Chapitre III

Systèmes d'équilibres linéaires

Nous étudions dans ce chapitre les systèmes d'équilibres linéaires. On travaillera essentiellement dans le dioïde $\mathbb{S}_{\max}$ (symétrisé de $\mathbb{R}_{\max}$). Cette étude repose sur les trois approches suivantes.

a/ Point de vue géométrique. On étudie les questions d'orthogonalité dans $\mathbb{S}_{\max}^n$, ou de manière équivalente, les systèmes homogènes $Ax \nabla \varepsilon$. Le résultat central est que l'orthogonal d'un sous-moduloïde de type fini de $\mathbb{S}_{\max}^n$ est un sous-moduloïde de type fini (effectivement calculable). En outre, l'orthogonal d'un sous-moduloïde de type fini de $\mathbb{R}_{\max}^n$ caractérise complètement ce moduloïde, ce qui autorise l'emploi de résultats de dualité pour l'étude des sous-moduloïdes de type fini de $\mathbb{R}_{\max}^n$. De manière précise, on peut associer à un sous-moduloïde M de type fini de $\mathbb{R}_{\max}^n$ l'ensemble $M^\perp$ des équations $\phi(x) = \psi(x)$ vérifiées pour tout x appartenant à M (ϕ et ψ étant des formes linéaires sur $\mathbb{R}_{\max}^n$). Les résultats d'orthogonalité qui précèdent affirment que les équations de cette forme vérifiées par M admettent une famille génératrice finie, et caractérisent M. On cherche ensuite des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de solutions de systèmes d'équilibres homogènes et non homogènes. On obtient alors des conditions simples et purement structurelles.

b/ Point de vue Cramerien. Si l'on se restreint à la recherche de solutions *signées* de systèmes d'équilibres linéaires homogènes et non homogènes, on trouve par des techniques d'élimination des conditions *nécessaires* précisément analogues aux conditions de Cramer pour des systèmes carrés. On montre que les systèmes rectangulaires vérifient de nouvelles conditions de compatibilité (qui sont impliquées par les conditions de compatibilité usuelles dans un corps, mais pas dans un dioïde). On montrera qu'en général, les conditions nécessaires obtenues en éliminant ne sont pas suffisantes.

c/ Point de vue combinatoire. Pour des systèmes *carrés* non homogènes, on montre que la non nullité du déterminant entraîne l'existence d'une solution signée. Une première démonstration est fondée sur un avatar des algorithmes itératifs classiques (Jacobi, Gauss-Seidel). Une seconde démonstration repose sur le Théorème de Frobenius-König. On étudie ensuite les systèmes homogènes carrés. On montre que l'équilibre du déterminant entraîne l'existence d'une solution signée, ce qui généralise un résultat de Gondran et Minoux [47] dont nous reprenons partiellement les techniques.

L'idée d'introduire un signe moins formel dans les dioïdes pour résoudre les systèmes d'équations est due à J.P. Quadrat. La partie sur la condition nécessaire de Cramer pour les systèmes carrés ($Ax \nabla b$ entraîne $\det A.x \nabla A^{\mathrm{adj}}b$) est commune avec Max Plus [79, 80]. En particulier, le lemme d'élimination (pour x signé, $ax \nabla b$ et $cx \nabla d$ entraîne $ad \nabla bc$), est du à M. Akian. L'idée d'adapter les algorithmes itératifs est due à M. Akian et R. Nikoukhah.

1 Dualité

1.1 Orthogonalité dans $\mathbb{S}_{\max}^n$

Dans $\mathbb{S}_{\max}^n$, on définit le produit scalaire de deux vecteurs x et y comme à l'accoutumée:

$$x.y = \bigoplus_{i=1}^{n} x_i y_i \quad .$$

La propriété familière

$$(Au).(Bv) = (B^{\mathrm{T}} Au).v \tag{1.1.a}$$

est encore valide. Etant donnée une partie $P \subset \mathbb{S}_{\max}^n$, on définit l'*orthogonal* de P:

$$P^{\perp} = \{v \in \mathbb{S}_{\max}^n \mid \forall u \in P, \quad v.u \,\nabla\, \varepsilon\} \quad .$$

$P^{\perp}$ est clairement un sous-moduloïde de $\mathbb{S}_{\max}^n$. On a les propriétés suivantes.

1.1.1 Propriétés

(i) $P \mapsto P^{\perp}$ *est décroissante*

(ii) $(P^{\perp})^{\perp} \supset P$

(iii) $((P^{\perp})^{\perp})^{\perp} = P^{\perp}$

(iv) $(\mathrm{vect}\langle P\rangle \oplus (\mathbb{S}_{\max}^{\bullet})^n)^{\perp} = P^{\perp}$

(v) $(P \cup Q)^{\perp} = P^{\perp} \cap Q^{\perp}$

(vi) *pour des sous-moduloïdes de* $\mathbb{S}_{\max}^n$, $(V \oplus W)^{\perp} = V^{\perp} \cap W^{\perp}$.

Les propriétés (i) et (ii) expriment que $P \mapsto P^{\perp}$ est une correspondance de Galois (cf. 0,5.1.9). L'involutivité (iii) est générale pour les correspondances de Galois (cf. 0,5.1.8,(i)). Les autres propriétés sont immédiates. ■

Nous considérons d'abord le cas où $P = \{v\}$ est réduit à un singleton.

1.1.2 Proposition *Soit $v \in \mathbb{S}_{\max}^n$. Le moduloïde $v^{\perp}$ est de type fini.*

Il résulte de (1.1.a) que pour toute matrice D diagonale à coefficients diagonaux dans $\mathbb{S}_{\max}^{\vee} \setminus \{\varepsilon\}$, et pour toute matrice de permutation P, l'on peut écrire:

$$u.v \,\nabla\, \varepsilon \;\Leftrightarrow\; (D^{-1}Pu).(DPv) \,\nabla\, \varepsilon \quad . \tag{1.1.b}$$

On pourra ainsi supposer quitte à normaliser et à réordonner les indices que

$$v = [\underbrace{e, \ldots, e}_{p \text{ fois}}, \underbrace{e^{\bullet}, \ldots, e^{\bullet}}_{q \text{ fois}}, \underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{n-q-p \text{ fois}}] \quad . \tag{1.1.c}$$

On notera $e_1, \ldots, e_n$ les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{S}_{\max}^n$. On a le résultat plus précis suivant:

1.1.3 Lemme *La famille $\mathcal{F}$ formée des vecteurs suivants est une base faible de $v^{\perp}$:*

$$\begin{cases} e_i \ominus e_j, i < j \leq p, \\ e_i, i \geq p+1, \\ e_i \oplus e_j, i \leq p, p+1 \leq j \leq p+q, \\ e_i \ominus e_j, i \leq p, p+1 \leq j \leq p+q, \\ e_i^{\bullet}, i \leq p \quad . \end{cases} \tag{1.1.d}$$

Preuve du Lemme. Quitte à diviser u par $\bigoplus_i |u_i|$, on prendra $\bigoplus_i |u_i| = e$.

<u>Cas 1</u> Il existe $i, p+1 \leq i \leq p+q$, tel que $|u_i| = e$. On peut écrire:

$$u = u_i e_i \oplus \bigoplus_{k\neq i, k\leq p} u_k(e_k \oplus e_i) \oplus \bigoplus_{k\geq p+1, k\neq i} u_k e_k \ ,$$

ce qui montre que $u \in \mathrm{vect}\langle \mathcal{F} \rangle$.

<u>Cas 2</u> Il existe $i, i \leq p$, tel que $u_i = e^\bullet$. On peut écrire:

$$u = u_i e_i^\bullet \oplus \bigoplus_{k\leq p} u_k(e_k \ominus e_i) \oplus \bigoplus_{k\geq p+1} u_k e_k \ .$$

En effet, il est clair que le second membre est supérieur ou égal à u. L'autre inégalité vient de ce que $|u_k| \preceq e$, et donc $u_k e_i \preceq u_i e_i^\bullet = e_i^\bullet$.

<u>Cas 3</u> Aucun u_i, pour $1 \leq i \leq p$ n'est égal à $e^\bullet$, et il existe i et $j \leq p$ tels que $|u_i| = |u_j| = e$ et $u_i = \ominus u_j$, par exemple $u_i = e$ et $u_j = \ominus e$. Pour $k \leq p$ et $k \neq i, j$, on a $u_k \preceq e$ ou $u_k \preceq \ominus e$. Posons $w_k = u_k(e_k \ominus e_i)$ si $u_k \preceq \ominus e$ et $w_k = u_k(e_k \ominus e_j)$ si $u_k \preceq e$. On a clairement $w_k \preceq u$. On vérifie que:

$$u = u_i(e_i \ominus e_j) \oplus \bigoplus_{k\geq p+1} u_k e_k \oplus \bigoplus_{k\leq p, k\neq i,j} w_k \in \mathrm{vect}\langle \mathcal{F} \rangle$$

On a montré dans tous les cas que $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de $v^\perp$. On vérifie de manière élémentaire qu'aucun vecteur n'est combinaison linéaire des autres, ce qui montre que $\mathcal{F}$ est non redondante. ∎

1.1.4 Théorème *L'orthogonal d'un moduloïde type fini $V \subset \mathbb{S}_{\max}^n$ est un moduloïde type fini.*

Preuve Par induction sur le cardinal d'une famille génératrice de V. Supposons $V = W \oplus \mathbb{S}_{\max} v$, et $W^\perp$ sous-moduloïde de type fini, soit $W^\perp = \mathrm{vect}\langle w_1, \ldots, w_k \rangle$. Les assertions suivantes sont équivalentes:

$$\begin{array}{l} x \in (W \oplus \mathbb{S}_{\max} v)^\perp \\ x \in W^\perp \cap v^\perp \\ \exists y \in \mathbb{S}_{\max}^k, x = \bigoplus_{i=1}^k y_i w_i \ \text{ et } \ v.x \ \nabla \ \varepsilon \\ \exists y \in \mathbb{S}_{\max}^k, x = \bigoplus_{i=1}^k y_i w_i \ \text{ et } \ (\bigoplus_i v_i w_i).y \ \nabla \ \varepsilon \end{array}$$

Notons $\mathcal{W}$ l'application linéaire $\mathbb{S}_{\max}^k \to \mathbb{S}_{\max}^n$, $e_i \mapsto w_i$. D'après ce qui précède, on a $(W \oplus \mathbb{S}_{\max} v)^\perp = \mathcal{W}(\bigoplus v_k w_k)^\perp$. La Proposition 1.1.2 affirme que $(\bigoplus v_k w_k)^\perp$ est un moduloïde type fini, et donc, $V^\perp$, image de $(\bigoplus v_k w_k)^\perp$ par $\mathcal{W}$, est également de type fini. ∎

1.1.5 Exemple La preuve ci-dessus est effective. Calculons l'orthogonal du moduloïde suivant:

$$V = \mathrm{vect}\langle v_1, v_2 \rangle \ \text{ où } \ v_1 = \begin{bmatrix} e \\ e \\ \varepsilon \end{bmatrix} \text{ et } v_2 = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ e \\ e \end{bmatrix} \ .$$

On a d'après (1.1.d):

$$\begin{bmatrix} e \\ e \\ \varepsilon \end{bmatrix}^\perp = \mathrm{vect}\langle \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ e \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e \\ \ominus e \\ \varepsilon \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e^\bullet \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \varepsilon \\ e^\bullet \\ \varepsilon \end{bmatrix} \rangle \ .$$

On cherche donc $x \in V^\perp$ sous la forme:

$$x = My = \begin{bmatrix} \varepsilon & e & e^\bullet & \varepsilon \\ \varepsilon & \ominus e & \varepsilon & e^\bullet \\ e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} . \tag{1.1.e}$$

L'équation $v_2.x \,\nabla\, \varepsilon$ se réécrit:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon & e & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon & e & e^\bullet & \varepsilon \\ \varepsilon & \ominus e & \varepsilon & e^\bullet \\ e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e & \ominus e & \varepsilon & e^\bullet \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \nabla\, \varepsilon \ .$$

On a donc, en notant $\mathrm{vect}\langle A\rangle$ le moduloïde des colonnes d'une matrice A, et en appliquant à nouveau la formule (1.1.d):

$$y \in \mathrm{vect}\langle \begin{bmatrix} e & \varepsilon & \varepsilon & e & e & \varepsilon & \varepsilon & e^\bullet & \varepsilon \\ e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e & e & \varepsilon & e^\bullet \\ \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e & e & \ominus e & e & \ominus e & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} \rangle = \mathrm{vect}\langle N\rangle$$

et en reportant dans (1.1.e), $x \in \mathrm{vect}\langle MN\rangle$, soit après suppression des vecteurs redondants:

$$x \in \mathrm{vect}\langle \begin{bmatrix} e & \varepsilon & e & e^\bullet & \varepsilon & \varepsilon \\ \ominus e & e^\bullet & e^\bullet & \varepsilon & e^\bullet & \varepsilon \\ e & e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e^\bullet \end{bmatrix} \rangle = V^\perp \ . \tag{1.1.f}$$

De manière équivalente, on peut affirmer que les éléments de V satisfont les trois équilibres suivants:

$$x \oplus z \,\nabla\, y, \quad y \oplus z \,\nabla\, y, \quad x \oplus y \,\nabla\, y$$

(on a ignoré les équilibres triviaux associés aux trois derniers vecteurs de (1.1.f)).

1.1.6 Proposition *Soit $w \in \mathbb{S}_{\max}^n$. On a $(w^\perp)^\perp = \mathbb{S}_{\max} w \oplus (\mathbb{S}_{\max}^\bullet)^n$.*

Preuve La Propriété 1.1.1,(iv) donne

$$(w^\perp)^\perp \supset \mathbb{S}_{\max} w \oplus (\mathbb{S}_{\max}^\bullet)^n \ . \tag{1.1.g}$$

Réciproquement, prenons w sous la forme canonique (1.1.c). On peut supposer $n = p+q$. Supposons $\alpha \notin \mathbb{S}_{\max} w \oplus (\mathbb{S}_{\max}^\bullet)^n$, et posons $\lambda = w\backslash\alpha$ (bien défini dans le dioïde complété de $\mathbb{S}_{\max}$). On ne peut avoir $\alpha = \lambda w \oplus \mu(\mathbb{S}_{\max}^\bullet)^n$. Comme trivialement, $\alpha \succeq (w\backslash\alpha)w$, on a une composante non équilibrée de α, α_i, telle que:

$$\alpha_i \succ \lambda w_i \ , \tag{1.1.h}$$

avec

$$\lambda = \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_p \wedge (\alpha_{p+1}/e^\bullet) \wedge \ldots \wedge (\alpha_n/e^\bullet) \ .$$

Quitte à multiplier α par un scalaire inversible, on pourra supposer $\alpha_i = e$. L'inégalité stricte (1.1.h) n'est possible que dans les cas suivants.

1/ On a $|\alpha_k| \prec e$ pour un certain k. Le vecteur f dont les seules composantes non nulles sont $f_i = e$ et $f_k = \ominus e$ est dans l'orthogonal de w mais pas de α.

2/ Pour tout k, $|\alpha_k| \succeq e$, et a/ on a $\alpha_q \in \mathbb{S}^{\vee}_{\max}$ avec $q \geq p+1$. Le vecteur f dont la seule composante non nulle est $f_q = e$ est dans l'orthogonal de w mais pas de α.
2/ b/. On a $\alpha_q = \ominus\alpha_r = e$ avec $q, r \leq p$. On conclut de manière analogue.
On a montré $\alpha \notin \mathbb{S}_{\max}w \oplus (\mathbb{S}^{\bullet}_{\max})^n \Rightarrow \alpha \notin (w^{\perp})^{\perp}$, ce qui montre l'inclusion réciproque de (1.1.g)
■

Le contre exemple suivant montre que la propriété 1.1.6 ne s'étend pas aux sous-moduloïdes de “dimension” plus grande.

