Chapitre II

Dioïde symétrisé

Introduction

Nous avons étudié au chapitre I les propriétés combinatoires des structures symétrisées. Une symétrisation $(\mathcal{S}, i)$ d'un demi-anneau $\mathcal{D}$ fournit une extension de $\mathcal{D}$ dans laquelle les formes multilinéaires alternées (et donc certains calculs d'élimination) ont du sens. Se pose la question de savoir si parmi les symétrisations de $\mathcal{D}$, il en est une plus "simple" que les autres. Modulo un raffinement naturel de la notion de symétrisation (régularité), et moyennant une hypothèse sur la structure additive (2.1.5) vérifiée dans le cas des dioïdes, nous montrons qu'il en est toujours ainsi (Théorème 2.2.8), et appelons demi-anneau symétrisé de $\mathcal{D}$ cette symétrisation "minimale". Nous particularisons ensuite l'étude aux dioïdes, et caractérisons le symétrisé d'un dioïde en termes d'opérations résiduées. Quoique la relation d'équilibre ne soit jamais transitive dans un dioïde, nous montrons que certains éléments vérifient des propriétés de transitivité et de substitution affaiblies, qui permettent de manipuler les équilibres comme l'on manipule les équations usuelles. Nous caractérisons ces éléments. Nous commençons ce chapitre par un exemple et une construction élémentaire du dioïde symétrisé de $\mathbb{R}_{\max}$. Nous avons fait en sorte que l'essentiel des chapitres suivants relatif au dioïde symétrisé de $\mathbb{R}_{\max}$ puisse être lu au vu de la seule section de motivation qui suit (et éventuellement de §3.2 et §3.3).

1 Motivations

1.1 Premier exemple

On considère le système suivant de deux équations linéaires à deux inconnues dans $\mathbb{R}_{\max}$:

$$\begin{cases} \max(x, y-4, 1) = \max(x-1, y+1, 2) \\ \max(x+3, y+2, -5) = \max(y+2, 7), \end{cases} \tag{1.1.a}$$

soit sous forme matricielle:

$$\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -\infty & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix} .$$

Commençons par une remarque élémentaire: si $a > b$, l'équation $a = x \oplus b$ est équivalente à $a = x$. Cela suggère la règle suivante:

$$\text{règle naïve:} \qquad \text{“}a \ominus b = a \ \text{ si } \ a > b\text{”}. \tag{1.1.b}$$

Nous tentons maintenant de "résoudre" le système (1.1.a) à l'aide de cette règle (les calculs sont pour le moment formels).

$$(1.1.a) \Leftrightarrow \begin{cases} \text{(i)} & x \oplus (-4)y \oplus 1 = (-1)x \oplus 1y \oplus 2 \\ \text{(ii)} & 3x \oplus 2y \oplus (-5) = 2y \oplus 7 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{(i)} \Rightarrow\ & [0 \ominus (-1)]x = [1 \ominus (-4)]y \oplus (2 \ominus 1) \\ & \Rightarrow\ (\text{i}') :\ x = 1y \oplus 2 \\ (\text{i}') \text{ et (ii)} \ \Rightarrow\ & 3(1y \oplus 2) \oplus 2y \oplus (-5) = 2y \oplus 7 \\ \Rightarrow\ (4 \oplus 2 \ominus 2)y = 7 \ominus (-5) \ominus 5 \Rightarrow\ & 4y = 7 \Rightarrow\ y = 3\ . \end{aligned} \qquad (1.1.c)$$

Par $(\text{i})'$, on obtient $x = 1 \otimes 3 \oplus 2 = 4$, et l'on vérifie immédiatement que $(x, y) = (4, 3)$ est solution du système (1.1.a). Ces manipulations soulèvent les trois questions suivantes:

1.1.1 Question Dans quelle structure algébrique le calcul ci-dessus a t-il un sens?

1.1.2 Question Quel statut a l'élément $(2 \ominus 2)$ qui apparaît à la ligne (1.1.c)?

1.1.3 Question On a introduit de manière heuristique la règle de simplification (1.1.b). Quel est plus généralement le système "maximal" de règles de simplifications admissibles pour résoudre un système de type $Ax \oplus b = Cx \oplus d$?

Ce chapitre répond à ces trois questions. On montre que l'étude de $Ax \oplus b = Cx \oplus d$ se ramène à l'étude des solutions de $(A \ominus C)x \ \nabla \ d \ominus b$ pour certaines "bonnes" symétrisation de $\mathcal{D}$, dites *régulières*. Nous montrons ensuite que parmi les symétrisations régulières de $\mathcal{D}$, il en est une minimale (c'est-à-dire équipée du maximum de règles de simplifications). Nous étudions ensuite les bons et mauvais éléments du dioïde symétrisé: les bons, étant *transitifs* et *substituables* pour la relation d'équilibre, autorisent les manipulations coutumières liées à l'élimination des systèmes linéaires, les mauvais généralisent l'élément $2 \ominus 2$ qui apparaît plus haut, et conduisent à des dégénerescences.

1.2 Construction élémentaire du dioïde symétrisé de $\mathbb{R}_{\max}$

Nous donnons ici une construction élémentaire d'une structure algébrique répondant à la question 1.1.1. Cette structure mérite le nom de dioïde symétrisé de $\mathbb{R}_{\max}$. Nous examinerons dans la suite du chapitre de quelle manière ce dioïde procède d'une construction générale. La remarque suivante, absolument triviale, exprime que la notion classique de symétrisation (et plus généralement, de monoïde des différences, cf. [12]), n'est d'aucun intérêt pour un dioïde.

1.2.1 Observation *Soit $(M, \oplus)$ un monoïde idempotent, et $(G, +)$ un groupe, $\phi : (M, \oplus) \to (G, +)$ un morphisme de monoïde. On a $\phi(M) = \{0\}$.*

Preuve On a pour tout x, $\phi(x) = \phi(x \oplus x) = \phi(x) + \phi(x)$, et en simplifiant, $\phi(x) = 0$. ∎

1.2.2 Définition *On appelle dioïde symétrisé de $\mathbb{R}_{\max}$, noté $\mathbb{S}_{\max}$, le quotient du dioïde des couples $\mathbb{R}^2_{\max}$ par la relation d'équivalence suivante:*

$$(x', x'')\ \mathcal{R}\ (y', y'') \Leftrightarrow \begin{cases} x' \neq x'', y' \neq y'', \text{et } \ x' \oplus y'' = x'' \oplus y' \\ (x', x'') = (y', y'') \quad \text{sinon} \end{cases} \qquad (1.2.a)$$

On vérifie que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence, plus fine que la relation ∇ (qui elle n'est pas d'équivalence), que $\mathcal{R}$ est compatible[1] avec les lois de structure du dioïde symétrisé $\mathbb{R}^2_{\max}$. On distingue trois sortes de classes d'équivalence:

$$\begin{array}{ll} \overline{(t,\varepsilon)} = \{(t,x''); \; x'' < t\} & \text{appelées positives} \\ \overline{(\varepsilon,t)} = \{(x',t); \; x' < t\} & \text{appelées négatives} \\ \overline{(t,t)} = \{(t,t)\} & \text{appelées équilibrées.} \end{array}$$

En associant $\overline{(t,\varepsilon)}$ à $t \in \mathbb{R}_{\max}$, on peut identifier $\mathbb{R}_{\max}$ au sous-dioïde $\mathbb{S}^{\oplus}_{\max}$ des classes positives ou nulles. L'ensemble des classes négatives ou nulles (i.e. de la forme $\ominus x$ pour $x \in \mathbb{R}^{\oplus}_{\max}$) sera noté $\mathbb{S}^{\ominus}_{\max}$, l'ensemble des classes équilibrées (de la forme $x^\bullet$) sera noté $\mathbb{S}^{\bullet}_{\max}$. On a donc la décomposition

$$\mathbb{S}_{\max} = \mathbb{S}^{\oplus}_{\max} \cup \mathbb{S}^{\ominus}_{\max} \cup \mathbb{S}^{\bullet}_{\max} \; , \tag{1.2.b}$$

ε étant le seul élément commun à ces trois ensembles. Cette décomposition est à comparer à $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^+ \cup \mathbb{Z}^-$. On peut représenter cette structure comme sur la Figure II.1, où les flèches représentent l'ordre croissant.

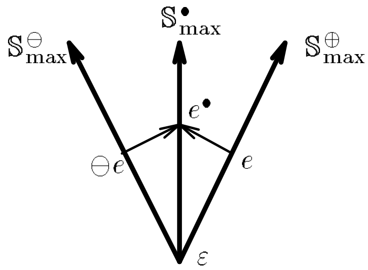

Figure II.1: Le dioïde $\mathbb{S}_{\max}$

Ces conventions nous permettent d'écrire $3 \ominus 2$ au lieu de $\overline{(3,\varepsilon)} \oplus \overline{(\varepsilon,2)}$. On a ainsi $3 \ominus 2 = \overline{(3,2)} = \overline{(3,-\infty)} = 3$. Plus généralement, on résume les règles de calcul dans $\mathbb{S}_{\max}$ de la manière suivante:

$$\begin{array}{ll} a \ominus b = a & \text{si } a > b \\ b \ominus a = \ominus a & \text{si } a > b \\ a \ominus a = a^\bullet & \end{array} \tag{1.2.c}$$

Cela rend compte de la règle naïve initiale (1.1.b) et la généralise.

En raison de son importance ultérieure, nous introduisons la notation $\mathbb{S}^{\vee}_{\max}$ pour l'ensemble $\mathbb{S}^{\oplus}_{\max} \cup \mathbb{S}^{\ominus}_{\max}$. On appellera *signés* les éléments de $\mathbb{S}^{\vee}_{\max}$. On a:

1.2.3 Proposition $\mathbb{S}^{\vee}_{\max} \setminus \{\varepsilon\} = \mathbb{S}_{\max} \setminus \mathbb{S}^{\bullet}_{\max}$ *est l'ensemble des éléments inversibles de* $\mathbb{S}_{\max}$.

Preuve Comme $t \otimes (-t) = (\ominus t) \otimes (\ominus -t) = e$ pour tout $t \in \mathbb{R}_{\max} \setminus \{\varepsilon\}$, on a que tout élément de $\mathbb{S}^{\vee}_{\max} \setminus \{\varepsilon\}$ est inversible. En outre, le fait que $ab^\bullet = (ab)^\bullet$ (cf. I, (1.2.b),(iii)) montre que $\mathbb{S}^{\bullet}_{\max}$ est absorbant pour le produit. Soit $x \in \mathbb{S}^{\bullet}_{\max}$. On a $x = x^\bullet$ et donc $xy = x^\bullet y$ ne peut être égal à e, puisque $e \notin \mathbb{S}^{\bullet}_{\max}$ ■

[1] dans la mesure où cette compatibilité sera rendue évidente par la théorie générale qui suit, nous passons les détails

Comme $\mathbb{S}_{\max}^{\vee}$ est l'image de $\mathbb{R}_{\max}^{\oplus\ominus}$ par la projection canonique, les propriétés de trivialisation des équilibres, de substitution, et de transitivité faible prouvées en I,1.3.1 restent vraies dans $\mathbb{S}_{\max}^{\vee}$. On en déduit que les calculs *formels* effectuées en §1.1 pour la résolution du système (1.1.a) sont valides à condition de plonger $\mathbb{R}_{\max}$ dans le dioïde $\mathbb{S}_{\max}$, et donnent l'unique solution de ce système d'équilibres dans $\mathbb{S}_{\max}$. Celle ci étant positive, et en notant que la propriété de trivialisation des équilibres 1.3.1,(i) s'étend au dioïde $\mathbb{S}_{\max}$, on obtient l'unique solution du système d'équations dans $\mathbb{R}_{\max}$.

2 Le symétrisé d'un demi-anneau

Nous passons maintenant à la théorie générale.

