Chapitre IV

Résultats supplémentaires de théorie spectrale des matrices

Introduction

Ce chapitre généralise les résultats de théorie spectrale des matrices irréductibles $(\max, +)$ établis dans [23] aux matrices non irréductibles. On caractérise complètement le spectre de ces matrices. Les preuves reposent sur le remplacement de la notion de valeur propre par celles de sous et de sur-valeurs propres (vérifiant $Au \preceq \lambda u$ ou $Au \succeq \lambda u$ au lieu de l'égalité). Nous donnons enfin une application de ces techniques à l'estimation du rayon spectral usuel. Soit $\rho(A)$ le le rayon spectral usuel d'une matrice carrée de taille n à coefficients positifs ou nuls et $\rho_{\max,\times}(A)$ le rayon spectral dans le demi-corps idempotent $\mathbb{R}^+_{\max,\times}$. Nous montrons les inégalités

$$\rho_{\max,\times}(A) \leq \rho(A) \leq n\rho_{\max,\times}(A) \ . \tag{0.0.a}$$

Ces bornes ne sont cependant pas originales: $\rho_{\max,\times}(A)$ est par ailleurs caractérisé comme la moyenne géométrique maximale des circuits de la matrice A. Friedland [39] a montré ces mêmes inégalités à partir de certaines propriétés des puissances de A pour le produit de Hadamard faisant intervenir cette moyenne géométrique.

1 Préliminaires

Nous rappelons d'abord quelques notions classiques.

1.1 Graphe associé à une matrice

1.1.1 Définition *On appelle graphe associé à la matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}_{\max}$ le graphe $\mathsf{G}(A)$ formé d'un ensemble $S = \{1, \dots, n\}$ de sommets et des arcs $(j, i) \in S^2$ tels que $a_{ij} \neq \varepsilon$.*

1.1.2 Remarque Noter l'inversion entre (j, i) et a_{ij} dans la définition du graphe. Sans cette inversion, il faudrait étudier les vecteurs propres à gauche, comme dans la littérature sur les chaînes de Markov.

1.1.3 Exemple Voir Figure IV.1. On a représenté le coefficient a_{ij} sur l'arc $j \mapsto i$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon \\ e & 3 \end{bmatrix}$$

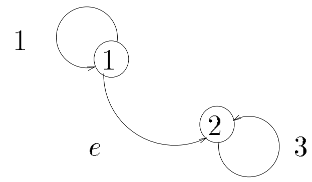


Figure IV.1: Une matrice et son graphe

1.1.4 Exemple Cf. Figure IV.2.

$$A = \begin{bmatrix} \varepsilon & 2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 4 & \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & 3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon & 3 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 4 & \varepsilon & \varepsilon & 3 & \varepsilon \end{bmatrix}$$

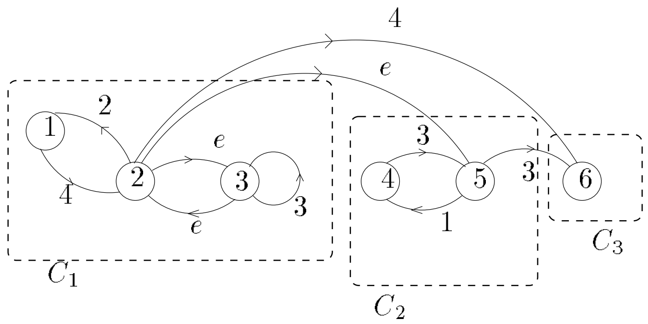


Figure IV.2: Une matrice et son graphe

Si $a_{ij} \neq \varepsilon$, on dit que j *communique avec* i, ce que l'on note $j \to i$. Etant donné un ensemble de sommets $I \subset S$, on définit l'ensemble $\Gamma(I)$ des successeurs de I comme suit :

$$\Gamma(I) = \{j \in S \mid \exists i \in I \quad i \to j\}$$

On notera $\xrightarrow{*}$ la clôture transitive réflexive de la relation $\to$. On aura donc $i \xrightarrow{*} j$ si et seulement si il existe dans le graphe un chemin allant de i à j (chemin éventuellement trivial si $j = i$).