1.1.7 Contre exemple Soient v_1 et v_2 comme en 1.1.5. Après quelques calculs, on observe les faits suivants.

$$v_1^{\perp} = \mathrm{vect}\langle \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ e \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e \\ \ominus e \\ \varepsilon \end{bmatrix} \rangle \oplus (\mathbb{S}^{\bullet}_{\max})^3, \quad v_2^{\perp} = \mathrm{vect}\langle \begin{bmatrix} e \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \varepsilon \\ e \\ \ominus e \end{bmatrix} \rangle \oplus (\mathbb{S}^{\bullet}_{\max})^3 \ .$$

$$(v_1^{\perp} \oplus v_2^{\perp})^{\perp} = \mathbb{S}_{\max} \begin{bmatrix} e^{\bullet} \\ e \\ e^{\bullet} \end{bmatrix} \oplus (\mathbb{S}^{\bullet}_{\max})^3 \ .$$

Par application immédiate de (1.1.d), on obtient:

$$((v_1^{\perp} \oplus v_2^{\perp})^{\perp})^{\perp} = \mathrm{vect}\langle \begin{bmatrix} e & \varepsilon & e & e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e & \ominus e & e & e & e^{\bullet} \\ \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon & \ominus e & e & \varepsilon \end{bmatrix} \rangle \ .$$

Posons $F_1 = v_1^{\perp}$ et $F_2 = v_2^{\perp}$. On a montré:

$$(F_1 \oplus F_2)^{\perp\perp} \supsetneqq F_1 \oplus F_2 \ .$$

Ce contre exemple entraîne en outre que

$$(G_1 \cap G_2)^{\perp} \supsetneqq G_1^{\perp} \oplus G_2^{\perp} \ , \tag{1.1.i}$$

où $G_1 = \mathrm{vect}\langle v_1 \rangle \oplus (\mathbb{S}^{\bullet}_{\max})^3$ et $G_2 = \mathrm{vect}\langle v_2 \rangle \oplus (\mathbb{S}^{\bullet}_{\max})^3$. En effet, comme G_1 et G_2 sont (aux termes triviaux près) de dimension 1, il résulte de la Proposition 1.1.6 que $G_1 = (G_1^{\perp})^{\perp}$ et de même pour G_2. On peut alors écrire, d'après la Propriété 1.1.1,

$$(G_1 \cap G_2)^{\perp} = ((G_1^{\perp})^{\perp} \cap (G_2^{\perp})^{\perp}) = ((G_1^{\perp} \oplus G_2^{\perp})^{\perp})^{\perp} = ((F_1 \oplus F_2)^{\perp})^{\perp} \supsetneqq F_1 \oplus F_2 = G_1^{\perp} \oplus G_2^{\perp} \ .$$

Il résulte de ce qui précède que la correspondance $V \mapsto V^{\perp}$ n'est pas injective, même en faisant abstraction du sous-moduloïde trivial $(\mathbb{S}^{\bullet}_{\max})^n$. On a cependant des résultats plus simples en se restreignant au dioïde $\mathbb{R}^n_{\max}$ comme il suit.

1.2 Dualité $\mathbb{R}^n_{\max} \leftrightarrow \mathbb{S}^n_{\max}$

Considérons la correspondance suivante:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n_{\max} & \rightarrow & \mathbb{S}^n_{\max} \\ V & \mapsto & V^{\perp} = \{u \in \mathbb{S}^n_{\max} \mid \forall v \in V, u.v \,\nabla\, \varepsilon\} \\ W^{\top} = \{u \in \mathbb{R}^n_{\max} \mid \forall w \in W, u.w \,\nabla\, \varepsilon\} & \leftarrow & W \end{array} \tag{1.2.a}$$

Cette correspondance s'interprète de manière bien simple. Soit M un sous-moduloïde de $\mathbb{R}_{\max}^n$, et $v \in M^\perp$. On peut écrire $v \in \mathbb{S}_{\max}^n$ comme différence:

$$v = v_1 \ominus v_2, \quad v_1, v_2 \in \mathbb{R}_{\max}^n \ .$$

Pour $x \in M$ (et donc x positif), l'équilibre $vx \,\nabla\, \varepsilon$ se trivialise en

$$v_1 x = v_2 x \ . \tag{1.2.b}$$

Autrement dit, on associe au moduloïde M l'ensemble $M^\perp$ des équations de type (1.2.b) qu'il satisfait.

1.2.1 Exemple On vérifie de manière élémentaire que le sous-moduloïde de $\mathbb{R}_{\max}^2$:

$$M = \mathrm{vect}\langle \begin{bmatrix} e \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e \\ 3 \end{bmatrix} \rangle$$

est caractérisé par les équations:

$$3x \oplus y = 3x, \quad 1x \oplus y = y \ ,$$

ou de manière équivalente

$$3x \succeq y \succeq 1x \ .$$

1.2.2 Théorème (i)*: Les deux applications (1.2.a) établissent une correspondance de Galois entre les sous-moduloïdes de type fini de $\mathbb{R}_{\max}^n$ et les sous moduloïdes de type fini de $\mathbb{S}_{\max}^n$. En outre,* (ii)*: l'application $\mathbb{R}_{\max}^n \to \mathbb{S}_{\max}^n$, $V \mapsto V^\perp$ est injective.*

Preuve (i): On a déjà montré en 1.1.4 que $V^\perp$ était un moduloïde de type fini. Réciproquement, on à l'analogue[1] du Lemme 1.1.3:

1.2.3 Lemme *Soit*

$$w = [\underbrace{e, \ldots, e}_{p \text{ fois}}, \underbrace{\ominus e, \ldots, \ominus e}_{r \text{ fois}}, \underbrace{e^\bullet, \ldots, e^\bullet}_{q \text{ fois}}, \underbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}_{n-q-p-r \text{ fois}}] \in \mathbb{S}_{\max}^n \tag{1.2.c}$$

La famille $\mathcal{F}$ formée des vecteurs suivants est une base faible de $w^\top$:

$$\begin{array}{l} e_i \oplus e_j, i \leq p, p+1 \leq j \leq p+r \\ e_i, i \geq p+r+1, \\ e_i \oplus e_j, i \leq p+r, p+r+1 \leq j \leq p+q \ . \end{array} \tag{1.2.d}$$

Le Lemme se prouve de manière analogue au Lemme 1.1.3, et la récurrence donnée dans la preuve de 1.1.4 donne une famille génératrice finie de $W^\top$. Cela achève la preuve de (i).

Preuve de (ii). Le lemme suivant est la clé du résultat.

1.2.4 Lemme (de séparation) *Soit V un sous-moduloïde de type fini de $(\mathbb{R}_{\max})^n$ et $w \notin V$. Il existe un vecteur $p \in (\mathbb{S}_{\max})^n$ tel que*

$$p.w \not\nabla \varepsilon, \qquad \forall v \in V, \ p.v \,\nabla\, \varepsilon \ .$$

[1] la forme du vecteur w est justifiée par le fait que dans la normalisation (1.1.b), il faut maintenant prendre la matrice D à coefficients diagonaux strictement positifs

On affirme de la sorte l'existence d'une forme linéaire séparant w de V, i.e. équilibrant tout vecteur de V mais pas w. Admettons provisoirement le Lemme. Il en résulte que

$$V \subsetneqq W \;\Rightarrow\; W^\perp \subsetneqq V^\perp \ . \tag{1.2.e}$$

En effet, en prenant $w \in W \setminus V$, on obtient un vecteur $p \in V^\perp$ tel que $p \notin w^\perp \supset W^\perp$. On déduit de (1.2.e) que l'on ne peut avoir $V \subsetneqq (V^\perp)^\top$ (car alors $((V^\perp)^\top)^\perp \subsetneqq V^\perp$, ce qui contredirait une propriété générale des correspondances de Galois). Ainsi, on a $(V^\perp)^\top = V$ ce qui montre que l'application $V \mapsto V^\perp$ est injective. Il reste à voir le Lemme.

Preuve du Lemme de séparation. Comme $w \notin V$, on a nécessairement:

$$w \succ A(A\backslash w) \ ,$$

(on plonge $\mathbb{R}_{\max}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_{\max}$ pour que cette écriture ait un sens). On peut supposer par exemple $w_1 \succ (A(A\backslash w))_1$, soit:

$$w_1 \succ \bigoplus_i A_{1i} \bigwedge_k A_{ki}\backslash w_k$$

et donc

$$\forall i, \exists k, \;\; w_1 \succ A_{1i}(A_{ki}\backslash w_k) \ . \tag{1.2.f}$$

Pour $\alpha \succ e$ et α assez proche de e, on a donc:

$$\forall i, \exists k, \;\; w_1 \succ \alpha A_{1i}(A_{ki}\backslash w_k) \ . \tag{1.2.g}$$

D'abord, une observation immédiate:

$$A_{1i} \neq \varepsilon \Rightarrow A_{ki} \neq \varepsilon \tag{1.2.h}$$

(sinon, on aurait $+\infty$ à droite de (1.2.f)). Soit $t \in \mathbb{R}_{\max}$ un grand paramètre et définissons le vecteur $p \in \mathbb{S}_{\max}^n$ comme suit:

$$p_k = \begin{cases} \alpha & \text{si } k = 1, \text{ et sinon:} \\ (\frac{w_1}{w_k})^\bullet & \text{si } w_k \neq \varepsilon \\ t^\bullet & \text{si } w_k = \varepsilon. \end{cases} \tag{1.2.i}$$

On a $p.w \;\not\nabla\; \varepsilon$. En effet, pour $k \geq 2$, si w_k est nul, le terme $p_k w_k$ ne contribue pas à $p.w$, et sinon, on a $p_k w_k = w_1^\bullet$, lequel terme, comme $\alpha \succ e$, est strictement majoré par αw_1, d'où $p.w = \alpha w_1 \;\not\nabla\; \varepsilon$.

On montre que p appartient à $V^\perp$, i.e. que p est orthogonal à toutes les colonnes de A. Si $A_{1i} = \varepsilon$, il est trivial que $p.A_{\cdot,i} \;\nabla\; \varepsilon$. Sinon, il résulte de (1.2.h) que $A_{ki} \neq \varepsilon$. Si $w_k \neq \varepsilon$, on peut écrire d'après (1.2.g)

$$p_k A_{ki} = (\frac{w_1}{w_k})^\bullet A_{ki} \succ \alpha A_{1i} = p_1 A_{1i} \ ,$$

et donc $p.A_{\cdot,i} \;\nabla\; \varepsilon$. Si $w_k = \varepsilon$, on a la même conclusion en prenant t assez grand. On a montré $p \in V^\perp$ et $p \notin w^\perp$. Cela achève la preuve du Lemme de séparation et du Théorème. ∎

1.2.5 Corollaire *On a $(V^\perp)^\top = V$ pour tout sous-moduloïde de type fini de $\mathbb{R}_{\max}^n$.*

Preuve On l'a montré incidemment dans la preuve du Théorème 1.2.2,(ii). ∎

1.2.6 Corollaire *L'intersection de deux sous-moduloïdes de type fini de $\mathbb{R}_{\max}^n$ est de type fini.*

Preuve Soient V, W deux tels moduloïdes. On a

$$\begin{aligned} V \cap W = &\ V^{\perp\top} \cap W^{\perp\top} \quad \text{(par 1.2.5)} \\ = &\ (V^{\perp} \oplus W^{\perp})^{\top} \quad \text{(par l'analogue de 1.1.1,(vi))} \end{aligned}$$

qui est de type fini d'après 1.2.2. ■

1.2.7 Exemple Calculons l'intersection des deux moduloïdes des colonnes des deux matrices suivantes:

$$M_1 = \begin{bmatrix} e & e \\ \varepsilon & 3 \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} e & \varepsilon \\ 1 & e \end{bmatrix} \ .$$

On a, en notant $\mathrm{vect}\langle U \rangle$ le moduloïde des colonnes d'une matrice U:

$$\mathrm{vect}\langle M_1 \rangle^{\perp} = \mathrm{vect}\langle \begin{bmatrix} 3^{\bullet} & \varepsilon \\ e & e^{\bullet} \end{bmatrix} \rangle \ .$$

Un vecteur v appartient à l'intersection ssi $v = M_2 u$, et $v \in (\mathrm{vect}\langle M_1 \rangle^{\perp})^{\top}$, soit, en posant $u = [x, y]^{\mathrm{T}}$:

$$\begin{bmatrix} 3^{\bullet} & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & \varepsilon \\ 1 & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \nabla \varepsilon \ .$$

Ainsi,

$$u = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathrm{vect}\langle \begin{bmatrix} e & e \\ \varepsilon & 3 \end{bmatrix} \rangle$$

et en remplaçant

$$v = M_2 u \in \mathrm{vect}\langle \begin{bmatrix} e & e \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \rangle = \mathrm{vect}\langle M_1 \rangle \cap \mathrm{vect}\langle M_2 \rangle \ .$$

1.2.8 Remarque On peut reformuler l'exemple qui précéde de la manière suivante. $\mathrm{vect}\langle M_1 \rangle$ est le moduloïde d'équation

$$M_1^{\perp} : \ 3x \oplus y = 3x \ . \tag{1.2.j}$$

$\mathrm{vect}\langle M_2 \rangle$ est le moduloïde d'équation:

$$M_2^{\perp} : \ 1x \oplus y = y \ . \tag{1.2.k}$$

L'intersection de ces deux moduloïdes est donnée par les deux équations (1.2.j) et (1.2.k).

1.2.9 Application aux sous-demi-treillis de $\mathbb{B}^n$ Dans le Lemme de séparation, on a eu recours à un argument de densité (usage du α) ainsi que de domination (usage du grand paramètre t). On notera cependant que ce lemme reste vrai pour une dualité $\mathbb{B}^n \leftrightarrow (\mathbb{B}^2)^n$. Il suffit de prendre le vecteur p défini par

$$p_k = \begin{cases} e & \text{si } k = 1, \text{ et sinon:} \\ \varepsilon & \text{si } w_k \neq \varepsilon \\ e^{\bullet} & \text{si } w_k = \varepsilon. \end{cases} \tag{1.2.l}$$

au lieu de (1.2.i). Ainsi, un sous-moduloïde de $\mathbb{B}^n$ est caractérisé par l'ensemble des équilibres à coefficients booléiens qu'il vérifie. Notons qu'un sous moduloïde X de $\mathbb{B}^n$ n'est rien d'autre qu'une partie X stable par sup et contenant ε. On peut donc affirmer qu'un sous-demi-treillis X de $\mathbb{B}^n$ contenant ε est caractérisé par l'ensemble des couples $(I, J) \in (\mathcal{P}(\{1, \ldots, n\}))^2$ tels que

$$\forall x \in X, \quad \bigoplus_{i \in I} x_i = \bigoplus_{j \in J} x_j \ .$$

1.2.10 Remarque On aurait pu définir directement une dualité entre $(\mathbb{R}_{\max})^n$ et $((\mathbb{R}_{\max})^2)^n$ sans faire usage du dioïde symétrisé.

2 Solutions générales d'équilibres linéaires

2.1 Systèmes homogènes

On considère une famille finie $\{u_i\}_{i\in I}$ de vecteurs de $\mathbb{S}_{\max}^n$.

2.1.1 Définition (famille libre) *La famille $\{u_i\}_i$ est* libre *si pour toutes familles presque nulles*[2] *de scalaires $\{\lambda_i\}_i$ et $\{\mu\}_i$, on a*

$$\bigoplus_i \lambda_i u_i = \bigoplus_i \mu_i u_i \;\Rightarrow\; \lambda = \mu \enspace . \tag{2.1.a}$$

2.1.2 Définition (famille ∇-libre) *La famille $\{u_i\}$ est* ∇-libre *si pour toutes familles presque nulles $\{\lambda_i\}_i$ et $\{\mu\}_i$ d'éléments de $\mathbb{R}_{\max}$, on a*

$$\bigoplus_i \lambda_i u_i \;\nabla\; \bigoplus_i \mu_i u_i \;\Rightarrow\; \lambda \;\nabla\; \mu \enspace .$$

Cette dernière propriété est équivalente à l'assertion suivante pour une famille d'éléments de $\mathbb{S}_{\max}$:

$$\bigoplus_i \lambda_i u_i \;\nabla\; \varepsilon \;\Rightarrow\; \lambda \;\nabla\; \varepsilon \enspace , \tag{2.1.b}$$

(car $a \;\nabla\; b$ ssi $a \ominus b \;\nabla\; \varepsilon$, cf. I,(1.2.a),(i)). On emploiera les termes “liée” et “∇-liée” avec un sens évident.

2.1.3 Théorème *Une famille est libre ssi elle est ∇ -libre.*

2.1.4 Lemme *Pour tout $a, b \in \mathbb{S}_{\max}^n$, on a*

$$a \;\nabla\; b \Rightarrow a \oplus b^\bullet = a^\bullet \oplus b \enspace .$$

Preuve du Lemme. Si $a \;\nabla\; b$, on a $a \ominus b = b \ominus a$. On obtient le résultat en ajoutant $a \oplus b$ des deux cotés de l'égalité. ∎

Preuve du Théorème.
<u>1/ $\{u_i\}$ ∇-liée entraîne $\{u_i\}$ liée.</u> Supposons d'après (2.1.b) $\bigoplus_i \lambda_i u_i \;\nabla\; \varepsilon$ avec $\lambda \;\not\nabla\; \varepsilon$, par exemple $\lambda_k \;\not\nabla\; \varepsilon$. On a alors

$$\lambda_k u_k \;\nabla\; \ominus \bigoplus_{i\neq k} \lambda_i u_i$$

et d'après 2.1.4,

$$\lambda_k u_k \oplus \bigoplus_{i\neq k} \lambda_i^\bullet u_i = \lambda_k^\bullet u_k \ominus \bigoplus_{i\neq k} \lambda_i u_i \enspace .$$

Comme on a supposé $\lambda_k \notin \mathbb{S}_{\max}^\bullet$, on a $\lambda_k \neq \lambda_k^\bullet$, et on contredit la propriété (2.1.a).

[2] la famille $\{\lambda_i\}_i$ est presque nulle si on a seulement un nombre fini d'indices i tels que $\lambda_i \neq \varepsilon$

2/ $\{u_i\}$ liée entraîne $\{u_i\}$ ∇-liée. Supposons

$$\bigoplus_i \lambda_i u_i = \bigoplus_j \mu_j u_j \enspace ,$$

avec $\lambda \neq \mu$, par exemple $\lambda_1 \neq \mu_1$, et quitte à permuter λ et μ, $|\lambda_1| \succeq |\mu_1|$. On est dans l'une des deux situations suivantes.