2.1 Symétrisation régulière

On considère l'équation

$$ax \oplus b = cx \oplus d \tag{2.1.a}$$

dans un demi-anneau *commutatif* $\mathcal{D}$. Pour toute symétrisation $(\mathcal{S}, j)$ de $\mathcal{D}$, (2.1.a) entraîne l'équilibre dans $\mathcal{S}$:

$$(a \ominus c)x \,\nabla\, d \ominus b, \tag{2.1.b}$$

où l'on a identifié a à $j(a)$, b à $j(b)$, etc. La symétrisation $(\mathcal{S}, j)$ de $\mathcal{D}$ est pertinente lorsque l'étude des solutions de (2.1.b) résout (2.1.a). Précisément:

2.1.1 Définition *La symétrisation $(\mathcal{S}, j)$ est régulière si*

$$j(a) \,\nabla\, j(b) \Rightarrow a = b \tag{2.1.c}$$

2.1.2 Proposition *Pour toute symétrisation régulière, l'ensemble des solutions de (2.1.a) s'identifie à l'ensemble des solutions positives de (2.1.b).*

Preuve $(a \ominus c)x \,\nabla\, d \ominus b$ entraîne $ax \oplus b \,\nabla\, cx \oplus d$, et si x est positif, $j(ax \oplus b) \,\nabla\, j(cx \oplus d)$, d'où (2.1.a). La réciproque est immédiate. ■

La symétrisation libre $(\mathcal{D}^2, i)$ de $\mathcal{D}$ (I,1.1.1) est régulière (cela résulte de I,1.3.1,(i)). Nous caractérisons maintenant les symétrisations régulières générales. Notons

$$\mathcal{S}^{\nabla} = \{x \mid \ x \,\nabla\, \varepsilon\} \ .$$

2.1.3 Proposition *Soit φ le morphisme $\mathcal{D}^2 \to \mathcal{S}$ tel que $\mathcal{S} \simeq \mathcal{D}^2/\varphi$ (cf. I,1.1.2). La symétrisation $(\mathcal{S}, j)$ est régulière si et seulement si $\varphi^{-1}(\mathcal{S}^{\nabla}) \subset \mathcal{D}^{\bullet}$.*

Preuve Les assertions suivantes sont équivalentes:

$$\begin{gathered} j(a) \,\nabla\, j(b) \\ \varphi((a,\varepsilon)) \,\nabla\, \varphi((b,\varepsilon)) \\ \varphi((a,b)) \,\nabla\, \varepsilon \\ (a,b) \in \varphi^{-1}(\mathcal{S}^{\nabla}) \end{gathered}$$

Comme $(a,b) \in \mathcal{D}^{\bullet}$ si et seulement si $a = b$, la conclusion en résulte. ■

2.1.4 Proposition *Pour une symétrisation régulière, la relation d'équivalence $\mathcal{R}_\varphi$ induite par φ ($x\mathcal{R}_\varphi y \Leftrightarrow \varphi(x) = \varphi(y)$), est compatible avec ∇ , i.e.:*

$$\varphi(a) = \varphi(b) \text{ et } a \nabla c \Rightarrow b \nabla c \ . \tag{2.1.d}$$

Preuve $\varphi(a) = \varphi(b)$ et $a \nabla c$ entraînent $\varphi(a \ominus c) = \varphi(b \ominus c) \in \mathcal{S}^\nabla$, d'où pour une symétrisation régulière $b \ominus c \in \mathcal{D}^\bullet$ (par 2.1.3), d'où $b \nabla c$, ce qui montre que $\mathcal{R}_\varphi$ est compatible avec ∇ . ∎

Evidemment, si $\mathcal{R}_\varphi$ est compatible avec ∇ , on a

$$\varphi(a) = \varphi(b) \Rightarrow a \nabla b \tag{2.1.e}$$

(prendre $c = a$ dans la formule (2.1.d)). La réciproque de la Proposition 2.1.4 est vraie moyennant une hypothèse supplémentaire:

2.1.5 Hypothèse *L'application $\mathcal{D} \to \mathcal{D}, x \mapsto x \oplus x$ est injective.*

2.1.6 Proposition *Si $\mathcal{D}$ vérifie l'hypothèse 2.1.5, alors toute symétrisation compatible avec ∇ est régulière.*

Preuve Supposons $\varphi((x^+, x^-)) \in \mathcal{S}^\nabla$. Moyennant la compatibilité et d'après (2.1.e), $\varphi((x^+, x^-)) = \varphi((x^-, x^+))$ entraîne $(x^+, x^-) \nabla (x^-, x^+)$, i.e $x^+ \oplus x^+ = x^- \oplus x^-$ et lorsque 2.1.5 a lieu, $x^+ = x^-$, soit $(x^+, x^-) \in \mathcal{D}^\bullet$. Par 2.1.3, $(\mathcal{S}, j)$ est régulière. ∎

2.1.7 Contre exemple Soit $\mathcal{D}$ le demi-anneau des parties de $\mathbb{R}^2$, muni de $\ominus x = s(x)$, où s désigne la symétrie de centre $(0,0)$ (exemple déjà traité en I,1.0.4). $(\mathcal{D}, \mathrm{Id})$ est une symétrisation non régulière de $\mathcal{D}$. Notons en effet a le disque de centre 0 et de rayon 1 et b le singleton $\{0\}$. On a $a \nabla b$ avec a et b positifs quoique $a \neq b$.

2.2 Symétrisation régulière minimale

Du point de vue qui nous intéresse, à savoir la résolution de l'équation (2.1.a) via (2.1.b), on recherche une symétrisation régulière de $\mathcal{D}$ la plus simple possible. Nous montrons ci-après l'existence d'une "plus petite" symétrisation régulière de $\mathcal{D}$. On part du demi-anneau $\mathcal{D}^2$ symétrisé libre de $\mathcal{D}$. Il est naturel d'étudier l'application suivante.

2.2.1 Notation On définit l'application $\Psi : \mathcal{D}^2 \to \mathcal{P}((\mathcal{D}^2)^2)$ par:

$$\Psi(a) = \{(p, q) \in (\mathcal{D}^2)^2 \mid \ p \nabla qa\} \ .$$

2.2.2 Proposition *La relation d'équivalence $\mathcal{R}_\Psi$ associée à Ψ est une congruence plus fine que la relation ∇.*

Preuve $\mathcal{R}_\Psi$ est plus fine que ∇ , car si $\Psi(a) = \Psi(b)$, on a $(a, e) \in \Psi(a)$ donc $(a, e) \in \Psi(b)$, donc $a \nabla b$. Montrons que $\mathcal{R}_\Psi$ est compatible avec la structure de demi-anneau symétrisé de $\mathcal{D}^2$. Les propositions suivantes sont équivalentes:

$$\begin{gathered} (p, q) \in \Psi(a \oplus c) \\ p \nabla qa \oplus qc \\ p \ominus qc \nabla qa \\ (p \ominus qc, q) \in \Psi(a) \end{gathered}$$

et donc $\Psi(a) = \Psi(b)$ entraîne $\Psi(a \oplus c) = \Psi(b \oplus c)$. Semblablement, il résulte de l'équivalence de

$$\begin{array}{c} (p,q) \in \Psi(ac) \\ p \nabla qac \\ (p,qc) \in \Psi(a) \quad \text{(commutativité)} \end{array}$$

que $\Psi(a) = \Psi(b)$ entraîne $\Psi(ac) = \Psi(bc)$. On vérifie de même que $\Psi(a) = \Psi(b) \Rightarrow \Psi(\ominus a) = \Psi(\ominus b)$. $\mathcal{R}_\Psi$ est donc une congruence. ∎

2.2.3 Notation On note Φ l'application $\mathcal{D}^2 \to \mathcal{P}(\mathcal{D}^2)$ telle que:

$$\Phi(a) = \{x \in \mathcal{D}^2 \mid x \nabla a\} \ . \tag{2.2.a}$$

On a évidemment

$$\Psi(a) = \cup_{q \in \mathcal{D}^2} \Phi(qa) \times \{q\} \ . \tag{2.2.b}$$

2.2.4 Proposition *Si tout élément de $\mathcal{D}$ est somme finie[2] d'éléments inversibles, alors, pour $a, b \in \mathcal{D}^2$, on a $\Phi(a) = \Phi(b)$ si et seulement si $\Psi(a) = \Psi(b)$.*

Preuve a/ Si tout élément de $\mathcal{D}$ est somme finie d'éléments inversibles, alors tout élément de $\mathcal{D}^2$ est somme finie d'éléments inversibles. Cela résulte de $(x,y) = (x,\varepsilon) \oplus (\varepsilon, y)$ et du fait que (x,ε) (resp. (ε, y)) est inversible ssi x (resp. y) l'est.
b/ Si $\Psi(a) = \Psi(b)$, trivialement, $\Phi(a) = \Phi(b)$ (prendre $q = e$).
c/Réciproquement, supposons $\Phi(a) = \Phi(b)$. Soit d'après a/, $q = \bigoplus_{i=1}^k q_i$ somme de k éléments inversibles et p tel que $(p,q) \in \Psi(a)$. On a alors $p \ominus \bigoplus_{i=2}^k q_i a \nabla q_1 a$, d'où $q_1^{-1}(p \ominus \bigoplus_{i=2}^k q_i a) \in \Phi(a) = \Phi(b)$, d'où $p \ominus \bigoplus_{i=2}^k q_i a \nabla q_1 b$, et l'on obtient la conclusion en réitérant le procédé avec les autres q_i. ∎

On note les propriétés immédiates, mais utiles:

2.2.5 Lemme *On a* (i)*: $\Psi(x \oplus t^\bullet) \supset \Psi(x)$ et* (ii)*: $\Phi(x \oplus t^\bullet) \supset \Phi(x)$.*

Preuve Soit $(p,q) \in \Psi(x)$. L'équilibre $p \nabla qx$ se réécrit $p \ominus qx = qx \ominus p$, d'où, comme $t^\bullet = \ominus t^\bullet$, $p \ominus q(x \oplus t^\bullet) = q(x \oplus t^\bullet) \ominus p$, d'où $p \nabla q(x \oplus t^\bullet)$, donc $(p,q) \in \Psi(x \oplus t^\bullet)$ et $\Psi(x) \subset \Psi(x \oplus t^\bullet)$. L'assertion pour Φ s'en déduit en prenant $q = e$. ∎

2.2.6 Exemple Dans le demi-anneau symétrisé libre de $\mathbb{N}_{\mathrm{ppcm}}$ (cf. 1.0.9), Φ n'est pas compatible avec le produit, quoique tous les éléments non nuls de $\mathbb{N}_{\mathrm{ppcm}}$ soient simplifiables. On a en effet $\Phi(2^2 \ominus 2) = \Phi(2^2)$ (vérification élémentaire ou application de l'étude qui va suivre dans §3.1), alors que $\Phi((2^2 \times 3) \ominus (2 \times 3)) \neq \Phi(2^2 \times 3)$ (par exemple, 2^2 appartient au premier ensemble mais non au deuxième).

On note $\mathcal{D}^2/\Psi$ le demi-anneau symétrisé quotient. Si $a, b \in \mathcal{D}$ et $a \neq b$, alors $(a,e) \in \Psi(a)$ mais $(b,e) \notin \Psi(a)$ ce qui montre que a et b considérés comme des éléments de $\mathcal{D}^2$ appartiennent à deux classes d'équivalence différentes, i.e. que $i : \mathcal{D} \to \mathcal{D}^2$ induit un morphisme injectif $j : \mathcal{D} \to \mathcal{D}^2/\Psi$. Ainsi, $(\mathcal{D}^2/\Psi, j)$ est une symétrisation de $\mathcal{D}$. En outre:

2.2.7 Proposition *Sous l'hypothèse 2.1.5, $(\mathcal{D}^2/\Psi, j)$ est une symétrisation régulière de $\mathcal{D}$.*

[2] La borne sup de l'ensemble vide étant ε, on a avec cette convention ε somme finie d'éléments inversibles

Preuve Supposons $j(a) \nabla j(b)$, soit $j(a) \ominus j(b) = j(b) \ominus j(a)$, i.e. $\Psi(a \ominus b) = \Psi(b \ominus a)$. On a donc $a \ominus b \nabla b \ominus a$ i.e $a \oplus a = b \oplus b$ et par 2.1.5, $a = b$. ∎

Nous formulons maintenant le résultat central de ce chapitre.

2.2.8 Théorème *Soit $(\mathcal{S}, k)$ une symétrisation régulière de $\mathcal{D}$. Sous l'hypothèse 2.1.5, il existe un unique morphisme surjectif $\pi : \mathcal{S} \to \mathcal{D}^2/\Psi$ tel que $j = \pi \circ k$.*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D} \arrow[r, "k"] \arrow[dr, "j"'] & \mathcal{S} \arrow[d, dotted, "\pi"] \\
& \mathcal{D}^2/\Psi
\end{tikzcd}$$

En ce sens, $\mathcal{D}^2/\Psi$ est la symétrisation régulière "minimale" de $\mathcal{D}$.

Preuve On note φ (resp. φ') la projection $\mathcal{D}^2 \to \mathcal{D}^2/\Psi$ (resp. $\mathcal{D}^2 \to \mathcal{S}$) (cf.I,1.1.2).