On notera $\Gamma^* = \mathrm{Id} \cup \Gamma \cup \Gamma^2 \cup \ldots$ On a clairement

$$\Gamma^*(I) = \{j \in S \mid \exists i \in I \quad i \xrightarrow{*} j\} \ .$$

1.1.5 Définition (Ensemble clos) . *On dit qu'un ensemble $K \subset S$ est* clos *si $\Gamma(K) \subset K$.*

On a $\Gamma(K) \subset K$ si et seulement si $\Gamma^*(K) = K$, comme il résulte d'une vérification élémentaire.

1.2 Classes

1.2.1 Définition *On définit une relation d'équivalence sur S par :*

$$i\mathcal{R}j \Leftrightarrow i \xrightarrow{*} j \text{ et } j \xrightarrow{*} i \ .$$

Les classes d'équivalence pour $\mathcal{R}$ seront appelées classes *(de connexité) ou encore composantes fortement connexes du graphe.*

On notera $\mathcal{C} = (C_1, \ldots, C_p)$ l'ensemble des classes. La relation $\xrightarrow{*}$ induit une relation d'ordre entre les classes, définie comme suit

$$C_i \preceq C_j \ \Leftrightarrow C_i \xrightarrow{*} C_j \ .$$

On constate que

$$\Gamma^*(C_k) = \{C_i \in \mathcal{C} \mid C_k \xrightarrow{*} C_i\}$$

est *le filtre principal*[1] engendré par C_k pour l'ordre $\xrightarrow{*}$ (i.e. l'ensemble des classes supérieure à à C_k). On dira que la classe C_k est *finale* si elle est maximale pour l'ordre $\xrightarrow{*}$. On dira enfin que A est *irréductible* s'il y a une seule classe ($p = 1$). Un ensemble clos est clairement une union de classes. Nous noterons $\bar{K}$ le quotient de K par la relation $\mathcal{R}$, i.e. l'ensemble des classes contenues dans K. Nous dirons qu'un ensemble clos K est *principal* si K est de la forme $\Gamma^*(C_k)$. Il y a donc précisément p ensembles clos principaux (autant qu'il y a de classes). L'intérêt des ensembles clos principaux est qu'un ensemble clos quelconque se décompose comme union de tels ensembles. Posons en effet

$$\mathsf{Min}\, \bar{K} = \{C_i \in \bar{K} \mid \ C_j \xrightarrow{*} C_i \Rightarrow C_j = C_i\} \ , \tag{1.2.a}$$

soit l'ensemble des classes minimales dans K.

1.2.2 Proposition *Pour tout ensemble clos K, on a*

$$K = \bigcup_{C_i \in \mathsf{Min}\, \bar{K}} \Gamma^*(C_i) \ .$$

En outre, cette écriture est l'unique décomposition non redondante (i.e. telle qu'on ne puisse ôter aucun terme) de K en union d'ensemble clos principaux.

1.2.3 Exemple Pour la matrice de la Figure IV.2, on a trois classes:

$$C_1 = \{1, 2, 3\}, \ \ C_2 = \{4, 5\}, \ \ C_3 = \{6\},$$

la dernière étant seule finale. $\{C_1, C_2, C_3\} = \Gamma^*(C_1)$ est un ensemble clos principal, tout comme le sont $\{C_2, C_3\} = \Gamma^*(C_2)$ et $C_3 = \Gamma^*(C_3)$. Il résulte de 1.2.2 que ce sont les seuls ensembles clos. On a représenté sur la Figure IV.3 le graphe de la matrice et l'ensemble des classes associées, ordonnées par $\xrightarrow{*}$.