2,a/ Si $\lambda_1 \notin \mathbb{S}_{\max}^{\bullet}$ et $|\lambda_1| \succ |\mu_1|$, on a $\lambda_1 \ominus \mu_1 = \lambda_1 \notin \mathbb{S}_{\max}^{\bullet}$, et donc $\nu = \lambda \ominus \mu$ est un vecteur non équilibré tel que $\bigoplus_i \nu_i u_i \nabla \varepsilon$.

2,b/ Il reste à voir le cas où $|\lambda_1| = |\mu_1|$ avec $\lambda_1 \in \mathbb{S}_{\max}^{\bullet}$ ou $\mu_1 \in \mathbb{S}_{\max}^{\bullet}$. Après permutation éventuelle, et compte tenu de $\lambda_1 \neq \mu_1$, on peut supposer $\lambda_1 = \mu_1^{\bullet}$, avec $\mu_1 \in \mathbb{S}_{\max}^{\vee}$. Le résultat provient d'un lemme de raffinement des égalités dans $\mathbb{S}_{\max}$.

2.1.5 Lemme *Soient $b \in \mathbb{S}_{\max}^{\vee}$, $a, u \in \mathbb{S}_{\max}$. On a*

$$a \oplus b^{\bullet} c = a \oplus bc \Rightarrow a \ominus bc \nabla a \oplus bc \enspace .$$

En supposant ce Lemme, on pose $c = u_1$, $b = \mu_1$ et $a = \bigoplus_{i \geq 2} (\lambda_i \oplus \mu_i) u_i$. On a alors le vecteur ν non équilibré donné par $\nu_1 = \ominus \mu_1$ et $\nu_i = \lambda_i \oplus \mu_i$ pour $i \geq 2$, tel que $\bigoplus_j \nu_j u_j \nabla \varepsilon$, d'où il résulte que $\{u\}_j$ est ∇-liée.

Preuve du Lemme 2.1.5
(o) Cas $c \in \mathbb{S}_{\max}^{\bullet}$. Cela résulte de $\ominus bc = \ominus bc^{\bullet} = b^{\bullet} c = bc$ via la Formule (1.2.b) du Chapitre I.
(i) Cas $|bc| \prec |a|$. C'est trivial.
(ii) Cas $|bc| \succ |a|$. L'identité $a \oplus b^{\bullet} c = a \oplus bc$ se réécrit $b^{\bullet} c = bc$, et compte tenu de $b \in \mathbb{S}_{\max}^{\vee}$, $c \in \mathbb{S}_{\max}^{\bullet}$, ce qui ramène au cas (o).
(iii) Cas $|bc| = |a|$, $c \in \mathbb{S}_{\max}^{\vee}$. On a alors $b^{\bullet} c = a \oplus bc$. Si a est équilibré, on a $a \ominus bc = a^{\bullet} = a \oplus bc$ est le résultat est acquis. Si a est signé, le signe de bc est alors l'opposé du signe de a, soit $a = \ominus bc$, et donc $a \ominus bc = a \nabla a \oplus bc = a^{\bullet}$. Cela achève la preuve du Lemme et du Théorème 2.1.3. ∎

2.1.6 Définition (rang) *On appelle rang d'une matrice A le nombre maximal de colonnes de A formant une famille libre.*

On rappelle (cf. 0,6.1.3) qu'une matrice carrée A est dite monomiale si A se factorise sous la forme $A = DP$, ou D est une matrice diagonale à coefficients diagonaux non nuls et P une matrice de permutation.

2.1.7 Théorème *Le rang de la matrice $A \in \mathbb{S}_{\max}^{n \times p}$ est égal à la taille de la plus grand matrice monomiale inversible extraite de A.*

Preuve Via le Théorème 2.1.3, on se ramène à la Proposition suivante, qui étend au dioïde $\mathbb{S}_{\max}$ la caractérisation des applications linéaires inversibles donnée en 0,7.2.8.

2.1.8 Proposition *Une application linéaire $f : \mathbb{S}_{\max}^{p} \to \mathbb{S}_{\max}^{n}$ est injective ssi sa matrice contient une sous matrice monomiale inversible de taille p.*

Preuve de la proposition. D'après le Lemme 7.2.6 du Chapitre 0, la matrice A associée à f contient une matrice monomiale. On pourra supposer quitte à multiplier par des matrices monomiales inversibles convenables que A a la forme suivante:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & \varepsilon & \dots & \varepsilon \\ \varepsilon & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \varepsilon \\ \varepsilon & \dots & \varepsilon & A_{pp} \\ * & * & * & * \end{bmatrix} ,$$

où les A_{ii} sont soit égaux à e soit à $e^\bullet$. Si tous les A_{ii} sont égaux à e, le résultat est acquis. Supposons $A_{ll} = e^\bullet$. On montre qu'il existe une ligne $k > p$ dont le seul coefficient non nul est A_{kl}, qui est inversible, de sorte qu'en permutant les lignes k et l, on obtient une matrice monomiale inversible. Si ce n'est pas le cas, on est dans la situation suivante:

$$\forall k > p+1, \quad (A_{kl} \text{ inversible } \Rightarrow \exists u_k \neq k,\ \ A_{ku_k} \neq \varepsilon) \ .$$

Il est clair qu'en prenant un grand paramètre t et en considérant le vecteur

$$u:\ u_i = \begin{cases} e & \text{si } i = l \\ t^\bullet & \text{sinon,} \end{cases}$$

on a $Au = A(\ominus u)$, ce qui montre que l'application $X \mapsto AX$ n'est pas injective. Cela achève la preuve de la Proposition et du Théorème. ∎

2.1.9 Corollaire *On a* $\mathrm{rg} A = \mathrm{rg} A^{\mathrm{T}}$.

Il résulte que le rang de la matrice A est aussi bien égal au nombre maximal de lignes de A formant une famille libre. On peut résumer cette section par l'énoncé familier suivant.

2.1.10 Corollaire *Soit $A \in \mathbb{S}_{\max}^{n\times p}$. Le système $Ax \,\nabla\, \varepsilon$ admet une solution non triviale (i.e. $x \notin (\mathbb{S}_{\max}^\bullet)^n$) ssi* $\mathrm{rg} A < p$.

2.2 Solutions des équilibres non homogènes

Nous donnons ici un résultat rapide sur l'existence de solutions à l'équilibre $Ax \,\nabla\, b$. On caractérise cette existence à l'aide de conditions élémentaires (purement structurelles). On se restreindra plus tard à l'étude des solutions *signées* pour obtenir des résultats plus fins. On notera, pour $u \in \mathbb{S}_{\max}^n$

$$\mathrm{supp}\, u = \{ i \in \{1, \dots, n\} \mid \ u_i \neq \varepsilon \} \ ,$$

$$\mathrm{supp}^\vee u = \{ i \in \{1, \dots, n\} \mid \ u_i \ \not\nabla\ \varepsilon \} \ .$$

Notons le fait immédiat suivant.

2.2.1 Lemme *Soient $u, v \in \mathbb{S}_{\max}^n$. On a:*

$$u \,\nabla\, v \Rightarrow \mathrm{supp}^\vee u \subset \mathrm{supp}\, u \ .$$

2.2.2 Théorème *Soit $A \in \mathbb{S}_{\max}^{n\times p}$ et $b \in \mathbb{S}_{\max}^n$. Les propositions suivantes sont équivalentes:*

(i) *Il existe* $x \in \mathbb{S}_{\max}^p$ *tel que* $Ax \nabla b$,

(ii) $\mathrm{supp}^\vee b \subset \cup_i \mathrm{supp} A_{\cdot,i}$.

Preuve (i)⇒(ii): On a d'après le Lemme 2.2.1:

$$\mathrm{supp}^\vee b \subset \mathrm{supp} Ax \subset \cup_i \mathrm{supp} A_{\cdot,i} \ .$$

(ii)⇒(i): Il existe $x \in \mathbb{R}_{\max}^n$ tel que $|Ax| \succeq |b|$. On pourra par exemple choisir,

$$x_k = \bigoplus_{i,\, A_{ik}\neq\varepsilon, b_i\neq\varepsilon} |A_{ik}| \backslash |b_i| \ ,$$

qui est bien défini d'après (ii). On a alors $Ax^\bullet \nabla b$. ∎

3 Systèmes de Cramer

3.1 Solution de Cramer

$\mathcal{S}$ désigne ici un demi-anneau symétrisé commutatif.

3.1.1 Proposition *Soit* $A \in \mathcal{S}^{n\times n}$, *de déterminant inversible dans* $\mathcal{S}$, *et* $b \in \mathcal{S}^n$.

$$\overline{x} = (\det A)^{-1} A^{\mathrm{adj}} b$$

vérifie $A\overline{x} \nabla b$.

Preuve : on a $AA^{\mathrm{adj}} \nabla (\det A)\mathrm{Id}$, et en multipliant à gauche par b: $AA^{\mathrm{adj}}b \nabla (\det A)\, b$, d'où la conclusion en divisant par $\det A$. ∎

On appellera $\overline{x}$, ainsi défini, la *solution de Cramer* de l'équilibre $Ax \nabla b$.

3.1.2 Exemple Dans $\mathbb{S}_{\max}$, soit

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} \ .$$

Le déterminant vaut $D = 3 \ominus 2 = 3$. La solution de Cramer est donnée par:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}{3} = 2^\bullet, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}}{3} = 1 \ .$$

3.2 Systèmes de Cramer dans $\mathbb{S}_{\max}$

Nous étudions maintenant l'existence de solutions *signées* de systèmes d'équilibres linéaires dans le cadre du dioïde $\mathbb{S}_{\max}$. On discutera plus loin les extensions éventuelles.

3.2.1 Théorème (Condition de Cramer) *Soient* $A \in \mathbb{S}_{\max}^{n\times n}$ *et* $b \in \mathbb{S}_{\max}^n$. *Toute solution* $x \in (\mathbb{S}_{\max}^\vee)^n$ *de l'équilibre* $Ax \nabla b$ *vérifie:*

$$\det A\, x \nabla A^{\mathrm{adj}} b$$

La preuve repose sur une technique analogue à l'élimination de Gauss, rendue possible par le Lemme suivant:

3.2.2 Lemme (d'élimination vectorielle) *On a:*

$$a \in \mathbb{S}_{\max}^{\vee},\ x \in (\mathbb{S}_{\max}^{\vee})^n \ \text{ et } \ \left\{ \begin{array}{l} ax \mathrel{\nabla} b \\ Cx \mathrel{\nabla} d \end{array} \right. \Rightarrow Cb \mathrel{\nabla} da \ .$$

Preuve On a $Cax \mathrel{\nabla} da$. Le lemme résulte du lemme de substitution vectoriel II,3.6.12 appliqué à ax qui appartient à $(\mathbb{S}_{\max}^{\vee})^n$. ∎

3.2.3 Contre exemple L'hypothèse $a \not\mathrel{\nabla} \varepsilon$ est nécessaire. On a en effet, avec

$$a = e^{\bullet}, x = \begin{bmatrix} e \\ \ominus e \end{bmatrix},\ b = \begin{bmatrix} e \\ e \end{bmatrix},\ c = \begin{bmatrix} e & e \end{bmatrix},\ d = \varepsilon$$

$ax \mathrel{\nabla} b$ et $cx \mathrel{\nabla} d$, mais $cb = e \not\mathrel{\nabla} ad = \varepsilon$.

Preuve du Théorème 3.2.1:
1/ Cas $\det A \in \mathbb{S}_{\max}^{\vee}$.
On montre le résultat par récurrence sur la taille de la matrice A. Si $A \in \mathbb{S}_{\max}^{1\times 1}$, le résultat est acquis, avec la convention $A^{\text{adj}} = (e)$. Supposons le théorème démontré pour des matrices de taille $n-1$ et soit $A \in \mathbb{S}_{\max}^{n\times n}$ avec $\det A \in \mathbb{S}_{\max}^{\vee}$. Comme en développant par rapport à la dernière ligne $\det A = \bigoplus_k a_{nk} \det A(n|k) \in \mathbb{S}_{\max}^{\vee}$, on a par II,3.3.8,ii que l'un au moins des $\det A(n|k)$ est signé. On peut donc supposer sans restriction de généralité $\det A(n|n) \in \mathbb{S}_{\max}^{\vee}$. On a alors:

$$Ax \mathrel{\nabla} b \iff \left\{ \begin{array}{ll} A_{(n|n)}x_{(n|} \oplus A_{(n|n]}x_n \mathrel{\nabla} b_{(n|} & (1) \\ A_{[n|n)}x_{(n|} \oplus a_{nn}x_n \mathrel{\nabla} b_n & (2) \end{array} \right.$$

L'application de l'hypothèse de récurrence au système de $n-1$ équilibres:

$$(1) \Leftrightarrow (1'): \quad A_{(n|n)}x_{(n|} \mathrel{\nabla} b_{(n|} \ominus A_{(n|n]}x_n$$

donne $(\det A_{(n|n)})x_{(n|} \mathrel{\nabla} A_{(n|n)}^{\text{adj}}(b_{(n|} \ominus A_{(n|n]}x_n)$. L'application du lemme d'élimination 3.2.2 donne:

$$A_{[n|n)}A_{(n|n)}^{\text{adj}}(b_{(n|} \ominus A_{(n|n]}x_n) \oplus (\det A_{(n|n)})a_{nn}x_n \mathrel{\nabla} (\det A_{(n|n)})b_n$$

c'est à dire:

$$[(\det A_{(n|n)})a_{n,n} \ominus A_{[n|n)}A_{(n|n)}^{\text{adj}}A_{(n|n]}]x_n \mathrel{\nabla} (\det A_{(n|n)})b_n \ominus A_{[n|n)}A_{(n|n)}^{\text{adj}}b_{(n|}$$

Dans le premier membre de l'équilibre, on reconnaît le développement par blocs de $\det A$ (cf. I,2.1.6), et dans le second, le développement par blocs du n-ième déterminant de Cramer:

$$D_n = \det \begin{bmatrix} A_{(n|n)} & b_{(n|} \\ A_{[n|n)} & b_n \end{bmatrix} = (A^{\text{adj}}b)_n$$

On a ainsi montré:

$$(\det A)x_n \mathrel{\nabla} (A^{\text{adj}}b)_n$$

On aurait pu faire la démonstration en distinguant la i-ième colonne à la place de la n-ième, ce qui aurait donné l'équilibre correspondant pour x_i. On a donc $(\det A)x \nabla A^{\mathrm{adj}}b$, ce qui prouve le résultat à l'ordre n et achève la démonstration dans le cas $\det A \in \mathbb{S}_{\max}^{\vee}$.

2/ Cas $\det A \nabla \varepsilon$

Si toutes les composantes de $A^{\mathrm{adj}}b$ sont équilibrées, les conditions de Cramer sont trivialement vérifiées. On peut donc supposer $(A^{\mathrm{adj}}b)_i \in \mathbb{S}_{\max}^{\vee}$. On considère alors le système

$$\begin{bmatrix} A_{[1|} & \dots & A_{[n-1|} & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_{n-1} \\ \ominus 0 \end{bmatrix} \nabla \ominus A_{[n|}x_n \ ,$$

système de déterminant inversible, pour lequel le résultat précédent s'applique et donne

$$\ominus \begin{bmatrix} A_{[1|} & \dots & A_{[n-1|} & b \end{bmatrix}^{\mathrm{adj}} A_{[n|}x_n \nabla \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_{n-1} \\ \ominus 0 \end{bmatrix} [A^{\mathrm{adj}}b]_n$$

ce qui projeté sur la dernière composante donne:

$$\det A x_n \nabla [A^{\mathrm{adj}}b]_n$$

et montre le Théorème dans le cas $\det A \notin \mathbb{S}_{\max}^{\vee}$. ■

3.3 Application aux systèmes d'équations linéaires à coefficients dans $\mathbb{R}_{\max}$

3.3.1 Proposition *Soient $A, C \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$, $b, d \in \mathbb{R}_{\max}^{n}$. On pose: $\tilde{A} = A \ominus C$ et $\tilde{b} = b \ominus d$ L'ensemble des solutions de*

$$Ax \oplus b = Cx \oplus d \tag{3.3.a}$$

dans $\mathbb{R}_{\max}$ et l'ensemble des solutions positives *de l'équilibre*

$$\tilde{A}x \oplus \tilde{b} \nabla \varepsilon \tag{3.3.b}$$

dans $\mathbb{S}_{\max}$ coïncident. En particulier, si $\det A$ *est inversible et $\overline{x} = (\det A)^{-1}A^{\mathrm{adj}}b \in (\mathbb{S}_{\max}^{\oplus})^n$, la solution de Cramer $\overline{x}$ est l'unique solution de (3.3.a).*

Preuve : résulte immédiatement du fait que $\mathbb{S}_{\max}$ est une symétrisation régulière de $\mathbb{R}_{\max}$ (cf. II,2.1.2). ■

3.3.2 Exemple Considérons le système déjà traité de manière heuristique en II,§1.1, soit:

$$\begin{cases} \max(x, y-4, 1) = \max(x-1, y+1, 2) \\ \max(x+3, y+2, -5) = \max(y+2, 7) \end{cases} \tag{3.3.c}$$

L'équilibre associé est:

$$\begin{bmatrix} 0 & \ominus 1 \\ 3 & 2^{\bullet} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \nabla \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix} \tag{3.3.d}$$

de déterminant $D = 4$ (inversible).