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{D}^2 \arrow[d, "\varphi'"] \arrow[dd, bend left=60, "\varphi"] \\
\mathcal{D} \arrow[ur, "i"] \arrow[r, "k"] \arrow[dr, "j"'] & \mathcal{S} \arrow[d, dotted, "\pi"] \\
& \mathcal{D}^2/\Psi
\end{tikzcd}$$

Via la ∇-compatibilité de φ' (cf. 2.1.4), il est clair que $\varphi'(a) = \varphi'(b)$ entraîne $\Psi(a) = \Psi(b)$. On définit donc un morphisme π de demi-anneau symétrisé en posant $\pi(x) = \varphi(x_0)$ pour tout x_0 tel que $\varphi'(x_0) = x$. On a $\pi \circ \varphi' = \varphi$. L'unicité de π résulte de la surjectivité de φ', le caractère surjectif de π du caractère surjectif de φ. ∎

2.2.9 Définition (Demi-anneau symétrisé) *$\mathcal{D}^2/\Psi$ sera appelé* le *demi-anneau symétrisé de $\mathcal{D}$, et on le notera $\mathcal{S}_{\mathcal{D}}$.*

2.2.10 Exemple On vérifie que dans le demi-anneau symétrisé libre de $(\mathbb{N}, +, \times)$, on a (i): $\Psi(x) = \Psi(y)$ ssi (ii): $x \nabla y$. Par 2.2.2, (i)$\Rightarrow$ (ii). En outre, si $x \nabla y$ et $(p, q) \in \Psi(x)$, on déduit les assertions suivantes (avec des notations évidentes):

$$\begin{array}{rcl}
p & \nabla & qx \\
p^+ \oplus q^+x^- \oplus q^-x^+ & = & p^- \oplus q^-x^- \oplus q^+x^+ \\
p^+ \oplus q^+x^- \oplus q^-x^+ \oplus (q^+y^+ \oplus q^-y^-) & = & p^- \oplus q^-x^- \oplus q^+x^+ \oplus (q^+y^+ \oplus q^-y^-) \\
p^+ \oplus q^+(x^- \oplus y^+) \oplus q^-(x^+ \oplus y^-) & = & p^- \oplus q^-(x^- \oplus y^-) \oplus q^+(x^+ \oplus y^+) \\
p^+ \oplus q^+(x^+ \oplus y^-) \oplus q^-(x^- \oplus y^+) & = & p^- \oplus q^-(x^- \oplus y^-) \oplus q^+(x^+ \oplus y^+) \ \text{(car } x \nabla y) \\
p^+ \oplus q^+y^- \oplus q^-y^+ & = & p^- \oplus q^-y^- \oplus q^+y^+ \ \text{(en simplifiant)} \\
p & \nabla & qy,
\end{array}$$

d'où $\Psi(x) \subset \Psi(y)$. L'égalité en découle par symétrie et l'on a prouvé (ii)$\Rightarrow$(i). Le demi-anneau symétrisé de $\mathbb{N}$ est donc $\mathbb{Z} \simeq \mathbb{N}^2/\nabla \simeq \mathcal{D}^2/\Psi$, et l'on retrouve la construction classique.

2.2.11 Exemple On observe de même que tout anneau vérifiant l'hypothèse 2.1.5 est égal à son symétrisé. Le lecteur notera en effet que la preuve de 2.2.10 n'utilise que la simplifiabilité de la somme, a fortiori vérifiée dans un anneau. En outre, $\Psi((x^+, x^-)) = \Psi((x^+ - x^-, \varepsilon))$, et a donc $\mathcal{D}^2/\Psi \simeq \mathcal{D}^{\oplus} \simeq \mathcal{D}$.

2.2.12 Remarque On peut aussi traiter l'exemple 2.2.10 en notant que tout élément de $\mathbb{N}$ est somme finie d'éléments inversibles. Il est alors immédiat que $\Phi(x) = \Phi(y)$ ssi $x \nabla y$.

2.2.13 Contre exemple Lorsque l'hypothèse 2.1.5 est en défaut, la symétrisation $(\mathcal{D}^2/\Psi, j)$ peut être non régulière. Considérons en effet $\mathcal{D} = \mathbb{Z}/(2\mathbb{Z})$, on a

$$j(1) = a = (1,0) \nabla (0,0) = b = j(0) \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}^2/\Psi$$

avec $1 \neq 0$, ce qui contredit la ∇-régularité de $\mathcal{D}^2/\Psi$ (cf. 2.1.1). En effet, on a $\Psi(a \ominus b) = \Psi(1,0)$, $\Psi(b \ominus a) = \Psi(0,1)$, et $\Psi(1,0) = \Psi(0,1)$. Via 2.2.4, il suffit de vérifier que $\Phi(1,0) = \Phi(0,1)$, or

$$\Phi(1,0) = \{(1,0),(0,1)\}$$

et $\Phi(0,1) = \Phi(\ominus(1,0)) = \ominus\Phi(1,0) = \Phi(1,0)$.

2.2.14 Proposition *Sous l'hypothèse 2.1.5, on a $a \nabla b$ dans $\mathcal{S}_\mathcal{D}$ si et seulement si $a_0 \nabla b_0$ dans $\mathcal{D}^2$, pour tous représentants a_0 et b_0 de a et b.*

Preuve Si $a_0 \nabla b_0$, on a $a_0 \ominus b_0 = b_0 \ominus a_0$ et en passant au quotient $a \ominus b = b \ominus a$ i.e. $a \nabla b$ dans $\mathcal{S}$. Réciproquement, si $a \nabla b$ dans $\mathcal{D}^2/\Psi$, on a $\Psi(a_0 \ominus b_0) = \Psi(b_0 \ominus a_0)$, donc $(a_0 \ominus b_0, e) \in \Psi(b_0 \ominus a_0)$, d'où $a_0 \ominus b_0 \nabla b_0 \ominus a_0$ dans $\mathcal{D}^2$, d'où $a_0 \oplus a_0 \nabla b_0 \oplus b_0$, ce qui moyennant l'hypothèse 2.1.5, donne $a_0 \nabla b_0$. ■

2.3 Dioïde des fractions d'un dioïde commutatif

La Proposition 2.2.4 montre que les éléments inversibles jouent un rôle particulier. Via la construction d'un dioïde des fractions (calquée sur les anneaux de fractions), on peut rendre inversibles les éléments intègres et d'obtenir des résultats analogues à 2.2.4 pour les éléments intègres. Par exemple, dans $\mathbb{R}_{\max}[X]$, les monômes aX^k sont intègres, tout polynôme est donc somme finie d'éléments intègres, et l'on veut montrer que comme en 2.2.4, les quotients par Φ et par Ψ sont identiques. Comme $\Phi(P) = \{Q \in (\mathbb{R}_{\max}[X])^2 \mid Q \nabla P\}$ se calcule immédiatement à partir des Φ des coefficients de P, on caractérisera ainsi le dioïde symétrisé de $\mathbb{R}_{\max}[X]$.

On rappelle que dans tout ce chapitre, le dioïde $\mathcal{D}$ est supposé commutatif. Soit $S \subset \mathcal{D}$ une partie telle que $S \otimes S \subset S$, et $e \in S$. On munit l'ensemble $\mathcal{D} \times S$ des deux lois suivantes:

$$(x,s) \oplus (x',s') = (xs' \oplus x's, ss'), \quad (x,s) \otimes (x',s') = (xx', ss') \ .$$

Le quotient de $\mathcal{D} \times S$ par la relation suivante:

$$(x,s)\mathcal{R}(x',s') \Leftrightarrow \exists r \in S,\ rxs' = rx's$$

est un dioïde, appelé dioïde des fractions de $\mathcal{D}$ par S, noté $\mathcal{D}/S$. On notera x/s ou $\frac{x}{s}$ pour (x,s), lorsque qu'aucune confusion avec le quotient résidué de x par s ne sera à craindre. On a un morphisme de dioïdes $\mathcal{D} \to \mathcal{D}/S, x \mapsto (x,e)$. En particulier, ε/e et e/e sont respectivement le zéro et l'unité de $\mathcal{D}/S$. Pour tout $s \in S$, la classe d'équivalence de s/e est inversible, comme il résulte de

$$\frac{s}{e} \otimes \frac{e}{s} = \frac{s}{s}\ \mathcal{R}\ \frac{e}{e}.$$

En général, le morphisme $x \mapsto x/e$ n'est pas injectif. Il ne l'est que si tout élément s de S est tel que $sx = sy \Rightarrow x = y$.

On appelle *intègre* un élément a tel que l'homothétie $x \mapsto ax$ soit injective. On notera $\mathcal{D}^i$ l'ensemble des éléments intègres. L'ensemble $\mathcal{D}^i$ est clairement stable par produit et contient e.

2.3.1 Définition (dioïde des fractions) *On appellera dioïde des fractions*[3] *de $\mathcal{D}$, noté $\mathcal{F}_{\mathcal{D}}$, le dioïde $\mathcal{D}/\mathcal{D}^i$.*

Le morphisme injectif $x \mapsto x/e$ plonge $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{F}_{\mathcal{D}}$. On pourra donc identifier x et x/e. Tous les éléments intègres de $\mathcal{D}$ sont inversibles dans le dioïde des fractions.

2.3.2 Exemple Soit $\mathcal{D} = \mathbb{R}_{\max}[X]$. L'ensemble S des monômes (i.e. des polynômes de la forme aX, avec $a \neq \varepsilon$) vérifie $S \otimes S \subset S$ et $e \in S$. Un élément du dioïde des fractions de $\mathbb{R}_{\max}[X]$ par S pourra s'écrire sous la forme P/X^k, où $k \in \mathbb{N}$, ou de manière équivalente sous la forme $\bigoplus_{i=-k}^{p} a_i X^i$. L'écriture P/X^k (avec $k \in \mathbb{Z}$) est unique si l'on impose P de valuation 0.

On rappelle (cf. 0,7.2.1) qu'un dioïde est faiblement archimédien si pour tout y et pour $x \neq \varepsilon$, il existe λ et μ tels que $\lambda x \succeq \mu y$.

2.3.3 Lemme *L'élément $d = (d^+, d^-)$ est intègre dans $\mathcal{D}^2$ ssi: 1/ $d^- = \varepsilon$ et d^+ intègre dans $\mathcal{D}$ ou 2/ $d^+ = \varepsilon$ et d^- intègre dans $\mathcal{D}$.*

Preuve L'application $\mathcal{D}^2 \to \mathcal{D}^2, x \mapsto dx$ se représente par la matrice

$$P = \begin{bmatrix} d^+ & d^- \\ d^- & d^+ \end{bmatrix}$$

dans la base canonique. Via le Théorème 0,7.2.3, l'injectivité de cette application entraîne que la matrice P est monomiale, ce qui implique d positif non nul ou négatif non nul. La condition d'intégrité de d^+ ou d^- selon le cas est claire. ∎

2.3.4 Proposition *Soit $\mathcal{D}$ un dioïde faiblement-archimédien. On a*

$$(\mathcal{F}_{\mathcal{D}})^2 \simeq \mathcal{F}_{\mathcal{D}^2} \ .$$

Preuve Il résulte du Lemme 2.3.3 que tout élément x de $\mathcal{F}_{\mathcal{D}^2}$ s'écrit sous la forme $x = \frac{p \ominus q}{d}$, avec $p, q, d \in \mathcal{D}$ et d intègre. On observe que les quotients $\frac{p}{d}$ et $\frac{q}{d}$ dans $\mathcal{F}_{\mathcal{D}}$ ne dépendent que de x. En effet, si $x = \frac{p' \ominus q'}{d'}$, on a $d'(p \ominus q) = d(p' \ominus q')$, et en identifiant les parties positives et négatives, on obtient $\frac{p}{d} = \frac{p'}{d'}$, $\frac{q}{d} = \frac{q'}{d'}$. On peut donc identifier x à l'élément $\frac{p}{d} \ominus \frac{q}{d}$ de $(\mathcal{F}_{\mathcal{D}})^2$, ce qui montre la proposition 2.3.4. ∎

2.3.5 Dioïde des fractions de $\mathcal{D}[X]$ Lorsque $\mathcal{D}$ est faiblement-archimédien, on peut caractériser simplement le dioïde des fractions de $\mathcal{D}[X]$. On prétend que les seuls éléments intègres de $\mathcal{D}[X]$ sont des monômes de la forme dX^k, avec d intègre. La condition d'intégrité de d est immédiate. Le fait qu'un polynôme intègre est un monôme résulte de l'argument du Corollaire 7.2.9 du Chapitre 0. Un élément du dioïde des fractions de $\mathcal{D}[X]$ pourra donc s'écrire $d^{-1}X^{-k}P$, où $k \in \mathbb{N}$, d est intègre et $P \in \mathcal{D}[X]$. On pourra aussi l'écrire $\bigoplus_{i=-k}^{l} a_i X_i$, où $a_i \in \mathcal{F}_{\mathcal{D}}$. En particulier, le dioïde construit dans l'exemple 2.3.2 est le dioïde des fractions de $\mathbb{R}_{\max}[X]$.

2.3.6 Exemple (Dioïde $\mathbb{Q}_{\mathrm{ppcm}}$) Comme tout élément non nul de $\mathbb{N}_{\mathrm{ppcm}}$ est intègre, le dioïde des fractions de $\mathbb{N}_{\mathrm{ppcm}}$ est égal à $(\mathbb{Q}^+ \setminus \{0\}) \cup \{\varepsilon\}$, muni des deux lois suivantes:

$$\frac{p}{q} \oplus \frac{p'}{q'} = \frac{\mathrm{ppcm}(pq', p'q)}{qq'}, \quad \frac{p}{q} \otimes \frac{p'}{q'} = \frac{pp'}{qq'} \ .$$

[3] Ce dioïde est l'analogue de "l'anneau total des fractions" en algèbre commutative.