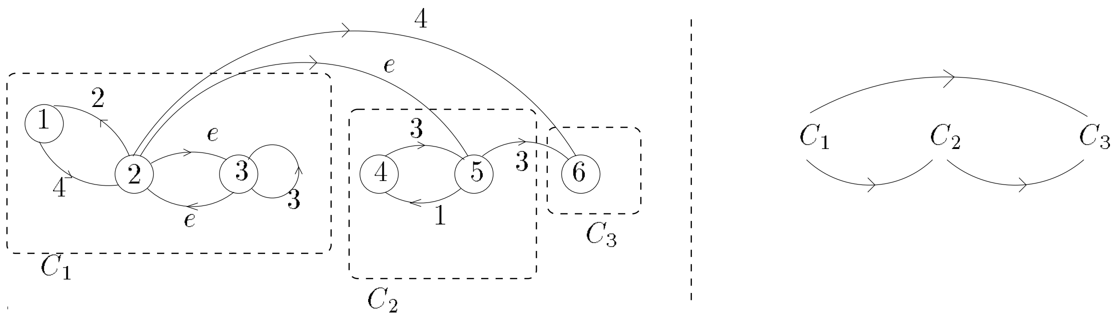


Figure IV.3: Graphe et classes de la matrice IV.2

[1]terminologie empruntée aux treillis, voir à ce propos la Définition 2.1.4 du chapitre préliminaire

1.3 Rappels de théorie spectrale des matrices irréductibles

Nous rappelons ici les résultats de Cohen, Dubois, Quadrat et Viot [17]. Nous donnons une preuve essentiellement équivalente à celle de [17], à ceci près que les résultats sont exprimés en termes de sous et de sur-valeurs propres, ce qui nous permettra de les généraliser aux matrices réductibles, et qui servira d'autre part pour le problème d'optimisation des ressources. On étudie les valeurs propres et vecteurs propres de la matrice A, i.e. les vecteurs $u \in \mathbb{R}_{\max}^n \backslash \{\varepsilon\}$ et scalaires $\lambda \in \mathbb{R}_{\max}$ tels que

$$Au = \lambda u \ . \tag{1.3.a}$$

Le résultat suivant constitue l'analogue dans l'algèbre $(\max, +)$ du classique théorème de Perron-Frobenius, qui affirme que le rayon spectral d'une matrice irréductible à coefficients dans $\mathbb{R}^+$ est sa seule valeur propre dans $\mathbb{R}^+$.

1.3.1 Théorème *(Gondran, Minoux [46]) Une matrice $A \in (\mathbb{R}_{\max})^{n\times n}$ irréductible admet une unique valeur propre, notée $\rho(A)$, donnée par*

$$\rho(A) = \bigoplus_{k=1}^{n} (\mathrm{tr}\ A^k)^{1/k} \ . \tag{1.3.b}$$

La quantité $\rho(A)$ définie en (1.3.b) mérite quelques remarques[2]. Tout d'abord, en termes de circuits du graphe, $\rho(A)$ se réécrit:

$$\rho(A) = \bigoplus_{c} w(c)^{\frac{1}{l(c)}} \tag{1.3.c}$$

où le *poids* $w_A(c)$ d'un circuit $(i_1, \ldots, i_k)$ de *longueur* $l(c) = k$ est défini par

$$w_A(c) = A_{i_1 i_2} A_{i_2 i_3} \ldots A_{i_k i_1} \ . \tag{1.3.d}$$

$\rho(A)$ s'interprète donc comme le poids moyen maximum des circuits du graphe.

1.3.2 Exemple Pour la matrice A donnée en 1.1.4, on a

$$\rho(A) = 3 \ .$$

On a les propriétés suivantes:

$$\rho_{\max,\times}(\alpha.A) = \alpha.\rho_{\max,\times}(A) \qquad \text{pour tout scalaire,} \tag{1.3.e}$$

$$\rho_{\max,\times}\left(Q^{-1}AQ\right) = \rho_{\max,\times}(A) \quad \text{pour toute matrice } Q \text{ inversible.} \tag{1.3.f}$$

La propriété (1.3.e) est évidente. On obtient (1.3.f) en le vérifiant pour les matrices diagonales inversibles et pour les matrices de permutation qui engendrent le groupe linéaire. En fait, on a un résultat un peu plus précis:

1.3.3 Lemme *Pour toute matrice Q inversible, pour tout $k \in \mathbb{N}$, les ensembles des poids des circuits de longueur k pour les matrices A et $Q^{-1}AQ$ sont identiques.*

[2]Nous renvoyons à Lawler [61], Karp [54] ainsi qu'à Gondran et Minoux [48] (annexe) pour les algorithmes de calcul de $\rho(A)$. Voir aussi l'implémentation de l'algorithme de Karp au 2.2.2 du Chapitre VIII

Preuve Si Q est une matrice de permutation, les circuits de $Q^{-1}AQ$ se déduisent de ceux de A par renumérotation des sommets, et le résultat est clair. Si Q est une matrice diagonale inversible, on a pour $c = (i_1, \ldots, i_k)$, avec la convention $i_{k+1} = i_1$,

$$w_{Q^{-1}AQ}(c) = \bigotimes_{1 \le r \le k} Q^{-1}_{i_r i_r} A_{i_r i_{r+1}} Q_{i_{r+1} i_{r+1}} = \bigotimes_{1 \le r \le k} A_{i_r i_{r+1}} = w_A(c) \ .$$

■

Nous attaquons maintenant la preuve de 1.3.1. D'abord, une remarque structurelle élémentaire.

