Chapitre I

Symétrisation

Introduction

On introduit ici une notion de symétrisation, valide dans un demi-anneau quelconque. Son intérêt essentiel est d'établir de manière algébrique des identités utiles pour l'étude des équations linéaires. On obtiendra en particulier une condition nécessaire de type Cramer pour le système $Ax = b$ (Théorème 2.2.1). L'étude des conditions suffisantes ainsi que des systèmes plus généraux de type $Ax \oplus b = Cx \oplus d$ qui requiert des hypothèses supplémentaires sur le demi-anneau, est traitée dans le chapitre sur les systèmes d'équilibres linéaires. On considère essentiellement dans ce chapitre les propriétés générales et combinatoires. On verra au chapitre suivant qu'il existe dans certains cas une symétrisation canonique, jouissant de propriétés supplémentaires, et coïncidant avec la notion classique d'anneau symétrisé lorsque l'on part d'un demi-anneau $\mathcal{D}$ où l'addition est simplifiable.

1 Structure de demi-anneau symétrisé

1.0.1 Définition *On appelle demi-anneau symétrisé un demi-anneau $(\mathcal{S}, \oplus, \otimes)$ muni d'une application $\ominus : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ vérifiant:*

$$\begin{array}{rl} \ominus(a \oplus b) = (\ominus(a)) \oplus (\ominus(b)) & \text{(additivité)} \\ \ominus(\ominus(a)) = a & \text{(involutivité)} \\ \ominus(a \otimes b) = (\ominus(a)) \otimes b = a \otimes (\ominus(b)) & \text{(règle des signes).} \end{array} \tag{1.0.a}$$

On notera comme d'habitude $\ominus a$ pour $\ominus(a)$ et $a \ominus b$ pour $a \oplus (\ominus a)$.

1.0.2 Définition *Soit $\mathcal{D}$ un demi-anneau, on appelle* symétrisation *de $\mathcal{D}$ la donnée d'un demi-anneau symétrisé $\mathcal{S}$ et d'un morphisme injectif de demi-anneau $i : \mathcal{D} \to \mathcal{S}$, tel que $i(\mathcal{D})$ engendre $\mathcal{S}$.*

On notera $(\mathcal{S}, i)$ une telle symétrisation. Par "engendre", on entend que $\mathcal{S} = i(\mathcal{D}) \ominus i(\mathcal{D})$, ou de manière équivalente, que $\mathcal{S}$ est le plus petit demi-anneau symétrisé contenant $i(\mathcal{D})$. Les éléments de la forme $i(a)$ seront appelés positifs, et l'on notera $\mathcal{S}^{\oplus} = i(\mathcal{D})$.

1.0.3 Exemple $(\mathbb{Z}, +, \times, -)$ est un demi-anneau symétrisé. C'est une symétrisation de $(\mathbb{N}, +, \times)$ pour l'injection canonique, et l'on a $\mathbb{Z}^{\oplus} = \mathbb{N}$.

1.0.4 Exemple L'ensemble des parties de $\mathbb{R}^2$, muni de l'union, du produit défini par:

$$A \otimes B = \{ab \mid (a,b) \in A \times B\}$$

et de la symétrie de centre $(0,0)$ est un demi-anneau symétrisée.

1.0.5 Exemple Soit $\mathcal{D}$ un demi-anneau. En prenant l'identité pour signe moins ($\ominus x = x$), on obtient un demi-anneau symétrisé $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes, \mathrm{Id})$.

1.0.6 Remarque Etant donné un demi-anneau symétrisé $(\mathcal{S}, \oplus, \otimes, \ominus)$, on a la symétrisation triviale $(\mathcal{S}, \mathrm{Id})$.

1.1 Demi-anneau symétrisé libre

1.1.1 Définition *Soit $(\mathcal{D}, +, .)$ un demi-anneau. On appelle demi-anneau symétrisé libre de $\mathcal{D}$ l'ensemble $\mathcal{D}^2$ muni des lois suivantes:*

$$\begin{aligned} (a,a') \oplus (b,b') &= (a+a', b+b') \\ (a,a') \otimes (b,b') &= (ab + a'b', ab' + a'b) \\ \ominus(a,a') &= (a', a) \ . \end{aligned}$$

Soit i l'injection $\mathcal{D} \to \mathcal{D}^2$, $i(a) = (a, \varepsilon)$. $(\mathcal{D}^2, i)$ est clairement une symétrisation de $\mathcal{D}$, et l'on pourra identifier $a \in \mathcal{D}$ à $(a, \varepsilon) \in \mathcal{D}^2$.