Nous appliquons la construction du dioïde des fractions à la caractérisation du dioïde symétrisé. On notera:

$$\Psi_{\mathcal{D}}(x) = \{(p,q) \in (\mathcal{D}^2)^2 \mid \ px \nabla q\}, \quad \Psi_{\mathcal{F}}(x) = \{(p,q) \in ((\mathcal{F}_{\mathcal{D}^2})^2 \mid \ px \nabla q\} \ .$$

2.3.7 Proposition *Soient $x, y \in \mathcal{D}^2$. Les propositions suivantes sont équivalentes:*

(i) $\Psi_{\mathcal{D}}(x) = \Psi_{\mathcal{D}}(y)$,

(ii) $\Psi_{\mathcal{F}}(x) = \Psi_{\mathcal{F}}(y)$.

Preuve Cela résulte de l'équivalence des propositions suivantes:

$$\begin{array}{l} (\frac{p}{s}, \frac{q}{r}) \in \Psi_{\mathcal{F}_{\mathcal{D}}}(x) \\ \frac{p}{s} \nabla \frac{q}{r} x \\ rp \nabla sqx \\ (rp, sq) \in \Psi_{\mathcal{D}}(x) \ . \end{array}$$

■

2.3.8 Corollaire *Soit $\mathcal{D}$ un dioïde tel que tout élément soit somme finie d'éléments intègres. On a $\Psi_{\mathcal{D}}(x) = \Psi_{\mathcal{D}}(y)$ dans $\mathcal{D}^2$ ssi $\Phi_{\mathcal{F}}(x) = \Phi_{\mathcal{F}}(y)$.*

Preuve Résulte de la proposition 2.3.7, de 2.2.4 et du fait que les éléments intègres de $\mathcal{D}^2$ sont inversibles dans $\mathcal{F}_{\mathcal{D}^2}$. ■

3 Dioïdes symétrisés

3.1 Solutions de l'équilibre élémentaire $x \nabla a$

Nous particularisons ici la théorie aux dioïdes. En raison de l'idempotence, l'application $x \mapsto x \oplus x$ est injective (hypothèse 2.1.5), et l'on peut définir le dioïde symétrisé de $\mathcal{D}$ via 2.2.9: $\mathcal{S}_{\mathcal{D}} = \mathcal{D}^2/\Psi$. Comme l'étude de l'ensemble $\Psi(x)$ se ramène à celle de $\Phi(x)$, comme l'exprime la formule (2.2.b), il nous suffit d'obtenir $\Phi(x) = \{y \mid \ y \nabla x\}$ pour caractériser le dioïde symétrisé. Nous caractérisons ici cet ensemble, moyennant quelques hypothèses de résiduabilité.

Nous supposerons que $\mathcal{D}$ est un dioïde inf-complet distributif (0,5.2.2), donc additivement résidué (0, 5.2.1). $\mathcal{D}^2$ est alors également inf-complet distributif, et l'on a:

$$(a^+, a^-) \boxminus (b^+, b^-) = (a^+ \boxminus b^+, a^- \boxminus b^-) \ .$$

On a par 0,2.1.2 et 0,5.2.5,(vii) puisque $\ominus x = (\ominus e)x$ et que $\ominus e$ est inversible:

$$\ominus(a \wedge b) = (\ominus a) \wedge (\ominus b) \tag{3.1.a}$$

$$\ominus(a \boxminus b) = (\ominus a) \boxminus (\ominus b) \ . \tag{3.1.b}$$

En particulier, si $a, b \in \mathcal{D}^\bullet$, on a $a \wedge b \in \mathcal{D}^\bullet$ et $a \boxminus b \in \mathcal{D}^\bullet$. En effet, $a \in \mathcal{D}^\bullet$ est équivalent à $a = \ominus a$, de même pour b. On a alors $\ominus(a \wedge b) = (\ominus a) \wedge (\ominus b) = a \wedge b$, d'où $a \wedge b \in \mathcal{D}^\bullet$, et de même pour $a \boxminus b$.

Notons $[u, v] = \{t \in \mathcal{D}^2 \mid \ u \preceq t \preceq v\}$.

3.1.1 Théorème *Soit $a \in \mathcal{D}^2$. On a $\Phi(a) = [a \boxminus (\ominus a), a^\bullet] \ \oplus \ \mathcal{D}^\bullet$.*

Preuve : Soit x tel que $x \nabla a$, i.e. $x^+ \oplus a^- = x^- \oplus a^+$. On part de la décomposition (cf. 0,5.2.5,(x))

$$x = (x \boxminus a^\bullet) \oplus (x \wedge a^\bullet) \ .$$

1/-Montrons que $x \boxminus a^\bullet \in \mathcal{D}^\bullet$. Posons $x \ominus a = t^\bullet \in \mathcal{D}^\bullet$. On a $t^\bullet \succeq x \succeq t^\bullet \boxminus (\ominus a)$, donc $t^\bullet \boxminus a^\bullet \succeq x \boxminus a^\bullet \succeq (t^\bullet \boxminus (\ominus a)) \boxminus a^\bullet = t^\bullet \boxminus (a^\bullet \ominus a) = t^\bullet \boxminus a^\bullet$. On a donc: $x \boxminus a^\bullet = t^\bullet \boxminus a^\bullet = \in \mathcal{D}^\bullet$ d'après la remarque précédente.

2/-Notons que $x' = x \wedge a^\bullet$ vérifie également $x' \nabla a$. En effet, $\mathcal{D}^\bullet \ni (x \ominus a) \wedge a^\bullet = (x \wedge a^\bullet) \ominus (a \wedge a^\bullet) = (x \wedge a^\bullet) \ominus a$. Il suffit donc de rechercher les solutions de $x \nabla a$ plus petites que $a^\bullet$.

3/-L'équilibre $x \nabla a$ est équivalent à $x \ominus a = (\ominus x) \oplus a$. On a $x \succeq [(\ominus x) \oplus a] \boxminus (\ominus a) \succeq a \boxminus (\ominus a)$. Inversement, supposons $a \boxminus (\ominus a) \preceq x \preceq a^\bullet$. On a: $a^\bullet \preceq [a \boxminus (\ominus a)] \oplus (\ominus a) \preceq x \ominus a \preceq a^\bullet \ominus a = a^\bullet$ ∎

3.1.2 Exemple Soit $x = (x^+, x^-) \in \mathbb{R}^2_{\max}$ avec $x^+ \succ x^-$. On a $x^+ \boxminus x^- = x^+$, $x^- \boxminus x^+ = \varepsilon$, soit $\mu(x) = (x^+, \varepsilon)$/ Le Théorème affirme que

$$\{(y^+, y^-) \mid \ \max(x^+, y^-) = \max(x^-, y^+)\} = \{(y^+, y^-) \mid \ x^+ = y^+, y^- \preceq y^+\} \oplus \{(t,t) \mid \ t \in \mathbb{R}_{\max}\} \ ,$$

ce que l'on vérifie de manière élémentaire.

Nous appliquons maintenant ce résultat au calcul de quelques dioïdes symétrisés.

3.2 Symétrisé du dioïde de Boole

Soit $\mathbb{B} = \{\varepsilon, e\}$ le dioïde des booléiens (cf. 0,1.0.2). Il résulte de 2.2.4 que $\mathcal{S}_\mathbb{B} = \mathbb{B}^2/\Phi$. On a par application de 3.1.1 ou bien par une vérification élémentaire:

$$\begin{array}{rcl} \Phi(\varepsilon) & = & \mathbb{B}^\bullet \\ \Phi(e) & = & \{e, e^\bullet\} \\ \Phi(\ominus e) & = & \{\ominus e, e^\bullet\} \\ \Phi(e^\bullet) & = & \mathbb{B}^2 \ . \end{array}$$

Ainsi, l'application $\mathbb{B}^2 \to \mathcal{P}(\mathbb{B}^2)$, $x \mapsto \Phi(x)$ est injective, et donc

$$\mathcal{S}_\mathbb{B} \simeq \mathbb{B}^2 = \{\varepsilon, e, \ominus e, e^\bullet\} \ . \qquad (3.2.a)$$

On a les tables de Cayley suivantes.

$\oplus$	ε	e	$\ominus e$	$e^\bullet$
ε	ε	e	$\ominus e$	$e^\bullet$
e	e	e	$e^\bullet$	$e^\bullet$
$\ominus e$	$\ominus e$	$e^\bullet$	$\ominus e$	$e^\bullet$
$e^\bullet$	$e^\bullet$	$e^\bullet$	$e^\bullet$	$e^\bullet$

$\otimes$	ε	e	$\ominus e$	$e^\bullet$
ε	ε	ε	ε	ε
e	ε	e	$\ominus e$	$e^\bullet$
$\ominus e$	ε	$\ominus e$	e	$e^\bullet$
$e^\bullet$	ε	$e^\bullet$	$e^\bullet$	$e^\bullet$

3.3 Le dioïde symétrisé de $\mathbb{R}_{\max}$

Nous étudions ici le dioïde symétrisé de $\mathbb{R}_{\max}$. Il en vaut la peine, pour aux moins deux raisons: (i): le symétrisé s'obtiendra de manière analogue pour tous les demi-corps idempotents totalement ordonnés, dont $\mathbb{R}_{\max}$ est un exemple générique, (ii): c'est dans ce cadre que l'on obtiendra une théorie satisfaisante des systèmes linéaires.

Dans $\mathbb{R}_{\max}$, on a caractérisé l'opération $\boxminus$ en 0,5.2.7. On a donc:

$$a \boxminus \ominus a = (a^+ \boxminus a^-, a^- \boxminus a^+) = \begin{cases} (a^+, \varepsilon) & \text{si } a^+ > a^- \\ (a^-, \varepsilon) & \text{si } a^+ < a^- \\ (\varepsilon, \varepsilon) & \text{si } a^+ = a^-, \end{cases}$$

d'où via 3.1.1:

$$\Phi(a) = \begin{cases} ([\varepsilon, a^+] \times [\varepsilon, a^+]) \cup \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}_{\max}, x > a^+\} & (\text{cas } a^+ = a^-) \\ (\{a^+\} \times [\varepsilon, a^+]) \cup \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}_{\max}, x > a^+\} & (\text{cas } a^+ > a^-) \\ ([\varepsilon, a^-] \times \{a^-\}) \cup \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}_{\max}, x > a^-\} & (\text{cas } a^+ < a^-). \end{cases} \tag{3.3.a}$$

On a représenté les diverses allures de $\Phi((a^+, a^-))$ sur la Figure II.2. Dans ce cas précis, la caractérisation ci-dessus de $\Phi(a) = \{(x^+, x^-) \mid \max(x^+, a^-) = \max(x^-, a^+)\}$ se retrouve évidemment de manière élémentaire.

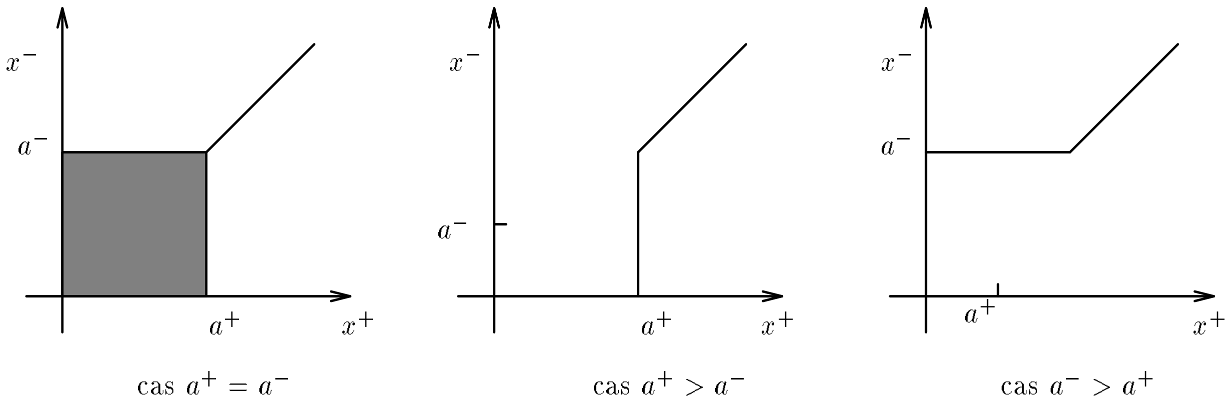

Figure II.2: $\Phi((x^+, x^-))$ dans le dioïde $\mathbb{R}^2_{\max}$

Ainsi, on retrouve le dioïde $\mathbb{S}_{\max}$ construit de manière élémentaire dans la motivation de ce chapitre. On retrouve de la sorte qu'il y a dans le dioïde symétrisé de $\mathbb{R}_{\max}$, $\mathcal{S}_{\mathbb{R}_{\max}} = \mathbb{R}^2_{\max}/\Psi$, trois sortes de classes d'équivalences, positives, négatives, et équilibrées, correspondant respectivement aux (a, ε), (ε, a) et (a, a) (cf. §1.2).