1.3.4 Définition *On appelle support d'un vecteur u l'ensemble suivant:*

$$\mathrm{supp}(u) = \{i \mid \ u_i \neq \varepsilon\} \ .$$

1.3.5 Lemme *Si u est vecteur propre, alors* $\mathrm{supp}(u)$ *est un ensemble clos.*

Preuve Si $j \in \mathrm{supp}(u)$, on a pour $i \in \Gamma(\{j\})$, $\varepsilon \prec a_{ij} u_j \preceq u_i \lambda$. Si $\lambda = \varepsilon$, on en déduit $\Gamma(\{j\}) = \emptyset$ et le résultat est trivial. Sinon, on a $u_i \neq \varepsilon$, d'où $i \in \mathrm{supp}(u)$, ce qui montre que $\Gamma(\mathrm{supp}(u)) \subset \mathrm{supp}(u)$. ■

On en déduit alors:

1.3.6 Corollaire *Si A est irréductible, un vecteur propre u a toutes ses composantes différentes de ε (i.e.* $\mathrm{supp}(u) = \{1, \ldots, n\}$*).*

Rappelons un fait bien connu à propos de $\rho(A)$.

1.3.7 Lemme *La matrice A^* est finie*[3] *si et seulement si $\rho(A) \preceq e$.*

Preuve du Lemme 1.3.7. Via 0,4.2.7, on peut décomposer A^*_{ij} comme somme de termes de la forme $p_{ij} c_1^{\alpha_1} \ldots c_k^{\alpha_k}$ où p_{ij} est un chemin élémentaire de j à i et les c_{ij} sont des circuits élémentaires. Si $\rho(A) \preceq e$, le poids des circuits $c_1, \ldots, c_k$ est majoré par e, d'où il résulte que le sup dans l'expression $A^*_{ij} = (\mathrm{Id} \oplus A \oplus \ldots \oplus A^n \oplus \ldots)_{ij}$ est atteint pour des chemins élémentaires. On a donc que $A^* = \mathrm{Id} \oplus \ldots \oplus A^{n-1}$ est fini. Réciproquement, si l'on a un circuit c tel que $w(c) \succ e$, on a supposant que c est de longueur k et que c passe par i, on peut écrire:

$$(A^*)_{ii} \succeq A^{lk}_{ii} \succeq (w(c))^l \to +\infty$$

lorsque $t \to +\infty$, d'où il résulte que $(A^*)_{ii} = +\infty$. ■

1.3.8 Lemme ("sur-valeur propre") *Soit $A \in (\mathbb{R}_{\max})^{n \times n}$ irréductible, $\lambda \in \mathbb{R}_{\max}$ et $\rho(A)$ défini comme en (1.3.b). Les deux assertions suivantes sont équivalentes:*

(i) *Il existe $u \in \mathbb{R}^n_{\max} \setminus \{\varepsilon\}$ tel que $Au \preceq \lambda u$,*

(ii) $\rho(A) \preceq \lambda$.

Le vecteur u associé sera qualifié de "sous-vecteur propre".

1.3.9 Lemme ("sous-valeur propre") *Soit $A \in (\mathbb{R}_{\max})^{n \times n}$, $\lambda \in \mathbb{R}_{\max}$ et $\rho(A)$ défini comme en (1.3.b). Les deux assertions suivantes sont équivalentes:*

[3] i.e. tous ses coefficients sont finis ou égaux à ε

(i) *Il existe* $u \in \mathbb{R}^n_{\max} \setminus \{\varepsilon\}$ *tel que* $Au \succeq \lambda u$,

(ii) $\rho(A) \succeq \lambda$.