Appelons morphisme de demi-anneau symétrisé un morphisme φ de demi-anneau vérifiant

$$\forall a, \quad \varphi(\ominus a) = \ominus \varphi(a) \ .$$

On a alors:

1.1.2 Proposition *Le couple $(\mathcal{D}^2, i)$ est solution (unique à un isomorphisme de demi-anneau symétrisé près) du problème universel suivant: "pour toute symétrisation $(\mathcal{S}', i')$ de $\mathcal{D}$, il existe un unique morphisme surjectif de demi-anneau symétrisé $\varphi : \mathcal{D}^2 \to \mathcal{S}'$ tel que $i' = \varphi \circ i$."*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D}^2 \arrow[dr, dotted, "\varphi"] & \\ \mathcal{D} \arrow[u, "i"] \arrow[r, "i'"'] & \mathcal{S}' \end{tikzcd}$$

Preuve On a nécessairement pour un tel φ:

$$\varphi((e,\varepsilon)) = \varphi \circ i(e) = i'(e) \quad \text{et} \quad \varphi((\varepsilon, e)) = \varphi(\ominus i(e)) = \ominus \varphi(i(e)) = \ominus i'(e) \ . \tag{1.1.a}$$

Réciproquement, il est clair que φ défini par (1.1.a) convient (φ est surjectif car $\mathcal{S}'$ est engendré par $i'(\mathcal{D})$). L'unicité de $(\mathcal{D}^2, i)$ vient du fait que si $(\mathcal{S}'', i'')$ est une autre solution du problème 1.1.2, alors on a φ et φ'' telles que $\mathcal{D}^2 \xrightarrow{\varphi} \mathcal{S}'' \xrightarrow{\varphi''} \mathcal{D}^2$, avec $\varphi'' \circ \varphi \circ i = \mathrm{Id} \circ i$, et $\varphi'' \circ \varphi = \mathrm{Id}$ découle de l'unicité d'une telle application. On a de même $\varphi \circ \varphi'' = \mathrm{Id}$. Ainsi, $\mathcal{D}^2$ et $\mathcal{S}''$ sont isomorphes. ∎

Le fait suivant en résulte immédiatement.

1.1.3 Corollaire *Pour toute symétrisation $(\mathcal{S}', i')$, on a avec les notations précédentes:*

$$\mathcal{S}' \simeq \mathcal{D}^2 / \varphi \ .$$

1.2 La relation d'équilibre

1.2.1 Définition *On note* ∇ *la relation dite* d'équilibre *définie par:*

$$a \nabla b \Leftrightarrow a \ominus b = b \ominus a \ .$$

∇ est clairement réflexive et symétrique, mais n'est en général pas transitive, comme le montre l'exemple suivant:

1.2.2 Exemple Dans le demi-anneau symétrisé libre de $(\mathbb{R}^+, \max, \times)$, on a

$$(1,0) \nabla (1,1), \qquad (1,1) \nabla (0,1),$$

mais $(1,0) \not\nabla (0,1)$.

De manière plus précise:

1.2.3 Proposition *Si $\oplus$ est simplifiable dans $\mathcal{D}$, alors ∇ est transitive dans $\mathcal{D}^2$. La réciproque est vraie si l'application $\mathcal{D} \to \mathcal{D}$, $x \mapsto x \oplus x$ est injective.*

Preuve Si $\oplus$ est simplifiable, alors $a \ominus b = b \ominus a$ et $b \ominus c = c \ominus b$ entraînent $a \ominus c \oplus (b \ominus b) = (b \ominus b) \oplus (c \ominus a)$, d'où en simplifiant $a \oplus c = c \ominus a$, ce qui montre que ∇ est transitive. Réciproquement, si $\oplus$ n'est pas simplifiable, alors il existe $\alpha \neq \beta$ et γ tels que $\alpha \oplus \gamma = \beta \oplus \gamma$. Alors, $(\alpha, \beta) \nabla (\gamma, \gamma) \nabla (\beta, \alpha)$, mais $(\alpha, \beta) \not\nabla (\beta, \alpha)$ (ce qui serait $\alpha \oplus \alpha = \beta \oplus \beta$), et donc ∇ n'est pas transitive. ∎

