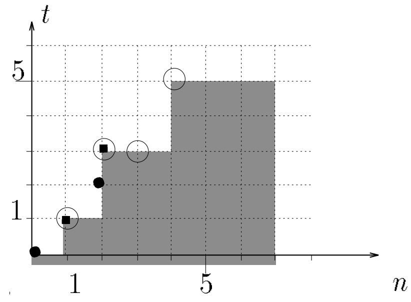


Figure B.2: Produit $(\gamma^0\delta^0 \oplus \gamma^2\delta^2)(\gamma\delta \oplus \gamma^2\delta^3)$

Preuve On commence par noter que $\varphi(\varphi(a) \wedge \varphi(b)) = \varphi(a) \wedge \varphi(b)$, et plus généralement que

$$\varphi(\bigwedge_{i\in I} \varphi(a_i)) = \bigwedge_{i\in I} \varphi(a_i) \quad . \tag{1.5.b}$$

Soient en effet α le membre de gauche de (1.5.b) et β le membre de droite. Comme $\varphi \succeq \mathrm{Id}$, $\alpha \succeq \beta$. Comme pour tout $j \in I$, on a $\varphi(\bigwedge_i \varphi(a_i)) \preceq \varphi^2(a_j) = \varphi(a_j)$, on a $\alpha \preceq \bigwedge_{j\in I} \varphi(a_j) = \beta$, d'où l'égalité (1.5.b).

D'autre part, les assertions suivantes sont équivalentes

$$\begin{array}{cl}
\forall i \in I,\ \ \overline{x} \preceq \overline{a_i} & \\
\forall i \in I,\ \ \varphi(x) \preceq \varphi(a_i) & \\
\varphi(x) \preceq \bigwedge_{i\in I} \varphi(a_i) & \\
\varphi(x) \preceq \varphi(\bigwedge_{i\in I} \varphi(a_i)) & \text{(par (1.5.b))} \\
\overline{x} \preceq \overline{\varphi(\bigwedge_{i\in I} \varphi(a_i))} & .
\end{array}$$

On a prouvé (1.5.a). Supposons la distributivité de la borne inf. Les propositions suivantes sont équivalentes

$$\begin{array}{rl}
(D):\quad \overline{b} \oplus \bigwedge_i \overline{a_i} = \overline{b \oplus \bigwedge_i a_i} & \\
\overline{b \oplus \bigwedge_i \varphi(a_i)} = \overline{b \oplus \bigwedge_i a_i} & \text{(par (1.5.a))} \\
\overline{b \oplus \bigwedge_i \varphi(a_i)} = \overline{\bigwedge_i (b \oplus a_i)} & (\mathcal{D} \text{ distributif}) \\
\varphi(b \oplus \bigwedge_i \varphi(a_i)) = \varphi(\bigwedge_i \varphi(b \oplus a_i)) & \text{(par (1.5.a))} \\
\varphi(b) \oplus \bigwedge_i \varphi(a_i) = \bigwedge_i (\varphi(b) \oplus \varphi(a_i)) & \text{(par (1.5.b), compte tenu de } \varphi^2 = \varphi)
\end{array}$$

La dernière proposition étant vraie par distributivité de $\mathcal{D}$, la propriété (D), i.e. la distributivité de la borne inf par rapport à la somme dans $\mathcal{D}/\varphi$, est établie. ∎

Nous nous cantonnerons dans la suite à $\mathcal{M}_{\mathrm{ax}}^{\mathrm{in}}[\gamma,\delta]$ pour la simplicité de l'exposé.

1.5.6 Algorithme (Inf de polynômes dans $\mathcal{M}_{\mathrm{ax}}^{\mathrm{in}}[\gamma,\delta]$) *On a* (i)*:*

$$\gamma^n\delta^t \wedge \gamma^{n'}\delta^{t'} = \gamma^{\max(n,n')}\delta^{\min(t,t')} \quad .$$

Pour des polynômes généraux, (ii)*:*

$$(\bigoplus_i \gamma^{n_i}\delta^{t_i}) \wedge (\bigoplus_j \gamma^{n_j}\delta^{t_j}) = \bigoplus_{ij} (\gamma^{n_i}\delta^{t_i} \wedge \gamma^{n'_j}\delta^{t'_j}) \quad .$$

Preuve On a en passant au support $\mathrm{supp}(\varphi(\gamma^n\delta^t)\wedge\varphi(\gamma^{n'}\delta^{t'})) = \mathrm{supp}(\varphi(\gamma^n\delta^t))\cap\mathrm{supp}(\varphi(\gamma^{n'}\delta^{t'})) = \{(\nu,\tau) \mid \nu \geq n,\ \tau \leq t\} \cap \{(\nu,\tau) \mid \nu \geq n',\ \tau \leq t\} = \{(\nu,\tau) \mid \nu \geq \max(n,n'),\ \tau \leq \min(t,t')\}$ d'où $\varphi(\gamma^n\delta^t)\wedge\varphi(\gamma^{n'}\delta^{t'}) = \varphi(\gamma^{\max(n,n')}\delta^{\min(t,t')})$. Le point (i) résulte ainsi de 1.5.5. Le point (ii) résulte du fait que $\mathbb{B}[[\gamma,\delta]]$, donc par 1.5.5, $\mathcal{M}_{\mathrm{ax}}^{\mathrm{in}}[[\gamma,\delta]]$, est distributif. ∎

1.5.7 Exemple On a $(e\oplus\gamma^{10}\delta^{10})\wedge(\delta\oplus\gamma^{11}\delta^{12}) = (e\wedge\delta)\oplus(\gamma^{10}\delta^{10}\wedge\delta)\oplus(e\wedge\gamma^{11}\delta^{12})\oplus(\gamma^{10}\delta^{10}\wedge\gamma^{11}\delta^{12}) = e\oplus\gamma^{10}\delta\oplus\gamma^{1}1\oplus\gamma^{11}\delta^{10} = e\oplus\gamma^{10}\delta\oplus\gamma^{11}\delta^{10}$.

Si la borne inf de $\mathcal{D}$ distribue par rapport à la somme, il résulte de la Proposition 0,5.2.3, et du Lemme 1.5.5 ci-dessus que l'opération différence résiduée $\boxminus$ dans $\mathcal{D}/\varphi$ est bien définie.

1.5.8 Proposition *Soient $a = \bigoplus_i a_i \in \mathcal{D}/\varphi$ une somme de d-premiers et $b \in \mathcal{D}/\varphi$. On a*

$$a \boxminus b = \bigoplus_{a_i \not\preceq b} a_i \ . \tag{1.5.c}$$

En outre, si l'écriture $a = \bigoplus_i a_i$ est minimale, alors l'écriture (1.5.c) de $a\boxminus b$ l'est aussi.

Preuve On a en effet $a \preceq b\oplus x$ ssi pour tout $i \in I$, $a_i \preceq b$ ou $a_i \preceq x$. La caractérisation (1.5.c) en résulte. D'autre part, il est clair qu'en retirant des termes à une somme non redondante, celle ci reste non redondante, donc minimale (cf. 1.2.15). ∎

1.5.9 Exemple Soit $a = \gamma\delta\oplus\gamma^5\delta^7\oplus\gamma^{10}\delta^{10}$, $b = \delta\oplus\gamma^9\delta^{11}$. a_1 est dominé par δ, a_3 par $\gamma^9\delta^{11}$, d'oú par application de 1.5.8, $a\boxminus b = \gamma^5\delta^7$.

Nous concluons par une formule donnant le quotient résidué dans le seul dioïde $\mathcal{M}_{\mathrm{ax}}^{\mathrm{in}}[[\gamma,\delta]]$.

1.5.10 Algorithme (Quotient résidué dans $\mathcal{M}_{\mathrm{ax}}^{\mathrm{in}}[\gamma,\delta]$) *Soient $a = \bigoplus_i a_i$ et $b = \bigoplus_j b_j$ deux sommes finies de monômes. On obtient a/b en réduisant*

$$a/b = \bigwedge_j \bigoplus_i a_i b_j^{-1} \ .$$

Preuve Résulte immédiatement des propriétés 0,5.3.3,(x) et (iii). ∎

1.5.11 Exemple On a par application de 1.5.10 et de 1.5.6,(i):

$$e/(\gamma^2\delta^3\oplus\gamma^4\delta^5\oplus\gamma^8\delta^9) = \gamma^{-2}\delta^{-3}\wedge\gamma^{-4}\delta^{-5}\wedge\gamma^{-8}\delta^{-9} = \gamma^{-2}\delta^{-9} \ .$$

Plus généralement, soit $P = \bigoplus_i \gamma^{n_i}\delta^{t_i}$ un polynôme. On a $e/P = M^{-1}$ ou $M = \gamma^{\min(n_i)}\delta^{\max(t_i)}$ est le plus petit monôme majorant P.

1.6 Quelques raffinements dans $\mathcal{M}_{\mathrm{ax}}^{\mathrm{in}}[\gamma,\delta]$

On utilise le fait qu'un polynôme se représente comme une liste de monômes totalement ordonnée par le degré (cf. VII,2.3.3). Soit:

$$a = \gamma^{n_1}\delta^{t_1}\oplus\ldots\oplus\gamma^{n_k}\delta^{t_k}$$

une somme de monôme non nécessairement minimale. Après un tri éventuel, et en réduisant les monômes de même n (compte tenu de $\gamma^n\delta^t\oplus\gamma^{n'}\delta^t = \gamma^{\min(n,n')}\delta^t$), on peut supposer $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$.

1.6.1 Algorithme (mise sous forme minimale de a) *Commencer avec $i = 2$. Si $t_i \leq t_{i-1}$ éliminer le i-ième monôme, sinon passer au i suivant.*

Cet algorithme considère une unique fois chaque monôme, soit k itérations, et une complexité négligeable devant celle du tri initial. La complexité de la mise sous forme minimale est donc celle d'un tri, i.e. $O(k \log k)$.

Soient maintenant les deux écritures minimales

$$a = \gamma^{n_1}\delta^{t_1} \oplus \ldots \oplus \gamma^{n_r}\delta^{t_r} \quad \text{et} \quad a' = \gamma^{n'_1}\delta^{t'_1} \oplus \ldots \oplus \gamma^{n'_l}\delta^{t'_l} \ .$$

La remarque suivante résulte immédiatement de (1.2.j).

1.6.2 Lemme *Supposons*

$$n_k \leq n'_i < n_{k+1} \ .$$

De deux choses l'une: soit $t_k \geq t'_i$ auquel cas $\gamma^{n'_i}\delta^{t'_i}$ est redondant dans $a \oplus b$, soit $\gamma^{n'_i}\delta^{t'_i}$ est un point extrémal de $a \oplus b$ et les monômes de a éventuellement dominés par $\gamma^{n'_i}\delta^{t'_i}$ ont des indices $k' \geq k$.

On a alors l'algorithme suivant, plus fin que 1.5.3.

1.6.3 Algorithme (Somme dans $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[\gamma,\delta]$) *1/ Considérer le i-ème monôme de b, à partir de $i = 1$. Trouver k tel que $n_k \leq n'_i < n_k + 1$. Si $\gamma^{n_i}\delta^{t_i}$ est dominé par $\gamma^{n_k}\delta^{t_k}$, aller en 2/, sinon, éliminer les monômes $\gamma^{n_l}\delta^{t_l}$ dominés par $\gamma^{n'_i}\delta^{t'_i}$ (pour $l \geq k$), rajouter $\gamma^{n'_i}\delta^{t'_i}$ à a, et 2/ passer au i suivant en recommençant la recherche de k seulement à partir de la valeur du denier l éliminé, ou à défaut, de la dernière valeur de k.*

1.6.4 Exemple On reprend l'exemple 1.4.2.

$$a = \gamma\delta \oplus \gamma^5\delta^4 \oplus \gamma^6\delta^5 \oplus \gamma^8\delta^8, \quad b = \gamma^2\delta^3 \oplus \gamma^5\delta^6 \oplus \gamma^9\delta^7 \ .$$

pas 1: $k = 1$, $b_1 = \gamma^2\delta^3$ n'est pas dominé par le d-premier monôme de a, donc il n'est pas dominé par a. $a_2 = \gamma^5\delta^4$ n'est pas dominé par b_1, a fortiori, les monômes suivants ne sont pas dominés par b_1. On insère donc b_1, i.e. on remplace a par

$$a' = \gamma\delta \oplus \gamma^2\delta^3 \oplus \gamma^5\delta^4 \oplus \gamma^6\delta^5 \oplus \gamma^8\delta^8 \ .$$

pas 2 Pour b_2, on a $k = 3$ (position dans a'). On constate que $a'_3 = \gamma^5\delta^4$ ainsi que $a'_4 = \gamma^6\delta^5$ est dominé par $b_2 = \gamma^5\delta^6$. Le monôme suivant a'_5 n'est pas dominé. On supprime donc a'_3, a'_4 seulement et l'on insère b_2, soit

$$a'' = \gamma\delta \oplus \gamma^2\delta^3 \oplus \gamma^5\delta^6 \oplus \gamma^8\delta^8 \ .$$

pas 3 Pour b_3, on a $k = 4$. On constate que b_3 est dominé par $\gamma^8\delta^8$, on élimine b_3. Finalement

$$a \oplus b = a'' = \gamma\delta \oplus \gamma^2\delta^3 \oplus \gamma^5\delta^6 \oplus \gamma^8\delta^8 \ .$$

L'intérêt de 1.6.3 par rapport à 1.4.1 tient à ce qu'il n'est besoin de considérer que les monômes voisins dans le test de domination, comme l'énonce le lemme 1.6.2. Autrement dit, l'algorithme consiste à parcourir de la gauche vers la droite les monômes de a et b sans jamais revenir en arrière, soit un nombre de comparaisons pour la somme de l'ordre de $O(\mathsf{compl}(a) + \mathsf{compl}(b))$. En conséquence, le produit donné par l'algorithme 1.5.3 requiert maintenant $O(\mathsf{compl}(a)\mathsf{compl}(b))$ comparaisons.