Le vecteur u sera qualifié de sur-vecteur propre. Le procédé suivant permet de construire des sous-vecteurs propres.

1.3.10 Notation (Matrices A_λ, $\tilde{A}$) Soit λ un scalaire non nul. On définit $A_\lambda = \lambda^{-1}A$. Lorsque $\rho(A)$ n'est pas nul, on pose $\tilde{A} = A_{\rho(A)} = (\rho(A))^{-1}A$.

1.3.11 Lemme *Si $\lambda \succeq \rho(A)$, alors toute colonne non nulle de la matrice $(A_\lambda)^*$ est sous-vecteur propre pour λ. En particulier, tout colonne non nulle de $\tilde{A}^*$ est sous-vecteur propre pour $\rho(A)$.*

Preuve On a par homogénéité $\rho(A_\lambda) = \lambda^{-1}\rho(A)$. La convergence de la matrice $(A_\lambda)^*$ résulte du Lemme 1.3.7. L'assertion découle de l'observation suivante:

$$A_\lambda(A_\lambda)^* = (A_\lambda)^+ = \bigoplus_{n\geq 1}(A_\lambda)^n \preceq (A_\lambda)^* \ . \tag{1.3.g}$$

■

Preuve du Lemme 1.3.8. (i)⇒(ii). On peut écrire:

$$\forall k, \quad A^k u \preceq \lambda^k u,$$

d'où

$$\forall i, k \quad A^k_{ii} u_i \preceq \lambda^k u_i$$

et comme tous les u_i sont non nuls (via 1.3.6), on a en simplifiant

$$\forall i, k \ \ (A^k_{ii})^{\frac{1}{k}} \preceq \lambda, \tag{1.3.h}$$

soit en sommant:

$$\rho(A) = \bigoplus_{k=1}^{n}(\mathrm{tr}A^k)^{\frac{1}{k}} = \bigoplus_{i=1}^{n}(A^k_{ii})^{\frac{1}{k}} \preceq \lambda \ . \tag{1.3.i}$$

(ii)⇒(i) Réciproquement, le Lemme 1.3.11 garantit l'existence d'un sous vecteur propre lorsque $\lambda \neq \varepsilon$. Si $\lambda = \varepsilon$, on a $\rho(A) = \varepsilon$, la matrice A est sans circuits, donc nilpotente. Soit p le plus grand p tel que $A^p \neq \varepsilon$. On aura $Au \preceq \varepsilon u$ en prenant u égal à une colonne non nulle de (A^p). Cela montre le Lemme 1.3.8 ■

Preuve du Lemme 1.3.9. (i)⇒(ii). Choisissant $u_i \neq 0$:

$$\lambda u_i \preceq (Au)_i = A_{i,i_2}u_{i_2} \tag{1.3.j}$$

pour un certain i_2 réalisant le max dans $(Au)_i$. En appliquant le même argument à i_2, et en continuant de même, on obtient une suite $\{i_p\}_{p\geq 1}$ à valeurs dans $\{1,\ldots,n\}$, et donc on a des indices q et $k \leq n$ tels que $i_{q+k} = i_q$. On peut supposer $q = i$. On a alors:

$$\lambda u_i \preceq [A \otimes u]_i = A_{i,i_2}u_{i_2}, \quad \lambda u_{i_2} \preceq A_{i_2,i_3}u_{i_3}, \quad \ldots \quad \lambda u_{i_k} \preceq A_{i_k,i}u_i, \tag{1.3.k}$$

ce qui, après des substitutions répétées, donne:

$$\lambda^k u_i \preceq A_{i,i_2}A_{i_2,i_3}\ldots A_{i_k,i}u_i \ . \tag{1.3.l}$$

Comme $u_i \neq 0$, la moyenne géométrique du circuit $(i, i_2, \ldots, i_k)$ est minorée par λ, d'où $\lambda \preceq \rho(A)$.

(ii)⇒(i). Supposons tout d'abord $\rho(A) \neq \varepsilon$, et introduisons la notation suivante:

1.3.12 Notation (Graphe critique) Les circuits réalisent le max dans (1.3.c) sont qualifiés de *critiques*. On appelle *graphe critique*, noté $\mathsf{GC}(A)$, le sous graphe de $\mathsf{G}(A)$ formé des sommets et arêtes appartenant à un circuit critique. On notera $\mathcal{C}^c = (C_1^c, \ldots, C_q^c)$ l'ensemble des q composantes fortement connexes du graphe critique.