Les propriétés suivantes sont conséquence immédiate de (1.0.a).

$$\begin{array}{lccc} \text{(i)} & a \nabla b & \Leftrightarrow & a \ominus b \nabla \varepsilon \\ \text{(ii)} & a \nabla b,\ c \nabla d & \Rightarrow & a \oplus c \nabla b \oplus d \\ \text{(iii)} & a \nabla b & \Rightarrow & ac \nabla bc \end{array} \tag{1.2.a}$$

On notera

$$a^\bullet = a \ominus a, \quad \mathcal{S}^\bullet = \{a^\bullet \mid a \in \mathcal{S}\}$$

et l'on appellera *équilibrés* les éléments de cette forme. On a

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & a^\bullet \oplus b^\bullet = (a \oplus b)^\bullet \\ \text{(ii)} & a^\bullet b^\bullet = (ab \oplus ab)^\bullet \\ \text{(iii)} & ab^\bullet = (ab)^\bullet = a^\bullet b \end{array} \tag{1.2.b}$$

(i) et (iii) montrent que $\mathcal{S}^\bullet$ est un idéal (bilatère) de $\mathcal{S}$. Lorsque $\mathcal{S}$ est idempotent, on a par (i) et (ii) que $\mathcal{S}^\bullet$ est un demi-anneau idempotent ayant $e^\bullet$ pour unité.

On notera que $a \in \mathcal{S}^\bullet$ entraîne $a \nabla \varepsilon$, la réciproque étant vraie si l'addition est idempotente ou si $\mathcal{S}$ est un demi-anneau symétrisé libre.

1.2.4 Contre exemple Considérons le corps $\mathcal{D} = \mathbb{Z}/(2\mathbb{Z})$ muni du signe moins défini par $\ominus x = x$. Pour tout $x \in \mathbb{Z}/(2\mathbb{Z})$, on a trivialement $x \nabla \varepsilon$. Cependant, 1 ne s'écrit pas sous la forme $t \ominus t = t \oplus \mathrm{Id}(t) = 2t = 0$, i.e. $1 \notin \mathcal{D}^\bullet$.

1.3 Relation d'équilibre dans un demi-anneau symétrisé libre

On notera $\mathcal{S}^\ominus = \{\ominus a \mid a \in \mathcal{S}^\oplus\}$, ensemble des éléments dits *négatifs* et $\mathcal{S}^{\oplus\ominus} = \mathcal{S}^\oplus \cup \mathcal{S}^\ominus$, ensemble des éléments dits *signés*. L'intérêt principal des éléments signés est d'être "presque transitifs" pour la relation d'équilibre:

1.3.1 Proposition *Dans un demi-anneau $\mathcal{S} = \mathcal{D}^2$ symétrisé libre, on a:*

(i) *trivialisation des équilibres: $(a, b) \in (\mathcal{S}^\oplus)^2$ et $a \nabla b \Rightarrow a = b$*

(ii) *Si $\mathcal{D}$ est un dioïde, alors $(a, b) \in (\mathcal{S}^{\oplus\ominus})^2$ et $a \nabla b \Rightarrow a = b$*

(iii) *substitution:*

$$x \in \mathcal{S}^{\oplus\ominus} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x \nabla b \\ cx \nabla d \end{cases} \Longrightarrow cb \nabla d$$

(iv) *transitivité faible: $\forall (a, c) \in \mathcal{S}^2$, $\forall b \in \mathcal{S}^{\oplus\ominus}$ $a \nabla b$ et $b \nabla c \implies a \nabla c$.*

Preuve (i) et (ii) sont claires. Pour (iii), supposons par exemple $x = (x^+, \varepsilon)$. Les équilibres $x \nabla b$ et $cx \nabla d$ s'écrivent avec des notations évidentes $x^+ \oplus b^- = b^+$ et $c^+x^+ \oplus d^- = c^-x^+ \oplus d^+$. En rajoutant $c^+b^- \oplus c^-b^-$ à la dernière égalité: $c^+x^+ \oplus c^+b^- \oplus c^-b^- \oplus d^- = c^-x^+ \oplus c^+b^- \oplus c^-b^- \oplus d^+$, d'où $c^+b^+ \oplus c^-b^- \oplus d^- = c^-b^+ \oplus c^+b^- \oplus d^+$, et $cb \nabla d$. (iv) s'obtient en prenant $c = e$ dans (iii). ∎