1.7 Extension des degrés à $\mathcal{M}_{\rm ax}^{\rm in}[[\gamma,\delta]]$

Nous étendons les notions de degré et valuation au dioïde $\mathcal{M}_{\rm ax}^{\rm in}[[\gamma,\delta]]$. Le seul point délicat est qu'en raison du quotient par $\gamma^*(\delta^{-1})^*$, les degrés en δ et valuation en γ sont intrinsèques, alors que les degrés et valuations duales dépendent du représentant. On appelle *monôme* un polynôme de support réduit à un élément. On définit le *degré* $\deg s$ et la *valuation* $\operatorname{val} s$ d'une série formelle comme les deux couples suivants:

$$\deg s = \sup \operatorname{supp} s, \quad \operatorname{val} s = \inf \operatorname{supp} s \ ,$$

les couples de $\mathbb{Z}^2$ étant partiellement ordonnés par l'ordre usuel composante par composante. On posera $\deg s := (\deg_\gamma s, \deg_\delta s)$ et $\operatorname{val} s := (\operatorname{val}_\gamma s, \operatorname{val}_\delta s)$. On note $\mathsf{compl}\, s$ le nombre de monômes de s (i.e. le cardinal de $\operatorname{supp} s$). On dira que la série s est *causale* lorsque $\operatorname{supp} s \subset \mathbb{N}^2$, ce qui est équivalent à $\operatorname{val}_\gamma(s) \geq 0$ et $\operatorname{val}_\delta(s) \geq 0$. Les propriétés suivantes sont immédiates:

1.7.1 Propriétés (i) $s \mapsto \deg s$ *croissante,*

(ii) $\deg(s \oplus s') = \max(\deg s, \deg s')$ *(max composante par composante),*

(iii) $\deg(ss') = \deg(s) + \deg(s')$ *(somme composante par composante et convention $-\infty + (+\infty) = -\infty$),*

(iv) $s \neq \varepsilon \Rightarrow \operatorname{val} s \leq \deg s$,

(v) $\mathsf{compl}\,(p \oplus q) \leq \mathsf{compl}\,(p) + \mathsf{compl}\,(q)$,

(vi) $\mathsf{compl}\,(p \otimes q) \leq \mathsf{compl}\,(p)\mathsf{compl}\,(q)$.

Propriétés et conventions duales pour la valuation.

1.7.2 Exemple $\varepsilon \oplus \gamma^n\delta^t = \gamma^n\delta^t$, $\operatorname{val}\varepsilon = (+\infty, +\infty)$, $\deg \gamma^n\delta^t = \operatorname{val} \gamma^n\delta^t = (n,t)$, $(e \oplus \gamma^3\delta^2)(\delta^{-4} \oplus \gamma^5\delta^{-4}) = \delta^{-4} \oplus \gamma^5\delta^{-4} \oplus \gamma^3\delta^{-2} \oplus \gamma^8\delta^{-2}$. Noter que γ^{-1} est un polynôme (et même un monôme).

1.7.3 Proposition *Les seules séries formelles inversibles dans $\mathbb{B}[[\gamma,\delta]]$ sont les monômes.*

Preuve Si $ss' = e$, il résulte de (iii) et de la formule duale que

$$\deg s + \deg s' = \operatorname{val} s + \operatorname{val} s' = 0 \tag{1.7.a}$$

Via (iv), on a $\operatorname{val} s \leq \deg s$, idem pour s'. (1.7.a) entraîne donc $\deg s = \operatorname{val} s$, $\deg s' = \operatorname{val} s'$, ce qui signifie que s et s' sont des monômes. Réciproque triviale. ∎

1.7.4 Proposition *Soit $s \in \mathcal{M}_{\rm ax}^{\rm in}[[\gamma,\delta]]$, et un représentant de s, $s_0 \in \mathbb{B}[[\gamma,\delta]]$. $\deg_\delta s_0$ et $\operatorname{val}_\gamma s_0$ ne dépendent pas du choix de s_0.*

Preuve Soient $s_0 = \bigoplus_{i\in I} \gamma^{n_i}\delta^{t_i}$ et $s_1 = \bigoplus_{j\in J} \gamma^{n'_j}\delta^{t'_j}$ telles que $\varphi(s_0) \preceq \varphi(s_1)$. Montrons que $\deg_\delta(s) \leq \deg_\delta(s')$. On a:

$$\forall i \in I,\ \exists j \in J, k, l \geq 0, \quad \gamma^{n_i}\delta^{t_i} \preceq \gamma^{n'_j}\delta^{t'_j}\gamma^k\delta^{-l}$$

d'où

$$t_i \leq t'_j - l \leq t'_j \leq \deg_\delta s'$$

et en passant au sup $\deg_\delta s \leq \deg_\delta s'$. Ainsi, $\varphi(s_0) = \varphi(s_1)$ entraîne l'égalité des degrés en δ. ∎

Par contre, les autres degrés et valuations ne passent pas au quotient. On a par exemple

$$\deg_\gamma e = 0, \ \ \deg_\gamma \gamma^* = +\infty$$

quoique e et γ^* appartiennent à la même classe d'équivalence. On se restreindra dans la suite aux polynômes et l'on définira le degré en γ d'un polynôme p comme le degré en γ de son représentant minimal p_0. Définitions analogues pour la valuation val et le nombre de termes compl. Enfin, nous définirons les séries *causales* de $\mathcal{M}_{\mathrm{ax}}^{\mathrm{in}}[[\gamma,\delta]]$ comme les images des séries causales de $\mathbb{B}[[\gamma,\delta]]$ (cf. §1.7) par la projection canonique. Si s admet un représentant minimal $s_0 \in \mathbb{B}[[\gamma,\delta]]$, alors s est causale ssi s_0 est causale.

1.7.5 Exemple Soient $p = e \oplus \gamma^8\delta^{10}$ et $q = \gamma^6\delta^{12}$. On a $\deg_\gamma(p\oplus q) = \deg_\gamma(e\oplus\gamma^6\delta^{12}) = 6 < \max(\deg_\gamma p, \deg_\gamma q)$. Pour le polynôme p de la Figure VII.4, on a par exemple $\deg p = (3,3)$, $\mathrm{val}\, p = (0,0)$, $\mathsf{compl}\, p = 3$. La série $s = e \oplus \delta^{-1}$ est causale (l'écriture minimale est $s = e$), mais $s' = \gamma^{-1}$ ne l'est pas.

On montre sans difficulté les propriétés suivantes.

1.7.6 Propriétés *On a pour $s, s' \in \mathcal{M}_{\mathrm{ax}}^{\mathrm{in}}[[\gamma,\delta]]$:*

(i) $\deg_\delta(s\oplus s') = \max(\deg_\delta s, \deg_\delta s')$,

(ii) $\deg_\delta(s\otimes s') = \deg_\delta s + \deg_\delta s'$,

(iii) $\mathrm{val}_\gamma(s\oplus s') = \min(\mathrm{val}_\gamma s, \mathrm{val}_\gamma s')$,

(iv) $\mathrm{val}_\gamma(s\otimes s') = \mathrm{val}_\gamma s + \mathrm{val}_\gamma s'$.
En outre, lorsque s et s' sont des polynômes:

(v) $\deg_\gamma(p\oplus p') \le \max(\deg_\gamma p, \deg_\gamma p')$,

(vi) $\deg_\gamma(p\otimes p') = \deg_\gamma p + \deg_\gamma p'$,

(vii) $\mathrm{val}_\delta(p\oplus p') \ge \min(\mathrm{val}_\delta p, \mathrm{val}_\delta p')$,

(viii) $\mathrm{val}_\delta(p\otimes p') = \mathrm{val}_\delta p + \mathrm{val}_\delta p'$,

(ix) $\mathsf{compl}\,(p\oplus q) \le \mathsf{compl}\, p + \mathsf{compl}\, q$

(x) $\mathsf{compl}\,(p\otimes q) \le \mathsf{compl}\, p \times \mathsf{compl}\, q$.

Les quatre premières formules s'obtiennent de manière analogue à 1.7.4. Les deux suivantes s'obtiennent en prenant les représentant minimaux p_0 et q_0 de p et q et en remarquant que le représentant minimal de $p\oplus q$ s'obtient en retirant des termes à $p_0 \oplus q_0$, ce qui diminue le degré et augmente la valuation. Les dernières sont laissés au lecteur. ∎

2 Algorithmes relatifs aux séries périodiques

Nous élaborons ici des formes canoniques pour les séries périodiques déjà traitées au Chapitre VII. Ces formes canoniques sont à la base de l'implémentation de ces séries décrite au Chapitre VIII.

2.1 Séries causales

Les systèmes que nous considérons admettent à la fois des représentations dateur et compteur causales. Nous introduisons donc la notion suivante:

2.1.1 Définition (Fonctions causales) *La fonction compteur* $k \in \mathsf{Croiss}(\mathbb{Z}, \overline{\mathbb{Z}}_{\min})$ *est dite* causale *ssi*

$$k(t) = k(0) \text{ pour } t < 0, \quad k(t) \geq 0 \text{ pour } t \geq 0 \ .$$

La fonction dateur $k \in \mathsf{Croiss}(\mathbb{Z}, \overline{\mathbb{Z}}_{\max})$ *est dite* causale *ssi*

$$k(n) = -\infty \text{ pour } n < 0, \quad k(n) \in \mathbb{N} \cup \{-\infty\} \text{ pour } n \geq 0 \ . \tag{2.1.a}$$

2.1.2 Remarque En V,3.3.3, on avait caractérisé les réponses impulsionnelles des systèmes linéaires causaux sur $\mathsf{Croiss}(\mathbb{Z}, \overline{\mathbb{Z}}_{\min})$ par $k(t) =$cte pour $t \leq 0$. Ici, on exige en outre que $k(t)$ prenne des valeurs positives ou nulles.

2.1.3 Définition *La série* $s \in \mathcal{M}_{\mathrm{ax}}^{\mathrm{in}}[[\gamma, \delta]]$ *est dite causale ssi elle admet un représentant* $s_0 \in \mathbb{B}[[\gamma, \delta]]$ *causal (i.e. à exposants positifs ou nuls).*

2.1.4 Proposition *Soit* $s \in \mathcal{M}_{\mathrm{ax}}^{\mathrm{in}}[[\gamma, \delta]]$. *Les trois propositions suivantes sont équivalentes:*

(i) *s est causale,*

(ii) *la fonction dateur associée à s est causale,*

(iii) *la fonction compteur associée à s est causale.*

Preuve (ii)⇒(i): via 2.2.5 et la propriété (2.1.a) on a le représentant causal de s:

$$s_0 = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \gamma^n \delta^{\mathsf{dat}\, s(n)} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \gamma^n \delta^{\mathsf{dat}\, s(n)} \ .$$

(i)⇒(ii): Soit $s_0 = \bigoplus_i \gamma^{n_i} \delta^{t_i}$ avec $n_i \geq 0, t_i \geq 0$ un représentant causal de s. On a

$$\mathsf{dat}\, s(n) = \sup\{t \in \mathbb{Z} \mid \gamma^n \delta^t \preceq s_0\} \ . \tag{2.1.b}$$

Si $n < 0$, l'ensemble ci-dessus est vide (sinon $\gamma^n \delta^t \preceq \gamma^{n_i} \delta^{t_i}$, d'où $n_i \leq n < 0$ ce qui contredit la causalité de s_0). On a donc $\mathsf{dat}\, s(n) = -\infty$ pour $n < 0$. Si $n \geq 0$ et $\gamma^n \delta^t \preceq s_0$, on a $\gamma^n \delta^t \preceq \gamma^{n_i} \delta^{t_i}$, d'où $n \leq n_i$, d'où $\gamma^n \delta^{t_i} \preceq \gamma^{n_i} \delta^{t_i}$. Ainsi, $\mathsf{dat}\, s(n) \geq t_i \geq 0$. Les conditions de (2.1.a) sont réalisées.