Soit i un indice appartenant à un circuit critique de A. Ce circuit a un poids e pour la matrice $\tilde{A}$. On a alors $(\tilde{A})^+_{ii} = e$, et donc les colonnes

$$(\tilde{A}^*)_{\cdot,i} = \bigoplus_{n\geq 0} (\tilde{A}^n)_{\cdot,i}, \quad (\tilde{A}^+)_{\cdot,i} = \bigoplus_{n\geq 1} (\tilde{A}^n)_{\cdot,i},$$

qui ne diffèrent éventuellement que sur la diagonale en raison du premier terme de la somme ($\tilde{A}^0 = \mathrm{Id}$) sont égales. Il résulte de

$$\tilde{A}(\tilde{A}^*)_{\cdot,i} = (\tilde{A}^+)_{\cdot,i} = (\tilde{A}^*)_{\cdot,i}$$

que le vecteur $u = (\tilde{A}^*)_{\cdot,i}$ est vecteur propre de A. Le cas $\rho(A) = \varepsilon$ se traite de manière analogue à 1.3.8,(ii)$\Rightarrow$(i). Cela achève la preuve du Lemme 1.3.9. Le Théorème 1.3.1 résulte immédiatement des Lemmes 1.3.8 et 1.3.9. ∎

Le résultat suivant, du à Gondran et Minoux [45, 46] (cf. aussi Cuninghame-Green [24] et Cohen, Dubois, Quadrat et Viot [23]) caractérise totalement le moduloïde des vecteurs propres de A.

1.3.13 Théorème *Soit $A \in (\mathbb{R}_{\max})^{n\times n}$ irréductible. Choisissons $i_1 \in C_1^c, \ldots, i_q \in C_q^c$. La famille formée des colonnes suivantes de $\tilde{A}^+$:*

$$\{\tilde{A}^+_{\cdot,i_1}, \ldots, \tilde{A}^+_{\cdot,i_q}\}$$

est une famille génératrice minimale du moduloïde propre de A pour la valeur propre $\rho(A)$.

C'est ce genre de résultat qu'il s'agissait de généraliser aux matrices réductibles.

2 Théorie spectrale des matrices réductibles

2.1 Préliminaires

2.1.1 Notation Etant donnés deux ensembles d'indices I et J, on notera $A_{[I|J]}$ la matrice extraite de A formée des lignes d'indice $i \in I$ et des colonnes d'indice $j \in J$, et $u_{[I|}$ le vecteur formé des coefficients d'indice $i \in I$ de u.

On rappelle que toute matrice non irréductible B peut s'écrire sous la forme:

$$B = P^{-1}AP, \quad \text{avec} \quad A = \begin{bmatrix} A_{[C_1|C_1]} & \varepsilon & \cdots & \varepsilon \\ * & A_{[C_2|C_2]} & \cdots & \varepsilon \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ * & \cdots & * & A_{[C_p|C_p]} \end{bmatrix} \tag{2.1.a}$$

où P est une matrice de permutation, la matrice A est une matrice bloc triangulaire, les blocs étant associés aux classes de A.

2.2 Etude du spectre

2.2.1 Proposition *Soit u un vecteur propre de A pour la valeur propre λ. On a pour toute classe minimale dans* $\operatorname{supp} u$*, soit $C_i \in \mathsf{Min}\,\overline{\operatorname{supp} u}$ (cf. (1.2.a)), $\lambda = \rho(A_{[C_i|C_i]})$.*

Preuve Si la classe C_i n'a pas de successeur, l'équation $Au = \lambda u$ se projette en

$$A_{[C_i|C_i]} u_{[C_i|} = \lambda u_{[C_i|}.$$

La conclusion résulte du Théorème dans le cas irréductible (Théorème 1.3.1) appliqué à $A_{[C_i|C_i]}$. ■

2.2.2 Notation Dans la suite, nous noterons plus simplement $\rho(C_i)$ pour $\rho(A_{[C_i|C_i]})$.

On traite séparément le cas de la valeur propre nulle, qui est élémentaire.