1.4 Valeur absolue dans les demi-anneaux symétrisés libres

1.4.1 Définition *On appelle valeur absolue de $x = (x^+, x^-) \in \mathcal{D}^2$ le scalaire $|x| = x^+ \oplus x^-$.*

L'application $\mathcal{D}^2 \to \mathcal{D}$, $x \mapsto |x|$ est un morphisme de demi-anneau. En particulier, on a l'inhabituelle formule $|a \oplus b| = |a| \oplus |b|$.

1.4.2 Lemme *Dans un dioïde symétrisé libre, on a:*

(i) $a^\bullet = |a|^\bullet$

(ii) $|a^\bullet| = |a|$.

Preuve On a $(a^+, a^-)^\bullet = (a^+ \oplus a^-, a^+ \oplus a^-) = |a|^\bullet$. Le fait que $|a^\bullet| = |a|$ résulte de l'idempotence de l'addition. ∎

On a donc pour $a \in \mathcal{D}^\oplus$, $|a^\bullet| = |a| = a$, et $|a^\bullet|^\bullet = a^\bullet$. Ainsi, l'application $x \mapsto |x|$ est un isomorphisme de dioïde $\mathcal{D}^\bullet \to \mathcal{D}^\oplus$, l'inverse étant donné par $x \mapsto x^\bullet$.

2 Quelques identités algébriques et combinatoires

2.0.1 Définition *On dit que a équilibre fortement b s'il existe t tel que $a = b \oplus t^\bullet$, ce que l'on note $a \nabla^\bullet b$.*

La relation $\nabla^\bullet$ est clairement réflexive et transitive. On notera $a \; {}^\bullet\nabla \; b$ pour $b \nabla^\bullet a$. On a $x \nabla^\bullet y \Rightarrow x \nabla y$. La réciproque n'est pas toujours vraie:

2.0.2 Exemple Dans le demi-anneau symétrisé libre de $\mathbb{B}[X]$ (demi-anneau des polynômes à coefficients booléiens), on a $X^\bullet \nabla (X^2)^\bullet$, mais $X^\bullet \not\nabla\bullet (X^2)^\bullet$ et $X^\bullet \bullet\!\not\nabla (X^2)^\bullet$.

2.0.3 Exemple Dans le demi-anneau symétrisé libre de $\mathbb{R}_{\max}$, on a $x \nabla y$ si et seulement si $x \nabla\bullet\, y$ ou $x \bullet\!\nabla y$, comme il résulte d'une vérification élémentaire.

2.1 Déterminants

Dans un demi-anneau symétrisé *commutatif* $\mathcal{S}$, on définit le déterminant comme d'habitude:

$$\det A = \bigoplus_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \mathsf{sgn}(\sigma) \bigotimes_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}$$

où $\mathsf{sgn}(\sigma) = e$ si la permutation σ est paire et $\ominus e$ sinon.

On note $\mathrm{cof}_{ij}(A)$ le cofacteur (i,j) de A et A^{adj} la transposée de la matrice des cofacteurs. Certaines propriétés du déterminant qui sont des identités combinatoires s'écrivent sans difficulté dans un demi-anneau symétrisé (cf. aussi Gondran et Minoux [47], Reutenauer et Straubing [86]).

2.1.1 Propriétés

forme n-linéaire	$\det(u_1,\dots,\lambda u_i,\oplus\mu v_i,\dots,u_n) = \lambda\det(u_1,\dots,u_i,\dots,u_n) \oplus \mu\det(u_1,\dots,v_i,\dots,u_n)$
anti-symétrique	$\det(u_{\sigma(1)},\dots,u_{\sigma(n)}) = \mathsf{sgn}(\sigma)\det(u_1,\dots,u_n)$
alternée	$\det(u_1,\dots,v,\dots,v,\dots,u_n) \nabla \varepsilon$
développement par ligne	$\det A = \bigoplus_{k=1}^{n} a_{ik}\mathrm{cof}_{ik}(A)$
	$\det A = \det A^t$.