Arguments analogues pour (i)⇔(iii). ∎

2.2 Représentations périodiques

Nous reprenons en détail la notion de périodicité mise en évidence au Chapitre VII.

2.2.1 Définition (Dateurs périodiques) *Soit* $(\nu, \tau) \in \mathbb{N}^2 \setminus \{(0,0)\}$. *une fonction dateur* $n \mapsto d(n)$ *est dite* (ν, τ)-périodique à partir de N *si elle est causale et*

$$(\forall n \geq N) \quad d(n + \nu) = d(n) + \tau \tag{2.2.a}$$

Si le N n'est pas précisé, on dira simplement (ν, τ)*-périodique.*

Si (ν,τ) est une période de s, les couples $(k\nu,k\tau)$ avec $k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ sont aussi des périodes. Une telle fonction est représentée sur la Figure VII.5.

2.2.2 Périodes dégénérées
(i): Si $\nu=0$ et $\tau>0$, de deux choses l'une: soit $d(n)=-\infty$, auquel cas $d(n+\nu)=d(n+2\nu)=\ldots=-\infty$, et d étant croissante, d vaut identiquement $-\infty$. soit $d(n)>-\infty$, auquel cas (2.2.a)) entraîne $d(n)=+\infty$ pour $n\geq N$.

(ii): Si $\nu>0$ et $\tau=0$, on a que d est constante à partir de n.

2.2.3 Remarque les dateurs vérifiant (2.2.a) devraient être qualifiées de "fonctions à accroissements ultimement périodiques" au sens classique. Notons en effet que la fonction accroissement de d, $\tilde{d}$ définie par $\tilde{d}(n)=d(n+1)-d(n)$, vérifie:

$$(\forall n\geq N)\quad \tilde{d}(n+\nu)=\tilde{d}(n)\ . \tag{2.2.b}$$

2.2.4 Définition (Séries (ν,τ)-périodiques) *Une série $s\in\mathcal{M}_{\mathrm{ax}}^{\mathrm{in}}[[\gamma,\delta]]$ est (ν,τ)-périodique (à partir de N) si sa fonction dateur associée $\mathsf{dat}\, s$ est (ν,τ)-périodique (à partir de N). s est dite non-dégénérée si la période de $\mathsf{dat}\, s$ ne relève pas des cas 2.2.2.*

2.2.5 Théorème *Les propositions suivantes sont équivalentes:*

(i) *La série s est (ν,τ)-périodique*

(ii) *On a deux polynômes causaux p_0 et q_0 tels que $s=p_0\oplus q_0(\gamma^\nu\delta^\tau)^*$.*

(iii) *On a deux polynômes causaux p_1 et q_1 avec $\deg p_1\leq \mathrm{val}\, q_1-(1,1)$, $\deg q_1-\mathrm{val}\, q_1\leq(\nu-1,\tau-1)$ tels que $s=p_1\oplus q_1(\gamma^\nu\delta^\tau)^*$*

(iv) *On a $(N,T)\in\mathbb{N}^2$, un polynôme causal p avec $\deg p\leq(N-1,T-1)$, un polynôme causal $q=e\oplus q'$ où $(1,1)\leq\mathrm{val}\, q'$ et $\deg q'\leq(\nu-1,\tau-1)$ tels que $s=p\oplus\gamma^N\delta^T q(\gamma^\nu\delta^\tau)^*$.*

2.2.6 Remarque On constate qu'en vertu de la caractérisation (ii), la terminologie est cohérente avec la notion de périodicité introduite en VII,3.3.7. Une série s est *périodique* ssi il existe $(\nu,\tau)\in\mathbb{N}^2$ telle que s soit (ν,τ)-périodique.

Preuve du Théorème 2.2.5. Nous supposerons $\nu\neq0$ et $\tau\neq0$, les cas dégénérés (triviaux) étant traités séparément dans la remarque 2.2.10 ci-dessous. On passe trivialement de (iv) à (iii) en posant $q_1=\gamma^N\delta^T q$. En outre, (iii) étant un cas particulier de de (ii): (iv)⇒(iii)⇒(ii).

(i)⇒(iv). Supposons s causale et (ν,τ)-périodique à partir de N_0.
(α): on pose $N=\min\{n\geq N_0\mid \mathsf{dat}\,_s(n+\nu-1)<\mathsf{dat}\,_s(n+\nu)\}$.
(β): on écrit par 2.2.5

$$s=\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}\gamma^n\delta^{\mathsf{dat}\, s(n)}=\left(\bigoplus_{0\leq n\leq N-1}\gamma^n\delta^{\mathsf{dat}\, s(n)}\right)\oplus\gamma^N\delta^{\mathsf{dat}\, s(N)}\left(\bigoplus_{N\leq n}\gamma^n\delta^{\mathsf{dat}\, s(n)-\mathsf{dat}\, s(N)}\right)$$

On obtient la représentation de type (iv) en posant $T=\mathsf{dat}\, s(N)$ et en observant que la seconde parenthèse est de la forme $q(\gamma^\nu\delta^\tau)^*$ avec

$$q=\left(\bigoplus_{N\leq n\leq N+\nu-1}\gamma^{n-N}\delta^{k(n)-T}\right)\ ,$$

qui satisfait les conditions de degré à cause du choix (α).

(ii)$\Rightarrow$(i): on a les deux lemmes immédiats suivants:

2.2.7 Lemme *Soit p un polynôme causal et m un monôme causal. La fonction dateurs associée à $p \oplus m(\gamma^\nu \delta^\tau)^*$ est (ν, τ)-périodique à partir de* $\max(\deg_\gamma p, \deg_\gamma m)$.

2.2.8 Lemme *Le max de deux dateurs (ν, τ)-périodiques (respectivement à partir de N et N') est (ν, τ) périodique à partir de* $\max(N, N')$

En conséquence, $p \oplus q(\gamma^\nu \delta^\tau)^*$ est (ν, τ) périodique à partir de $\max(\deg_\gamma(p), \deg_\gamma(q))$. ■

On appellera représentation périodique de s une écriture de la forme 2.2.5,(iv). Le polynôme p sera appelé transitoire, q motif périodique et (N, T) début du périodique.

La preuve ci-dessus s'écrirait de même avec les compteurs. On a donc:

2.2.9 Corollaire $\mathsf{dat}\, s$ *est (ν, τ)-périodique ssi la fonction* $\mathsf{compt}\, s$ *est (τ, ν)-périodique.*[3]

2.2.10 Remarque (Cas dégénérés) Si $\tau = 0$, on a $\mathsf{dat}\, s$ constante à partir de N, d'où

$$s = \bigoplus_{0 \le n \le N} \gamma^n \delta^{\mathsf{dat}\, s(n)} \ .$$

τ est donc nul ssi s est un polynôme. Si $\nu = 0$, on peut écrire

$$s = \bigoplus_{0 \le n \le N-1} \gamma^n \delta^{\mathsf{dat}\, s(n)} \oplus \gamma^N \delta^\infty \ .$$

Ces cas dégénérés généralisent respectivement les éléments simples dégénérés de type monomial et de type infini (cf. VII,4.0.1).

2.2.11 Remarque On passe de 2.2.5,(iii) à 2.2.5,(iv) en posant $q = \gamma^{-\mathrm{val}_\gamma q_1} \delta^{-\mathrm{val}_\delta q_1} q_1$. Les représentations (iii) et (iv) sont donc équivalentes à une normalisation du motif près. Le terme "motif" pour q dans (iv) s'interprète en effet si l'on écrit

$$\gamma^N \delta^T q(\gamma^\nu \delta^\tau)^* = \gamma^N \delta^T q \oplus \gamma^N \delta^T q \gamma^\nu \delta^\tau \oplus \gamma^N \delta^T q \gamma^{2\nu} \delta^{2\tau} \ldots,$$

i.e. le polynôme q est "répété" à partir de la position (N, T) avec les translations successives de vecteurs $(0, 0), (\nu, \tau), (2\nu, 2\tau), \ldots$ La condition $\deg p \le (N-1, T-1)$ exprime que le dernier monôme du transitoire ne recouvre pas le premier monôme du motif. La condition $\deg q \le (\nu - 1, \tau - 1)$ exprime que les motifs translatés successifs ne se recouvrent pas. Ceci est illustré par le dessin suivant, où l'on a représenté une fonction dateur périodique (on a fait abstraction du caractère discret). On a de la sorte une généralisation dans $\mathbb{N}^2$ de la notion de partie périodique de $\mathbb{N}$ étudiée en VII,§3.3

2.2.12 Proposition *Soit s une série (ν, τ)-périodique à partir de N. Il existe une seule représentation périodique de type 2.2.5,*(iii).

Preuve résulte du lemme immédiat suivant:

[3] noter la transposition.

2.2.13 Lemme *Si s admet une représentation périodique de la forme (iii), alors nécessairement*

$$p = \bigoplus_{k=0}^{N-1} \gamma^k \delta^{\mathsf{dat}\, s(k)} \qquad q = \bigoplus_{k=N}^{N+\nu-1} \gamma^k \delta^{\mathsf{dat}\, s(k)} \ .$$

■

2.2.14 Exemple La proposition 2.2.12 énonce l'unicité de la représentation périodique, ν, τ et N étant fixés. On peut cependant avoir des représentations différentes pourvu que les ν, τ, N soient distincts. Via $(\gamma\delta)^* = \varepsilon \oplus \gamma^0\delta^0.e.(\gamma\delta)^* = \varepsilon \oplus \gamma^0\delta^0.(e \oplus \gamma\delta)(\gamma^2\delta^2)^*$, on a en effet deux représentations périodiques de la même série.

2.2.15 Exemple On a les différentes représentations périodiques de la série donnée sur la Figure B.3. On a encadré les différents motifs: $\gamma^2\delta^2(e \oplus \gamma\delta^2)$ (cadre hachuré épais), $\gamma^3\delta^4(e \oplus \gamma^2\delta)$ (cadre en pointillé), et $\gamma^2\delta^2(e \oplus \gamma\delta^2 \oplus \gamma^3\delta^3 \oplus \gamma^4\delta^5)$ (cadre fin).

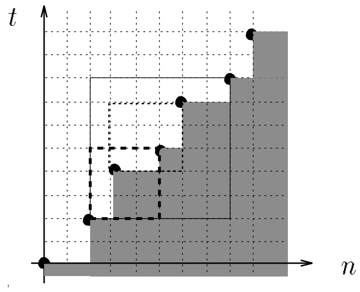


Figure B.3: Diverses représentations périodiques d'une même série

$$s = e \oplus \gamma^2\delta^2(e \oplus \gamma\delta^2)(\gamma^3\delta^3)^* \tag{2.2.c}$$

$$s = e \oplus \gamma^2\delta^2 \oplus \gamma^3\delta^4(e \oplus \gamma^2\delta)(\gamma^3\delta^3)^* \tag{2.2.d}$$

$$= e \oplus \gamma^2\delta^2(e \oplus \gamma\delta^2 \oplus \gamma^3\delta^3 \oplus \gamma^4\delta^5)(\gamma^6\delta^6)^* \tag{2.2.e}$$

Cependant, la représentation (2.2.c) paraît "plus simple" que les deux autres. Nous formalisons maintenant cette notion et montrons l'existence d'une unique représentation périodique "minimale".

2.3 Représentation périodique minimale

2.3.1 Définition (Représentation plus simple) *On dit que la représentation périodique $p \oplus \gamma^N\delta^T q(\gamma^\nu\delta^\tau)^*$ est* plus simple *que $p' \oplus \gamma^{N'}\delta^{T'}q'(\gamma^{\nu'}\delta^{\tau'})^*$, si $(\nu,\tau)|(\nu',\tau')$ et si $(N,T) \leq (N',T')$.*

2.3.2 Proposition *La relation de plus grande simplicité est une relation d'ordre sur l'ensemble des représentations périodiques de s.*

Preuve La réflexivité et la transitivité sont immédiates. L'antisymétrie résulte du lemme 2.2.13 ci-dessus.