3.3.1 Définition (Signe) *On appelle signe l'application* s, $\mathbb{S}_{\max} \to \mathbb{B}^2$, $x \mapsto \mathsf{s}x$, *défini comme suit:*

$$\mathsf{s}x = \begin{cases} e & si\ x \in \mathbb{S}^{\oplus}_{\max} \setminus \{\varepsilon\} \\ \ominus e & si\ x \in \mathbb{S}^{\ominus}_{\max} \setminus \{\varepsilon\} \\ e^\bullet & si\ x \in \mathbb{S}^{\bullet}_{\max} \setminus \{\varepsilon\} \\ \varepsilon & si\ x = \varepsilon. \end{cases}$$

Le signe n'est pas un morphisme de dioïde. On a par exemple $2 \oplus (\ominus 1) = 2$, mais $\mathsf{s}2 = e \neq \mathsf{s}2 \oplus \mathsf{s} \ominus e = e \ominus e = e^\bullet$. On peut voir l'ordre de $\mathbb{S}_{\max}$ comme l'ordre lexicographique formé à partir de l'ordre de $\mathbb{R}_{\max}$ et de l'ordre du dioïde symétrisé des booléiens.

3.3.2 Propriétés *Dans* $\mathbb{S}_{\max}$, *on a les propriétés suivantes:*

(i) $a \preceq b$ *ssi* $|a| \prec |b|$ *ou* ($|a| = |b|$ *et* $\mathsf{s}a \preceq \mathsf{s}b$),

(ii) *Soient* $a \in \mathbb{S}^{\bullet}_{\max}$ *et* $b \in \mathbb{S}^{\oplus\ominus}_{\max}$. *On a* $a \oplus b \,\nabla\, \varepsilon$ *ssi* $|b| \preceq |a|$.

(iii) $a = b$ *ssi* $\mathsf{s}a = \mathsf{s}b$ *et* $|a| = |b|$.

Preuve (i): L'application $x \mapsto |x|$ est croissante, donc $a \preceq b$ entraîne $|a| \preceq |b|$. La suite se déduit de 3.1.1.
(ii): résulte immédiatement de la caractérisation de $\Phi(a^\bullet)$ (cf. 3.1.1).
(iii): immédiat. ∎

Soit maintenant l'équilibre linéaire:

$$ax \oplus b \,\nabla\, \varepsilon \tag{3.3.b}$$

avec $(a, b) \in (\mathbb{S}_{\max})^2$. Si x est solution de (3.3.b), pour tout $t \in \mathbb{S}_{\max}$,

$$x'' = x \oplus t^\bullet \tag{3.3.c}$$

est également solution. Afin d'exclure les solutions triviales, nous posons:

3.3.3 Définition *Une solution x de l'équation (3.3.b) est dite* dégénérée *si et seulement si il existe* $x' \prec x$ *et* $t \in \mathbb{S}_{\max}$ *tels que:*

$$x = x' \oplus t^\bullet$$

L'étude des équilibres linéaires pourra se limiter à la recherche des solutions non dégénérées, étant entendu que les autres solutions peuvent se recouvrer par (3.3.c).

3.3.4 Lemme *Une solution x de (3.3.b) est signée ssi elle est non dégénérée.*

Preuve Si x est signé et $x = x' \oplus t^\bullet$, comme $\mathsf{s}t^\bullet = e^\bullet \not\preceq \mathsf{s}x$, il résulte de 3.3.2,(i) que l'on ne peut avoir $|t^\bullet| = |x|$. Ainsi, $|t| \prec |x|$, et donc $|x| = |x'|$. En appliquant à nouveau 3.3.2,(i), on trouve que $\mathsf{s}x' \preceq \mathsf{s}x$, et comme $x' \neq \varepsilon$, $\mathsf{s}x' = \mathsf{s}x$, d'où $x = x'$ par 3.3.2,(iii), ce qui montre que x est non dégénérée.

Réciproquement, supposons $x = t^\bullet$ non signé solution de $ax \,\nabla\, b$ et montrons que x est solution dégénérée. Si $|a||x| \succ |b|$, on a en choisissant u tel que $|x| \succ |u| \succ |a|^{-1}|b|$, $au^\bullet \,\nabla\, b$, avec $u^\bullet \preceq x$. Si $|a||x| \prec |b|$, on a $ax \ominus b = \ominus b \,\nabla\, \varepsilon$, et donc $u = \varepsilon$ est solution. Si $|a||x| = |b|$, de deux choses l'une: 1/ si $a \in \mathbb{S}^\bullet_{\max}$, on a $a|x| = a^\bullet|x| = ax^\bullet$, et $|x|$ est solution, 2/ si a est inversible, on peut supposer $a = e$ quitte à multiplier par a^{-1}, et la conclusion résulte de ce que les points minimaux de $\Phi(b)$ sont signés ou nuls (cf. (3.3.a)). ∎

3.3.5 Théorème *Soit* $a \in \mathbb{S}^{\oplus\ominus}_{\max} \setminus \{\varepsilon\}$ *et* $b \in \mathbb{S}^{\oplus\ominus}_{\max}$. *L'équilibre* $ax \oplus b \,\nabla\, \varepsilon$ *admet l'unique solution signée* $x = \ominus a^{-1} b$.

C'est un cas particulier du résultat suivant:

3.3.6 Théorème *L'ensemble des solutions signées de l'équilibre (3.3.b) est:*

$$\begin{array}{ll}
\{\ominus a^{-1} b\} & \text{si } a \in \mathbb{S}^{\oplus\ominus}_{\max} \setminus \{\varepsilon\} \text{ et } b \in \mathbb{S}^{\oplus\ominus}_{\max} \\
\{t \in \mathbb{S}^{\oplus\ominus}_{\max} \mid \ |t| \preceq |a^{-1}b|\} & \text{si } a \in \mathbb{S}^{\oplus\ominus}_{\max} \setminus \{\varepsilon\} \text{ et } b \in \mathbb{S}^{\bullet}_{\max} \\
\{t \in \mathbb{S}^{\oplus\ominus}_{\max} \mid \ |t| \succeq |a|^{-1}|b|\} & \text{si } a \in \mathbb{S}^{\bullet}_{\max} \setminus \{\varepsilon\} \text{ et } b \in \mathbb{S}^{\oplus\ominus}_{\max} \\
\mathbb{S}^{\oplus\ominus}_{\max} & \text{si } (a, b) \in (\mathbb{S}^{\bullet}_{\max})^2.
\end{array}$$

Preuve : les cas $a \in \mathbb{S}_{\max}^{\vee} \setminus \{\varepsilon\}$ sont une traduction de $x \in \Phi(\ominus a^{-1}b)$ (cf. II,3.1.1). Supposons $a \in \mathbb{S}_{\max}^{\bullet}$ et b déséquilibré. Via la Propriété 3.3.2,(ii), $ax \oplus b \;\nabla\; \varepsilon$ est équivalent à $|ax| \succeq |b|$, c'est à dire à $|a||x| \succeq |b|$, soit $|x| \succeq |a|^{-1}|b|$. ■

3.3.7 Remarque Le Théorème 3.3.5 exprime que dans le cas *générique*, l'équilibre $ax \oplus b \;\nabla\; \varepsilon$ admet une unique solution signée, donnée par la formule habituelle.

Les deux propriétés suivantes, immédiates, seront utiles.

3.3.8 Propriétés *On a:*

(i) $\mathbb{S}_{\max}^{\oplus\ominus} \otimes \mathbb{S}_{\max}^{\oplus\ominus} \subset \mathbb{S}_{\max}^{\oplus\ominus}$.

(ii) $a \oplus b \in \mathbb{S}_{\max}^{\oplus\ominus} \Rightarrow a \in \mathbb{S}_{\max}^{\oplus\ominus}$ *ou* $b \in \mathbb{S}_{\max}^{\oplus\ominus}$.

3.3.9 Proposition $\mathbb{S}_{\max}$ *est additivement résidué.*

Preuve Comme l'équation $b \oplus x \succeq a$ est équivalente à $\ominus b \ominus x \succeq \ominus a$, on a

$$(\ominus a) \boxminus (\ominus b) = \ominus(a \boxminus b) \tag{3.3.d}$$

dès que l'une des deux quantités est définie. On vérifie sans difficulté que l'opération $\boxminus$ est donnée par le tableau suivant:

$\boxminus$	v	$\ominus v$	$v^{\bullet}$
u	$\begin{cases} u & \text{si } u \succ v \\ \varepsilon & \text{sinon} \end{cases}$	$\begin{cases} u & \text{si } u \succeq v \\ \varepsilon & \text{sinon} \end{cases}$	$\begin{cases} u & \text{si } u \succ v \\ \varepsilon & \text{sinon} \end{cases}$
$u^{\bullet}$	$\begin{cases} u^{\bullet} & \text{si } u \succ v \\ \ominus v & \text{si } u = v \\ \varepsilon & \text{sinon} \end{cases}$		$\begin{cases} u^{\bullet} & \text{si } u \succ v \\ \varepsilon & \text{sinon,} \end{cases}$

où $u, v \in \mathbb{R}_{\max}$, les autres cas s'en déduisant par (3.3.d). ■

3.3.10 Contre exemple Le dioïde $\mathbb{S}_{\max}$ n'est ni relativement complet[4], ni un treillis, ni multiplicativement résidué. En effet, l'ensemble des minorants de e et $\ominus e$, égal à $\{x \mid |x| \prec e\}$, n'admet pas d'élément maximal. Ainsi, l'ensemble $\{e, \ominus e\}$ n'admet pas de borne-inf. En outre, on a $\{x \mid e^{\bullet} \preceq e\} = \{x \mid |x| \prec e\}$, ce qui montre que l'homothéties $x \mapsto e^{\bullet}x$ n'est pas résiduable.

3.3.11 Dioïde complété de $\mathbb{S}_{\max}$ On a vu en 0,§5.3 que dans les inf-dioïdes multiplicativement résidués, on peut simplement étudier les équations matricielles de type $Ax = b$ et caractériser les familles faiblement indépendantes. Cela motive la question du plongement d'un dioïde donné dans un inf-dioïde multiplicativement résidué. Cette question mériterait une étude complète et générale. Nous nous contentons ici d'un résultat particulier relatif à $\mathbb{S}_{\max}$.

On notera $\mathsf{ID}\,\mathbb{S}_{\max}$ l'ensemble des idéaux non vides de $\mathbb{S}_{\max}$. Etant donné un idéal I, l'image $|I|$ de I dans $\mathbb{R}_{\max}$ par le morphisme de demi-treillis $x \mapsto |x|$ est un idéal de $\mathbb{R}_{\max}$.

3.3.12 Lemme *Soit I un idéal non vide de $\mathbb{S}_{\max}$. De trois choses l'une:*

(i) $|I|$ *n'est pas majoré, auquel cas* $I = \mathbb{S}_{\max}$*,*

[4] un ensemble ordonné est relativement complet si toute partie bornée admet une borne sup

(ii) *on a* $|I| = \downarrow(x)$ *avec* $x \in \mathbb{R}_{\max}$*, auquel cas* I *est principal. De manière précise, on a 1/* $I = \downarrow(x)$ *ou 2/* $\downarrow(\ominus x)$ *ou 3/* $\downarrow(x^\bullet)$ *selon que 1/* $x \in I$ *et* $\ominus x \notin I$*, 2/* $\ominus x \in I$ *et* $x \notin I$*, 3/* $x, \ominus x \in I$*.*

(iii) $|I| = \{t \in \mathbb{R}_{\max} \mid t \prec x\}$*, auquel cas* $I = \{u \in \mathbb{S}_{\max} \mid u \prec x\} = \downarrow(x) \cap \downarrow(\ominus x)$*.*

Preuve Résulte immédiatement de la caractérisation 3.3.2 de l'ordre de $\mathbb{S}_{\max}$. ∎

L'ensemble $\mathsf{ID}\,\mathbb{S}_{\max}$ est un treillis complet, dont le sup est donnée par 0,2.1.5. L'application $x \mapsto \downarrow(x)$ est un morphisme de demi-treillis injectif de $\mathbb{S}_{\max}$ dans $\mathsf{ID}\,\mathbb{S}_{\max}$. Définissons le produit des idéaux par

$$I \otimes J = \{xx' \mid x \in I, x' \in J\} \ .$$

Le produit de deux idéaux est un idéal. En effet, il est immédiat que $\downarrow(I \otimes J) = I \otimes J$. Montrons que $(I \otimes J)$ est stable par borne-sup. Soient $x, x' \in I$ et $y, y' \in J$. On a $xy \oplus x'y' \preceq (x \oplus x')(y \oplus y') \in I \otimes J$, ce qui montre la stabilité. De manière plus précise, on a les règles de calcul suivantes:

$$\begin{aligned}
\downarrow(a) \otimes \downarrow(b) &= \downarrow(ab) \\
\downarrow(a) \otimes (\downarrow(u) \cap \downarrow(\ominus u)) &= \downarrow(u|a|) \cap \downarrow(\ominus u|a|), \\
(\downarrow(u) \cap \downarrow(\ominus u)) \otimes (\downarrow(v) \cap \downarrow(\ominus v)) &= \downarrow(uv) \cap \downarrow(\ominus uv) \ .
\end{aligned}$$

Le Lemme suivant résulte immédiatement de la caractérisation des idéaux de $\mathbb{S}_{\max}$ (cf. 3.3.12).