2.1.2 Proposition *(Reutenauer et Straubing) On a*

$$\begin{array}{ll} (A^{\mathrm{adj}}A)_{ii} = \det A & \\ (A^{\mathrm{adj}}A)_{ij} \nabla \varepsilon & (i \neq j) \end{array} . \tag{2.1.a}$$

Les formules (2.1.a) se réécrivent

$$A^{\mathrm{adj}}A = \det A.\,\mathrm{Id} \oplus R^\bullet \tag{2.1.b}$$

où R est une matrice de diagonale nulle.

On peut donner pour les propriétés du type 2.1.1 et 2.1.2 des démonstrations combinatoires ou bien l'on peut dans certains cas recopier les démonstrations usuelles (un échantillon de ces techniques est donné dans les remarques 2.1.10 et 2.1.11). Nous préférons ici, dans l'esprit des arguments de Reutenauer et Straubing [86], formuler un "principe de transfert" qui permet de traduire directement une identité classique dans les anneaux en une identité dans les demi-anneaux symétrisés

2.1.3 Préliminaire Soient $X_1,\dots,X_k$ k indéterminées et considérons le demi-anneau symétrisé libre $(\mathbb{N}[X_i])^2$. On définit la *valeur* du monôme $P = \alpha X_1^{i_1}\dots X_k^{i_k}$ en $(x_1,\dots,x_k) \in \mathcal{S}^k$ par $P(x_1,\dots,x_k) = (x_1^{i_1}\dots x_k^{i_k}) \oplus \dots \oplus (x_1^{i_1}\dots x_k^{i_k})$ (α fois) et l'on définit la valeur d'une somme de monômes par linéarité. L'application $\varphi : (\mathbb{N}[X_i])^2 \to \mathcal{S}$ qui a un couple de polynômes $P = (P^+, P^-)$ associe $P^+(x_1,\dots,x_k) \ominus P^-(x_1,\dots x_k)$ est clairement un morphisme de demi-anneau symétrisé. Ainsi, pour montrer une identité du type 2.1.2 ou 2.1.1 dans un demi-anneau symétrisé quelconque, il suffit de l'établir dans le demi-anneau symétrisé libre $(\mathbb{N}[a_{ij}])^2$.

2.1.4 Proposition (Principe de transfert) *Soit $P = P^+ - P^-$ la différence de deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{N}$. L'identité $P(X_i) = 0$ a lieu dans l'anneau $\mathbb{Z}[X_i]$ si et seulement si l'identité*

$$P^+(X_i) \ominus P^-(X_i) \nabla \varepsilon$$

a lieu dans le demi-anneau symétrisé libre $(\mathbb{N}[X_i])^2$.

Preuve On a $P^+ \ominus P^- \nabla \varepsilon$ ssi $P^+ \nabla P^-$ (1.2.a,(i)), lequel équilibre est équivalent à $P^+ = P^-$ (1.3.1,(i)). ■

On peut même formuler un peu mieux:

2.1.5 Proposition (Principe de transfert fort) *Soient $P = P^+ - P^-$, $Q = Q^+ - Q^-$, avec $P^+, P^-, Q^+, Q^- \in \mathbb{N}[X_i]$ tels que $P = Q$ dans $\mathbb{Z}[X_i]$.* (i) *Si Q^+ et Q^- n'ont aucun monôme en commun, alors on a $P \nabla^\bullet Q$ dans* $(\mathbb{N}[X_i])^2$. (ii) *Si de plus P^+ et P^- n'ont aucun monôme en commun, alors $P = Q$.*

Preuve (i): Si Q^+ et Q^- n'ont aucun monôme en commun, on a en identifiant les parties positives et négatives de part et d'autre de $P^+ - P^- = Q^+ - Q^-$:

$$P^+ = Q^+ + T, \quad P^- = Q^- + T,$$

pour un certain polynôme $T \in \mathbb{N}[X_i]$, d'où $P = Q \oplus T^\bullet$, i.e. $P \nabla^\bullet Q$. (ii) se montre de manière analogue. ■