2.3.3 Théorème *Une série périodique non dégénérée admet une plus simple représentation périodique.*

Preuve Soit d le dateur associé à s. Il suffit de voir qu'il existe un plus petit triplet (N,ν,τ) vérifiant (2.2.a), ou de manière équivalente (2.2.b). Supposons

$$\begin{aligned}\forall n \geq N, \tilde{d}(n+\nu) = \tilde{d}(n)\\ \forall n \geq N', \tilde{d}(n+\nu') = \tilde{d}(n)\end{aligned} \tag{2.3.a}$$

On a donc pour $n \geq \max(N,N')$, $\tilde{d}(n+\alpha\nu+\beta\nu') = \tilde{d}(n)$, et par application de 3.3.6

$$\exists K_0, \forall k \geq K_0,\ \ \exists \alpha,\beta \in \mathbb{N}, \quad k\mathrm{pgcd}(\nu,\nu') = \alpha\nu+\beta\nu'$$

et donc pour $n \geq K_1 = \max(N,N') + K_0\mathrm{pgcd}(\nu,\nu')$,

$$\tilde{d}(n+\mathrm{pgcd}(\nu,\nu')) = \tilde{d}(n)\ . \tag{2.3.b}$$

Supposons par exemple $\max(N,N') = N'$. Quitte à agrandir K_1, on peut supposer K_1 de la forme $N + x\nu$ ($x \in \mathbb{N}$), et en utilisant la ν-périodicité à partir de N, on note que (2.3.b) est valable dès $n \geq \min(N,N')$. Ainsi, si (N,ν,τ) et (N',ν',τ') vérifient (2.3.a), leur borne-inf[4] vérifie la même propriété. La conclusion en résulte. ∎

2.3.4 Définition (Plus petite période ϖ_∞) *On notera $\varpi_\infty(s)$ la plus petite période de s.*

Nous donnons maintenant des algorithmes pour obtenir la plus simple représentation périodique.

2.3.5 Algorithme (Minimisation du transitoire) *Soit*

$$s = p \oplus p_k \oplus \gamma^n\delta^t(q \oplus q_l)(\gamma^\nu\delta^\tau)^*$$

une représentation périodique de s, où p_k (resp. q_l) est le monôme de plus haut degré du transitoire (resp. du motif). On obtient un représentant périodique de transitoire minimal en appliquant l'itération suivante: Si

$$p_k \neq \gamma^n\delta^t q_l\gamma^{-\nu}\delta^{-\tau}$$

alors le transitoire $p \oplus p_k$ est minimal. Sinon, recommencer une itération avec la représentation suivante:

$$s = p \oplus p_k(e \oplus \gamma^N\delta^T p_k^{-1}q)(\gamma^\nu\delta^\tau)^*\ .$$

Le nombre d'itérations est majoré par le nombre de termes du transitoire.

2.3.6 Exemple On applique l'algorithme à la représentation (2.2.d). On a:

$$p = e, p_2 = \gamma^2\delta^2,\ q = e, q_2 = \gamma^2\delta,\ \ \gamma^n\delta^t = \gamma^3\delta^4,\ \gamma^\nu\delta^\tau = \gamma^3\delta^3\ .$$

Comme $p_2 = \gamma^n\delta^t q_2\gamma^{-\nu}\delta^{-\tau}$, on a la représentation (2.2.c). Soit $p_1 = e$, $q = e$, $q_2 = \gamma\delta^2$, $\gamma^n\delta^t = \gamma^2\delta^2$. Comme $p_1 \neq \gamma^n\delta^t q_2\gamma^{-\nu}\delta^{-\tau}$, le transitoire de (2.2.c) est minimal.

Le problème de la minimisation du périodique peut s'interpréter comme une "mise en facteur" d'un type particulier. Il est clair qu'une période minimale divisera toute autre période, mais aussi que le nombre de termes du motif minimal divisera le nombre de termes de tout autre motif. Notons $q_{\deg<(n,t)}$ la troncature de q au degré (n,t) (i.e. le polynôme formé des monômes de q de degré au plus $(n-1,t-1)$. On a l'algorithme suivant.

[4] i.e. $(\min(N,N'), \mathrm{pgcd}(\nu,\nu'), \mathrm{pgcd}(\tau,\tau'))$

2.3.7 Algorithme (Minimisation du périodique) *Soit*

$$s = q(\gamma^\nu \delta^\tau)^* \ . \tag{2.3.c}$$

(1): Pour p premier divisant ν, τ et $\mathsf{compl}\, q$, *faire:*
$\nu' = \nu/p$, $\tau' = \tau/p$. *Si* $q = q_{\deg<(\nu',\tau')}(e \oplus \gamma^{\nu'}\delta^{\tau'} \oplus \ldots \gamma^{\nu'(p-1)}\delta^{\tau'(p-1)})$, *alors*
remplacer (2.3.c) par $s = q_{\deg<(\nu',\tau')}(\gamma^{\nu'}\delta^{\tau'})^*$
et recommencer (1) avec le même p,
sinon
recommencer (1) avec le diviseur p suivant.

La plus simple représentation d'une série s s'obtient en appliquant d'abord 2.3.5 à s, puis 2.3.7 à la partie périodique de s. L'ordre inverse est également licite.

2.3.8 Exemple Soit la partie périodique de (2.2.e):

$$s = (e \oplus \gamma\delta^2 \oplus \gamma^3\delta^3 \oplus \gamma^4\delta^5)(\gamma^6\delta^6)^* =: q(\gamma^\nu\delta^\tau)^*$$

On a $\nu = \tau = 6$ et $\mathsf{compl}\, p = 4$ d'où $D = \{2\}$. On constate que $q = (e \oplus \gamma\delta^2)(e \oplus \gamma^3\delta^3)$, et donc on repart de $s = (e \oplus \gamma\delta^2)(\gamma^3\delta^3)^*$. Comme 2 ne divise pas 3, on ne peut refactoriser ce motif (on ne peut calculer les nouveaux ν' et τ'). Le motif est donc minimal.

2.4 Somme de séries périodiques

L'opération inverse de la minimisation du transitoire (cf. 2.3.5) nous sera utile.

2.4.1 Lemme (Développement d'une série périodique) *Soient* $n_0, t_0 \geq 0$ *et la série sous forme périodique minimale* $s = p \oplus \gamma^N\delta^T q(\gamma^\nu\delta^\tau)^*$ *avec* $\nu \neq 0$ *et* $\tau \neq 0$. *Il existe une plus simple représentation périodique*

$$s = p' \oplus \gamma^{N'}\delta^{T'} q'(\gamma^\nu\delta^\tau)^*$$

telle que $N' \geq n_0, T' \geq t_0$. *On l'appelle développement de s à l'ordre* (n_0, t_0).

Preuve Soit k entier tel que $N + k\nu \geq n_0$ et $T + k\tau \geq t_0$. On a la représentation périodique:

$$s = p \oplus \gamma^N\delta^T q(e \oplus \gamma^\nu\delta^\tau \oplus \ldots \oplus \gamma^{(k-1)\nu}\delta^{(k-1)\tau}) \oplus \gamma^{N+k\nu}\delta^{T+k\tau} q(\gamma^\nu\delta^\tau)^* \ .$$

On obtient le développement de s en appliquant l'algorithme de minimisation du transitoire 2.3.5 à la série ci-dessus, sous la contrainte $\deg p_k \geq (n_0, t_0)$. ∎

2.4.2 Exemple Soit $s = \gamma^2\delta^3 \oplus \gamma^5\delta^7(e \oplus \gamma^2\delta)(\gamma^3\delta^3)^*$. Le développement de s à l'ordre (7,5) est le suivant:

$$s = \gamma^2\delta^3 \oplus \gamma^5\delta^7 \oplus \gamma^7\delta^8(e \oplus \gamma\delta^2)(\gamma^3\delta^3)^* \ . \tag{2.4.a}$$

2.4.3 Cas d'une pente ultime infinie Nous évacuons le cas où l'une des deux séries, disons s, a une pente ultime infinie, i.e. via 2.2.10:

$$s = p \oplus \gamma^N\delta^{+\infty} \ .$$

Soit $s' = p' \oplus q'(\gamma^\nu\delta^\tau)^*$ et p'_1 le transitoire associé au développement de s' à l'ordre $(N, 0)$. On a clairement:

$$s \oplus s' = p \oplus p'_1 \oplus \gamma^N\delta^{+\infty} \ .$$

Le principe des algorithmes de somme de séries périodiques est contenu dans le lemme suivant.

2.4.4 Lemme *Soit s une série (ν,τ) périodique à partir de (N,T). Soit P le développement de s à l'ordre $(N+\nu-1,0)$,*

$$P = p \oplus q \ , \tag{2.4.b}$$

où $\deg_\gamma(p) \leq N-1$ et $\mathrm{val}_\gamma q \geq N$. On a la représentation périodique de s:

$$s = p \oplus q(\gamma^\nu \delta^\tau)^* \ . \tag{2.4.c}$$

La décomposition (2.4.b) consiste à séparer les termes du représentant minimal de P d'exposant en γ plus petit que $N-1$ des autres.

Preuve de 2.4.4. Il résulte de 2.2.13 que

$$s = P \oplus Q(\gamma^\nu\delta^\tau)^* \tag{2.4.d}$$

où $P = \bigoplus_{k=0}^{N+\nu-1} \gamma^k \delta^{\mathsf{dat}\, s(k)}$ et $Q = \bigoplus_{k=N+\nu}^{N+2\nu-1} \gamma^k \delta^{\mathsf{dat}\, s(k)}$. On a donc

$$p = \bigoplus_{k=0}^{N-1} \gamma^k \delta^{\mathsf{dat}\, s(k)}, \qquad q = \bigoplus_{k=N}^{N+\nu-1} \gamma^k \delta^{\mathsf{dat}\, s(k)} \ . \tag{2.4.e}$$

Comme $\mathsf{dat}\, s(k+\nu) = \mathsf{dat}\, s(k) + \tau$ pour $k \geq N$, on a $Q = \gamma^\nu\delta^\tau q$, et donc (2.4.d) se réécrit $s = p \oplus q(e \oplus \gamma^\nu\delta^\tau(\gamma^\nu\delta^\tau)^*) = p \oplus q(\gamma^\nu\delta^\tau)^*$. En outre, d'après (2.4.e) p et q vérifient les conditions de degré et de valuation 2.2.5,(iii). ∎

On a donc l'algorithme suivant:

2.4.5 Algorithme (Somme de séries périodiques) *Soient s et s' deux séries périodiques. Déterminer une borne supérieure a priori pour le début du périodique de $s \oplus s'$. Appliquer le Lemme 2.4.4, et réduire (2.4.c) via les Algorithmes 2.3.5 et 2.3.7.*

Il nous reste à produire des bornes à priori.

2.4.6 Lemme *Si s et s' sont deux séries de même pentes ultime périodiques à partir, respectivement, de N et N', alors $s \oplus s'$ est périodique à partir de $\max(N, N')$.*

Preuve C'est un avatar de 2.2.8. ∎

2.4.7 Lemme *Soient deux représentations périodiques de type 2.2.5,(iii), $s = p \oplus \gamma^N\delta^T q(\gamma^\nu\delta^\tau)^*$ et $s' = p' \oplus \gamma^{N'}\delta^{T'} q'(\gamma^{\nu'}\delta^{\tau'})^*$, avec $0 < \sigma_\infty(s) < \sigma_\infty(s')$. La série $s \oplus s'$ est périodique à partir de*

$$K = \max(N, N+\nu\lfloor\frac{T'_T+1}{\tau}\rfloor, \lfloor(-T - \frac{\tau N}{\nu} - \tau, -T' - \tau' + 1 + \frac{\tau' N'}{\nu'} + \frac{\tau'}{\nu'})\left(\frac{\tau}{\nu} - \frac{\tau'}{\nu'}\right)^{-1}\rfloor) \ , \tag{2.4.f}$$

où $\lfloor x \rfloor := \min\{n \in \mathbb{Z} \mid \ n \geq x\}$.

Preuve Les majorations et minorations suivantes résultent immédiatement des conditions de degré et valuation 2.2.5,(iii).

$$s \succeq p \oplus \gamma^N \delta^T (\gamma^\nu\delta^\tau)^* =: s_1$$
$$s' \preceq \delta^{T'} \oplus \gamma^{N'+1}\delta^{T'+\tau'-1}(\gamma^{\nu'}\delta^{\tau'})^* =: s'_1 \ .$$

Si l'on a $K \geq N$ tel que

$$\mathsf{dat}\, s_1(k) \geq \mathsf{dat}\, s_1'(k) \quad \text{pour} \quad k \geq K \ , \tag{2.4.g}$$

on aura $\mathsf{dat}\, s(k) \geq \mathsf{dat}\, s_1(k) \geq \mathsf{dat}\, s_1'(k) \geq \mathsf{dat}\, s'(k)$, et donc $\mathsf{dat}\,(s \oplus s') = \max(\mathsf{dat}\, s, \mathsf{dat}\, s')$ sera égal à $\mathsf{dat}\, s$ pour $k \geq K$. $s \oplus s'$ sera donc périodique à partir de K. La condition $K \geq N$ rend compte du d-premier terme du max à droite de (2.4.f). Il reste à vérifier (2.4.g). Nous faisons pour cela appel au Lemme élémentaire suivant:

2.4.8 Lemme *Soit $s = \gamma^n \delta^t (\gamma^\nu \delta^\tau)^*$. On a:*

$$\mathsf{dat}\, s(p) = t + \tau [\frac{p-n}{\nu}] + \chi_{[n,+\infty[}(p) \ ,$$

où χ_I désigne la fonction indicatrice de l'ensemble I, valant 0 pour $p \in I$ et $-\infty$ sinon.