3.3.13 Lemme *Soit* $\{I_\alpha\}_{\alpha \in A}$ *une famille majorée d'idéaux non vides de* $\mathbb{S}_{\max}$*. De deux choses l'une:*

(i) $\bigoplus_\alpha |I_\alpha|$ *est un idéal principal. On a alors deux indices* $\mu, \nu \in A$ *(éventuellement confondus) tels que* $\bigoplus_\alpha I_\alpha = I_\mu \oplus I_\nu$*.*

(ii) $\bigoplus_\alpha |I_\alpha|$ *est de la forme* $\{t \mid t \prec x\}$*, auquel cas* $\bigoplus_\alpha I_\alpha = \{u \in \mathbb{S}_{\max} \mid u \prec x\}$*.*

3.3.14 Proposition *L'ensemble des idéaux non vides de* $\mathbb{S}_{\max}$*, muni de la borne sup naturelle (cf. 0,2.1.5) et du produit, est un dioïde complet.*

Preuve Le seul point non trivial est la distributivité (infinie). Dans le cas (ii) du Lemme 3.3.13, on a pour un idéal J majoré,

$$|(\bigcup_\alpha I_\alpha) J| = \bigcup_\alpha |I_\alpha||J| = \{t \in \mathbb{R}_{\max} \mid t \prec x \sup |J|\} \ .$$

Il résulte que

$$(\bigoplus_\alpha I_\alpha) J = \{u \mid u \prec x\} J = \{u \mid u \prec x \sup |J|\} = \bigoplus_\alpha I_\alpha J \ .$$

Dans le cas (i), on est ramené à une propriété de distributivité finie, qui se vérifie de manière élémentaire. ∎

Le morphisme $x \mapsto \downarrow(x)$ permet d'identifier $\mathbb{S}_{\max}$ au sous-dioïde des idéaux principaux de $\mathbb{S}_{\max}$. On notera $\tilde{u}$ l'idéal $\downarrow(u) \cap \downarrow(\ominus u) = \{x \mid x \prec u\}$, $\tilde{\mathbb{S}}_{\max}$ l'ensemble des idéaux de la forme $\tilde{u}$, et ∞ l'idéal $\mathbb{S}_{\max}$. On a la décomposition:

$$\mathsf{ID}\,\mathbb{S}_{\max} = \mathbb{S}_{\max} \cup \tilde{\mathbb{S}}_{\max} \cup \{\infty\}, \quad \mathbb{S}_{\max} \cap \tilde{\mathbb{S}}_{\max} = \{\varepsilon\} \ .$$

On a illustré cette décomposition sur la Figure II.3 (où les flèches représentent l'ordre croissant).

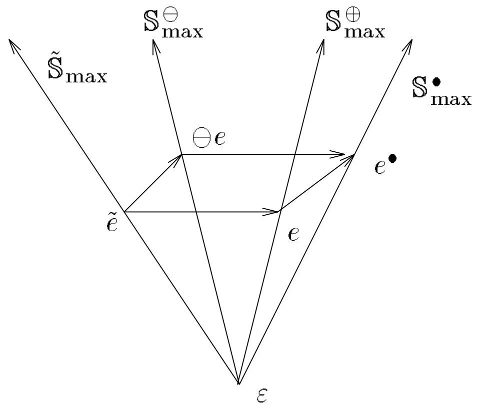

Figure II.3: Le dioïde $\mathsf{ID}\,\mathbb{S}_{\max}$ (complété de $\mathbb{S}_{\max}$)

3.3.15 Exemple On peut maintenant appliquer les résultats de résiduation à la résolution de certaines équations dans $\mathbb{S}_{\max}$. Soit le système:

$$AX = b, \quad \text{où} \quad A = \begin{bmatrix} e & e^{\bullet} \\ \ominus e & 2 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} e \\ 1 \end{bmatrix} \ .$$

En se plongeant dans $\mathsf{ID}\,\mathbb{S}_{\max}$, qui est un inf-dioïde multiplicativement résidué, on peut écrire:

$$A \otimes (A \backslash b) = \begin{bmatrix} e & e^{\bullet} \\ \ominus e & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} e \backslash e \wedge (\ominus e) \backslash 1 = e \\ e^{\bullet} \backslash e \wedge 2 \backslash 1 = -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ 1 \end{bmatrix} \ ,$$

ce qui montre que le vecteur $A \backslash b = [e, -1]^{\mathrm{T}}$ est solution.

Nous concluons cette section en donnant un résultat de quasi-unicité de familles génératrices minimales pour les sous-moduloïdes de type-fini de $\mathbb{S}^n_{\max}$.

3.3.16 Proposition *Etant données deux familles génératrices minimales $\{u_i\}_{i \in I}$ et $\{v_j\}_{j \in J}$ d'un sous-moduloïde de type-fini $\mathcal{V} \subset \mathbb{S}^n_{\max}$, il existe une famille de scalaires $\{\lambda_i\}_{i \in I}$ et une bijection $\sigma : I \to J$ tels que $u_i = \lambda_i v_{\sigma(i)}$.*

En particulier, le cardinal d'une famille génératrice minimale est invariant. On l'appellera dimension faible de $\mathcal{V}$.

Preuve On adapte la preuve du Théorème 5.5.3 du Chapitre 0. En reprenant les mêmes notations, on a:

$$u_i = \bigoplus_{j \in J,\, k \in I} \lambda_{ij} \mu_{jk} u_k \ . \tag{3.3.e}$$

On distingue deux cas:
(i): Il existe une composante non équilibrée u_i^l de u_i. De

$$u_i^l \succeq \bigoplus_{j \in J} \lambda_{ij} \mu_{ji} u_i^l \ . \tag{3.3.f}$$

on tire alors $\bigoplus_{j\in J}\lambda_{ij}\mu_{ji}\preceq u_i^l\backslash u_i^l=e$. On a en outre l'égalité (sinon, le terme associé à u_i serait redondant à droite de (3.3.e) et l'on conclut comme en 0,5.5.3.
(ii): $u_i=u_i^\bullet$. On prend alors u_i^l composante non nulle de u_i. De (3.3.f), on tire maintenant $|\bigoplus_{j\in J}\lambda_{ij}\mu_{ji}|=e$, et donc il existe j_i tel que

$$|\lambda_{ij_i}\mu_{j_ii}|=e \ .$$

On a

$$u_i=u_i^\bullet\succeq\lambda_{ij_i}v_j\succeq\lambda_{ij_i}\mu_{j_ii}u_i=|\lambda_{ij_i}\mu_{j_ii}|u_i^\bullet=u_i \ ,$$

d'où

$$u_i=\lambda_{ij_i}v_{j_i} \ .$$

Il est clair que l'application $i\mapsto j_i$ est une bijection de I dans J. ■

3.3.17 Remarque A la différence de $\mathbb{R}_{\max}$, les λ_{j_i} ne sont pas en général inversibles. Par exemple, $\{e^\bullet\}$ et $\{2^\bullet\}$ sont deux familles génératrice minimales du moduloïde $\mathbb{S}_{\max}^\bullet$, et l'on peut écrire $2^\bullet=\lambda e^\bullet$ avec $\lambda=2,\ominus 2$ ou $2^\bullet$.

3.4 Autres dioïdes symétrisés

3.4.1 Dioïde symétrisé de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ Dans $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ muni de l'union et de la somme vectorielle, $a^+\boxminus a^-$ est la différence ensembliste coutumière de a^+ et de a^- (cf. 0,5.2.6). La connaissance de $\Phi(a)$ détermine $a^+\cup a^-$ ainsi que les différences ensemblistes $a^+\setminus a^-$ et $a^-\setminus a^+$. On obtient alors $a^+\cap a^-$ par $a^+\cap a^-=(a^+\cup a^-)\setminus[(a^+\setminus a^-)\cup(a^-\setminus a^+)]$, ce qui détermine $a^+=(a^+\setminus a^-)\cup(a^+\cap a^-)$ et montre l'injectivité de Φ, donc de Ψ. On a donc $\mathcal{S}_{\mathcal{P}(\mathbb{R})}=(\mathcal{P}(\mathbb{R}))^2$.

3.4.2 Symétrisé du dioïde des compacts convexes On a vu en 0,5.2.8 que le dioïde des compacts convexes de $\mathbb{R}^2$, conv$\mathcal{P}_c(\mathbb{R}^2)$, n'est pas additivement résidué. On ne peut donc caractériser l'application Ψ en termes de résidu. Nous n'entreprendrons pas ici de caractériser le dioïde quotient par Ψ, mais indiquons simplement que l'on a la règle de simplification suivante:

3.4.3 Proposition *Soit $A=(A^+,A^-)\in(\mathrm{conv}\mathcal{P}_c(\mathbb{R}^2))^2$. On a*

$$\mathrm{int}A^+\supset A^-\Rightarrow\Psi((A^+,A^-))=\Psi((A^+,\varepsilon)) \ .$$

(int$B$ désigne l'intérieur de la partie B).

Preuve Soit en effet $(P,Q)\in\Psi(A)$, avec $P=(P^+,P^-)$, $Q=(Q^+,Q^-)$. Il suffit de montrer que $\Phi(Q^+(A^+,A^-))=\Phi(Q^+(A^+,\varepsilon))$ (décomposer Q en $Q^+\ominus Q^-$ et raisonner comme en 2.2.4). On a que P appartient à $\Phi(Q^+(A^+,A^-))$ ssi $P^+\oplus Q^+A^-=P^-\oplus Q^+A^+$, c'est-à-dire en passant aux fonctions support (cf. 0,1.0.11)

$$\max(\delta^\star_{P^+},\delta^\star_{Q^+}+\delta^\star_{A^-})=\max(\delta^\star_{P^-},\delta^\star_{Q^+}+\delta^\star_{A^+})$$

et comme $\delta^\star_{A^-}<\delta^\star_{A^+}$, cela équivaut à

$$\delta^\star_{P^+}=\max(\delta^\star_{P^-},\delta^\star_{Q^+}+\delta^\star_{A^+}),$$

i.e. $P\in\Phi(Q^+(A^+,\varepsilon))$. ■

Dans le dioïde symétrisé de conv$\mathcal{P}_c(\mathbb{R}^2)$, on pourra donc écrire, par exemple,

$$B_2(0,1) \ominus B_2(0,2) = \ominus B_2(0,2),$$

où $B_2(a,r)$ désigne la boule de centre a et de rayon r pour la norme euclidienne (et donc $B_2(0,1) \subset \mathrm{int} B_2(0,2)$).

3.4.4 Proposition *Pour tout dioïde $\mathcal{D}$ faiblement-archimédien tel que tout élément de $\mathcal{D}$ soit somme finie d'éléments intègres, on a $(\mathcal{S}_{\mathcal{D}})[X] \simeq \mathcal{S}_{(\mathcal{D}[X])}$.*

Preuve On a l'isomorphisme:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}^2[X] & \simeq & (\mathcal{D}[X])^2 \\ \bigoplus_i (P_i^+ \ominus P_i^-) X^i & \mapsto & \bigoplus_i P_i^+ X^i \ominus (\bigoplus_i P_i^- X^i) \end{array} .$$

Soient $P = \bigoplus_i P_i X^i$, $Q = \bigoplus_i Q_i X^i \in \mathcal{D}^2[X]$. Il faut montrer l'équivalence des deux conditions suivantes:

(i) $\forall i, \Psi(P_i) = \Psi(Q_i)$ dans $\mathcal{D}^2$,

(ii) $\Psi(P) = \Psi(Q)$ dans $\mathcal{D}^2[X]$.