2.1.6 Proposition *Pour toute matrice $A \in \mathcal{S}^{n\times n}$ partitionnée sous la forme $((n-1)+1) \times ((n-1)+1)$, on a la* formule du déterminant par blocs*:*

$$\det A = \det \begin{bmatrix} A_{(n|n)} & A_{(n|n]} \\ A_{[n|n)} & a_{nn} \end{bmatrix} = \det A_{(n|n)} a_{nn} \ominus A_{[n|n)} A^{\mathrm{adj}}_{(n|n)} A_{(n|n]}$$

Preuve On vérifie en effet que les termes à gauche et à droite de l'égalité sont somme de $n!$ monômes tous différents, et l'on applique 2.1.5,(ii). ■

Les propriétés qui suivent résultent semblablement des principes de transfert 2.1.5 et 2.1.4:

2.1.7 Proposition

$$\det(AB) \nabla^\bullet \det(A)\ \det(B) \tag{2.1.c}$$

Plus généralement:

2.1.8 Proposition (Formule de Binet-Cauchy) *Soient A et B deux matrices de taille respectives $n \times r$ et $r \times p$, $I \subset [\![1, n]\!]$, $J \subset [\![1, p]\!]$ avec $\#I = \#J = k$. On a:*

$$\det(AB)_{[I|J]} \nabla^\bullet \bigoplus_K \det A_{[I|K]} . \det B_{[K|J]} \ , \tag{2.1.d}$$

où la somme est prise sur l'ensemble des parties $K \subset \{1, \ldots, r\}$ de cardinal égal à k (cette somme étant nulle dès que $k > r$).

2.1.9 Proposition (Cayley-Hamilton) *Soit* $P_A(\lambda) = \det(A \ominus \lambda \mathrm{Id})$. *On a*

$$P_A(A) \nabla \varepsilon \ .$$

2.1.10 Remarque (Preuve combinatoire de 2.1.6) On peut donner une preuve combinatoire élémentaire de la proposition 2.1.6: il suffit de remarquer que $\det A_{(n|n)} a_{nn}$, est formé des termes correspondant aux $(n-1)!$ permutations de $\{1 \dots n\}$ qui fixent n. D'autre part, un terme quelconque de $A_{[n|n)} A^{\mathrm{adj}}_{(n|n)} A_{(n|n]}$ peut s'écrire: $a_{ni} \mathrm{cof}_{ji} A_{(n|n)} a_{jn}$, terme regroupant les $(n-2)!$ permutations σ telles que $\sigma(n) = i$ et $\sigma(j) = n$, chacune affectée de la parité opposée (σ présente une inversion de plus que le terme de $\mathrm{cof}_{ji}(A)$ dont elle est issue). En tout, on a compté $(n-1)! + (n-1)^2(n-2)! = n!$ permutations, toutes avec le bon signe. ∎

2.1.11 Remarque (Preuve coutumière de 2.1.6) On peut également donner une preuve algébrique ordinaire de la même proposition: développons $\det A$ par rapport à la n-ième ligne:

$$\det A = \bigoplus_{k=1}^{n} a_{nk} \mathrm{cof}_{nk} A = \bigoplus_{k=1}^{n-1} a_{nk} (\ominus e)^{n+k} \det A(n|k) \oplus \det A_{(n|n)} a_{nn}$$

puis développons les $n-1$ premiers termes par rapport à la n-ième colonne:

$$\begin{aligned} \det A &= \bigoplus_{k=1}^{n-1} a_{nk} (\ominus e)^{n+k} \bigoplus_{l=1}^{n-1} (\ominus e)^{l+n-1} a_{ln} \det A(nl|kn) \oplus \det A_{(n|n)} a_{nn} \\ &= \ominus \bigoplus_{k,l=1}^{n-1} a_{nk} \mathrm{cof}_{lk} A_{(n|n)} a_{ln} \oplus \det A_{(n|n)} a_{nn} \ . \end{aligned}$$