Preuve résulte immédiatement de (2.2.b) et de l'écriture

$$s = \gamma^n \delta^t \oplus \gamma^{n+1}\delta^t \oplus \gamma^{n+\nu-1}\delta^t \oplus \gamma^{n+\nu}\delta^{t+\tau} \oplus \gamma^{n+\nu+1}\delta^{t+\tau} \oplus \dots \gamma^{n+2\nu-1}\delta^{t+\tau} \oplus \gamma^{n+2\nu}\delta^{t+2\tau} \oplus \dots \ .$$

■

Via 2.4.8, la condition (2.4.g) est équivalente à:

$$T + \tau[\frac{k-N}{\nu}] \geq \max(T', T' + \tau' - 1 + \tau'[\frac{k-N'-1}{\nu'}]) \ \text{ pour } \ k \geq K \ .$$

La condition $T + \tau[\frac{K-N}{\nu}] > T'$ est équivalente à $\frac{K-N}{\nu} \geq \lfloor \frac{T'-T+1}{\tau} \rfloor$ ce qui justifie le second terme à droite de (2.4.f). On trouve le troisième terme en déterminant le plus petit k tel que: $T + \tau(\frac{k-N}{\nu} - 1) \geq T' + \tau' - 1 + \tau' \frac{k-N'-1}{\nu'}$. ■

2.4.9 Remarque Le lemme 2.4.7 ne fait qu'exprimer effectivement que si la pente ultime de s est inférieure à celle de s', alors $\mathsf{dat}\, s(n) > \mathsf{dat}\, s'(n)$ a partir d'un certain rang.

2.4.10 Exemple Soit s comme en 2.4.2 et $p' = \gamma\delta^4 \oplus \gamma^7\delta^5$. On a en ajoutant p' à (2.4.a):

$$s \oplus p' = \gamma\delta^4 \oplus \gamma^7\delta^8(e \oplus \gamma\delta^2)(\gamma^3\delta^3)^* \ .$$

Ici, le transitoire est minimal.

2.4.11 Exemple Soient

$$s = (e \oplus \gamma\delta)\left(\gamma^4\delta^4\right)^* \qquad s' = \gamma\delta^2\left(\gamma^3\delta^3\right)^* \ .$$

Ces deux séries étant de même pente, on sait par 2.4.6 que $s \oplus s'$ est périodique à partir de $\max(0,1) = 1$, de période $\gamma^3\delta^3 \sqcup \gamma^4\delta^4 = \gamma^{12}\delta^{12}$. Les termes de $s \oplus s'$ de degré en γ inférieur ou égal à $N + \nu - 1 = 1 + 12 - 1 = 12$ sont les suivants:

$$P = e \oplus \gamma\delta^2 \oplus \gamma^4\delta^5 \oplus \gamma^7\delta^8 \oplus \gamma^9\delta^9 \oplus \gamma^{10}\delta^{11} \oplus \gamma^{12}\delta^{12} \ .$$

En partitionnant P comme en 2.4.4, on trouve

$$p = e, \quad q = \gamma\delta^2 \oplus \gamma^4\delta^5 \oplus \gamma^7\delta^8 \oplus \gamma^9\delta^9 \oplus \gamma^{10}\delta^{11} \oplus \gamma^{12}\delta^{12} \ .$$

Ainsi

$$s \oplus s' = e \oplus (\gamma\delta^2 \oplus \gamma^4\delta^5 \oplus \gamma^7\delta^8 \oplus \gamma^9\delta^9 \oplus \gamma^{10}\delta^{11} \oplus \gamma^{12}\delta^{12})(\gamma^{12}\delta^{12})^*$$

Le transitoire n'est pas minimal. On trouve après réduction:

$$s \oplus s' = \left(e \oplus \gamma\delta^2 \oplus \gamma^4\delta^5 \oplus \gamma^7\delta^8 \oplus \gamma^9\delta^9 \oplus \gamma^{10}\delta^{11}\right)\left(\gamma^{12}\delta^{12}\right)^*$$

2.4.12 Exemple Soit à calculer $s \oplus s'$, avec

$$s = e \oplus \gamma^3\delta^4 \oplus \gamma^5\delta^5 \left(e \oplus \gamma\delta^2\right) \left(\gamma^2\delta^3\right)^*, \quad s' = \gamma^2\delta^2 \oplus \gamma^6\delta^6 \oplus \gamma^7\delta^{10} \left(\gamma\delta^5\right)^* \quad .$$

On a

$$\gamma^5\delta^5 \left(e \oplus \gamma\delta^2\right) \left(\gamma^2\delta^3\right)^* \oplus \gamma^7\delta^{10} \left(\gamma\delta^5\right)^* = \gamma^5\delta^5 \oplus \gamma^6\delta^7 \oplus \underline{\gamma^7\delta^8(e \oplus \gamma\delta^2)(\gamma^2\delta^3)^*} \oplus \gamma^7\delta^{10}(\gamma\delta^5)^* \quad .$$

On observe que le terme souligné est dominé. On a donc

$$s \oplus s' = e \oplus \gamma^2\delta^2 \oplus \gamma^3\delta^4 \oplus \gamma^5\delta^5 \oplus \gamma^6\delta^7 \oplus \gamma^7\delta^{10} \left(\gamma\delta^5\right)^* \quad .$$

2.5 Autres opérations sur les séries périodiques

Nous notons ici brièvement que la périodicité est préservée par les opérations $\wedge$,$\boxminus$ et $\backslash$. On peut déduire ces résultats de théorèmes généraux (par exemple l'inf de deux séries rationnelles correspond à l'intersection de deux parties rationnelles de $\mathbb{Z}^2$, et l'on peut appliquer un Théorème d'Eilenberg et Schützenberger [32]). De manière plus spécifique, on a les résultats suivants.

2.5.1 Proposition *Soit $s = p \oplus qr^*$, $s' = p' \oplus q'(r')^*$. La série $s \wedge s'$ est périodique. Si $\sigma_\infty(s) > \sigma_\infty(s')$, on a $\varpi_\infty(s \wedge s') = \varpi_\infty(s)$. Si $\sigma_\infty(s) = \sigma_\infty(s')$, $\varpi_\infty(s \wedge s')$ divise $\varpi_\infty(s) \sqcup \varpi_\infty(s')$.*

2.5.2 Proposition *Soit $s = p \oplus qr^*$, $s' = p' \oplus q'(r')^*$. La série $s \boxminus s'$ est périodique. Si $\sigma_\infty(s) < \sigma_\infty(s')$, alors $\varpi_\infty(s \boxminus s') = \varpi_\infty(s)$. Si $\sigma_\infty(s) = \sigma_\infty(s')$, alors $\varpi_\infty(s \boxminus s')$ divise $\varpi_\infty(s) \sqcup \varpi_\infty(s')$, ou bien $s \boxminus s'$ est un polynôme. Si $\sigma_\infty(s) > \sigma_\infty(s')$, $s \boxminus s'$ est un polynôme.*

2.5.3 Proposition *Soit $s = p \oplus qr^*$, $s' = p' \oplus q'(r')^*$. On a $s/s' = \gamma^n\delta^t s''$, où $(n,t) \in (-\mathbb{N})^2$ et s'' est périodique. Si $\sigma_\infty(s) < \sigma_\infty(s')$, alors $\varpi_\infty(s'') = \varpi_\infty(s)$. Si $\sigma_\infty(s) = \sigma_\infty(s')$, alors $\varpi_\infty(s'')$ divise $\varpi_\infty(s) \sqcup \varpi_\infty(s')$. Si $\sigma_\infty(u) > \sigma_\infty(s')$, s'' est nul.*

Au lieu de montrer cette dernière proposition, nous préférons traiter deux exemples.

2.5.4 Exemple

$$e/(e \oplus \gamma\delta) = e/e \wedge (e/\gamma\delta) = e \wedge \gamma^{-1}\delta^{-1} = \delta^{-1} \quad .$$

2.5.5 Exemple Soient

$$s = (\gamma\delta)^*, \quad s' = \gamma^2 \left(e \oplus \gamma^2\delta\right) \left(\gamma^3\delta^3\right)^* \quad .$$

On a

$$(\gamma\delta)^*/(\gamma^2(e \oplus \gamma^2\delta)(\gamma^3\delta^3)^*) = \gamma^{-2}(\gamma\delta)^*/(\gamma^3\delta^3)^* \wedge \gamma^{-4}\delta^{-1}(\gamma\delta)^*/(\gamma^3\delta^3)^* \quad . \tag{2.5.a}$$

Par monotonie, on a $(\gamma\delta)^* \succeq (\gamma\delta)^*/(\gamma^3\delta^3)^* \succeq (\gamma\delta)^*/(\gamma\delta)^* = (\gamma\delta)^*$. En outre, $\gamma^{-4}\delta^{-1}(\gamma\delta)^* \succeq \gamma^{-4}\delta^{-1}\gamma\delta(\gamma\delta)^* = \gamma^{-3}(\gamma\delta)^* \succeq \gamma^{-2}(\gamma\delta)^*$. Ainsi, le second terme à gauche de (2.5.a) est supérieur au premier. On a donc:

$$s/s' = \gamma^{-2}(\gamma\delta)^* \quad .$$

2.6 Etoiles de polynômes

On a vu en VII,5.4 que le calcul de l'étoile d'une série rationnelle se ramenait à celle d'un polynôme. Soit $p = \bigoplus_{i=1}^{n} p_i$. On peut naïvement écrire

$$p^* = p_1^* p_2^* \dots p_n^* \ . \tag{2.6.a}$$

Si l'on applique cette règle au polynôme $p = \gamma^3\delta^3 \oplus \gamma^2\delta^2 \oplus \gamma\delta$, on a en laissant au lecteur les calculs intermédiaires

$$p^* = ((\gamma^3\delta^3)^*(\gamma^2\delta^2)^*)(\gamma\delta)^* = \dots = (e \oplus \gamma^2\delta^2(\gamma\delta)^*)(\gamma\delta)^* = \dots = (\gamma\delta)^* \ .$$

Il est plus rapide de remarquer que $\gamma^2\delta^2 \preceq (\gamma\delta)^*$ et $\gamma^3\delta^3 \preceq (\gamma\delta)^*$, d'où

$$(\gamma\delta)^* = e.e.(\gamma\delta)^* \preceq (\gamma^3\delta^3)^*(\gamma^2\delta^2)^*(\gamma\delta)^* \preceq ((\gamma\delta)^*)^*((\gamma\delta)^*)^*(\gamma\delta)^* = ((\gamma\delta)^*)^3 = (\gamma\delta)^* = p^* \ ,$$

et l'on pouvait conclure sans calcul. Nous généralisons ci-après cette remarque.

2.6.1 Définition (*-Minimalité) *Le polynôme p est dit *-minimal si*

$$p' \preceq p \text{ et } \ p^* = (p')^* \Rightarrow p = p' \ . \tag{2.6.b}$$

Autrement dit, il n'existe pas de polynôme plus petit que p engendrant la même étoile. De manière classique (cf. [62], Chapitre 1), si A est un alphabet et $M \subset A^*$, le plus petit ensemble engendrant M^* est $(M - \{e\}) - ((M - \{e\})^+)^2$, où $-$ dénote la différence ensembliste. Ce résultat devient faux pour des parties rationnelles de monoïdes plus généraux (prendre $M = \mathbb{Z}$). Nous donnons ici un résultat analogue dans $\mathcal{M}_{\mathrm{ax}}^{\mathrm{in}}[[\gamma, \delta]]$.

2.6.2 Définition (*-redondance) *Soit $\varphi : x \mapsto x^*$. Soit $p = \bigoplus_{i=1}^{n} m_i$ somme de monômes causaux. Le monôme m_i est dit *-redondant s'il est φ-redondant (cf. 1.2.13), i.e. si on a $m_i \preceq \varphi(\bigoplus_{j \neq i} m_j)$.*

2.6.3 Théorème *Soit p un polynôme causal sans monôme de pente nulle. Il existe un unique polynôme causal p_0 *-minimal tel que $p_0^* = p^*$.*

Preuve 1/ Existence. L'application $x \mapsto \varphi(x) = x^*$ est une fermeture. On peut donc appliquer les résultats d'existences d'une famille génératrice minimale donnés en 1.2.15 et 1.2.16. Précisément, on obtient un polynôme p_0 vérifiant (2.6.b) en supprimant successivement tous les monômes *-redondants.