Cela résulte du Corollaire 2.3.8 en passant au dioïde des fractions. Soit $\mathcal{F}_1$ le dioïde des fractions de $\mathcal{D}^2[X]$ et $\mathcal{F}_2$ le dioïde des fractions de $\mathcal{D}^2$. Soient $U, R \in \mathcal{F}_1$. D'après l'exemple 2.3.5, on peut écrire $U = \bigoplus_i U_i X^i$ et $R = \bigoplus_i R_i X^i$ où U_i et R_i appartiennent à $\mathcal{F}_2$. D'après le Corollaire 2.3.8, il suffit de voir que $\Phi(U) = \Phi(R)$ dans $\mathcal{F}_1$ ssi pour tout i, $\Phi(U_i) = \Phi(R_i)$ dans $\mathcal{F}_2$. Comme $V = \bigoplus_i V_i X^i \nabla U_i$ ssi pour tout i, $V_i \nabla U_i$, le résultat est acquis. ■

3.4.5 Dioïde symétrisé de $\mathbb{N}_{\text{ppcm}}$ Il est égal à $\mathbb{N}^2_{\text{ppcm}}$. Nous montrons que certaines règles de simplification sont compatibles avec la structure additive de $(\mathbb{N}_{\text{ppcm}})^2$, mais pas avec le produit. Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers. La décomposition d'un naturel non nul x en produit de nombres premiers:

$$x = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{v_p(x)}$$

se traduit par l'isomorphisme de demi-treillis:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} (\mathbb{N} \setminus \{0\}, \text{ppcm}) & \longrightarrow & (\mathbb{N}^{(\mathcal{P})}, \max) \\ x & \longmapsto & \{v_p(x)\}_{p \in \mathcal{P}} \end{array} \right. , \tag{3.4.a}$$

où $\mathbb{N}^{(\mathcal{P})}$ désigne l'ensemble des familles de naturels indicés par $\mathcal{P}$ avec seulement nombre fini d'éléments non nuls. Posons pour $x = (x^+, x^-) \in (\mathbb{N}_{\text{ppcm}})^2$, $v_p(x) := (v_p(x^+), v_p(x^-))$. On en déduit que $\Phi(x) = \Phi(y)$ ssi:

$$\forall p \in \mathcal{P}, \quad \Phi(v_p(x)) = \Phi(v_p(y)) \text{ dans } (\mathbb{N}^2, \max) .$$

Autrement dit, on a une généralisation en "dimension infinie" de la règle (1.2.a) valable pour $\mathbb{R}_{\max}$, i.e.

$$\Phi(x) = \Phi(y) \Leftrightarrow \forall p \in \mathcal{P}, \quad \begin{array}{l} v_p(x) \neq v_p(x'), v_p(y) \neq v_p(y') \text{ et} \\ \qquad \max(v_p(x^+), v_p(y^-)) = \max(v_p(x^-), v_p(y^+)), \\ \text{ou } v_p(x) = v_p(y) \end{array} .$$

Par exemple, on a $\Phi(2^3,2) = \Phi(2^3,\varepsilon)$. Cependant, l'application $x \mapsto \Psi(x)$ est injective, d'où il résulte que $\mathcal{S}_{\mathbb{N}_{\mathrm{ppcm}}} = (\mathbb{N}_{\mathrm{ppcm}})^2$. Nous montrons seulement ici pourquoi, par exemple, $\Psi(2^3,2) \neq \Psi(2^3,\varepsilon)$, laissant le cas général au lecteur. On a:

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & (2^3 \ominus 2)(3) \nabla 2^3 \ominus 1, \\ \text{(ii)} & 2^3 3 \not\nabla 2^3 \ominus 1 \end{array}$$

d'où $(3, 4 \ominus 1) \in \Psi(2^3,2), \notin \Psi(2^3,\varepsilon)$. Les assertions (i) et (ii) se réécrivent en effet:

$$\begin{array}{l} \mathrm{ppcm}(2^3 \times 3, 1) = \mathrm{ppcm}(2^3, 2 \times 3), \\ \mathrm{ppcm}(2^3 \times 3, 1) \neq 2^3 \ . \end{array}$$

3.5 Domaine de transitivité de la relation d'équilibre

On a constaté en I,1.2.3 que la relation ∇ n'est jamais transitive dans un dioïde. Cependant, dans le dioïde symétrisé libre de $\mathcal{D}$, on a la propriété de “transitivité faible” déjà notée en I,1.3.1. Il s'agit ici de généraliser ces propriétés au dioïde symétrisé d'un dioïde. Nous définissons donc:

3.5.1 Définition *L'élément $x \in \mathcal{S}$ est transitif si:*

$$\forall y, z \in \mathcal{S}, \quad y \nabla x \quad \text{et} \quad x \nabla z \quad \Rightarrow \quad y \nabla z \ .$$

Nous caractérisons ci-après les éléments transitifs. A cet effet, nous introduisons l'application:

$$\mu(x) = x \boxminus \ominus x \ . \tag{3.5.a}$$

3.5.2 Proposition *On a $\mu \preceq \mathrm{Id}$ et $\mu \circ \mu = \mu$.*

Preuve On a par 0,5.2.5,(ii) $\mu(x) = x \boxminus \ominus x \preceq x \boxminus \varepsilon = x$. En outre,

$$\begin{aligned} \mu \circ \mu(x) &= (x \boxminus \ominus x) \boxminus \ominus(x \boxminus \ominus x) \\ &= (x \boxminus \ominus x) \boxminus (\ominus x \boxminus x) \quad (3.1.b) \\ &= x \boxminus (\ominus x \oplus (\ominus x \boxminus x)) \quad (0,5.2.5,(iv)) \\ &= x \boxminus \ominus x = \mu(x) \end{aligned}$$

car $\ominus x \boxminus x \preceq \ominus x$. ∎

3.5.3 Remarque μ n'est cependant pas une fermeture duale, car μ n'est pas croissante (par exemple, dans $\mathbb{R}^2_{\max}$, $\mu(2,\varepsilon) = (2,\varepsilon)$ mais $\mu(2,2) = \varepsilon$).

3.5.4 Proposition *L'ensemble des éléments transitifs de $\mathcal{S}_{\mathcal{D}}$ est l'image de l'ensemble des éléments transitifs de $\mathcal{D}^2$ par la projection canonique.*

Preuve Résulte immédiatement de 2.2.14. ∎

3.5.5 Corollaire *Les éléments signés sont transitifs.*

Preuve résulte de 3.5.4 et de I,1.3.1,(iv). ∎

3.5.6 Théorème *Soit $\mathcal{D}$ un dioïde inf-complet distributif. Pour tout $x \in \mathcal{D}^2$, les propositions suivantes sont équivalentes:*

(i) $|x| = |\mu(x)|$

(ii) $x^\bullet = \mu(x)^\bullet$

(iii) $\Phi(\mu(x)) = \Phi(x)$

(iv) $\Phi(x) = \bigcap_{y\in\Phi(x)} \Phi(y)$

(v) $\Phi(x) = \{\mu(x)\} \oplus \mathcal{D}^\bullet$

(vi) *x est transitif.*

Preuve (i)$\Leftrightarrow$(ii): résulte de I,1.4.2,(i) et (ii).

(ii)$\Rightarrow$(iii): on a $\Phi(x) = [\mu(x), x^\bullet] \oplus \mathcal{D}^\bullet$ et $\Phi\circ\mu(x) = [\mu(x), \mu(x)^\bullet] \oplus \mathcal{D}^\bullet$ (par 3.5.2), d'où la conclusion.

(iii)$\Rightarrow$(ii): On a $\mu(x) \preceq \mu(x) \oplus |x| \preceq \mu(x) \oplus x^\bullet = x^\bullet$, et donc par 3.1.1, $\mu(x) \oplus |x| \in \Phi(x) = \Phi(\mu(x))$, donc $\mu(x) \oplus |x| \preceq \mu(x)^\bullet$, donc $(\mu(x) \oplus |x|)^\bullet = \mu(x)^\bullet \oplus x^\bullet = x^\bullet \preceq (\mu(x)^\bullet)^\bullet = \mu(x)^\bullet$, d'où (ii).

(iv)$\Leftrightarrow$(vi): On a comme $x \in \Phi(x)$, $\Phi(x) \supset \bigcap_{y\in\Phi(x)} \Phi(y)$. (iv) est donc équivalent à $\Phi(x) \subset \bigcap_{y\in\Phi(x)} \Phi(y)$, i.e. pour tout $y \in \Phi(x)$, $\Phi(x) \subset \Phi(y)$, i.e. $z \nabla x \Rightarrow z \nabla y$.

(iii)$\Rightarrow$(iv): Il suffit de voir que $\Phi(y) \supset \Phi(x)$ pour tout $y \in \Phi(x)$. Quitte à remplacer x par $\mu(x)$, on pourra supposer $x = \mu(x)$. D'après 3.1.1, on a une décomposition de la forme $y = y' \oplus t^\bullet$, avec $y' \in [x, x^\bullet]$. Par 2.2.5, $\Phi(y' \oplus t^\bullet) \supset \Phi(y')$. Il suffit donc de montrer $\Phi(y') \supset \Phi(x)$. On a en effet: $x \preceq y' \preceq x^\bullet$, donc $\mu(y') = y' \boxminus \ominus y' \preceq x^\bullet \boxminus \ominus x = (x \ominus x) \boxminus \ominus x = (x \boxminus \ominus x) \oplus (\ominus x \boxminus \ominus x) \preceq x$, er d'autre part $y'^\bullet \succeq x^\bullet$, soit $[\mu(y'), y'^\bullet] \supset [x, x^\bullet]$, et donc $\Phi(y) \supset \Phi(x)$.

(iv)$\Rightarrow$(iii): On a $\mu(x) \in \Phi(x)$, donc par (iv), $\Phi(x) \subset \Phi(\mu(x))$. L'autre inclusion résulte de 3.1.1.

(v)$\Rightarrow$(iii): Si $\Phi(x) = \{\mu(x)\} \oplus \mathcal{D}^\bullet$, on a $\Phi(\mu(x)) \supset \{\mu(x)\} \oplus \mathcal{D}^\bullet = \Phi(x)$. L'autre inclusion a été vue dans la preuve de (iv)$\Rightarrow$(iii).

(iii)$\Rightarrow$(v): Il suffit de voir $\{\mu(x)\} \oplus \mathcal{D}^\bullet \supset \Phi(x)$, l'autre inclusion étant triviale. Quitte à remplacer x par $\mu(x)$, on peut supposer $x = \mu(x)$. Soit $y \in \Phi(x)$. On a $y \succeq \mu(x) = x$, donc

$$y = (y \boxminus x) \oplus x \tag{3.5.b}$$

(via 0,5.2.5(x)). On a $x \ominus y \succeq y$, donc $y \boxminus x \preceq \ominus y$, donc $\ominus(y \boxminus x) \preceq y$, et en additionnant à (3.5.b), $y = (y \boxminus x)^\bullet \oplus x$. ∎

3.5.7 Interprétation Lorsque x est transitif, il résulte du Théorème 3.1.1 et du point (iii) ci-dessus que $\mu(x)$ est le plus petit élément dans la classe d'équivalence de x modulo Φ. On peut le voir comme un représentant canonique de x. Par exemple, dans $\mathbb{R}^2_{\max}$, on a $\mu((3,2)) = (3,\varepsilon)$.

3.5.8 Exemple Considérons le dioïde symétrisé libre de $(\mathcal{P}(\mathbb{R}), \cup, +)$. Soit $x = (x^+, x^-)$. On a $|\mu(x)| = |x|$ ssi

$$(x^+ \setminus x^-) \cup (x^- \setminus x^+) = x^+ \cup x^- \quad ,$$

où $\setminus$ dénote la différence ensembliste. Cela entraîne que les éléments transitifs sont les x tels que $x^+ \cap x^- = \emptyset$.

3.6 Eléments substituables

3.6.1 Définition *Soit $\mathcal{S}$ un dioïde symétrisé. On dit qu'un élément x est* substituable *s'il vérifie la propriété suivante:*

$$\forall y, c, d \in \mathcal{S}, \begin{cases} x \nabla y \\ cx \nabla d \end{cases} \Longrightarrow cy \nabla d \ . \tag{3.6.a}$$

On notera $\mathcal{S}^{\vee}$ l'ensemble des éléments substituables de $\mathcal{S}$.

En prenant $c = e$ dans (3.6.a), on constate qu'un élément substituable est transitif. Comme en 3.5.4, les éléments substituables de $\mathcal{S}_{\mathcal{D}}$ sont les images des éléments substituables de $\mathcal{D}^2$ par la projection canonique, et donc, via I,1.3.1(iii), les éléments signés sont substituables. Avant de caractériser les éléments substituables de $\mathcal{D}^2$, nous énonçons un lemme technique:

3.6.2 Lemme *On a pour tous $x, q \in \mathcal{D}^2$,*

$$\mu(q\mu(x)) \succeq \mu(qx) \ .$$

Preuve

$$\begin{aligned} \mu(q\mu(x)) = q\mu(x) \boxminus \ominus q\mu(x) &= q(x \boxminus \ominus x) \boxminus \ominus q(x \boxminus \ominus x) \\ &\succeq (qx \boxminus \ominus qx) \boxminus \ominus q(x \boxminus \ominus x) \quad \text{(via 0,5.2.5,(vii))} \\ &\succeq (qx \boxminus \ominus qx) \boxminus \ominus qx \\ &= qx \boxminus (\ominus qx \oplus \ominus qx) \quad \text{(via 0,5.2.5,(iv))} \\ &= \mu(qx) \ . \end{aligned}$$

■

3.6.3 Contre exemple L'inégalité peut être stricte dans (3.6.2). En effet, dans le dioïde symétrisé libre de $\overline{\mathbb{R}}_{\max}$, on a en prenant $q = (+\infty, \varepsilon)$ et $x = (2, 1)$, $\mu(qx) = (+\infty, +\infty) \boxminus (+\infty, +\infty) = \varepsilon$ alors que $\mu(q\mu(x)) = \mu((+\infty, \varepsilon).(2, \varepsilon)) = \mu((+\infty, \varepsilon)) = (+\infty, \varepsilon)$.