∎

2.1.12 Remarque A chaque équilibre dans le demi-anneau symétrisé libre de $\mathcal{D}$, on peut associer une identité dans $\mathcal{D}$. Par exemple, pour l'identité 2.1.2, on écrit A sous forme de différence de matrices positives $A = A^+ \ominus A^-$, idem pour $A^{\mathrm{adj}} = A^{\mathrm{adj}+} \ominus A^{\mathrm{adj}-}$, $\det A = \det^+ A \ominus \det^- A$ et l'on a

$$A^{\mathrm{adj}} A \nabla \det A . \mathrm{Id} \Leftrightarrow \det{}^- A . \mathrm{Id} \oplus A^{\mathrm{adj}+} A^+ \oplus A^{\mathrm{adj}-} A^- \nabla \det{}^+ A . \mathrm{Id} \oplus A^{\mathrm{adj}-} A^+ \oplus A^{\mathrm{adj}+} A^-$$

-via (1.2.a,(i))-, lequel équilibre se trivialise en égalité puisque les termes de part et d'autre de l'équilibre sont positifs (cf. 1.3.1,(i)).

2.1.13 Remarque (Preuve combinatoire de la formule de Binet-Cauchy) On peut aussi donner une preuve combinatoire assez simple de la Proposition 2.1.8. Quitte à considérer des sous-matrices, on pourra supposer A de taille $k \times r$ et B de taille $r \times k$. Le développement du déterminant s'écrit alors

$$\det AB = \bigoplus_{\sigma} \mathsf{sgn} \sigma \bigotimes_{i=1}^{k} \bigoplus_{l=1}^{r} a_{il} b_{l\sigma(i)}$$

et par distributivité:

$$\det AB = \bigoplus_{\sigma} \mathsf{sgn} \sigma \bigoplus_{\varphi} \bigotimes_{i=1}^{k} a_{i\varphi(i)} b_{\varphi(i)\sigma(i)} \ , \tag{2.1.e}$$

la seconde somme étant prise sur l'ensemble des applications $\varphi : \{1, \dots, k\} \to \{1, \dots, r\}$. Supposons φ non injective, soit $\varphi(i_1) = \varphi(i_2)$ avec $i_2 \neq i_1$. On introduit alors la transposition τ d'indices i_1, i_2

et l'on constate que, φ étant fixée, les termes associés aux permutations σ et $\sigma\circ\tau$ sont de même valeur absolue et de signes opposés. Soit R la somme des termes de (2.1.e) associés à des applications φ non injectives et à des permutations σ paires. On peut écrire d'après ce qui précède

$$\det AB = \bigoplus_{\sigma} \mathsf{sgn}\sigma \bigoplus_{\varphi \text{ injective}} \bigotimes_{i=1}^{k} a_{i\varphi(i)} b_{\varphi(i)\sigma(i)} \oplus R^{\bullet} \quad . \tag{2.1.f}$$

Soit $K \subset \{1, \ldots, r\}$ une partie de cardinal k. On considère uniquement la somme S_K des termes de (2.1.f) tels que $\varphi(\{1, \ldots, k\}) = K$ (ce qui entraîne l'injectivité de φ). On peut pour fixer les idées supposer $K = \{1, \ldots, k\}$, de sorte que l'on somme maintenant sur les permutations φ de $\{1, \ldots, k\}$, soit:

$$S_K = \bigoplus_{\sigma,\varphi} \mathsf{sgn}\sigma \bigotimes_{i=1}^{k} a_{i\varphi(i)} b_{\varphi(i)\sigma(i)} \quad .$$

En substituant $\sigma = \sigma'\circ\varphi$, et compte tenu de $\mathsf{sgn}\sigma = (\mathsf{sgn}\sigma') \otimes (\mathsf{sgn}\varphi)$, on retrouve le produit de deux déterminants, soit $S_K = \det A_{|K]} \det B_{[K|}$. L'équation (2.1.f) se réécrit:

$$\det AB = \bigoplus_{K} S_K \oplus R^{\bullet} = \bigoplus_{K} \det A_{|K]} \det B_{[K|} \oplus R^{\bullet} \quad ,$$

ce qui n'est autre que la formule de Binet-Cauchy.