2/ Unicité Soit p_0 un polynôme *-minimal tel que $p_0^* = p^*$. Comme p n'a aucun monôme de pente nulle, il résulte de 5.4.3 et de 5.4.4,(ii) que $\sigma_\infty(p^*) = \sigma_\infty(p_0^*)$ est non nulle, et donc que $s = p^*$ vérifie la condition du Théorème 1.3.1. Ainsi, p^* admet un représentant minimal, et l'on écrira $p^* = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \gamma^{n_i}\delta^{t_i}$ où les suites n_i et t_i sont strictement croissantes. Soit d'autre part la forme canonique de p_0:

$$p_0 = \gamma^{\nu_1}\delta^{\tau_1} \oplus \dots \oplus \gamma^{\nu_q}\delta^{\tau_q} \ .$$

On a alors:

$$p^* = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{N}^q} \gamma^{\alpha_1\nu_1}\delta^{\alpha_1\tau_1} \otimes \dots \otimes \gamma^{\alpha_q\nu_q}\delta^{\alpha_q\tau_q} \ . \tag{2.6.c}$$

Les deux d-premiers monômes de (2.6.c), i.e. e et $\gamma^{\nu_1}\delta^{\tau_1}$ sont non redondants (cela résulte de 1.2.j). On a donc $\gamma^{n_0}\delta^{t_0} = e$ et $\gamma^{n_1}\delta^{t_1} = \gamma^{\nu_1}\delta^{\tau_1}$. Formons $p_1 = p^* \boxminus (\gamma^{\nu_1}\delta^{\tau_1})^*$. On a $\gamma^{\nu_2}\delta^{\tau_2} \preceq p^*$ et $\gamma^{\nu_2}\delta^{\tau_2} \not\preceq (\gamma^{\nu_1}\delta^{\tau_1})^*$ (sinon, on contredirait l'*-minimalité de p). Il résulte de (1.5.c) et de (2.6.c) que

$$p_1 = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{N} \times (\mathbb{N}^{q-1} \setminus \{0\}),} \gamma^{\alpha_1\nu_1}\delta^{\alpha_1\tau_1} \otimes \ldots \otimes \gamma^{\alpha_q\nu_q}\delta^{\alpha_q\tau_q}$$

Comme $\gamma^{\nu_2}\delta^{\tau_2}$ est le terme de plus petite valuation de cette somme, il est non redondant. Ainsi, $\gamma^{\nu_2}\delta^{\tau_2}$ est le premier terme de la forme canonique de p_1. On monterait de même que $\gamma^{\nu_3}\delta^{\tau_3}$ est le premier terme de la forme canonique de $p_2 = p_1 \boxminus (\gamma^{\nu_1}\delta^{\tau_1} \oplus \gamma^{\nu_2}\delta^{\tau_2})^*$. On obtient de la sorte tous les monômes de p_0 connaissant seulement p^*. L'unicité de p_0 en résulte. ■

Nous montrons maintenant comment calculer le polynôme *-minimal associé à p.

2.6.4 Test de *-redondance On veut tester si

$$\gamma^n\delta^t \preceq (\gamma^{n_1}\delta^{t_1} \oplus \ldots \oplus \gamma^{n_k}\delta^{t_k})^* \quad . \tag{2.6.d}$$

Ce problème est équivalent à l'existence d'une solution entière au système de deux inéquations linéaires à k inconnues positives ou nulles:

$$x \in \mathbb{N}^k, \qquad \begin{cases} n \geq x_1 n_1 + \ldots + x_k n_k \\ t \leq x_1 t_1 + \ldots + x_k t_k \quad . \end{cases} \tag{2.6.e}$$

En observant que le volume du simplexe

$$x_i \geq 0, \quad n \geq x_1 n_1 + \ldots + x_k n_k$$

est $\frac{1}{k!}\frac{n^k}{n_1 \ldots n_k}$, on a une estimation du nombre de points à énumérer pour vérifier (2.6.e).

2.6.5 Exemple Soit à calculer

$$p^* \quad \text{où} \quad p = \gamma^3\delta^3 \oplus \gamma^4\delta^4 \oplus \gamma^7\delta^6 \oplus \gamma^{10}\delta^{10} \quad .$$

On observe que

$$\begin{cases} 10 = 3 \times 2 + 4 \times 1, \\ \\ \text{i.e } \ \gamma^{10}\delta^{10} \preceq (\gamma^3\delta^3)^2(\gamma^4\delta^4) \end{cases} \quad .$$

Ainsi, $\gamma^{10}\delta^{10}$ est *-redondant, et l'on a $p^* = (p')^*$ avec $p' = \gamma^3\delta^3 \oplus \gamma^4\delta^4 \oplus \gamma^7\delta^6$. En outre,

$$\begin{cases} 7 \geq 3 \times 2, \\ 6 \leq 3 \times 2 \\ \text{i.e } \ \gamma^7\delta^6 \preceq (\gamma^3\delta^4)^2 \quad , \end{cases}$$

et donc $\gamma^7\delta^6$ est *-redondant dans p'. On a finalement:

$$p^* = (\gamma^3\delta^3 \oplus \gamma^4\delta^4)^* = e \oplus \gamma^3\delta^3 \oplus \gamma^4\delta^4 \oplus \gamma^6\delta^6(\gamma\delta)^* \quad ,$$

la dernière égalité résultant de 5.3.1.

2.6.6 Exemple Etant donnée une série rationnelle s, on peut en adaptant la preuve du Théorème 2.6.3 trouver un éventuel polynôme p tel que $p^* = s$. Soit la série

$$s = e \oplus \gamma^4\delta^4 \oplus \gamma^5\delta^5 \oplus \gamma^7\delta^6 \oplus \gamma^8\delta^8 \oplus \gamma^9\delta^9 \oplus \gamma^{10}\delta^{10} \oplus \gamma^{12}\delta^{12}(\gamma\delta)^* \quad .$$

Le premier monôme critique de s est $p_1 = \gamma^4\delta^4$. On a

$$s_1 = s \boxminus (\gamma^4\delta^4)^* = \gamma^5\delta^5 \oplus \gamma^7\delta^6 \oplus \gamma^9\delta^9 \oplus \gamma^{10}\delta^{10} \oplus \gamma^{13}\delta^{13}(e \oplus \gamma\delta \oplus \gamma^2\delta^2)\left(\gamma^4\delta^4\right)^* \quad .$$

Le second monôme de p est le premier de s_1, d'où $p_2 = \gamma^5\delta^5$,

$$s_2 = s_1 \boxminus (p_1 \oplus p_2)^* = \gamma^7\delta^6 \quad .$$

On a donc $p_3 = \gamma^7\delta^6$. Réciproquement, soit $p = p_1 \oplus p_2 \oplus p_3$. On vérifie que $p^* = s$.

2.6.7 Contre exemple Soit $s = e \oplus \gamma^6\delta(\gamma\delta)^*$. La pente ultime de s ($\sigma_\infty(s) = 1$) n'est pas atteinte par un monôme, et l'on voit facilement que s n'est pas l'étoile d'un polynôme. On a cependant $s = s^*$.

2.7 Quelques raffinements possibles

Nous montrons comment le produit

$$(p \oplus qr^*)q'(m)^* \tag{2.7.a}$$

qui intervenait dans la preuve de VII,5.2.1 pour le calcul de ss' peut se calculer en introduisant une nouvelle congruence.

2.7.1 Définition (Congruence modulo m^*) *Soit m un monôme. On appelle congruence modulo m^* la relation associée à*

$$\varphi_m : \quad \varphi_m(s) = sm^* \quad .$$

On constate que le calcul de (2.7.a) peut s'effectuer dans le dioïde quotient de $\mathcal{M}_{\mathrm{ax}}^{\mathrm{in}}[[\gamma,\delta]]$ par φ_m.

2.7.2 Test de redondance dans $\mathcal{M}_{\mathrm{ax}}^{\mathrm{in}}[\gamma,\delta]/m^*$ Soit $\mu = \gamma^\nu\delta^\tau$. On a

$$\gamma^n\delta^t \preceq \gamma^{n'}\delta^{t'}\mu^* \;\Leftrightarrow\; \exists k \in \mathbb{N} \begin{cases} n + k\nu \geq n' \\ t + k\tau \leq t' \end{cases} \Leftrightarrow n + \nu[\frac{t'-t}{\tau}] \geq n' \quad .$$

2.7.3 Exemple Soit à calculer (2.7.a) avec $s = p \oplus qr^* = \delta^5 \oplus \gamma\delta^8 \oplus \gamma^2\delta^{12}(e \oplus \gamma^3\delta^5)(\gamma^4\delta^6)^*$, $q' = e$ et $m = (\gamma\delta^2)$. On a $p \equiv \delta^5$ et $q \equiv e$, d'où

$$sm^* = (\delta^5 \oplus \gamma^2\delta^{12}(\gamma^4\delta^6)^*)m^* \quad .$$

En outre,

$$\delta^5 \oplus \gamma^2\delta^{12}(\gamma^4\delta^6)^* = \delta^5 \oplus \gamma^2\delta^{12} \oplus \gamma^6\delta^{18} \oplus \gamma^{10}\delta^{24}(\gamma^4\delta^6)^* \equiv \delta^5 \oplus \gamma^2\delta^{12} \oplus \gamma^6\delta^{18}$$

car $\gamma^{10}\delta^{24}(\gamma^4\delta^6)^*(\gamma\delta^2)^* = \gamma^{10}\delta^{24}(\gamma\delta^2)^* \preceq \delta^5(\gamma\delta^2)^{10}(\gamma\delta^2)^* \preceq \delta^5(\gamma\delta^2)^*$. Finalement

$$sm^* = (\delta^5 \oplus \gamma^2\delta^{12} \oplus \gamma^6\delta^{18})(\gamma\delta^2)^* = \delta^5 \oplus \gamma^2\delta^{12} \oplus \gamma^6\delta^{18}(\gamma\delta^2)^* \quad .$$

Si le temps et les quantités peuvent prendre des valeurs irrationnelles, la relation entre rationalité et périodicité tombe (considérer la somme $(\gamma\delta)^* \oplus (\gamma^{\sqrt{2}}\delta^{\sqrt{2}})^*$). Cette difficulté n'est pas artificielle dans la mesure où on peut l'interpréter comme le cas limite d'une pathologie qui se produit avec des temps et quantités entiers. Lorsque les pentes des séries sont proches, la taille du transitoire devient importante et les représentations périodiques deviennent peu pratiques. Cette difficulté est illustrée par l'exemple suivant:

2.7.4 Exemple On a $(\gamma^{20}\delta)^* \oplus \delta(\gamma^{21}\delta)^* = \delta \oplus \gamma^{21}\delta^2 \oplus \gamma^{42}\delta^3 \oplus \gamma^{63}\delta^4 \oplus \gamma^{84}\delta^5 \oplus \gamma^{105}\delta^6 \oplus \gamma^{126}\delta^7 \oplus \gamma^{147}\delta^8 \oplus \gamma^{168}\delta^9 \oplus \gamma^{189}\delta^{10} \oplus \gamma^{210}\delta^{11} \oplus \gamma^{231}\delta^{12} \oplus \gamma^{252}\delta^{13} \oplus \gamma^{273}\delta^{14} \oplus \gamma^{294}\delta^{15} \oplus \gamma^{315}\delta^{16} \oplus \gamma^{336}\delta^{17} \oplus \gamma^{357}\delta^{18} \oplus \gamma^{378}\delta^{19} \oplus \gamma^{399}\delta^{20} \oplus \gamma^{420}\delta^{21}(\gamma^{20}\delta)^*$.

Une manière d'esquiver la difficulté décrite ci-dessus consisterait à abandonner les représentations de type périodique, et de représenter une série par une décomposition en éléments simples non redondante:

$$s = \bigoplus_{i=1}^{k} m_i r_i^* \quad . \tag{2.7.b}$$

A la différence de la forme générale des rationnels donnée en §3.2,(3.2.a), le test $m \preceq s$, où m est un monôme n'exigera que la résolution d'inéquations linéaires diophantiennes à une inconnue, et l'on pourra concevoir pour les formes de type (2.7.b) des algorithmes de calcul rationnel assez simples. La somme d'étoiles non redondantes $(\gamma^{20}\delta)^* \oplus \delta(\gamma^{21}\delta)^*$ sera alors considérée comme primitive, fournissant un codage plus économique que 2.7.4 Cependant, une difficulté analogue se poserait à nouveau pour ces représentations. On montre aisément que pour N grand, $s = (\gamma\delta \oplus \gamma^N\delta^{2N})^*$ ne se représente comme une somme de type (2.7.b) ayant un petit nombre de termes.

3 Calcul de la cyclicité

On a vu au Chapitre VII les deux résultats de cyclicité suivants pour des matrices irréductibles.