2.2.3 Proposition *ε est valeur propre si et seulement si il existe des classes C_i sans successeur réduites à un sommet, avec $A_{[C_i|C_i]} = \varepsilon$.*

Preuve Soit $C_i = \{r\}$ et u^i le vecteur tel que $u^i_r = e$ et $u^i_k = \varepsilon$ sinon. Comme $\{r\}$ est sans successeur, $Au^i = \varepsilon$. Réciproquement, soit u un vecteur propre pour la valeur propre ε. On tire de $uA = \varepsilon$ que tous les $r \in \operatorname{supp}(u)$ sont sans successeurs. ■

La preuve de la Proposition 2.2.3 montre en sus que les u^i forment une famille génératrice minimale du moduloïde propre pour la valeur propre nulle.

2.2.4 Théorème *Soit K un ensemble clos. Les deux assertions suivantes sont équivalentes:*

(i) *Il existe un vecteur propre de support K*

(ii) *Pour tout $C_i \in \mathsf{Min}\,\bar{K}$, on a $\rho(C_i) = \bigoplus_{C_k \in \bar{K}} \rho(C_k)$.*

Preuve (ii) $\Rightarrow$ (i). Le cas $\rho(C_i) = \varepsilon$ résultant immédiatement de 2.2.3, nous supposerons $\rho(C_i) \neq \varepsilon$. On forme la matrice $\tilde{A} = \rho(C_i)^{-1} A_{[K|K]}$. Par 1.3.7, $\tilde{A}^+$ converge. On a

$$\tilde{A}\tilde{A}^*_{\cdot,i} = \tilde{A}^+_{\cdot,i},$$

qui diffère de $\tilde{A}^*_{\cdot,i}$ seulement peut-être par le coefficient $\tilde{A}^*_{i,i} = e$. Si i appartient à un circuit critique de $A_{[K|K]}$, on a $\tilde{A}^+_{i,i} = e$, ce qui montre que la colonne $\tilde{A}^+_{\cdot,i} = \tilde{A}^*_{\cdot,i}$ est vecteur propre de $\tilde{A}$ pour la valeur propre e. Définissons le vecteur v_i de taille n comme suit:

$$(v_i)_k = \begin{cases} \tilde{A}^+_{k,i} & \text{si } k \in K \\ \varepsilon & \text{sinon,} \end{cases} \tag{2.2.a}$$

(on complète une colonne de $\tilde{A}^+$ par des ε). Le vecteur v_i est vecteur propre de A pour la valeur propre $\rho(C_i)$.

(i) $\Rightarrow$ (ii). Il résulte de la Proposition 2.2.1 que $\lambda = \rho(C_i)$ ne dépend pas de la classe $C_i \in \mathsf{Min}\,\overline{\operatorname{supp}(u)}$. Nous supposerons $\lambda \neq \varepsilon$, l'autre cas étant trivial. On a alors, pour toute classe $C_k \notin \mathsf{Min}\,\overline{\operatorname{supp}(u)}$

$$\bigoplus_{j \neq k} A_{[C_k|C_j]} u_{[C_j|} \oplus A_{[C_k|C_k]} u_{[C_k|} = \rho(C_i) u_{[C_k]},$$

donc

$$A_{[C_k|C_k]}u_{|C_k]} \preceq \rho(C_i)u_{|C_k]}$$

et par application du lemme 1.3.8:

$$\rho(C_k) \preceq \rho(C_i) \ .$$

■

2.2.5 Corollaire *L'ensemble* $\mathrm{spec}(A)$ *des valeurs propres de* A *est caractérisé par la condition suivante:*

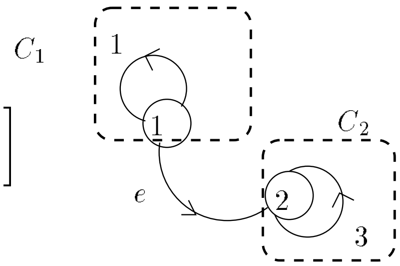
$$\lambda \in \mathrm{spec}(A) \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \rho(C_i) \text{ et } \ \forall C_j \subset \Gamma^*(C_i), \ \ \rho(C_j) \preceq \rho(C_i) \ . \tag{2.2.b}$$

Une classe C_i de rayon spectral maximal (i.e. $\rho(C_i) = \rho(A)$) vérifie trivialement la condition (2.2.b), ce qui montre que $\rho(A)$ est toujours valeur propre. Les classes finales vérifient aussi cette condition (il n'y a pas de successeurs autres que la classe elle même). En outre, le nombre de valeurs propres est borné supérieurement par p (i.e. le nombre de classes), ce qui est cohérent avec l'unicité de la valeur propre dans le cas irréductible (une seule classe, $p = 1$).