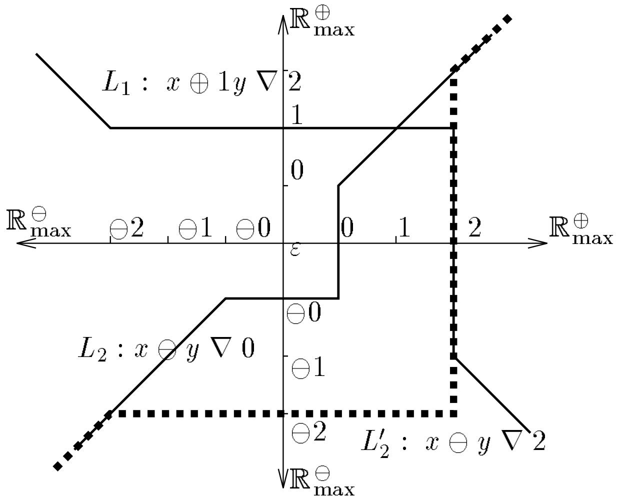

Figure III.1: Intersection de droites dans $(\mathbb{S}^{\vee}_{\max})^2$

$$D_x = \begin{vmatrix} 2 & \ominus 1 \\ 7 & 2^{\bullet} \end{vmatrix} = 8, \quad D_y = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 7$$

$$A^{\mathrm{adj}} b = \begin{bmatrix} D_x \\ D_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \end{bmatrix} \in (\mathbb{S}^{\oplus}_{\max})^2$$

Ainsi, $x = \frac{D_x}{D} = 8 - 4 = 4, y = \frac{D_y}{D} = 7 - 4 = 3$ donne l'unique solution positive de l'équilibre (3.3.d). C'est donc l'unique solution de l'équation (3.3.c) dans $\mathbb{R}_{\max}$.

3.3.3 Interprétation géométrique Considérons les trois droites suivantes dans $(\mathbb{S}^{\vee}_{\max})^2$:

$$\begin{array}{ll} L_1 & x \oplus 1y \nabla 2 \\ L_2 & x \ominus y \nabla 0 \\ L'_2 & x \ominus y \nabla 2 \end{array}$$

Le déterminants associés au système $L_1 \cap L_2$ valent

$$D = \ominus 1, \quad D_x = 2, \quad D_y = \ominus 2,$$

d'où l'on conclut à l'unicité de la solution $(x, y) = (1, \ominus 1) \in (\mathbb{S}^{\vee}_{\max})^2$. On constate sur la Figure III.1 que L_1 et L_2 se rencontrent en un unique point. Par contre, le déterminant D'_y associé au système $L_1 \cap L'_2$ vaut $2^{\bullet}$. On constate en effet que les droites L_1 et L'_2 ont tout un segment en commun, quoique L'_2 soit "parallèle" à L_2. Tout point de la forme $(1, t)$ avec $|t| \preceq 1$ appartient en effet à $L_1 \cap L'_2$.

3.4 Commentaires

En fait, les formules de Cramer sont seulement des conditions *nécessaires* pour l'existence d'une solution signée à $Ax \nabla b$. Considérons le système dans $\mathbb{S}_{\max}$:

$$Ax = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \nabla \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

On a $\det A = 0 \in \mathbb{S}^{\oplus}_{\max} \subset \mathbb{S}^{\vee}_{\max}$. Les trois déterminants de Cramer valent

$$D_x = \det \begin{bmatrix} 0 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \end{bmatrix} = 0^{\bullet}, \quad D_y = 0^{\bullet}, \quad D_z = 0^{\bullet}$$

de sorte que les équations de Cramer s'écrivent

$$0.x \nabla 0^{\bullet}, \quad 0.y \nabla 0^{\bullet}, \quad 0.z \nabla 0^{\bullet} \tag{3.4.a}$$

Par exemple, $x = y = z = -1$ (-1 avec le - usuel) sont solutions de (3.4.a) mais

$$A \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \not\nabla \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Cependant, si $A^{\mathrm{adj}}b$ est signé, la solution de Cramer est l'unique solution signée:

3.4.1 Proposition *Supposons* $\det A \in \mathbb{S}^{\vee}_{\max}$ *inversible, et* $A^{\mathrm{adj}}b \in (\mathbb{S}^{\vee}_{\max})^n$. *Il existe une unique solution signée ($x \in (\mathbb{S}^{\vee}_{\max})^n$) à $Ax \nabla b$, donnée par* $x = (\det A)^{-1} A^{\mathrm{adj}} b$

Preuve : Dans ce cas, $(\det A)^{-1} A^{\mathrm{adj}}$ est l'unique solution non dégénérée des équations de Cramer, qui sont nécessaires d'après le théorème 3.2.1 et suffisantes (Proposition 3.1.1). ∎

Nous montrons maintenant que lorsque l'on ne requiert pas que les solutions soient signées où lorsque l'on prend des dioïdes plus généraux, les conditions de Cramer ne sont plus nécessaires.

3.4.2 Contre exemple Dans le dioïde symétrisé de $\overline{\mathbb{R}}_{\max}$, on considère le système

$$\begin{cases} (2 \ominus 1)x \oplus \varepsilon y \nabla \ominus 2 \\ (1 \ominus 2)x \oplus \varepsilon y \nabla 10 \end{cases} . \tag{3.4.b}$$

$(x, y) = (\infty, \varepsilon)$ est clairement solution. On a $D = \varepsilon$, $D_x = \varepsilon$, et

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 \ominus 1 & \ominus 2 \\ 1 \ominus 2 & 10 \end{vmatrix} = 12 \ominus 11 \ .$$

La seconde condition de Cramer $Dy \nabla D_y$ n'est donc pas satisfaite.

On a vu au chapitre précédent que les dioïdes ou tout élément était somme finie d'éléments intègres jouaient un rôle important. On donne un contre exemple analogue pour un dioïde de ce type.

3.4.3 Contre exemple Dans $\mathbb{R}_{\max}[X]$, on a

$$\begin{bmatrix} e \ominus X & \varepsilon \\ e^\bullet & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \oplus X \\ \varepsilon \end{bmatrix} \nabla \begin{bmatrix} e \ominus X^2 \\ e \end{bmatrix} .$$

Cependant,

$$D = e \ominus X, \quad D_y = \begin{vmatrix} e \ominus X & e \ominus X^2 \\ e^\bullet & e \end{vmatrix} = e^\bullet \ominus X \oplus (X^2)^\bullet ,$$

et donc $y = \varepsilon$ ne satisfait pas la seconde condition de Cramer.

3.4.4 Contre exemple Les conditions de Cramer peuvent ne pas être vérifiées pour une solution non signée. Soit en effet le système dans $\mathbb{S}_{\max}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & e \\ e & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1^\bullet \\ \varepsilon \end{bmatrix} \nabla \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{3.4.c}$$

La condition de Cramer s'écrit:

$$\det A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1^\bullet \\ \varepsilon \end{bmatrix} \nabla \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix},$$

ce qui est faux.

Les solutions signées sont intéressantes du point de vue de l'élimination. Elles ne semblent cependant pas jouir de propriétés de structure, comme le montre la suite de contre exemples suivants. Notons

$$\mathrm{Sol}(A, b) = \{x \in \mathbb{S}^n_{\max} \mid \ Ax \nabla b\} . \tag{3.4.d}$$

On a le fait trivial suivant.

3.4.5 Observation On a $\mathrm{Sol}(A, b) = \mathrm{Sol}(A, b) \oplus \mathrm{Sol}(A, \varepsilon)$.

L'intérêt de $\mathrm{Sol}(A, \varepsilon)$ est d'être un moduloïde. En considérant l'ensemble de éléments minimaux de $\mathrm{Sol}(A, b)$, $\mathrm{Sol}^{\min}(A, b)$, on pourrait s'attendre à un théorème de décomposition du type

$$\mathrm{Sol}(A, b) = \mathrm{Sol}^{\min}(A, b) \oplus \mathrm{Sol}(A, \varepsilon) \ ? \tag{3.4.e}$$

ce qui généraliserait le classique "solution générale =solution particulière+solution de l'équation sans second membre". Il n'en est rien.

3.4.6 Contre exemple Considérons le système dans $\mathbb{S}_{\max}$:

$$\mathrm{Id} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \nabla \begin{bmatrix} e^\bullet \\ e^\bullet \end{bmatrix}$$

On a:

$$\mathrm{Sol}(A, b) = \{(x, y) \in \mathbb{S}^2_{\max} \mid \ |x| \preceq e \text{ et } |y| \preceq e\} \oplus (\mathbb{S}^\bullet_{\max})^2 .$$

$$\mathrm{Sol}^{\min}(A, b) = \{(\varepsilon, \varepsilon)\}, \quad \mathrm{Sol}(A, \varepsilon) = (\mathbb{S}^\bullet_{\max})^2$$

ce qui contredit (3.4.e). En outre, on vérifie que l'on n'a pas de partie finie $P \subset \mathrm{Sol}(A, b)$ telle que $\mathrm{Sol}(A, b) = P \oplus \mathrm{Sol}(A, \varepsilon)$.

Définissant $\mathrm{Sol}^{\vee} = \{x \in (\mathbb{S}^{\vee}_{\max})^n \mid Ax \nabla b\}$, une généralisation du Lemme II,3.3.4 au cas vectoriel serait:

$$\mathrm{Sol}(A,b) = \mathrm{Sol}^{\vee}(A,b) \oplus (\mathbb{S}^{\bullet}_{\max})^n \ ? \tag{3.4.f}$$

Il n'en est rien.

3.4.7 Contre exemple Soit le système

$$\begin{bmatrix} e & e \\ e & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \nabla \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} .$$

On a d'après la première équation $x \nabla 1 \ominus y$, et en reportant dans la seconde, $(1 \ominus y) \oplus y \nabla 2$, soit $y^{\bullet} \nabla 2$, d'où $|y| \succeq 2$. De même $|x| \succeq 2$. On vérifie sans difficulté que

$$\begin{bmatrix} 2 \\ \ominus 2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} \ominus 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

sont les deux solutions signées minimales du système. Cependant,

$$\begin{bmatrix} 2^{\bullet} \\ \varepsilon \end{bmatrix}$$

est une autre solution, qui n'est pas minorée par un élément de $\mathrm{Sol}^{\vee}(A,b)$. On contredit (3.4.f).

Nous donnons un autre contre exemple où $\mathrm{Sol}^{\vee}(A,b) = \emptyset$ et $\mathrm{Sol}(A,b) \neq \emptyset$.

3.4.8 Contre exemple Soit le système:

$$\begin{cases} 1x \oplus y \nabla 1 \\ 1x \oplus y \nabla \ominus 1 \\ x \oplus 1y \nabla 1 \end{cases} \tag{3.4.g}$$

Les deux premières équations se réécrivent $1x \oplus y \nabla 1$, $\ominus 1 \ominus y \nabla 1$, d'où comme 1 est *transitif*, $1x \oplus y \nabla \ominus 1x \ominus y$, i.e. $1x \oplus y \nabla \varepsilon$, i.e. $y \nabla \ominus 1x$, et en reportant dans la dernière équation, $x \ominus 2x = \ominus 2x \nabla 1$, d'où $x \nabla \ominus -1$. En en déduit que si x et y sont signés, nécessairement, $x = \ominus -1$ et $y = \ominus 1z = e$, qui ne sont pas solution de (3.4.g). Ainsi, $\mathrm{Sol}^{\vee}(A,b) = \emptyset$. Cependant, on obtient en appliquant les résultats du §1.1:

$$\mathrm{Sol}(A,b) = \{\begin{bmatrix} x^{\bullet} \\ e \end{bmatrix} \mid e \preceq |x| \prec 1\} \cup \{\begin{bmatrix} x^{\bullet} \\ t \end{bmatrix} \mid 1 \preceq |x|, |t| \preceq -1|x|\} \cup \{\begin{bmatrix} x \\ y^{\bullet} \end{bmatrix} \mid |x| \preceq -1|y|\}$$

$$\mathrm{Sol}(A,\varepsilon) = \mathrm{vect}\langle \begin{bmatrix} e^{\bullet} \\ \varepsilon \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \varepsilon \\ e^{\bullet} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e^{\bullet} \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ e^{\bullet} \end{bmatrix} \rangle .$$

3.4.9 Remarque La preuve du théorème 3.2.1 repose sur les deux propriétés 3.3.8,(i) et (ii). Semblablement, dès que l'on aura une partie $\mathcal{K} \subset \mathcal{S}^{\vee}$ telle que $\mathcal{K} \otimes \mathcal{K} \subset \mathcal{K}$ et $x \oplus y \in \mathcal{K} \Rightarrow x$ ou $y \in \mathcal{K}$, le système $Ax \nabla b$ avec $\det A \in \mathcal{K}$ entraînera les conditions de Cramer $\det Ax \nabla A^{\mathrm{adj}} b$. Cela rend difficile la généralisation de ce résultat à des dioïdes non totalement ordonnés. En fait, on aura la n-ième condition de Cramer $D.x_n \nabla D_n$ lorsque, après permutation éventuelle des lignes, la suite des mineurs principaux $\Delta_i := \det A[1..i|1..i]$ vérifiera

$$\forall i,\ \Delta_i \text{ inversible et } \quad \det A = \bigotimes_{j>i} a_{jj} \Delta_i \ .$$

3.4.10 Exemple On considère dans le dioïde symétrisé de conv$\mathcal{P}_c(\mathbb{R}^2)$ le système:

$$\begin{cases} B_2(1)x \oplus B_\infty(1)y \,\nabla\, B_\infty(2) \\ B_2(2)x \oplus B_1(1)y \,\nabla\, B_2(3) \end{cases}, \tag{3.4.h}$$

où $B_1(r), B_2(r)$ et $B_\infty(r)$ désignent les boules de rayon r pour les normes respectives $\| \|_1$,$\| \|_2$ et $\| \|_\infty$. On constate que le déterminant

$$D = B_2(1)B_1(1) \ominus B_2(2)B_\infty(1) = \ominus B_2(2)B_\infty(1)$$

(via II,3.4.2) est signé. L'argument du théorème 3.2.1 s'applique donc. On a

$$D_x = \ominus B_2(3)B_\infty(1), \quad D_y = \ominus B_2(2)B_\infty(2),$$

et donc

$$D.x \,\nabla\, \ominus B_2(3)B_\infty(1), \quad D.y \,\nabla\, \ominus B_2(2)B_\infty(2) \ .$$

Comme conv$\mathcal{P}_c(\mathbb{R}^2)$ est intègre (cf. 0,1.0.11), on peut simplifier par D, et l'on a que

$$x = B_2(1), \quad y = B_\infty(1)$$

est l'unique solution de l'équilibre (3.4.h). En outre, cette solution étant positive, c'est l'unique solution de l'équation

$$\begin{cases} B_2(1)x \oplus B_\infty(1)y = B_\infty(2) \\ B_2(2)x \oplus B_1(1)y = B_2(3) \end{cases}$$

associée à inconnues dans conv$\mathcal{P}_c(\mathbb{R}^2)$.

3.4.11 Remarque Dans l'exemple ci-dessus, compte tenu de l'intégrité du dioïde des compacts convexes, il est loisible de se plonger dans le dioïde des fractions et de pratiquer une élimination usuelle. On écrira par exemple à partir de la seconde équation:

$$\begin{aligned} x \quad &\nabla \quad B_2(1) \ominus \frac{B_1(1)}{B_2(2)} y \\ B_2(1)\left(B_2(1) \ominus \frac{B_1(1)}{B_2(2)} y\right) \oplus B_\infty(1)y \quad &\nabla \quad B_\infty(2) \ . \end{aligned}$$

On notera que $B_\infty(2) \ominus B_2(2) = B_\infty(2)$ ($B_2(2)$ est à 4 points près contenu dans l'intérieur de $B_\infty(2)$ et l'on étend facilement la règle du II,3.4.2). D'autre part, comme $B_\infty(1)B_2(1) \ominus B_1(1) = B_\infty(1)B_2(1)$, on obtient

$$B_\infty(1)y \,\nabla\, B_\infty(2) \ ,$$

ce qui redonne le résultat précédent.

3.4.12 Note Signalons un résultat voisin d'Olsder et Roos [77]. On part de l'idée que $\exp(\alpha t) + \exp(\beta t) \simeq \exp(\max(\alpha, \beta)t)$, i.e. que certains phénomènes $(\max, +)$ s'obtiennent par passage à la limite à partir de l'algèbre usuelle. Définissons la matrice e^{At} par $(e^{At})_{ij} = \exp(a_{ij}t)$ (exponentielle coefficient par coefficient) et de même $(e^{bt})_i = \exp(b_i t)$. Olsder et Roos obtiennent des formules de type Cramer en passant à la limite sur les formules usuelles. Ces formules peuvent être différentes des conditions obtenues en symétrisant (car le passage à la limite autorise des annulations de termes).