3.6.4 Corollaire *On a pour tous $x, q \in \mathcal{D}^2$, $\Psi(\mu(x)) \subset \Psi(x)$.*

Preuve Résulte immédiatement de 3.6.2 et de la formule (2.2.b). ■

3.6.5 Proposition *Soit $\mathcal{D}$ un dioïde inf-complet infiniment distributif. Dans le dioïde $\mathcal{D}^2$, les propriétés suivantes sont équivalentes:*

(i) $\forall q \in \mathcal{D}^2$, $\mu(qx) = \mu(q\mu(x))$ *et* $\mu(x)^{\bullet} = x^{\bullet}$

(ii) $\Psi(\mu(x)) = \Psi(x)$

(iii) $\Psi(x) = \bigcap_{y \in \Phi(x)} \Psi(y)$

(iv) x *est substituable.*

Preuve (iv)⇔(iii): La propriété (iii) est équivalente à $\Psi(y) \supset \Psi(x)$, pour tout $y \in \Phi(x)$, i.e. $p \nabla qx \Rightarrow p \nabla qy$, i.e. x substituable.

(iii)⇒(ii): une inclusion de (ii) résulte de 3.6.4. La propriété (iii) entraîne que $\Psi(\mu(x)) \supset \Psi(x)$ car $\mu(x) \in \Phi(x)$, ce qui est l'autre inclusion.

(ii)⇒(i): par 3.1.1, on a pour tout q, $\mu(qx) = \bigwedge \Phi(qx) = \bigwedge \Phi(q\mu(x)) = \mu(q\mu(x))$. D'autre part, $\Phi(x) = \Phi(\mu(x))$, donc $x^\bullet = \mu(x)^\bullet$ (cf. 3.5.6).

(i)⇒(iii): Soit $y \in \Phi(x)$. On a par 3.1.1 une décomposition de la forme $y = y' \oplus t^\bullet$, avec

$$y' \in [\mu(x), x^\bullet] \tag{3.6.b}$$

et comme par 2.2.5, $\Psi(y) \supset \Psi(y')$, il suffit de montrer $\Psi(y') \supset \Psi(x)$ pour avoir (iii). Ici encore, quitte à remplacer x par $\mu(x)$, on supposera $x = \mu(x)$. Via la formule (2.2.b) et la proposition 3.1.1, il suffit de voir que pour tout $q \in \mathcal{D}^2$, on a

$$[\mu(qy'), (qy')^\bullet] \supset [\mu(qx), (qx)^\bullet] \ . \tag{3.6.c}$$

Par (3.6.b), on a $y' \succeq \mu(x)$, donc $(qy')^\bullet = q(y')^\bullet \succeq q\mu(x)^\bullet = (qx)^\bullet$. D'autre part,

$$\begin{aligned}
\mu(qy') = qy' \boxminus \ominus qy' &\preceq \quad qx^\bullet \boxminus \ominus qx \\
&\preceq \quad (qx \oplus \ominus qx) \boxminus \ominus qx \\
&\preceq \quad qx \boxminus \ominus qx \qquad \text{(via 0, 5.2.5,(v))} \\
&= \quad \mu(qx),
\end{aligned}$$

ce qui montre l'inclusion (3.6.c). ∎

3.6.6 Corollaire *Si tout élément est somme finie d'éléments inversibles, alors les éléments substituables de $\mathcal{D}^2$ sont exactement les éléments transitifs.*

Preuve Trivialement, substituable entraîne transitif. Supposons x transitif, $x \nabla b$, $cx \nabla d$, où $c = c_1 \oplus c_2$ est somme de deux éléments inversibles (le cas n s'en déduisant). Par transitivité faible, $b \nabla x \nabla c_1^{-1}(d \ominus c_2 x)$ entraîne $b \nabla c_1^{-1}(d \ominus c_2 x)$. En réitérant avec $c_2^{-1}(d \ominus c_1 b) \nabla x \nabla b$, on obtient le résultat. ∎

3.6.7 Contre exemple Les éléments transitifs ne sont pas toujours substituables. Dans le dioïde symétrisé libre de $\overline{\mathbb{R}}_{\max}$, on a en effet

$$\left\{\begin{array}{l} (\varepsilon, 2) \nabla (+\infty, \varepsilon)(2,1) \\ (2,1) \nabla (2, \varepsilon) \end{array}\right. \quad \text{et} \quad (\varepsilon, 2) \not\nabla (+\infty, \varepsilon)(2, \varepsilon) = (+\infty, \varepsilon),$$

ce qui montre que $(2,1)$ n'est pas substituable, quoique $(2,1)$ vérifie $\mu(2,1) = (2, \varepsilon)$ et soit donc transitif (cf. 3.5.6,(i)).

3.6.8 Contre exemple On ne peut relaxer 3.6.6: il est faux que si tout élément est somme finie d'éléments intègres, alors transitif=substituable. Dans le dioïde symétrisé de $\mathbb{N}_{\text{ppcm}}$, $2^3 \ominus 2$ est transitif (cela résulte par exemple de l'identification à $\mathbb{N}_{\max}^{(\mathcal{P})}$, cf. (3.4.a)). Cependant, $2^3 \ominus 2$ n'est pas substituable:

$$\left\{\begin{array}{l} (2^3 \ominus 2) \nabla 2^3 \\ 3 \times (2^3 \ominus 2) \nabla 2^3, \end{array}\right. \quad \text{mais} \quad 3 \times 2^3 \not\nabla 2^3 \ .$$

3.6.9 Proposition *Pour tout $x \in \mathcal{S}_{\mathcal{D}}$, on a*

$$x = \mu(x) \oplus (x \boxminus \mu(x))^\bullet \ .$$

Preuve Comme $\mu(x) \preceq x$ il résulte de 0,5.2.5,(x), que $x = \mu(x) \oplus (x \boxminus \mu(x))$. En outre, $\ominus(x \boxminus \mu(x)) = \ominus x \boxminus (\ominus x \boxminus x) \preceq x$ (par 0,5.2.5,(viii)), et donc $x = \mu(x) \oplus (x \boxminus \mu(x)) \ominus (x \boxminus \mu(x)) = \mu(x) \oplus (x \boxminus \mu(x))^{\bullet}$. ∎

Comme $\mu(x) \in \mathcal{S}_{\mathcal{D}}^{\vee}$, la Proposition 3.6.9 donne la décomposition:

$$\mathcal{S}_{\mathcal{D}} = \mathcal{S}_{\mathcal{D}}^{\vee} \oplus \mathcal{S}_{\mathcal{D}}^{\bullet} \ . \tag{3.6.d}$$

3.6.10 Proposition (Trivialisation des équilibres) *On a dans le dioïde symétrisé de $\mathcal{D}$ la propriété suivante:*

$$a, b \ \text{substituables} \ \text{ et } a \nabla b \Longrightarrow a = b \ .$$

Preuve Prenons deux représentants de a et b, a_0 et $b_0 \in \mathcal{D}^2$, substituables, tels que $a_0 \nabla b_0$. De $(p, q) \in \Psi(a_0)$, i.e. $p \nabla qa_0$, on déduit en substituant b_0 que $p \nabla qb_0$, ce qui montre que $\Psi(a_0) \subset \Psi(b_0)$. L'autre inclusion s'obtient de même, et l'on conclut que a_0 et b_0 représentent le même élément modulo Ψ, i.e. $a = b$. ∎

3.6.11 Proposition *Tout élément inversible de $\mathcal{D}^2$ est substituable.*

Preuve Si $x \nabla y$ et $cx \nabla z$ avec x inversible, on a $e \nabla x^{-1}y, cx.e \nabla z$, et en observant que e est toujours substituable (il vérifie le critère 3.6.5,(i)), $cx.x^{-1}y = cy \nabla z$. ∎

3.6.12 Lemme (Substitution vectorielle) *Soit x un vecteur de taille n dont les coefficients sont substituables. On a pour tous vecteur b et matrice C de tailles compatibles:*

$$x \nabla b, \ \ Cx \nabla d \Rightarrow Cb \nabla d \ .$$

Preuve vérifions le pour la i-ième composante. On a $(Cx)_i = \bigoplus_{k=1}^{n} C_{ik} x_k \nabla d_i$. La proposition résulte d'une application répétée du lemme de substitution scalaire à cette équation. ∎

3.6.13 Exemple (Eléments substituables dans $\mathbb{S}_{\max}$) Dans le dioïde $\mathbb{R}_{\max}^2$, les éléments transitifs (donc par 3.6.6 substituables) sont les éléments de la forme (a^+, a^-) avec $a^+ \neq a^-$. On a en effet $\mu((a^+, a^-)) = (a^+, \varepsilon)$ si $a^+ > a^-$, (ε, a^-) si $a^- > a^+$ et ε si $a^+ = a^-$. On constate que le critère 3.5.6,(ii) est vérifié dans les deux premiers cas, et pas dans le dernier. Ainsi, par 3.5.4, les éléments substituables de $\mathbb{S}_{\max}$ sont précisément les éléments signés, i.e. $\mathbb{S}_{\max}^{\vee} = \mathbb{S}_{\max}^{\oplus\ominus}$.

3.6.14 Exemple (Polynômes substituables) Dans le dioïde symétrisé de $\mathbb{R}_{\max}[X]$, substituable=transitif (i.e les éléments substituables sont les polynômes dont aucun coefficient n'est pointé, $\mathcal{S}_{\mathbb{R}_{\max}[X]}^{\vee} = \mathbb{S}_{\max}^{\vee}[X]$). On a en effet montré les assertions suivantes:

(i) x transitif ssi $\Phi(\mu(x)) = \Phi(x)$ (cf. 3.5.6).

(ii) x substituable ssi $\Psi(\mu(x)) = \Psi(x)$ (cf. 3.6.5).

(iii) $\Psi(x) = \Psi(y)$ dans $(\mathbb{R}_{\max}[X])^2$ ssi $\Phi(x) = \Phi(y)$ dans le dioïde des fractions de $\mathbb{R}_{\max}[X]$ (cf. 2.3.7).

Il suffit donc de voir que (a): $\Phi(x) = \Phi(y)$ dans $\mathcal{F}_{(\mathbb{R}_{\max}[X])^2}$ ssi (b): $\Phi(x) = \Phi(y)$ dans $(\mathbb{R}_{\max}[X])^2$. Le sens (a)⇒(b) s'obtient par restriction. Supposons (b). Soit $z \in \mathcal{F}^2$. On peut écrire $z = X^{-k}w$, avec $w \in (\mathbb{R}_{\max}[X])^2$. On a $z \nabla x$ ssi $w \nabla X^k x$, et comme d'après (b), $\Phi(X^k x) = \Phi(X^k y)$ (cf. par exemple le point (i)⇔(ii) de la preuve de la Proposition 3.4.4), on a $w \nabla X^k y$, d'où la conclusion.

3.7 Elimination

On dira que x est éliminable si

$$\begin{cases} ax \,\nabla\, b \\ cx \,\nabla\, d \end{cases} \Rightarrow ad \,\nabla\, bc \ .$$

L'éliminabilité entraîne clairement la substituabilité.

3.7.1 Proposition *Dans $\mathbb{S}_{\max}$, les éléments éliminables sont les éléments signés.*

Preuve Si a ou c sont non équilibrés, par exemple a, la première équation est équivalente à $x \ \nabla \ a^{-1}b$, et l'on s'est ramené à la propriété de substitution 3.6.1. Si a et c sont tous deux équilibrés, on a $ad \in \mathbb{S}^{\bullet}_{\max}$ et $cb \in \mathbb{S}^{\bullet}_{\max}$, et la condition $ad \,\nabla\, bc$ est remplie. Réciproquement, un élément éliminable est transitif, donc signé. ∎

L'éliminabilité est un fait plus rare que la substituabilité, pour lequel nous n'avons pas de caractérisation générale.

3.7.2 Contre exemple L'éliminabilité ne "passe pas" aux polynômes. On a par exemple:

$$\begin{cases} (e \ominus X)(e \oplus X) \,\nabla\, e \ominus X^2 \\ e^{\bullet}(e \oplus X) \,\nabla\, e \end{cases} \quad \text{mais} \quad (e \ominus X)e \ \not\nabla\ e^{\bullet}(e \ominus X^2) \ .$$

Les coefficients de $e \oplus X$ sont éliminables dans $\mathbb{S}_{\max}$, mais $e \oplus X$ ne l'est pas dans $\mathbb{S}_{\max}[X]$.