2.2 Applications

La condition suivante résulte immédiatement de 2.1.2:

2.2.1 Théorème (Formules de Cramer) *Toute solution x de $Ax = b$ dans un demi-anneau commutatif $\mathcal{D}$ vérifie les "formules de Cramer" dans un demi-anneau symétrisé quelconque de $\mathcal{D}$:*

$$\det A.x \;\; \bullet\!\nabla \;\; A^{\mathrm{adj}} b \quad .$$

2.2.2 Exemple Soit dans $(\mathbb{N}^* \cup \{\varepsilon\}, \mathrm{ppcm}, \times)$, l'équation:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^2 \times 3 \\ 2^4 \times 3 \times 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 240 \end{bmatrix} \tag{2.2.a}$$

(cf. 0,1.0.9). On a dans le demi-anneau symétrisé libre de $(\mathbb{N}^* \cup \{\varepsilon\}, \mathrm{ppcm}, \times)$ $\det A = 2^3 \ominus 3 \times 5$, et

$$A^{\mathrm{adj}} = \begin{bmatrix} 2^2 & \ominus 3 \\ \ominus 5 & 2 \end{bmatrix} \quad .$$

La condition de Cramer s'écrit:

$$(2^3 \ominus 3 \times 5) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \bullet\!\nabla \begin{bmatrix} 2^2 & \ominus 3 \\ \ominus 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^2 \times 3 \\ 2^4 \times 3 \times 5 \end{bmatrix}$$

ce qui implique en revenant à $(\mathbb{N}^* \cup \{\varepsilon\}, \mathrm{ppcm}, \times)$:

$$\begin{cases} \mathrm{ppcm}(2^3 \times x_1, 3 \times 2^4 \times 3 \times 5) = \mathrm{ppcm}(3 \times 5 \times x_1, 4 \times 2^2 \times 3) \\ \mathrm{ppcm}(2^3 \times x_2, 5 \times 2^2 \times 3) = \mathrm{ppcm}(3 \times 5 \times x_2, 2 \times 2^4 \times 3 \times 5) \quad . \end{cases} \tag{2.2.b}$$

On vérifie que $x_1 = 6, x_2 = 4$ solution de (2.2.a) vérifie bien (2.2.b).

Le caractère suffisant des conditions de Cramer sera examiné dans les chapitres suivants moyennant des hypothèses plus fortes sur le demi-anneau. Voici une seconde application.

2.2.3 Proposition *Pour qu'une matrice $A \in \mathcal{D}^{n\times p}$ à éléments dans un demi-anneau* commutatif *soit inversible à gauche, il est nécessaire que $n \geq p$.*

Preuve On raisonne dans le demi-anneau symétrisé libre de $\mathcal{D}$ et l'on applique la formule de Binet Cauchy à la matrice $\mathrm{Id} = BA$. Si $n < p$, on a $e = \det \mathrm{Id} \nabla \varepsilon$, ce qui est absurde. ∎

On donne enfin une généralisation à certains demi-anneaux de la caractérisation 0,6.2.4 des matrices inversibles à gauche dans les demi-corps positifs.

2.2.4 Hypothèse *$\mathcal{P}$ est un demi-anneau positif (cf. 0,6.1.1) commutatif vérifiant:*

$$e = a \oplus b \Rightarrow e = a \text{ ou } b \ , \tag{2.2.c}$$

2.2.5 Proposition *Sous l'hypothèse 2.2.4, une matrice $A \in \mathcal{P}^{n\times p}$ est inversible à gauche ssi elle contient une sous matrice monomiale inversible de taille p.*

Preuve Soit $I = BA$. Via Binet-Cauchy, on a dans $\mathcal{P}^2$:

$$e = \bigoplus_K \det B_{|K]} \det A_{[K|} \oplus u^\bullet \ . \tag{2.2.d}$$

En identifiant les composantes positives et négatives des deux cotés de (2.2.d), on obtient $u = \varepsilon$. Quitte à multiplier par une matrice de permutation, on peut supposer les coefficients diagonaux de A non nuls. La partie négative de $\det B_{|K]} \det A_{[K|}$ est nulle, ce qui implique dès que $\det B_{|K]} \neq \varepsilon$ que les coefficients hors diagonaux de A sont nuls (sinon, on aurait un terme négatif dans le déterminant), et donc que $\det A_{[K|} = \bigotimes_i A_{ii}$. L'hypothèse (2.2.c) entraîne qu'il existe K tel que $\det B_{|K]} \det A_{[K|} = e$, et donc que les coefficients diagonaux de A sont inversibles. Au passage, on a donné une variante de la preuve du Théorème 6.2.1 du Chapitre 0.

2.2.6 Exemple Le dioïde $\mathbb{R}_{\max}[X]$ satisfait l'hypothèse du 2.2.5.