De manière précise, Olsder et Roos introduisent le *dominant*, dont on peut donner la définition équivalente suivante:

$$\operatorname{dom} A = \lim_{t\to\infty} \frac{\log|\det e^{At}|}{t} \quad , \tag{3.4.i}$$

où det désigne le déterminant dans l'algèbre usuelle. Ils définissent en outre le *signe* associé au dominant comme le signe des termes réalisant asymptotiquement le max à droite de (3.4.i). Ils montrent que les conditions de Cramer pour $Ax = b$, soit

$$\operatorname{dom} A\, x_i = \operatorname{dom}(A_1, \ldots, A_{i-1}, b, A_{i+1}, \ldots, A_n) \tag{3.4.j}$$

sont suffisantes dès que $\operatorname{dom} a > \varepsilon$ et que les signes associés aux dominants à gauche et à droite de (3.4.j) sont égaux. Notons que si le dominant à droite de (3.4.j) est nul, $\operatorname{dom} A$ étant toujours non nul, le résultat est encore vrai. On voit bien la différence avec les conditions de Cramer obtenues en symétrisant sur l'exemple 3.1.2 traité plus haut, soit

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} \quad .$$

On a $\operatorname{dom} A = 3$, $\operatorname{dom}(b, A_2) = \varepsilon$, $\operatorname{dom}(A_1, b) = 4$, les dominants non nuls étant de signe positif, et l'on obtient via (3.4.j) la solution $x = \varepsilon$ et $y = 1$. Le caractère pointé des conditions de Cramer symétrisées atteste la non unicité de la solution (par exemple, $x = 2$ et $y = 1$ convient également). En l'occurrence, les formules (3.4.j) sélectionnent la plus petite solution.

4 Conditions de compatibilité de systèmes rectangulaires

4.1 Rang mineur

4.1.1 Définition (rang mineur) *On appelle rang mineur d'une matrice A, noté $\operatorname{rg_m}(A)$, la dimension maximale d'un mineur non équilibré.*

On définit la matrice des mineurs d'ordre k de A, $\mathcal{M}^{(k)}(A)$. C'est une matrice $C_n^k \times C_p^k$, indicée par des ensembles de lignes de A et de colonnes de A, définie de la manière suivante:

$$\mathcal{M}^{(k)}_{I,K}(A) = \det A_{[I|J]} \quad \text{avec} \quad \#I = \ \#J = k.$$

Les ensembles d'indices sont supposés ordonnés par ordre lexicographique. En particulier, on a $\mathcal{M}^{(1)} = A$.

En termes de matrices des mineurs, le théorème de Binet-Cauchy I,2.1.8 se réécrit:

$$\mathcal{M}^{(k)}(AB) \nabla\bullet\ \mathcal{M}^{(k)}(A)\mathcal{M}^{(k)}(B) \quad . \tag{4.1.a}$$

Il en résulte que

$$\operatorname{rg_m}(AB) \leq \min(\operatorname{rg_m}(A), \operatorname{rg_m}(B)) \quad . \tag{4.1.b}$$

4.2 Conditions supplémentaires de compatibilité

On considère le système

$$Ax \ \nabla\ \varepsilon \tag{4.2.a}$$

où $A \in \mathbb{S}_{\max}^{n\times p}$, avec $n \geq p$.

4.2.1 Théorème *Pour que le système (4.2.a) admette une solution signée non nulle, les conditions suivantes sont nécessaires.*

(i) *Pour tout ensemble d'indices I de cardinal p,* $\det A_I \,\nabla\, \varepsilon$*,*

(ii) *Pour tous ensembles d'indices I, J de cardinal $p-1$ et pour tous $k, l \in \{1, \dots, p\}$,*

$$\begin{vmatrix} \det A_{[I|k)} & \det A_{[I|l)} \\ \det A_{[J|k)} & \det A_{[J|l)} \end{vmatrix} \nabla\, \varepsilon \ . \tag{4.2.b}$$

Par exemple, pour $A \in \mathbb{S}_{\max}^{4\times 3}$, $I = \{1,2\}$, $J = \{3,4\}$, $k = 2$, $l = 3$, la condition (ii) se réécrit:

$$\begin{vmatrix} a_{11}a_{23} \ominus a_{21}a_{13} & a_{11}a_{22} \ominus a_{21}a_{12} \\ a_{31}a_{43} \ominus a_{41}a_{33} & a_{31}a_{42} \ominus a_{41}a_{32} \end{vmatrix} \nabla\, \varepsilon \ .$$

Preuve du Théorème. La condition (i) n'est autre que la condition de Cramer du système $A_{[I|}X \nabla \varepsilon$. Montrons (ii). Supposons $\det A_{[I|k)}$ non équilibré. On a $x_k \neq \varepsilon$ (sinon, on contredirait la condition de Cramer pour le système $A_{[I|k)}x_k \,\nabla\, \varepsilon$). Soit le système:

$$A_{[I|k)}X_{(k|} \,\nabla\, \ominus A_{[I|k)}x_k \ .$$

On a

$$\det A_{[I|k)}X_{(k|} \,\nabla\, \ominus A^{\mathrm{adj}}_{[I|k)}A_{[I|k)}x_k \ ,$$

d'où en projetant sur la l-ième coordonnée ($l \neq k$):

$$\det A_{[I|k)}x_l \,\nabla\, \ominus \det A_{[I|l)}x_k \ .$$

En exprimant de x_l en fonction de x_k, en reportant dans le système $A_{[J|}X_{[J|} \,\nabla\, \varepsilon$ et en exprimant la condition de Cramer du nouveau système qui ne contient plus l'indéterminée x_l, on obtient (ii). ∎

4.2.2 Remarque La condition (ii) affirme que le rang mineur de $\mathcal{M}^{(p-1)}$ est majoré par 1.

D'ordinaire, la condition (ii) est conséquence de la condition (i) (la preuve ci-dessus marche aussi dans un corps). Dans $\mathbb{S}_{\max}$, elle n'est pas automatiquement vérifiée comme le montre le contre exemple suivant.

4.2.3 Exemple Considérons la matrice

$$A = \begin{bmatrix} e & e & e \\ \ominus e & e & e \\ e & \ominus e & e \\ e & e & \ominus e \end{bmatrix}$$

On a:

$$\mathcal{M}^{(3)}(A) = \begin{bmatrix} e^{\bullet} \\ e^{\bullet} \\ e^{\bullet} \\ e^{\bullet} \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{M}^{(2)}(A) = \begin{array}{c} \\ [1,2] \\ [1,3] \\ [1,4] \\ [2,3] \\ [2,4] \\ [3,4] \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} [1,2] & [1,3] & [2,3] \end{array} \\ \begin{bmatrix} e & e & e^\bullet \\ \ominus e & e^\bullet & e \\ e^\bullet & \ominus e & \ominus e \\ e^\bullet & \ominus e & e \\ \ominus e & e^\bullet & \ominus e \\ e & \ominus e & e^\bullet \end{bmatrix} \end{array} .$$

Tous les mineurs d'ordre 3 sont équilibrés, et la condition (i) est donc remplie. Cependant, on a

$$\det\left(\mathcal{M}^{(2)}(A)_{[2,5|1,3]}\right) = \begin{vmatrix} \det A_{[13|12]} & \det A_{[13|23]} \\ \det A_{[24|12]} & \det A_{[24|23]} \end{vmatrix} = e$$

ce qui contredit la seconde condition de compatibilité. Le Théorème affirme alors que le système $Ax \nabla \varepsilon$ n'a pas de solution. On peut aussi le vérifier de manière élémentaire comme suit. On a $\mathcal{M}^{(2)}(A)_{11} = \det A_{[1,2|1,2]} = e$, d'où l'on déduit que le système $A_{[1,2|1,2]}x_{[1,2|} \nabla \ominus A_{[1,2|3]}x_{[3|}$ est de Cramer, et donc que si x_3 est nul, il n'admet que des solutions dégénérées. On peut supposer par exemple $x_3 = \ominus e$. Alors le déterminant de Cramer associé à x_2 vaut $\det A_{[1,2|1,3]} = \mathcal{M}^{(2)}_{1,2} = e$, d'où $x_2 \nabla e$. Par ailleurs, le déterminant de Cramer associé à x_2 du système $A_{[3,4|1,2]}x_{[1,2|} \nabla A_{[3,4|3]}$ vaut $\mathcal{M}^{(2)}_{6,2} = \ominus e$, d'où $x_2 \nabla \ominus e$ ce qui contredit x_2 signé.

On obtient aisément des conditions de compatibilités analogues à (ii) pour des mineurs d'ordre plus petit. De manière précise.

4.2.4 Proposition *Soient $1 \leq q \leq p-1$, $I_1, \ldots, I_{q+1}$ $q+1$ ensembles de lignes, chaque I_l étant de cardinal $p-q$, $K = \{k_1, \ldots, k_{q+1}\}$ un ensemble de colonnes de cardinal $q+1$. Soit M la matrice $(q+1)\times(q+1)$ extraite de la matrice des mineurs d'ordre $p-q$ telle que*

$$M_{ij} = \det A_{[I_i|K\setminus\{k_j\})} .$$

Une condition nécessaire pour que $Ax \nabla \varepsilon$ admette une solution signée non nulle est que

$$\det M \nabla \varepsilon .$$

Cela résulte évidemment du Lemme suivant.

4.2.5 Lemme *Pour tout ensemble de lignes I de cardinal $p-q$ et pour tout ensemble de colonnes K de cardinal $q+1$.*

$$\bigoplus_{l\in K} \sigma_{K,l} \det A_{[I|K\setminus\{l\})}\, x_l \nabla \varepsilon \tag{4.2.c}$$

où $\sigma_{K,l} = e$ ou $\ominus e$.

Preuve S'obtient de manière analogue à la condition (ii) du Théorème 4.2.1. On observe que la condition de Cramer du système

$$A_{[I|K\setminus\{k\})}.x_{(K\setminus\{k\}|} \nabla \ominus A_{[I|K\setminus\{k\}]}.x_{[K\setminus\{k\}|}$$

où $\ominus A_{[I|K\setminus\{k\}]}.x_{(K\setminus\{k\}|}$ est vu comme un second membre constant est:

$$\det A_{[I|K\setminus\{k\})}x_{(K\setminus\{k\}|} \nabla \ominus \left(A_{[I|K\setminus\{k\})}\right)^{\mathrm{adj}} A_{[I|K\setminus\{k\}]}x_{[K\setminus\{k\}|} ,$$

soit

$$\det A_{[I|K\setminus\{k\})} x_{(K\setminus\{k\}|} \,\nabla\, \ominus \bigoplus_{l\in K\setminus\{k\}} \left(A_{[I|K\setminus\{k\})}\right)^{\mathrm{adj}} A_{[I|l]} x_l \ .$$

En projetant sur la k-ième coordonnée, on obtient

$$\det A_{[I|K\setminus\{k\})} . x_k \,\nabla \bigoplus_{l\in K\setminus\{k\}} \sigma_{Kl} \det A_{[I|K\setminus\{l\})} x_l$$

(on rappelle que la l-ième composante du vecteur $B^{\mathrm{adj}}u$ est égale au déterminant de la matrice obtenue en remplaçant la l-ième colonne de B par u). Le Lemme en résulte. ∎

On pourrait chercher d'autres conditions de compatibilité. Nous ne le ferons pas ici. Il faut bien voir que le procédé d'élimination qui permet de déduire de telles conditions ne fournit en général que des conditions nécessaires (le caractère suffisant sera obtenu seulement dans certains cas par des arguments combinatoires). Le contre exemple suivant montre que pour certaines matrices, les conditions du type ci-dessus sont automatiquement vérifiées pour des mineurs de taille suffisante, ce qui suggère que la compatibilité des systèmes généraux ne s'exprime pas en termes de mineurs.

4.2.6 Contre exemple Considérons le système suivant:

$$A = \begin{bmatrix} e & e & e & e \\ e & e & e & \ominus e \\ e & e & \ominus e & e \\ e & e & \ominus e & \ominus e \\ e & \ominus e & e & e \\ e & \ominus e & e & \ominus e \\ e & \ominus e & \ominus e & e \\ e & \ominus e & e\ominus & \ominus e \end{bmatrix}, \quad Ax \,\nabla\, \varepsilon \ . \tag{4.2.d}$$

Le Lemme suivant affirme que les mineurs de taille suffisante d'une matrice à coefficients de module e sont équilibrés.

4.2.7 Lemme *Pour toute matrice carrée A de taille supérieure ou égale à 3 telle que $|A_{i,j}| = e$, on a* $\det A = e^\bullet$.

Moyennant ce Lemme, il est clair que $\mathcal{M}^{(4)}(A)$ et $\mathcal{M}^{(3)}(A)$ sont totalement équilibrées, et que de plus le rang mineur de $\mathcal{M}^{(2)}(A)$ ne saurait être plus grand que 2. Ainsi, les conditions de la proposition 4.2.4 sont automatiquement vérifiées. Cependant, $Ax \,\nabla\, \varepsilon$ n'a pas de solution. En effet, aucun des x_i ne peut être nul (sinon, on retrouve le système incompatible de l'exemple 4.2.3). On a donc $x_1 = x_2$ ou $x_1 = \ominus x_2$. Dans les deux cas, 4 des 8 équations (4.2.d) sont automatiquement vérifiées et il reste encore le système incompatible 4×3 de l'exemple 4.2.3. Ceci montre que le système (4.2.d) n'admet pas de solution.

Preuve du lemme 4.2.7. Dés qu'une sous matrice de A est de déterminant $e^\bullet$, comme la sous matrice complémentaire est de déterminant non nul, on a $\det A = e^\bullet$. Si donc l'un des coefficients de A est $e^\bullet$, c'est évident. On peut ainsi toujours supposer quitte à multiplier les deux premières lignes et la seconde colonne par $\ominus e$ que

$$A_{[1,2|1,2]} = \begin{bmatrix} e & e \\ e & \ominus e \end{bmatrix}$$

Alors, en supposant de même $A_{1,3} = e$, on a

$$A_{[1,2|3]} = \begin{bmatrix} e \\ e \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} e \\ \ominus e \end{bmatrix} .$$

Dans le premier cas, $\det A_{[1,2|1,3]} = e^\bullet$, dans le second, $\det A_{[1,2|2,3]} = e^\bullet$, d'où la conclusion. ∎

4.2.8 Contre exemple Considérons le système

$$\begin{cases} e^\bullet x \oplus y \nabla \varepsilon \\ x \oplus e^\bullet y \nabla \varepsilon \ . \end{cases} \tag{4.2.e}$$

Si on élimine x ou y, on trouve les conditions triviales $e^\bullet x \nabla \varepsilon$ et $e^\bullet \nabla \varepsilon$. Cependant, toute solution signée de (4.2.e) vérifie $|x| = |y|$. C'est dire que les arguments d'élimination ne suffisent pas à caractériser les solutions signées des systèmes d'équilibres linéaires.

5 Existence de solutions signées d'équilibres linéaires

On a vu ci-dessus que dans $\mathbb{S}_{\max}$, les conditions de Cramer sont nécessaires. Le résultat suivant affirme que l'on peut résoudre $Ax \nabla b$ dès que $\det A \neq \varepsilon$ (et donc même dans le cas dégénéré $\det A \in \mathbb{S}^\bullet_{\max}$).

5.0.1 Théorème *Soit A une matrice carrée à coefficients dans $\mathbb{S}_{\max}$ de déterminant non nul (mais éventuellement équilibré). Il existe au moins une solution signée à $Ax \nabla b$.*

Nous donnerons de ce résultat deux preuves, une algébrique fondée sur des algorithmes itératifs, la seconde un peu plus longue dans l'esprit des techniques de Gondran et Minoux, faisant usage du théorème de Frobenius-König.

6 Algorithme de Jacobi

Nous introduisons tout d'abord une nouvelle relation plus fine que ∇ :

$$x \mathrel{|\nabla|} y \quad \Leftrightarrow \quad x \nabla y \ \text{ et } \ |x| = |y|,$$

ce qui se lit "x équilibre y en valeur absolue" Nous écrirons comme dans l'algorithme de Jacobi classique

$$A = D \oplus U \oplus L$$

avec U triangulaire supérieure, L triangulaire inférieure et D diagonale. La bonne notion de dominance diagonale dans $\mathbb{S}_{\max}$ est la suivante:

6.0.1 Définition (Dominance diagonale) *La matrice A est à* diagonale dominante *si*

$$|\det A| = |\bigotimes_i A_{ii}| \ .$$

6.0.2 Théorème (Algorithme de Jacobi) *Soit A une matrice carrée de déterminant non nul à diagonale dominante.*
1/ On peut choisir une suite $\{x^p\}$ de vecteurs signés satisfaisant:

(i) $\varepsilon = x^0 \preceq x^1 \preceq \ldots \preceq x^p \preceq \ldots$

(ii) $Dx^{p+1}\ |\nabla|\ \ominus (U \oplus L)x^p \oplus b$.

2/ La suite x^p est stationnaire après n itérations (à savoir $x^n = x^{n+1} = \ldots$), et x^n est une solution de $Ax \nabla b$
3/ On a $|x^n| = |\det A|^{-1}|A^{\mathrm{adj}}b|$.