$A \in (\mathcal{P}_{\text{finies}}(\mathbb{N}))^{n\times n}$	$A \in (\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[\gamma,\delta])^{n\times n}$
la période de A^*_{ij} divise $\text{ppcm}_C \text{pgcd}_{c\in C}\, w(c)$	la période de A^*_{ij} divise $\sqcup_C \sqcap_{c\in C}\, w(c)$.

Dans le premier cas, on majore la période de A^*_{ij} par le ppcm sur les composantes fortement connexes C du multigraphe associé à A des pgcd des poids des circuits de la composante fortement connexe C. Dans le second cas, on donne une majoration analogue mais restreinte aux composantes fortement connexes et circuits du graphe critique et faisant intervenir les lois $\sqcup$ et $\sqcap$ (qui coïncident avec les ppcm et pgcd composante par composante pour les circuits critiques). On se ramène de la sorte aux deux problèmes suivants: 1/ déterminer le multigraphe critique et 2/ déterminer le pgcd des poids des circuits d'une composante fortement connexe d'un multigraphe (la détermination des composantes fortement connexes étant par ailleurs aisée et classique, cf. Tarjan [92]).

3.1 Détermination du multigraphe critique

On considère un multigraphe dont chaque arc est valué par un monôme $\gamma^n\delta^t$.

3.1.1 Réduction à un graphe Quitte à rajouter des sommets comme sur la Figure B.4, on pourra se ramener à un graphe orienté (i.e. avec au plus un arc de j à i pour chaque couple de sommets (i, j)). On pourra alors noter $\gamma^{n_{ij}}\delta^{t_{ij}}$ le monôme valuant l'unique arc $j \mapsto i$.

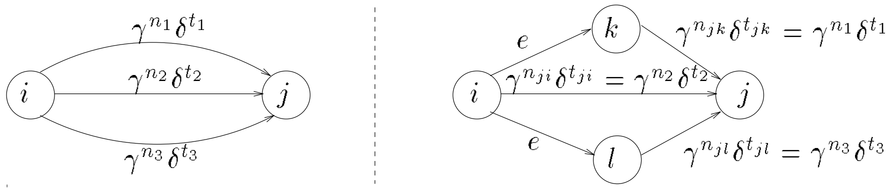


Figure B.4: Réduction d'un multigraphe à un graphe

On considère

$$\lambda = \min_c \sigma(w(c)) = \min_k \min_{i_1 \ldots i_k} \frac{n_{i_1 i_2} + \ldots + n_{i_k i_1}}{t_{i_1 i_2} + \ldots + t_{i_k i_1}} \tag{3.1.a}$$

(pente minimale des circuits du graphe, égale à la pente minimale des circuits du multigraphe originel). On rappelle que le circuit $c = (i_1, \ldots, i_k)$ est critique s'il réalise le min à droite de (3.1.a). On cherche l'ensemble des arcs et sommets appartenant à un circuit critique. Lorsque tous les t_i sont égaux à 1, l'algorithme de Karp (cf. [54] ainsi que VIII,2.2.2) permet de calculer λ. De manière plus générale, on pourra utiliser l'un des algorithmes pour les problèmes de ratio minimum donnés par Gondran et Minoux dans l'Annexe V de [48] ou énumérer les circuits d'après l'algorithme 3.2.9 du Chapitre IX. Formons (comme en IX,§6) la matrice C à coefficients dans $\mathbb{R}_{\min}$ telle que:

$$C_{ij} = n_{ij} - \lambda t_{ij} \ .$$

Les circuits de la matrice C on pour poids moyen minimum e, donc $C^+ = \bigoplus_{n \geq 1} C^n$ converge (et se calcule en $O(n^3)$ via un algorithme de Gauss (cf. 0,4.2.1), où n est la taille de la matrice). L'observation suivante détermine immédiatement les arcs et sommets critiques:

3.1.2 Proposition *L'arc $j \mapsto i$ appartient à un circuit critique ssi $C_{ij} \otimes C^+_{ji} = e$.*

Preuve Il suffit de remarquer qu'un circuit est critique dans le graphe initial ssi il est de poids e pour la matrice C. ∎

3.2 Calcul de la cyclicité d'un graphe valué par des naturels

On considère le problème suivant: étant donné un graphe fortement connexe dont les arcs sont valués par des naturels, trouver le pgcd des poids (additifs) des circuits du graphe. En adjoignant à $\mathbb{N}$ un élément ε tel que par convention $\gcd(\varepsilon, x) = x$ et $\varepsilon + x = \varepsilon$, et en formant la matrice A telle que A_{ij} soit égale à la valuation de l'arc de j à i s'il existe et à ε sinon, on se ramène à l'expression suivante:

$$c(A) = \mathrm{pgcd}_c w(c) = \mathrm{pgcd}_k \mathrm{pgcd}_{i_1,\ldots,i_k}(A_{i_1 i_2} + \ldots + A_{i_k i_1}) \ . \tag{3.2.a}$$

La cyclicité des matrices dans la théorie de Perron-Frobenius correspond au cas particulier où les A_{ij} ne prennent que les valeurs 1 et ε. On doit à Atallah et Denardo [1, 27] un algorithme dans ce dernier cas. En apportant une modification minime à cet algorithme, on peut calculer (3.2.a).

Atallah et Denardo partent d'un arbre extrait du graphe et recouvrant tous les sommets (un tel arbre s'obtient sans difficulté à l'aide d'un algorithme de Tarjan [92]). On a donné un exemple d'un tel arbre (arcs en traits gras) sur la Figure B.5. Soit r la racine de l'arbre. On notera $v(j)$ la valuation de l'unique chaîne de l'arbre allant de r à j. Soit $\Gamma(j)$ l'ensemble des successeurs d'un sommet j (i.e. $\Gamma(j) = \{k \mid A_{kj} \neq \varepsilon\}$). On a alors:

3.2.1 Proposition *(Atallah et Denardo modifié) On a*

$$c(A) = \mathrm{gcd}_j \mathrm{gcd}_{i \in \Gamma(j)} [v(j) - v(i) + A_{ij}] \ . \tag{3.2.b}$$

Preuve Soit c' le second membre de (3.2.b). Pour tout j, notons p_j la chaîne de l'arbre de r à j. Comme le graphe est fortement connexe, il existe également un chemin du graphe (mais en général pas de l'arbre) allant de j à r, soit q_j. On a les deux circuits $q_i p_i$ et $q_i(i,j)p_j$, d'où:

$$\begin{array}{lcl} c & | & w(q_i p_i) = w(q_i) + w(p_i) = w(q_i) + v(i) \\ c & | & w(q_i(i,j)p_j) = w(q_i) + w((i,j)) + w(p_j) = w(q_i) + A_{ij} + v(j) \end{array}$$

soit en faisant la différence $c \mid A_{ij} + v(j) - v(i)$ d'où $c(A) \mid c'$. Réciproquement, soit $\alpha = (i_1, \ldots, i_k)$ un circuit. On a

$$w(\alpha) = A_{i_1 i_2} + \ldots + A_{i_k i_1} \ .$$

Comme

$$\begin{array}{l} c' \mid v(i_2) - v(i_1) + A_{i_1 i_2}, \\ \vdots \\ c' \mid v(i_1) - v(i_k) + A_{i_k i_1} \end{array}$$

on a en sommant $c' \mid w(\alpha)$ donc $c' \mid c(A)$. ■

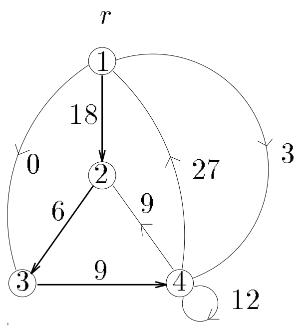


Figure B.5: Un graphe et un arbre sous-jacent (en gras)

3.2.2 Exemple Pour le graphe de la Figure B.5, on obtient par application de (3.2.b):

$$\begin{aligned} c(A) = \mathrm{pgcd}[&\mathrm{pgcd}(0 - 18 + 18, 0 - 24 + 0, 0 - 33 + 3), \\ &\mathrm{pgcd}(18 - 24 + 6), \mathrm{pgcd}(24 - 33 + 9), \\ &\mathrm{pgcd}(33 - 9 + 18, 33 - 0 + 27, 33 - 33 + 12)] = 6 \ . \end{aligned}$$

Bibliographie

[1] M.J. Atallah. Finding the cycle index of an irreducible, nonnegative matrix. *SIAM J. Comput*, 11:567–570, 1982.

[2] J.P. Aubin. *L'Analyse non linéaire et ses motivations économiques.* Masson, 1984.

[3] F. Baccelli, G. Cohen, G. Olsder, and J.P. Quadrat. *Synchronization and Linearity.* Wiley, 1992.

[4] R.C. Backhouse and B.A. Carré. Regular algebra applied to path finding problems. *J. of the Inst. of Maths and Appl.*, 15:161–186, 1975.

[5] C. Benzaken. Structures algébrique des cheminements: pseudo-treillis, gerbiers de carré nul. In G. Biorci, editor, *Network and Switching Theory*, pages 40–47. Academic Press, 1968.

[6] A. Berman and R.J. Plemmons. *Nonnegative matrices in the mathematical sciences.* Academic Press, 1979.

[7] J. Berstel and C. Reutenauer. *Les séries rationnelles et leurs langages.* Masson, Paris, 1984.

[8] A. Bigard, K. Keimel, and S. Wolfenstein. *Groupes et anneaux réticulés.* Number 608 in Lecture notes in Mathematics. Springer.

[9] G. Birkhoff. *Lattice Theory*, volume XXV of *American Methematical Society Colloquium Publications.* A.M.S, Providence, Rhode Island, 1940.

[10] T.S. Blyth. Matrices over ordered algebraic structures. *J. of London Mathematical Society*, 39:427–432, 1964.

[11] T.S. Blyth and M.F. Janowitz. *Residuation Theory.* Pergamon press, 1972.

[12] N. Bourbaki. *Eléments de Mathématique (Algèbre).* Hermann, Paris, 1970.

[13] A. Brauer. On a problem of partitions. *Am. J. Math.*, 64:299–312, 1942.

[14] R. R. Brualdi and H. J. Ryser. *Combinatorial Matrix Theory.* Cambridge University Press, 1991.

[15] P. Caspi and N. Halbwachs. A functional model for describing and reasoning about time behaviour of computing systems. *Acta Informatica*, 22:595–627, 1986.

[16] P. Chretienne. *Les Réseaux de Petri Temporisés.* Thèse Université Pierre et Marie Curie (Paris VI), Paris, 1983.

[17] G. Cohen, D. Dubois, J.P. Quadrat, and M. Viot. Analyse du comportement périodique des systèmes de production par la théorie des dioïdes. Report 191, INRIA, Le Chesnay, France, 1983.

[18] G. Cohen, D. Dubois, J.P. Quadrat, and M. Viot. A linear system theoretic view of discrete event processes and its use for performance evaluation in manufacturing. *IEEE Trans. on Automatic Control*, AC–30:210–220, 1985.

[19] G. Cohen, S. Gaubert, R. Nikoukhah, and J.P. Quadrat. Convex analysis and spectral analysis of timed event graphs. In *28th Conf. Decision and Control*, Tampa, FL, Dec 1989.

[20] G. Cohen, P. Moller, J.P. Quadrat, and M. Viot. Linear system theory for discrete-event systems. In *23rd IEEE Conf. on Decision and Control*, Las Vegas, Nevada, 1984.

[21] G. Cohen, P. Moller, J.P. Quadrat, and M. Viot. Une théorie linéaire des systèmes à événements discrets. Report 362, INRIA, Le Chesnay, France, 1985.

[22] G. Cohen, P. Moller, J.P. Quadrat, and M. Viot. Dating and counting events in discrete event systems. In *25th IEEE Conf. on Decision and Control*, Athens, Greece, 1986.

[23] G. Cohen, P. Moller, J.P. Quadrat, and M. Viot. Algebraic tools for the performance evaluation of discrete event systems. *IEEE Proceedings: Special issue on Discrete Event Systems*, 77(1), January 1989.

[24] R.A. Cuninghame-Green. *Minimax Algebra.* Number 166 in Lectures notes in Economics and Mathematical Systems. Springer, Berlin, 1979.

[25] R.A. Cuninghame-Green. The characteristic maxpolynomial of a matrix. *J. of Math. Analysis and Appl.*, 95:110–116, 1983.

[26] R.A. Cuninghame-Green. Algebraic realization of discrete dynamics systems. In *Proceedings of the 1991 IFAC Workshop on Discrete Event System Theory and applications in manufacturing and social phenonmena*, Shenyang,China, June 1991.

[27] E.V. Denardo. Period of connected networks. *Math. Oper. Res.*, 2:20–24, 1977.