Avant que de démontrer le Théorème 6.0.2, nous donnons un exemple:

6.0.3 Exemple Nous appliquons l'algorithme de Jacobi au système suivant:

$$\begin{bmatrix} 5 & \ominus 0 & 3 \\ 1 & 3 & \ominus 1 \\ 3 & \ominus 2 & 1^\bullet \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \nabla \begin{bmatrix} \ominus 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

avec $|\det A|^{-1}|A^{\mathrm{adj}}b| = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^t$.

$$\begin{cases} 5x_1^1\ |\nabla|\ \ominus 1 \\ 3x_2^1\ |\nabla|\ 4 \\ 1^\bullet x_3^1\ |\nabla|\ 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^1 = \ominus - 4 \\ x_2^1 = 1 \\ x_3^1 = -1 \text{ ou } \ominus -1, \text{ choisissons } x_3^1 = -1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 5x_1^2\ |\nabla|\ 0x_2^1 \ominus 3x_3^1 \ominus 1 = \ominus 2 \\ 3x_2^2\ |\nabla|\ \ominus 1x_1^1 \oplus 1x_3^1 \oplus 4 = 4 \\ 1^\bullet x_3^2\ |\nabla|\ \ominus 3x_1^1 \oplus 2x_2^1 \oplus 0 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^2 = \ominus - 3 \\ x_2^2 = 1 \\ x_3^2 = 2 \text{ ou } \ominus 2, \text{ disons } x_3^2 = 2 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 5x_1^3\ |\nabla|\ \ominus 5 \\ 3x_2^3\ |\nabla|\ 4 \\ 1^\bullet x_3^3\ |\nabla|\ 3 \end{cases} \text{et } x_3^3 \geq x_3^2 \Rightarrow \begin{cases} x_1^3 = \ominus 0 \\ x_2^3 = 1 \\ x_3^3 = 2 \end{cases}$$

D'autres choix pour x_3^1 and x_3^2 fournissent l'autre solution: $x_1^3 = 0, x_2^3 = 1, x_3^3 = \ominus 2$.

Nous montrons maintenant le Théorème 6.0.2.

6.1 Existence de la suite $\{x^p\}$

Nous montrons par récurrence l'existence de la suite $\{x^p\}$.

A/<u>Cas où la matrice D est inversible</u> La condition (ii) est alors équivalente à:

$$(\mathrm{ii}')\quad x^{p+1}\ |\nabla|\ \ominus D^{-1}(U \oplus L)x^p \oplus D^{-1}b$$

Supposons construits $\varepsilon = x^0 \preceq x^1 \preceq \ldots \preceq x^p \preceq x^{p+1}$ vérifiant (ii)'. Via le lemme évident

6.1.1 Lemme *$a\ |\nabla|\ b$ et $a \in \mathbb{R}_{\max}^\vee \Rightarrow a \preceq b$.*

$$(\mathrm{ii}') \Rightarrow x^{p+1} \preceq \ominus D^{-1}(U \oplus L)x^p \oplus D^{-1}b \tag{6.1.a}$$

L'application $x \mapsto D^{-1}(U \oplus L)x \oplus D^{-1}b$ est croissante, comme $x^p \preceq x^{p+1}$, (6.1.a) entraîne

$$x^{p+1} \preceq \ominus D^{-1}(U \oplus L)x^{p+1} \oplus D^{-1}b \ . \tag{6.1.b}$$

L'on peut donc choisir $x^{p+2} \in (\mathbb{R}^{\vee}_{\max})^n$ tel que

$$x^{p+1} \preceq x^{p+2} \preceq \ominus D^{-1}(U \oplus L)x^{p+1} \oplus D^{-1}b \tag{6.1.c}$$

et $|x^{p+2}| = |\ominus D^{-1}(U \oplus L)x^{p+1} \oplus D^{-1}b|$, ce qui achève la récurrence.

B/Cas général Maintenant, les éléments de la diagonale sont non nuls mais peut-être équilibrés. Une remarque permet de se ramener à la démonstration précédente:

6.1.2 Lemme *Soit $a \neq \varepsilon$. On définit*

$$\tilde{a} = \begin{cases} a^{-1} & \text{si } a \text{ inversible} \\ (|a|^{-1})^{\bullet} & \text{si } a \text{ équilibré} \end{cases}$$

Alors, pour tout $x \in \mathbb{S}_{\max}$,

$$ax \mathrel{|\nabla|} b \Longleftrightarrow x \mathrel{|\nabla|} \tilde{a}b$$

Preuve Immédiate en regardant les signes à gauche et à droite des équilibres. ∎

On définit la matrice diagonale $\tilde{D}$ (telle que $[\tilde{D}]_{ii} = \tilde{D_{i,i}}$), et la preuve de A/ vaut encore à condition de remplacer D^{-1} par $\tilde{D}$.

6.2 Stationnarité de la suite $\{x^p\}$

Pour voir que x^p est stationnaire, nous introduisons $\hat{x}^p = |x^p|$. La récurrence (ii) donne

$$\hat{x}^{p+1} = M\hat{x}^{p+1} \oplus |D|^{-1}|b|$$

où $M = |D|^{-1}|U \oplus L|$. Soit

$$\hat{x}^{p+1} = (\mathrm{Id} \oplus M \oplus \ldots \oplus M^p)|D|^{-1}|b|$$

On a:

6.2.1 Lemme *Si A est à diagonale dominante, alors $M = |D|^{-1}|U \oplus L|$ n'a pas de circuits de poids strictement positif.*

Preuve On a $M_{ij} = |a_{ii}|^{-1}|a_{ij}|$ pour $i \neq j$. Supposons un circuit de longueur k de poids > 0, pour fixer les idées:

$$|a_{11}^{-1}a_{12}a_{22}^{-1}a_{23}\ldots a_{k-1,k-1}^{-1}a_{k-1,k}a_{kk}^{-1}a_{k1}| > 0$$

alors il est clair que la permutation σ définie par: $1 \overset{\sigma}{\mapsto} 2 \mapsto 3 \mapsto \ldots \mapsto k \mapsto 1$ et $\sigma(i) = i$ ailleurs vérifie $\bigotimes_{i=1}^n |a_{i\sigma(i)}| > |\det A|$, ce qui est contredit le fait que la diagonale principale est dominante. ∎

On peut donc appliquer le théorème de Carre-Gondran-Minoux (cf. [48], p.72, Théorème 1) à la matrice M. La somme $M^* = \mathrm{Id} \oplus M \oplus M^2 \oplus \ldots \oplus M^p \oplus \ldots$ est donc atteinte à partir du rang $n-1$. Comme

$$|x^{p+1}| = (\mathrm{Id} \oplus M \oplus \ldots \oplus M^p)|D|^{-1}|b|$$

on a

$$|x^n| = |x^{n+1}| = \ldots = |M|^*|D|^{-1}|b|\ . \tag{6.2.a}$$

x^n et x^{n+1} étant signés, $x^n \preceq x^{n+1}$ et $|x^n| = |x^{n+1}|$ entraînent $x^n = x^{n+1}$. En reportant dans (ii),

$$Dx^n \ \nabla\ \ominus (U \oplus L)x^n \oplus b$$

soit $Ax^n \nabla b$, ce qui achève la preuve de 2/.

6.3 Etoiles et cofacteurs

L'assertion 3/ est une conséquence de:

6.3.1 Lemme $(|D|^{-1}|U \oplus L|)^*|D|^{-1} = |\det A|^{-1}|A^{\mathrm{adj}}|$.

Nous déduisons ce lemme d'un résultat du à Yoeli ([102], Théorème 4). Yoeli considère des permanents au lieu des déterminants. Le Théorème 4 de [102] s'écrit dans notre formalisme:

6.3.2 Théorème *(Yoeli) Supposons A telle que* (i)*: $|A| \succeq \mathrm{Id}$ et* (ii)*: $|A|$ n'aie pas de circuits de poids $\succ e$, alors*

$$|A^{\mathrm{adj}}| = |A|^* \ . \tag{6.3.a}$$

Notons que les conditions (i) et (ii) entraînent que tous les termes diagonaux de A sont de module e. Nous aurons besoin d'un Lemme qui interprète les termes du développement du déterminant en termes de chemins, le Théorème de Yoeli étant un sous-produit de ce Lemme. Etant donné un chemin $p = (i_1, \ldots, i_k)$ de i_1 à i_k, on note $w_A(p) = A_{i_1 i_2} \ldots A_{i_{k-1} i_k}$. Si $i_k = i_1$, le chemin sera qualifié de circuit. On dira que le circuit c passe par l'arc (ij) s'il existe l tel que $i = i_l$, $j = i_{l+1}$ (avec la convention $k + 1 = 1$).

6.3.3 Lemme *On a pour $i \neq j$,*

$$|a_{ij} \mathrm{cof}_{ij} A| = \bigoplus_c w_{|A|}(c) \tag{6.3.b}$$

où la somme est prise sur tous les circuits élémentaires c passant par l'arc (ij).

Le terme $a_{ij}\mathrm{cof}_{ij}A$ correspond aux termes de $\det A$ associées aux permutations σ telles que $\sigma(i) = j$. En décomposant σ en produit de cycles, et compte tenu de $|A_{ii}| = e$, on a immédiatement l'égalité (6.3.b). Comme p est un chemin élémentaire de i à j ssi (p, j) est un circuit élémentaire passant par l'arc (ij), on en déduit immédiatement l'égalité (6.3.a), du moins pour les coefficients hors-diagonaux. On observe que $|\mathrm{cof}_{ii}A| = e$ (en décomposant les permutation on produit de cycles, on trouve $|\mathrm{cof}_{ii}A| \preceq e$, en considérant la permutation identité, on trouve compte tenu de $|A_{ii}| = e$, $|\mathrm{cof}_{ii}A| \succeq e$), ce qui montre le Théorème 6.3.2. ∎

Preuve de 6.3.1. La matrice $|D|^{-1}A$ vérifie les conditions du Théorème 6.3.2. On a donc:

$$|(|D|^{-1}A)^{\mathrm{adj}}| = (|D|^{-1}|A|)^*$$

Or

$$\begin{aligned}(|D|^{-1}|A|)^* = (|D|^{-1}|D \oplus U \oplus L|)^* &= \\ = (\mathrm{Id} \oplus |D|^{-1}|U \oplus L|)^* &= \\ = (|D|^{-1}|U \oplus L|)^*\end{aligned}$$

La conclusion résulte de

$$|(|D|^{-1}|A|)]^{\mathrm{adj}}| = |A^{\mathrm{adj}}||\det A|^{-1}|D| \tag{6.3.c}$$

laquelle identité est une conséquence des deux résultats suivants:

6.3.4 Lemme *Supposons C inversible, alors*

$$(CB)^{\mathrm{adj}} = B^{\mathrm{adj}}C^{\mathrm{adj}} \ . \tag{6.3.d}$$

6.3.5 Lemme *Supposons C inversible, alors*

$$(\det C)^{-1} C^{\mathrm{adj}} = C^{-1} \ . \tag{6.3.e}$$

Ces lemmes se vérifient de manière élémentaires pour les matrices diagonales et les matrices de permutation qui, d'après l'étude des matrices inversibles réalisée au chapitre 0, engendrent le groupe linéaire de $\mathbb{S}_{\max}^n$. ∎

Ici s' achève la preuve de 3/, et celle du Théorème 6.0.2.

6.3.6 Remarque Si ni C ni B ne sont inversibles, on a en général seulement un équilibre au lieu de l'identité (6.3.d), comme il résulte de I,2.1.4.

7 Algorithme de Gauss-Seidel

7.0.1 Théorème *Soit A une matrice carrée de déterminant non nul à diagonale dominante.*
1/ On peut choisir une suite x^p telle que

(i) $\varepsilon = x^0 \preceq x^1 \preceq \ldots \preceq x^p \preceq \ldots$

(ii) $(D+U)x^p \ \nabla \ \ominus Lx^{p-1} \oplus b$

(iii) $|x^p| = |\det(A)^{-1}(D \oplus U)^{\mathrm{adj}}||Lx^{p-1} \oplus b|$

2/ La suite x^p est stationnaire après n itérations ($x^n = x^{n+1} = \ldots$) et x^n est solution de $Ax \ \nabla \ b$.
3/ On a $|x^n| = |\det A|^{-1}|A\mathrm{adj} b|$.

7.0.2 Exemple Nous considérons à nouveau le système traité en 6.0.3. On a:

$$\left\{\begin{array}{ll} 1^\bullet x_3^1 \ \boxed{\nabla} \ 0 & \text{par exemple, } x_3^1 = -1 \\ 3x_2^1 \ \boxed{\nabla} \ 0 \oplus 4 & x_2^1 = 1 \\ 5x_3^1 \ \boxed{\nabla} \ 0x_2^1 \ominus 3x_3^1 \ominus 1 = \ominus 2 & x_1^1 = \ominus - 3 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ll} 1^\bullet x_3^2 \ \boxed{\nabla} \ \ominus 3x_1^1 \oplus 2x_2^1 \oplus 0 = 3 & \text{par exemple } x_3^2 = 2 \\ 3x_2^2 \ \boxed{\nabla} \ \ominus 1x_1^1 \oplus 1x_3^2 \oplus 4 = 4 & x_2^2 = 1 \\ 5x_1^2 \ \boxed{\nabla} \ 0x_2^2 \ominus 3x_3^2 \ominus 1 = \ominus 5 & x_1^2 = \ominus 0 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ll} 1^\bullet x_3^3 \ \boxed{\nabla} \ \ominus 3x_1^2 \oplus 2x_2^2 \oplus 0 = 3 & x_3^3 = 2 = x_3^2 \\ 3x_2^3 \ \boxed{\nabla} \ \ominus 1x_1^2 \oplus 1x_3^3 \oplus 4 = 4 & x_2^3 = 1 = x_2^2 \\ 5x_1^3 \ \boxed{\nabla} \ 0x_2^3 \ominus 3x_3^3 \ominus 1 = \ominus 5 & x_1^3 = \ominus 0 = x_1^2 \end{array}\right.$$

On a retrouvé la solution $(\ominus 0, 1, 2)^{\mathrm{T}}$. La solution est atteinte au bout de deux itérations au lieu de 3.

7.0.3 Lemme *Soit $N = |\det(A)^{-1}(D \oplus U)^{\mathrm{adj}}|$. On a*

$$N = \bigoplus_{i=0}^{n-1} (|D^{-1}||U|)^i = (|D|^{-1}|U|)^* \ . \tag{7.0.a}$$

Preuve Il suffit de le vérifier pour $D = \mathrm{Id}$ et $\det A = e$. On a

$$|(\mathrm{Id} \oplus U)^{\mathrm{adj}}_{ij}| = |U^*|_{ij}$$

qui n'est autre que le Théorème de Yoeli 6.3.2 appliqué à $A = \mathrm{Id} \oplus U$. ∎

7.0.4 Lemme *L'étoile de la matrice NL est finie.*

Preuve du Lemme 7.0.4. On se ramène au cas où $D = \mathrm{Id}$ et $\det A = e$. La matrice A n'admet alors aucun circuit de poids strictement positif, donc A^* est finie. On a $(NL)^* = (U^*L)^* \preceq (A^*A)^* \preceq (A^*)^* \preceq A^*$, d'où le résultat. ∎

Preuve du Théorème 7.0.1. On montre par une preuve analogue à §6.1 qu'il existe x^p croissant tel que $x^0 = \varepsilon$ et

$$\begin{array}{l} x^p_n \;|\nabla|\; a_{nn}^{-1}(Lx_{p-1} \oplus b), \\ x^p_{n-1} \;|\nabla|\; a_{n-1n-1}(Lx_{p-1} \oplus b \ominus a_{n-1n}x^p_n) \\ \ldots \end{array}$$

La stationnarité s'obtient comme en §6.2 en faisant usage du Lemme 7.0.4.

8 Preuve directe du Théorème 5.0.1

8.1 Préliminaires

On appelle diagonales de la matrice A les n-uplets de la forme $(a_{1\sigma(1)}, a_{2\sigma(2)}, \ldots, a_{n\sigma(n)})$ où σ est une permutation de $\{1, \ldots, n\}$. On appellera poids de cette diagonale le produit $w_\sigma = \bigotimes_i a_{i\sigma(i)}$. Rappelons deux faits bien connus de la théorie des matrices à coefficients positifs ou nuls et de la théorie des graphes:

8.1.1 Théorème *(Frobenius-König) A a toutes ses diagonales de poids nul si et seulement si il existe une sous-matrice de A de taille $s \times t$, avec $s + t = n + 1$.*

8.1.2 Corollaire *(König) Soient $A \in \mathbb{N}^{n\times n}$ et $p \in \mathbb{N}$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes:*

(i) $\forall i,\ \sum_j a_{ij} = \sum_j a_{ji} = p$,

(ii) *A est somme de p matrices de permutation.*

Nous renvoyons le lecteur à [66] pour la preuve du Théorème de Frobenius-König, Le corollaire 8.1.2 s'en déduit aisément: on montre qu'une matrice vérifiant (i) ne peut vérifier la condition de Frobenius-König, d'où il résulte que l'on peut soustraire à A une diagonale (c'est à dire, comme A est à coefficients entiers, une matrice de permutation). La conclusion résulte alors d'une récurrence immédiate sur p. Nous renvoyons le lecteur non convaincu à la preuve du Théorème de Birkhoff [66], qui est analogue.

De cela, on déduit un résultat qui nous sera utile.

8.1.3 Lemme *Soit $A = (a_{ij})$ une matrice $n \times n$ dont les coefficients a_{ij} commutent. Pour tout entier $p \geq 1$, considérons un produit de np termes:*

$$P = \prod_{\alpha \in I} a_{\mu_\alpha \nu_\alpha} \enspace ,$$

chaque ligne et chaque colonne étant atteintes p fois, i.e.

$$\begin{array}{ll} \forall i \in \{1, \dots, n\}, & \#\{\alpha \mid \mu_\alpha = i\} = p \\ \forall j \in \{1, \dots, n\}, & \#\{\alpha \mid \nu_\alpha = j\} = p \enspace . \end{array}$$

Alors, $|P| \preceq |\det A|^p$.

Preuve : On montre qu'il il existe p permutations $\sigma_1, \dots, \sigma_p \in \mathfrak{S}_n$, telles que:

$$P = (\prod_{i=1}^n a_{i\sigma_1(i)}) \otimes (\prod_{i=1}^n a_{i\sigma_2(i)}) \otimes \dots \otimes (\prod_{i=1}^n a_{i\sigma_p(i)})$$

ce qui donnera immédiatement le Lemme. On associe pour cela à A la matrice $B = (b_{ij}) \in (\mathbb{N})^{n \times n}$ définie par:

$$b_{ij} = \ \#\{\alpha \in I \mid \ \mu_\alpha = i \text{ et } \ \nu_\alpha = j\} \enspace .$$

Il est clair que B vérifie la condition (i) du Corollaire 8.1.2. On peut donc écrire B comme somme de p matrices de permutation, soit $B = S_1 + \dots + S_p$. En réordonnant les termes dans le produit P, on obtient la formule requise. ∎

8.2 Lemme fondamental

Soit $A \in (\mathbb{S}_{\max})^{n \times n}$ et $b \in (\mathbb{R}_{\max})^n$. On note D_i le i-ième *déterminant de Cramer*. On appelle *poids* de la diagonale associée à la permutation σ, ou plus simplement poids de σ le produit $w(\sigma) = a_{1\sigma(1)} \otimes \dots \otimes a_{n\sigma(n)}$.

8.2.1 Définition *On note $\mathfrak{S}_{\max}(A)$ l'ensemble des diagonales de poids maximum:*

$$\mathfrak{S}_{\max}(A) = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \ |w_\sigma(A)| = |\det \, A|\}$$

Le développement de $D_{\sigma(i)}$ par rapport à la $\sigma(i)$-ième colonne donne

$$D_{\sigma(i)} = \bigoplus_{k=1}^n b_k \mathrm{cof}_{k\sigma(i)}(A) \tag{8.2.a}$$

de sorte qu'on a évidemment pour toute permutation σ et pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $|D_{\sigma(i)}| \succeq |b_i \mathrm{cof}_{i\sigma(i)}(A)|$. Comme $\mathbb{R}_{\max}$ est totalement ordonné, il existe un indice $j(i)$ tel que $|D_{\sigma(i)}| = |b_{j(i)} \mathrm{cof}_{j(i)\sigma(i)}(A)|$. Lorsque σ est de poids maximal, on montre que la multi-application $i \mapsto j(i)$ admet un point fixe.

8.2.2 Lemme *Pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_{\max}(A)$, il existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que:*

$$|D_{\sigma(i)}| = |b_i \mathrm{cof}_{i\sigma(i)}(A)| \enspace .$$

Preuve : Prenons $\sigma \in \mathfrak{S}_{\max}(A)$, et supposons par l'absurde que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on a

$$|D_{\sigma(i)}| \succ |b_i \mathrm{cof}_{i\sigma(i)}(A)| \ .$$

Quitte à permuter les lignes de la matrice A, on peut supposer $\sigma = \mathrm{Id} \in \mathfrak{S}_{\max}(A)$. On a donc:

$$\forall i, \ \ |b_i \mathrm{cof}_{ii}(A)| \prec |D_i| \ .$$

Comme $\mathrm{Id} \in \mathfrak{S}_{\max}(A)$, on a $|\det A| = |a_{ii}\mathrm{cof}_{ii}(A)| \neq \varepsilon$. On peut donc diviser les inégalités précédentes par $|\mathrm{cof}_{ii}(A)|$, et alors:

$$\forall i, \ \ |b_i| \preceq \frac{|a_{ii} D_i|}{|\det A|}$$

Comme $\mathbb{R}_{\max}$ est totalement ordonné, on a $|D_i| = |\bigoplus_{k=1}^n b_k \mathrm{cof}_{ki}(A)| = |b_{\varphi(i)}\mathrm{cof}_{\varphi(i)i}(A)|$, pour un certain indice $\varphi(i) \neq i$. En itérant le procédé:

$$|D_{\varphi(i)}| = |b_{\varphi^2(i)}\mathrm{cof}_{\varphi^2(i)\varphi(i)}(A)|$$

avec $\varphi^2(i) = \varphi(\varphi(i)) \neq \varphi(i)$, etc. Comme φ n'a qu'un nombre fini de valeurs, on finit par cycler:

$$\text{il existe } k, p \text{ tels que} \quad \varphi^p(k) = \varphi(k)$$

On pourra supposer par exemple $\varphi(1) = 2, \varphi(2) = 3, \ldots, \varphi(p) = 1$.

$$\begin{array}{l} |b_1| \prec \frac{|a_{11}\mathrm{cof}_{21}(A) b_2|}{|\det A|} \\ |b_2| \prec \frac{|a_{22}\mathrm{cof}_{32}(A) b_3|}{|\det A|} \\ \ldots \\ |b_p| \prec \frac{|a_{pp}\mathrm{cof}_{1p}(A) b_1|}{|\det A|} \end{array}$$

En éliminant $b_2, \ldots, b_n$:

$$|b_1| \prec \frac{|a_{11}\mathrm{cof}_{21}(A) a_{22}\mathrm{cof}_{32}(A) \ldots a_{pp}\mathrm{cof}_{1p}(A) b_1|}{|\det A|^p}$$

et en simplifiant par $|b_1| \neq \varepsilon$:

$$e \prec \frac{|a_{11}\mathrm{cof}_{21}(A) a_{22}\mathrm{cof}_{32}(A) \ldots a_{pp}\mathrm{cof}_{1p}(A)|}{|\det A|^p} \ .$$

Il est clair que le numérateur P du second membre satisfait les hypothèses du Lemme 8.1.3, ce qui conduit à une absurdité. ■

8.3 Seconde preuve

Nous donnons une preuve directe d'un résultat analogue au Théorème 6.0.2 (quoique un peu plus faible).

8.3.1 Théorème *Soit* $A \in (\mathbb{S}_{\max})^{n\times n}$ *telle que* $\det A \neq \varepsilon$. *Pour tout* $b \in (\mathbb{S}_{\max})^n$, *il existe* $x \in (\mathbb{S}_{\max}^{\vee})^n$, *tel que:*

(i) $Ax \nabla b$

(ii) $|x| \preceq \frac{|A^{\mathrm{adj}} b|}{|\det A|}$

l'égalité étant réalisée pour au moins l'une des composantes de (ii).

Preuve : par récurrence sur la taille de la matrice. Le cas scalaire déjà étudié montre le théorème à l'ordre 1. Supposons le théorème démontré pour des matrices de taille $n-1$. Quitte à permuter les lignes de la matrice A, on peut supposer $\mathrm{Id} \in \mathfrak{S}_{\max}(A)$. Par application du Lemme de point fixe 8.2.2, il existe $i \in \{1,\ldots,n\}$ tel que $|D_i| = |b_i \bigotimes_{j\neq i} a_{j,j}|$, par exemple $i=n$. On a alors la partition de A et de b:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{1n} \\ A_{n1} & a_{1n} \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} B_1 \\ b_n \end{bmatrix}$$

avec $|\det A| = |a_{nn} \det A_{11}|$ et $|D_n| = |b_n \det A_{11}|$. De

$$\frac{|a_{nn} D_n|}{|\det A|} = |b_n|$$

il ressort que l'on peut prendre $x_n = \frac{|D_n|}{|\det A|}$ ou $x = \ominus\frac{|D_n|}{|\det A|}$ tel que $a_{nn}x_n \;\nabla\; b_n$ et $|a_{nn}x_n| = |b_n|$ [si b_n et $a_{nn} \in \mathbb{S}_{\max}^{\vee}$ prendre $x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$, sinon, un signe arbitraire convient]. On applique l'hypothèse de récurrence à:

$$A_{11}X_1 \;\nabla\; B_1 \ominus A_{1n}x_n$$

Il existe donc $X_1 \in (\mathbb{S}_{\max}^{\vee})^{n-1}$ tel que:

$$\begin{array}{l} A_{11}X_1 \oplus A_{1n}x_n \;\nabla\; B_1 \text{ et} \\ |X_1| \preceq \frac{|A_{11}^{\mathrm{adj}}(B_1 \ominus A_{1n}x_n)|}{|\det A_{11}|} \end{array}$$

Il reste à montrer:

$$\begin{array}{ll} (a) & |A_{n1}X_1| \preceq |a_{nn}x_n| \text{ de sorte que } A_{n1}X_1 \oplus a_{nn}x_n \;\nabla\; b_n \\ (b) & |X_1| \preceq \frac{|A^{\mathrm{adj}}b|}{|\det A|} \text{ restreint aux } n-1 \text{ premières coordonnées} \end{array}$$

(a): on a

$$|A_{n1}X_1| \preceq \frac{|A_{n1}A_{11}^{\mathrm{adj}}B_1|}{|\det A_{11}|} \oplus \frac{|A_{n1}A_{11}^{\mathrm{adj}}A_{1n}x_n)|}{|\det A_{11}|} \stackrel{\mathrm{def}}{=} [1] \oplus [2]$$

La formule de développement par blocs du déterminant donne:

$$|\det A| = |a_{nn} \det A_{11} \ominus A_{n1}A_{11}^{\mathrm{adj}}A_{1n}| \succeq |A_{n1}A_{11}^{\mathrm{adj}}A_{1n}| \;,,$$

d'où

$$[2] \preceq \frac{|(\det A)x_n|}{|\det A_{11}|} = |a_{nn}x_n| = |b_n|$$

D'autre part:

$$|\det \begin{bmatrix} A_{11} & B_1 \\ A_{n1} & b_n \end{bmatrix}| = |b_n \det A_{11}| = |b_n \det A_{11} \ominus A_{n1}A_{11}^{\mathrm{adj}}B_1|$$

montre que $|A_{n1}A_{11}^{\mathrm{adj}}B_1| \preceq |b_n \det A_{11}|$, d'où $[1] \preceq |b_n|$, ce qui montre (a).
(b): nous le vérifions par exemple pour la première coordonnée de X_1. On veut montrer

$$|(X_1)_1| \stackrel{\mathrm{def}}{=} |x_1| \preceq \frac{|(A^{\mathrm{adj}}b)_1|}{|\det A|} = \frac{|\det \begin{bmatrix} B_1 & A_{12} & \ldots & A_{1n} \\ b_n & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}|}{|\det A|}$$

avec des notations évidentes. Or

$$|x_1| \preceq \frac{|(A_{11}^{\mathrm{adj}}B_1)_1|}{|\det A_{11}|} \oplus \frac{|(A_{11}^{\mathrm{adj}}A_{1n})_1 x_n|}{|\det A_{11}|} \stackrel{\mathrm{def}}{=} [3] \oplus [4]$$

avec

$$[3] = \frac{|a_{nn}|}{|\det A|} \otimes |\det \begin{bmatrix} B_1 & A_{12} & \dots & A_{1n-1} \end{bmatrix}|$$

et

$$[4] = \frac{|b_n|}{|a_{nn}|} \otimes \frac{|a_{nn}|}{|\det A|} \otimes |\det \begin{bmatrix} A_{1n} & A_{12} & \dots & A_{1n-1} \end{bmatrix}|$$

[3] et [4] sont donc deux des termes correspondant au développement de

$$|\det \begin{bmatrix} B_1 & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}|$$

par rapport à la dernière ligne. On a donc $|X_1| \preceq \frac{|A^{\mathrm{adj}} b|}{|\det A|}$ (restreint aux $n-1$ premières coordonnées), ce qui montre le point (b) et achève la récurrence. ∎

8.3.2 Exemple Considérons

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$\det A = 2.2.3 \oplus 0.2.4 \oplus 1.0.0 \ominus 1.2.4 \ominus 0.0.3 \ominus 2.2.0 = 7 \oplus 6 \oplus 1 \ominus 7 \ominus 3 \ominus 4 = 7 \ominus 7 = 7^\bullet \in \mathbb{S}_{\max}^\bullet$. Le second déterminant de Cramer vaut:

$$D_2 = \det \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} = 7^\bullet$$

On a donc $\frac{|D_2|}{|\det A|} = 0 = \frac{|b_2|}{|a_{22}|} = \frac{2}{2}$. On pose $x_2 = 0$ tel que $a_{22}x_2 = b_2$, et l'on résout le système de taille 2:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} \nabla \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \ominus 0. \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

ce qui donne $D \stackrel{\mathrm{def}}{=} \det A(2|2) = 5^\bullet$, $D_{x_1} = \det \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \ominus 7$, $D_{x_3} = \det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = 5$. On a $\frac{D_{x_3}}{|D|} = \frac{5}{5} = 0 = \frac{b_3}{a_{33}}$. On pose donc $x_3 = 0$, et en reportant dans la première équation: $2x_1 \nabla 1 \ominus 4 = \ominus 4$. On prend donc $x_1 = (2)^{-1}(\ominus 4) = \ominus 2$ et l'on vérifie que:

$$\begin{bmatrix} 4^\bullet \\ 2^\bullet \\ 3^\bullet \end{bmatrix} = \ominus 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \oplus 0 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \oplus 0 \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \nabla \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

lequel équilibre donne lieu à l'égalité dans $\mathbb{R}_{\max}$:

$$0 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \oplus 0 \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \oplus 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

9 Systèmes homogènes carrés

On étudie maintenant l'existence de solutions signées au système de n équilibres homogènes à n inconnues

$$Ax \nabla \varepsilon \ .$$

9.0.1 Théorème *Soit $A \in (\mathbb{S}_{\max})^{n\times n}$. Les deux propositions suivantes sont équivalentes:*

(i) $\det A \nabla \varepsilon$

(ii) *Il existe $x \in (\mathbb{S}_{\max}^{\vee})^n$ tel que $Ax \nabla \varepsilon$.*

Preuve : (ii)⇒(i) est une conséquence des formules de Cramer déjà établies. Nous montrons (i)⇒(ii). Supposons $\det A \nabla \varepsilon$. Le déterminant peut être équilibré pour l'une des trois raisons suivantes.

9.0.2 Cas d'équilibre du déterminant
Cas 9.1: $\det A = \varepsilon$ (nullité)
Cas 9.2: On a une permutation σ telle que $\det A = \bigotimes_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)} \in \mathbb{S}_{\max}^{\bullet}$ (une diagonale maximale est équilibrée)
Cas 9.3: On a deux permutations σ_1 et σ_2 telles que $\det A = \mathsf{sgn}\sigma_1 \bigotimes_{i=1}^{n} a_{i\sigma_1(i)} \oplus \mathsf{sgn}\sigma_2 \bigotimes_{i=1}^{n} a_{i\sigma_2(i)}$, avec $\bigotimes_{i=1}^{n} a_{i\sigma_1(i)}$ et $\bigotimes_{i=1}^{n} a_{i\sigma_2(i)} \in \mathbb{S}_{\max}^{\vee} \setminus \{\varepsilon\}$ (les poids de deux permutations distinctes de poids maximal σ_1 et σ_2 sont de de signe opposé).

9.1 Cas de nullité du déterminant

D'après le Théorème de Frobenius-König 8.1.1, on peut mettre A sous la forme

$$A = \begin{bmatrix} \varepsilon_{p\times q} & B \\ C & D \end{bmatrix} \ ,$$

où $p + q = n + 1$, $C \in \mathbb{S}_{\max}^{(n-p)\times q}$. On cherche des solutions telles que $x_{q+1..n} = \varepsilon$. On a donc $n - p = q - 1$, et il suffit de résoudre le système $Cy \nabla \varepsilon$ qui a strictement plus d'inconnues que d'équations. Si se système admet un mineur d'ordre $n - p$ non équilibré, on applique le Théorème 6.0.2 et l'on obtient une solution signée non nulle de $Cy \nabla \varepsilon$. Dans le cas contraire, on applique par récurrence le Théorème 9.0.1 à un sous système carré $C'y' \nabla \varepsilon$ obtenu en rendant nulles certaines coordonnées de y.

9.2 Cas d'équilibre d'une permutation de poids maximal

Quitte à permuter les lignes et colonnes de A, on supposera:

$$\det A = \bigotimes_{i=1}^{n} a_{ii} \neq \varepsilon \quad \text{avec } a_{11} \in \mathbb{S}_{\max}^{\bullet}$$

On partitionne:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & A_{1n} \\ A_{n1} & A_{n,n} \end{bmatrix} \quad \text{avec } A_{nn} \in (\mathbb{S}_{\max})^{(n-1)\times(n-1)}, A_{n1} \in (\mathbb{S}_{\max})^{(n-1)\times 1}, A_{1n} \in (\mathbb{S}_{\max})^{1\times(n-1)}.$$

On pose $x_1 = e$, et l'on résout, $A_{nn}X_n \,\nabla\, \ominus A_{n1}$ via le Théorème 8.3.1, avec $X_n \in (\mathbb{S}^{\vee}_{\max})^{n-1}$ et

$$|X_n| \preceq \frac{|A^{\mathrm{adj}}_{nn}A_{n1}|}{|\det A_{nn}|}$$

On remarque que $|A_{1n}X_n| \preceq \frac{|A_{1n}A^{\mathrm{adj}}_{nn}A_{n1}|}{|\det A_{nn}|} \preceq |a_{11}|$, car $|\det A| = |\bigotimes_{i=1}^n a_{ii}| = |a_{11}\det A_{nn} \ominus A_{1n}A^{\mathrm{adj}}_{nn}A_{n1}| \succeq |A_{n1}A^{\mathrm{adj}}_{11}A_{1n}|$, ce qui montre que $A_{1n}X_n \oplus a_{11} \,\nabla\, \varepsilon$. En posant

$$x = \begin{bmatrix} e \\ X_n \end{bmatrix} ,$$

on obtient une solution signée de $Ax \,\nabla\, \varepsilon$.