[28] M. di Mascolo. *Modélisation et évaluation de performance de systèmes de production gérés en Kanban.* Thèse, Institut National Polytechnique de Grenoble, Grenoble, 1990.

[29] P. Dubreil and M.L. Dubreil-Jacotin. *Leçons d'Algèbre Moderne, 2nd ed.* Dunod, Paris, 1964.

[30] M.L. Dubreil-Jacotin, L. Lesieur, and R. Croisot. *Leçons sur la Théorie des Treillis, des Structures Algébriques Ordonnées, et des Treillis géométriques*, volume XXI of *Cahiers Scientifiques.* Gauthier Villar, Paris, 1953.

[31] P.I. Dudnikov and S.N. Samborskiĭ. Endomorphisms of semimodules over semirings with an idempotent operation. Report 87-48, Inst. Mat. Akad. Nauk Ukrain SSR, 1987. preprint (Russian) MR 89f:16057.

[32] S. Eilenberg and M.P. Schützenberger. Rational sets in commutative monoids. *J. Algebra*, 13:173–191, 1969.

[33] L. Elsner, C.R. Johnson, and J. Dias da Silva. The Perron root of a weighted geometric mean of nonnegative matrices. *Linear Multilinear Algebra*, 24:1–13, 1988.

[34] C.J. Everett. Closure operators and galois theory in lattices. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 55:514–525, 1944.

[35] P. Faurre, M. Clerget, and F. Germain. *Opérateurs Rationnels Positifs: applications à l'instabilité et aux processus aléatoires.* Dunod, Paris, 1979.

[36] M. Fliess. Matrices de hankel. *J. Math. Pures. Appl.*, 15:161–186, 1975.

[37] M. Fliess. Séries rationnelles positives et processus stochastiques. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, XI(1):1–21, 1975.

[38] M. Fliess. Fonctionnelles causales non linéaires et indéterminées non commutatives. *Bull. Soc. Math. France*, 109:3–40, 1981.

[39] S. Friedland. Limit eigenvalues of nonnegatives matrices. *Linear Alg. and Appl.*, 74:173–178, 1986.

[40] G. Frobenius. Über matrizen aus nicht negativen elementen. *S.-B. Kgl. Preuss. Akad. Wiss.*, pages 456–477, 1912.

[41] S. Gaubert. An algebraic method for optimizing resources in timed event graphs. In A.Bensoussan and J.L. Lions, editors, *Proceedings of the 9th International Conference on Analysis and Optimization of Systems,* Antibes, June 1990, number 144 in Lecture Notes in Control and Information Sciences. Springer, 1990.

[42] S. Gaubert and C. Klimann. Rational computation in dioid algebra and its application to performance evaluation of discrete event systems. In G. Jacob and F. Lamnabhi-Lagarrigue, editors, *Algebraic computing in control*, number 165 in Lecture Notes in Control and Inf. Sci. Springer, 1991.

[43] G. Gierz, K.H. Hofmann, K. Keimel, J.D Lawson, M. Mislove, and D.S. Scott. *A Compendium of Continuous Lattices.* Springer, 1980.

[44] M. Gondran. Algèbre linéaire et cheminement dans un graphe. *R.A.I.R.O.*, V1:77–99, 1975. (Note EDF 1973).

[45] M. Gondran and M. Minoux. Valeurs propres et vecteurs propres en théorie des graphes. In *Problèmes combinatoires et théorie des graphes*, number 260 in Colloques internationaux CNRS, Orsay, 1976.

[46] M. Gondran and M. Minoux. Valeurs propres et vecteurs propres dans les dioïdes et leur interprétation en théorie des graphes. *EDF, Bulletin de la Direction des Etudes et Recherches, Serie C, Mathématiques Informatique*, 2:25–41, 1977.

[47] M. Gondran and M. Minoux. L'indépendance linéaire dans les dioïdes. *E.D.F., Bulletin de la Direction des Etudes et Recherches, Série C, Mathématiques, Informatique*, 1:67–90, 1978.

[48] M. Gondran and M. Minoux. *Graphes et algorithmes.* Eyrolles, Paris, 1979.

[49] M. Gondran and M. Minoux. Linear algebra in dioids: a survey of recent results. *Annals of Discrete Mathematics*, 19:147–164, 1984.

[50] D.A. Gregory and N.J. Pullman. Semiring rank: boolean rank and nonnegative rank factorizations. *J. Combin. Inform. System Sci.*, 8:223–233, 1983.

[51] H.P. Hillion. *Modélisation et Analyse des Systèmes de Production Discrets par les Réseaux de Petri.* Thèse de doctorat de l'université pierre et marie curie (paris vi), Université Pierre et Marie Curie, Janvier 1989.

[52] H.P. Hillion and J.M. Proth. Performance evaluation of job-shop systems using timed event-graphs. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 34(1):3–9, Jan 1989.

[53] G. Jacob. Réalisation des sytèmes réguliers (ou bilinéaires) et séries formelles non commutatives. In I.D. Landau, editor, *Outils et Modèles Mathématiques pour l'Automatique, l'Analyse des Données, et le Traitement du Signal*, pages 325–358, Paris, 1981. CNRS.

[54] R.M. Karp. A characterization of the minimum mean-cycle in a digraph. *Discrete Maths.*, 23:309–311, 1978.

[55] K.H. Kim. *Boolean Matrix Theory and Applications.* Marcel Dekker, New York, 1982.

[56] D. König. *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen.* Chelsea, 1950.

[57] H. Krawczyk and A. Paz. The diophantine problem of frobenius: a close bound. *Discrete Applied Mathematics*, 23:289–291, 1989.

[58] J. Kuntzmann. *Théorie des réseaux. Graphes.* Dunod, Paris, 1972.

[59] S. Laftit, J.M. Proth, and X.L. Xie. Optimization of invariant criteria for event graphs. 1992. preprint.

[60] G. Lallement. *Semigroups and Combinatorial Applications.* Wiley, 1979.

[61] E.L. Lawler. *Combinatorial Optimization, Networks ands Matroids.* Holt, Rinehart and Winston, 1976.

[62] M. Lothaire. *Combinatorics on Words.* Encyclopedia of Mathematics and its applications. Addison-Wesley, 1983.

[63] R.D. Luce. A note on boolean matrix theory. *Proc Amer. Math. Soc.*, 3:382–388, 1952.

[64] R. Lyndon and D. Schupp. *Combinatorial Group Theory.* Ergebnisse der mathematik und ihrer Grenzbiete. Springer Verlag, New York.

[65] W. Magnus, A. Karass, and D. Solitar. *Combinatorial Group Theory.* Dover, 1976.

[66] M. Marcus and H. Minc. *A Survey of Matrix Theory and Matrix Inequalities.* Allyn and Bacon, Boston, 1964.

[67] V.P. Maslov. *Méthodes Operatorielles.* Mir, Moscou, 1973. trad. fr. 1987.

[68] H. Minc. *Permanents.* Addison Wesley, 1978.

[69] H. Minc. *Nonnegative matrices.* Wiley, 1988.

[70] P. Moller. Théorème de cayley-hamilton dans les dioides et application à l'étude des systèmes à événements discrets. In *7th INRIA International Conference on Analysis and Optimization of Systems*, Antibe,France, 1986. Springer Verlag.

[71] P. Moller. Notions de rang dans les dioides vectoriels. In *CNRS/CNET/INRIA Seminar: Algèbres Exotiques et Systèmes à Evénements Discrets*, Issy-les-Moulineaux, France, 1987.

[72] P. Moller. *Théorie Algébrique des Systèmes à Evńements Discrets.* PhD thesis, Ecole des Mines, Paris, 1988.

[73] G.J. Olsder. Some results on the minimal realization of discrete event systems. In *25th IEEE Conf. on Decision and Control*, Athens, Greece, 1986.

[74] G.J. Olsder. On the characteristic equation and minimal realizations for discrete event dynamic systems. In A. Bensoussan and J.L. Lions, editors, *Analysis and Optimizaton of Systems*, number 83 in Lecture notes in Control and Information Sciences, pages 189–201. Springer, 1986.

[75] G.J. Olsder and R.E. de Vries. On an analogy of minimal realizations in conventional and discrete-event dynamic systems. In *Algebres Exotiques et Systèmes à Evénements Discrets: Sèminaire CNRS/CNET/INRIA*, Issy les Moulineaux, France, Juin 1987.

[76] G.J. Olsder, J.A.C. Resing, R.E. de Vries, M.S. Keane, and G. Hooghiemstra. Discrete event systems with stochastic processing times. In *27th IEEE Conf. on Decision and Control*, Austin, Texas, 1988.

[77] G.J. Olsder and C. Roos. Cramer and cayley-hamilton in the max-algebra. *Linear Algebra and its Applications*, 101:87–108, 1988.

[78] O. Ore. Galois connexions. *Trans. Amer. Math Soc.*, 55:493–513, 1944.

[79] Max Plus. L'algèbre $(\max, +)$ et sa symétrisation ou l'algèbre des équilibres. *Comptes Rendus à l'Académie des Sciences, Section Automatique*, 1990.

[80] Max Plus. Linear systems in $(\max, +)$-algebra. In *Proceeding of the 29th Conference on Decision and Control*, Honolulu, December 1990.

[81] Max Plus. A linear system theory for systems subject to synchronization and saturation constraints. In *Proceedings of the first European Control Conference*, Grenoble, July 1991.

[82] Max Plus. Second order theory of min-linear systems and its application to discrete event systems. In *Proceedings of the 30th CDC*, Brighton, December 1991.

[83] J.M. Proth and X.L. Xie. Les critères invariants dans un graphe d'événements déterministes. *CRAS, Série I*, 313:797–800, 1991.

[84] C. Reutenauer. Ensembles libres de chemins dans un graphe. *Bull. Soc. Math. Fr.*, 114(2):135–152, 1986.

[85] C. Reutenauer. *Aspects mathématiques des réseaux de Petri.* Masson, Paris, 1989.

[86] C. Reutenauer and H. Straubing. Inversion of matrices over a commutative semiring. *J. Algebra*, 88(2):350–360, June 1984.

[87] R. T. Rockafellar. *Convex Analysis.* Princeton University Press, New Jersey, 1970.

[88] R.E. Rutherford. Inverses of boolean matrices. *Proc. Glasgow Math. Assoc.*, 6:49–53, 1963.

[89] S.N. Samborskiĭ and A.A. Tarashchan. On semirings arising in multicriterion optimization problems and problems of analysis of computational media. *Soviet Math. Dokl*, 40(2), 1990.

[90] I. Stewart. *Galois Theory.* Chapman and Hall, 1973.

[91] H. Straubing. A combinatorial proof of the cayley-hamilton theorem. *Discrete Mathematics*, 43:273–279, 1983.

[92] R.E. Tarjan. Depth first search and linear graph algorithms. *SIAM J. Comput*, 1:146–160, 1972.

[93] A.D. Ventcel'. On the asymptotics of eigenvalues of matrices with elements of order $\exp(-v_{i,j}/(2\epsilon^2))$. *Soviet Math. Dokl.*, 13(1), 1972.

[94] Y. Vitek. Bounds for a linear diophantine problem of Frobenius. *J. London Math. Soc.*, 2(10):79–85, 1975.

[95] Y. Vitek. Bounds for a linear diophantine problem of Frobenius ii. *Canad. J. Math.*, 28(6):1280–1288, 1976.

[96] Y. Vitek. *Exponents of primitive matrices and a Diophantine problem of Frobenius.* Ph.d. thesis, Technion-Israel Institute of Technology, Haifa, Israel, 1977.

[97] E. Wagneur. Moduloids and pseudomodules. 1. dimension theory. In J.L. Lions and A. Bensoussan, editors, *Analysis and Optimization of Systems*, Lecture notes in Control and Information Sciences, 1988.

[98] E. Wagneur. Moduloids and pseudomodules. 3. the lattice structure problem. Report, GERAD,HEC, Montréal, Septembre 1989. Cahiers du GERAD.

[99] E. Wagneur. Moduloids and pseudomodules. 1. dimension theory. *Discrete Math.*, 98:57–73, 1991.

[100] J.M.M. Wedderburn. Boolean linear associative algebra. *Ann. Math.*, 35(1):185–194, 1934.

[101] Xu Xinhe, Yu Haibin, Lui Changyou, and Wang Liming. Taking sum and product of discrete event star sequences. In *Proceedings of the 1991 IFAC Workshop on Discrete Event System Theory and Applications in Manufacturing and Social Phenomena*, pages 16–21, Shenyang, Chnia, June 1991. International Academic Publishers.

[102] M. Yoeli. A note on a generalization of boolean matrix theory. *Amer. Math. Monthly*, 68:552–557, 1961.

[103] U. Zimmermann. *Linear and Combinatorial Optimization in Ordered Algebraic Structures.* North Holland, 1981.

Index