9.3 Cas d'opposition des signes de deux permutations

Nous nous inspirons ici d'une idée de Gondran & Minoux [47].

9.3.1 Normalisation On suppose que $A_{ii} = e$, avec $\det A = e^\bullet$. Cette hypothèse entraîne que la matrice $|A|$ n'a pas de circuits de poids strictement supérieur à e (sinon, on fabriquerait une permutation de poids supérieur à $\det A = e^\bullet$). Il est clair qu'on peut toujours ce ramener à cette situation, après multiplication éventuelle de A par des matrices de permutation et des matrices diagonales inversibles.

Avec les notations de 9.0.2, on a moyennant cette normalisation $\sigma_1 = \mathrm{Id}$. Nous commençons par un Lemme simplificateur:

9.3.2 Lemme *Soit $A \in (\mathbb{S}_{\max})^{n\times n}$ telle que*

$$(H): \quad \det A = e \oplus \mathsf{sgn}\sigma_2 \bigotimes_{i=1}^{n} a_{i\sigma_2(i)} = e^\bullet$$

avec $\sigma_2 \neq \mathrm{Id}$, et $\bigotimes_{i=1}^n a_{i\sigma_2(i)} \;\not\nabla\; \varepsilon$. Alors, parmi les cycles figurant dans la décomposition de σ_2, il existe un cycle σ d'orbite $C \subset \{1,\ldots,n\}$ tel que:

$$\det A = e^\bullet = e \oplus \mathsf{sgn}\sigma \bigotimes_{j\in C} a_{j\sigma(j)} \quad . \tag{9.3.a}$$

Preuve Décomposons σ_2 en produit de k cycles $c_1,\ldots,c_k$ d'orbites respectives $C_1,\ldots,C_k$. On a $\mathsf{sgn}\sigma_2 = \mathsf{sgn}c_1\circ\ldots\circ c_k = \mathsf{sgn}c_1\mathsf{sgn}c_2\ldots\mathsf{sgn}c_k$, et donc:

$$\mathsf{sgn}\sigma_2 \bigotimes_{i=1}^{n} a_{i\sigma_2(i)} = \bigotimes_{l=1}^{k}(\mathsf{sgn}c_l \bigotimes_{j\in C_l} a_{jc_l(j)}) = \ominus e$$

Comme $|A|$ n'a pas de circuit de poids supérieur à e, chaque terme $u_l = \bigotimes_{j\in C_l} a_{jc_l(j)}$ vérifie $|u_l| \preceq e$. On a en fait $|u_l| = e$ (sinon, comme $\bigotimes_i |u_i| = e$, on aurait l'un des $|u_i|$ tel que $|u_i| \succ e$). Comme le produit des u_i est égal à $\ominus e$, et que d'après ce qui précède, pour tout i, $u_i = e$ ou $u_i = \ominus e$, l'un au moins est égal à $\ominus e$, ce qui montre le Lemme. ∎

9.3.3 Plan L'idée est maintenant de partitionner la matrice A sous la forme

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \tag{9.3.b}$$

où la matrice $A_{11} \in (\mathbb{S}_{\max})^{p\times p}$ correspond à l'orbite du cycle σ, de longueur p, mis en évidence par le lemme ci-dessus. (a): on va trouver par un procédé explicite une solution déséquilibrée à $A_{11}X_1 \nabla \varepsilon$. (b):X_1 étant fixé, on résoudra ensuite $A_{2,1}X_1 \oplus A_{22}X_2$ par application du théorème (8.3.1). (c): Il suffira pour conclure de vérifier que $|A_{1,2}X_2| \preceq |A_{11}X_1|$, ce qui montrera $A_{1,2}X_2 \oplus A_{11}X_1 \nabla \varepsilon$ et achèvera la démonstration.

Soit B une matrice $p \times p$ et c un cycle d'ordre p tels que $B_{ii} = e$ et

$$\det B = e \oplus \mathsf{sgn} c \bigotimes_{i=1}^{p} B_{ic(i)} = e^{\bullet} \ , \tag{9.3.c}$$

tous les $B_{ic(i)}$ étant signés non nuls. On peut écrire

$$B = \mathrm{Id} \oplus C \oplus B' \ ,$$

où

$$C_{ij} = \begin{cases} B_{ij} & \text{si } c(i) = j \\ \varepsilon & \text{sinon,} \end{cases}$$

et où la matrice B' regroupe les autres termes de B.

9.3.4 Lemme *Sous les hypothèses précédentes, on a* $|B|^* = |C|^*$.

Preuve On a $C \preceq B$, donc $|C|^* \preceq |B^*|$. Supposons $|B^*|_{ij} \succ |C|^*_{ij}$. Comme C est un cycle, on a $|C|^*_{ij}|C|^*_{ji} = e$ (i.e. il existe un circuit passant par i et j de poids e) et donc $|B|^*_{ij}|C|^*_{ji} \succ e$. En prenant des chemins réalisant le max dans cette somme, on trouve un circuit de poids supérieur à e, ce qui est absurde. ■

9.3.5 Lemme (solution explicite) *Tous les coefficients de la matrice*

$$M = \mathrm{Id} \ominus C \oplus \ldots \oplus (\ominus C)^{p-1} \tag{9.3.d}$$

sont signés. En outre $BM = (C^*)^{\bullet} \nabla \varepsilon$.

Preuve Le coefficient M_{ij} n'est atteint qu'une seule fois dans la somme (9.3.d), il est donc signé. Comme d'après (9.3.c),

$$\bigotimes_i B_{ic(i)} = \ominus \mathsf{sgn} c \bigotimes_i B_{ii} = \ominus \mathsf{sgn}(c) = (\ominus e)^p \ ,$$

on a $C^p = (\ominus e)^p \mathrm{Id}$. Cela entraîne immédiatement que

$$(\mathrm{Id} \oplus C)M = \mathrm{Id}^{\bullet} \oplus \ldots \oplus (C^{p-1})^{\bullet} = (|C|^*)^{\bullet} \ . \tag{9.3.e}$$

D'autre part, Le Lemme 9.3.4 montre que

$$|BM| = |B||C^*| = |B||B|^* \preceq |C|^* \ . \tag{9.3.f}$$

En additionnant (9.3.e) et (9.3.f), on obtient $BM \preceq (|C|^*)^{\bullet}$. L'autre inégalité est triviale. ■

9.3.6 Conclusion Revenons au corps de la démonstration du Cas 9.3. Il résulte du Lemme 9.3.5 que toute colonne u extraite de la matrice M vérifie $A_{11}u \nabla \varepsilon$. Soit $u = M_{\cdot,i}$ une telle colonne. D'après le Théorème relatif aux systèmes avec second membre, on peut trouver y tel que $A_{21}u \oplus A_{22}y \nabla \varepsilon$, avec

$$|y| = |\det A_{22}y| \preceq |A_{22}^{\mathrm{adj}}A_{21}u| \ . \tag{9.3.g}$$

Il suffit de montrer que $|A_{12}y| \preceq |A_{11}u| = |A_{11}|^*_{\cdot,i}$ (cf. 9.3.5), ce qui, compte tenu de $A_{11}u = (|A_{11}|^*_{\cdot,i})^\bullet$, garantit que $A_{11}u \oplus A_{12}y \nabla \varepsilon$ et donc que $x = [u, y]$ est solution de $Ax \nabla \varepsilon$. Moyennant la normalisation 9.3.1 et le Théorème de Yoeli, on a $|A_{22}^{\mathrm{adj}}| = |A_{22}|^*$. Supposons par l'absurde un indice j tel que

$$|A_{12}y|_j \succ |A_{11}u| = |A_{11}|^*_{j,i} \ .$$

Il résulte alors de (9.3.g) que

$$|A_{12}A_{22}^*A_{21}A_{11}^*|_{ji} \succ |A_{11}u| = |A_{11}|^*_{ji} \ .$$

C'est absurde car le terme à gauche est égal au poids $w_{|A|}(p)$ d'un chemin p de i à j. Compte tenu de $|A_{11}|^*_{ji}|A_{11}|^*_{ij} = e$, on a $w_{|A|}(p)|A_{11}|^*_{ij} \succ e$, et en prenant un chemin p' de j à i réalisant le max dans $|A_{11}|^*_{ij}$, on obtient un circuit de poids strictement supérieur à e. ■

10 Rangs dans $\mathbb{S}_{\max}$

Nous pensons utile de conclure la partie de cette thèse consacrée à la symétrisation en comparant les diverses notions de rang pertinentes dans le dioïde $\mathbb{S}_{\max}$. Dans ce qui suit, nous appellerons *rang à gauche* une application ρ qui à une matrice A associe un entier naturel $\rho(A)$, tel que pour toute matrice U de taille admissible, on ait:

$$\rho(UA) \leq \rho(A) \ . \tag{10.0.a}$$

Un *rang à droite* vérifiera la propriété duale et si ρ est à la fois un rang à gauche et un rang à droite, on le qualifiera de rang bilatère. L'intérêt de la propriété (10.0.a) est de faire du rang à gauche un invariant de la classe de Green à gauche[3] de la matrice A. De manière analogue, le rang bilatère est un invariant des classes Green bilatères.

10.0.1 Définitions et Théorème Soit une matrice A à coefficients dans $\mathbb{S}_{\max}$. On définit:

(i) $\underline{n}$, le *rang trivial droit*: $\underline{n}(A)$ est égal au nombre de lignes non nulles de la matrice A. C'est un rang à droite.

(ii) $\underline{p}$, le *rang trivial gauche*: $\underline{p}(A)$ est égal au nombre de colonnes non nulles de A. C'est un rang à gauche.

(iii) rg, le *rang*, $\mathrm{rg}(A)$ est égal à la taille de la plus grande matrice inversible extraite de A. Il s'agit d'un rang bilatère.

(iv) $\mathrm{rg}_{\mathrm{Schein}}$, le *rang de Schein*: $\mathrm{rg}_{\mathrm{Schein}}(A)$ est égal au plus petit $k \in \mathbb{N}$ tel que $A = BC$, avec $B \in \mathcal{D}^{n\times k}$ et $B \in \mathcal{D}^{k\times p}$. Il s'agit d'un rang bilatère.

[3] On rappelle que la relation de Green à gauche, notée $\mathcal{L}$, est définie par $A\mathcal{L}B$ s'il existe des matrices U et V telles que $A = UB$ et $B = VA$. La relation de Green à droite, $\mathcal{R}$, est définie dualement. La relation de Green bilatère $\mathcal{J}$ est définie par $A\mathcal{J}B$ s'il existe des matrices U, V, S, T telles que $A = UBV$ et $B = SAT$. Ces notations sont standard en théorie des demi-groupes, voir par exemple [60].

(v) rg_{C}, le *rang faible par colonne*: $\mathrm{rg}_{\mathrm{C}}(A)$ est égal à la taille d'une famille génératrice minimale extraite des colonnes de A. Il s'agit d'un rang à gauche.

(vi) rg_{L}, le *rang faible par ligne*, défini dualement.

(vii) rg_{m}, le *rang mineur*: $\mathrm{rg}_{\mathrm{m}}(A)$ est égal à la dimension maximale d'un mineur inversible de A. Il s'agit d'un rang bilatère.

(viii) $\mathrm{rg}_{\mathrm{sc}}$, le *rang symétrisé par colonne*: $\mathrm{rg}_{\mathrm{sc}}(A)$ est égal au cardinal maximal d'un ensemble de colonnes $\{A_{\cdot,i_1},\dots,A_{\cdot,i_k}\}$ tel que $\bigoplus \lambda_j A_{\cdot,i_j} \nabla \varepsilon$ entraîne que l'un des λ_j n'est pas inversible. Il s'agit d'un rang à gauche.

(ix) $\mathrm{rg}_{\mathrm{sl}}$, le *rang symétrisé par ligne*: définition et propriété duales.

(x) $\mathrm{rg}_{\mathrm{CG}}$, le *rang de Cuninghame-Green*[4], défini pour une matrice à coefficients dans $\mathbb{R}_{\max}$. Il est égal à la taille maximale d'une sous matrice carrée B extraite de A telle qu'il existe une unique permutation σ telle que $|\det B| = \bigotimes_i B_{i\sigma(i)} \neq \varepsilon$. C'est un rang bilatère.

En outre, ces rangs vérifient les inégalités portées sur la Figure III.2: un arc relie un rang ρ' (en bas) à un rang ρ (en haut) si pour toute[5] matrice A, on a $\rho(A) \geq \rho'(A)$.

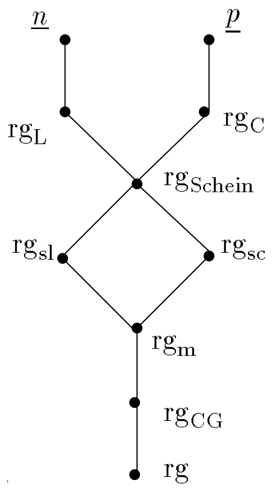

Figure III.2: Rangs dans $\mathbb{S}_{\max}$

Preuve de 10.0.1.
(i),(ii): immédiat.
(iii): Supposons $(AB)_{[I|J]} = C$, avec C inversible et I, J de cardinal égal à $\mathrm{rg}(AB)$. Quitte à ignorer certaines lignes de A et colonnes de B, on peut supposer $A = A_{[I|}$ et $B = B_{|J]}$. On a alors $AB = C$, donc A est inversible à droite, et par 0,2.2.5, il existe une matrice monomiale inversible de taille $\mathrm{rg}(AB)$ extraite de A. On en déduit $\mathrm{rg}(A) \geq \mathrm{rg}(AB)$ et de même $\mathrm{rg}(B) \geq \mathrm{rg}(AB)$ ce qui montre que rg est un rang bilatère.
(iv),(v),(vi): trivial.
(vii): cela résulte de la Formule de Binet-Cauchy.

[4] Ce rang est induit par la notion de "forte indépendance" étudiée dans [24].
[5] pour le rang de Cuninghame-Green, on suppose que A est à coefficients dans $\mathbb{R}_{\max}$

(viii): si l'on a une combinaison linéaire des colonnes de A équilibrée, soit $Ax \nabla \varepsilon$, on a $BAx \nabla \varepsilon$, d'où il résulte de $\mathrm{rg}_{\mathrm{sc}}$ est un rang à gauche. Preuve duale pour (ix).
(x): Soit une sous matrice H extraite de AB et vérifiant la condition (x). On traite le cas où $H = AB$, le cas général se traitant de manière analogue. La condition (x) entraîne $\det AB \notin \mathbb{S}^{\bullet}_{\max}$. Dans Binet-Cauchy,

$$\det AB = \bigoplus_K \det A_{|K]} \det B_{[K|} \oplus T^{\bullet}$$

on a nécessairement $|T| \prec |\det AB|$, et donc il existe K_0 tel que:

$$\det AB = \det A_{|K_0]} \det B_{[K_0|} \ .$$

Posons $A' = A_{|K_0]}$ et $B' = B_{[K_0|}$. Quitte à multiplier à droite et à gauche par des matrices inversibles, on pourra supposer $B'_{ii} = e$ pour tout i et $\det B' = e = \bigotimes_i B'_{ii}$, et de même pour A'. Supposons qu'il existe une permutation $\sigma \neq \mathrm{Id}$ telle que $\det B' = \bigotimes_i B'_{i\sigma(i)}$. La permutation σ est de poids $e = \det A'B'$ pour la matrice $A'B'$, la permutation Id également, ce qui contredirait (x) pour $A'B'$. On a donc $\mathrm{rg}_{\mathrm{CG}}(AB) \leq \mathrm{rg}_{\mathrm{CG}}(B') \leq \mathrm{rg}_{\mathrm{CG}}(B)$, et de même $\mathrm{rg}_{\mathrm{CG}}(AB) \leq \mathrm{rg}_{\mathrm{CG}}(A)$, ce qui montre que $\mathrm{rg}_{\mathrm{CG}}$ est un rang bilatère.
Les inégalités de la Figure III.2 s'obtiennent aisément. ∎

10.0.2 Remarque La notion de rang symétrisé (par ligne ou par colonne) définie ci-dessus revient à étendre à $\mathbb{S}_{\max}$ la notion suivante de dépendance linéaire introduite par Gondran et Minoux (cf. [47, 49]):

$$\{u_i\} i \in I \text{ dépendante} \Leftrightarrow \exists J, K \subset I, \lambda \in \mathbb{R}^n_{\max} \setminus \{\varepsilon\},\ \ J \cap K = \emptyset \text{ et } \bigoplus_{j \in J} \lambda_j u_j = \bigoplus_{k \in K} \lambda_k u_k \ .$$