2.2.6 Exemple On a représenté la matrice A de la Figure IV.1 et sa transposée sur la Figure IV.4. On a pour A deux classes $C_1 = \{1\}$, $C_2 = \{2\}$, avec $C_2 \subset \Gamma^*(C_1)$. Le support de u étant clos, on a $\mathrm{supp}u = \{1, 2\}$ ou $\mathrm{supp}u = \{2\}$. Comme $\rho(C_1) = 1 \not\succeq \rho(C_2)$, la condition du théorème 2.2.4 est violée pour $K = \{1, 2\}$. On a donc l'unique valeur propre $\rho(C_2) = 3$ associée à un vecteur propre de support $\{2\}$. Par contre, cette condition est vérifiée pour A^{T}, et donc $\mathrm{spec}A^{\mathrm{T}} = \{\rho(C_1), \rho(C_2)\} = \{1, 3\}$. pour unique valeur propre. Contrairement au cas usuel, on a ici:

$$\mathrm{spec}A \neq \mathrm{spec}A^{\mathrm{T}} \ .$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon \\ e & 3 \end{bmatrix}$$

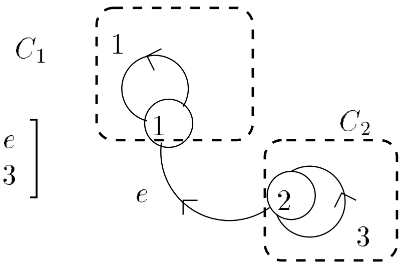


$C_2 \subset \Gamma^*(C_1)$, $\rho(C_2) \not\preceq \rho(C_1)$

une seule valeur propre $\lambda = \rho(C_2) = 3$

vecteur propre associé $\begin{bmatrix} \varepsilon \\ e \end{bmatrix}$

$$A^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & e \\ \varepsilon & 3 \end{bmatrix}$$



$C_1 \subset \Gamma^*(C_2)$ et $\rho(C_1) \preceq \rho(C_2)$

deux valeurs propres $\rho(C_1) = 1$, $\rho(C_2) = 3$

vecteurs propres respectifs $\begin{bmatrix} e \\ \varepsilon \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ e \end{bmatrix}$

Figure IV.4: Condition de placement des valeurs propres

2.2.7 Exemple Pour la matrice A de l'exemple 1.1.4, on a

$$\rho(A[123|123]) = 3, \quad \rho(A[45|45]) = 2, \quad \rho(A[6|6]) = \varepsilon \ .$$

A l'ensemble clos $\Gamma^*(C_1)$ (cf. 1.2.3) est associée la valeur propre $\rho(C_1) = 3$, à $\Gamma^*(C_2)$ la valeur propre $\rho(C_2) = 2$, et à $\Gamma^*(C_3)$ la valeur propre $\rho(C_3) = \varepsilon$. On a donc

$$\mathrm{spec}(a) = \{3, 2, \varepsilon\} \ .$$

2.3 Vecteurs propres des matrices réductibles

Etant donnée une valeur propre λ, on notera $\mathcal{K}(\lambda)$ l'ensemble des classes C_i vérifiant la condition (2.2.b). On appellera graphe critique GC_λ pour la valeur propre λ l'union de tous les graphes critiques des $C_i \in \mathcal{K}(\lambda)$. Pour chaque classe $C_k \in \mathcal{K}(\lambda)$, on note $C_1^c, \ldots, C_{r_k}^c$ les r_k composantes fortement connexes du graphe critique de C_k. A chaque C_k on associe une famille de vecteurs $\mathcal{W}(C_k)$ définie comme suit. On choisit un indice dans chaque composante connexe du graphe critique, soit

$$i_1 \in C_1^c, \ldots, i_{r_k} \in C_{r_k}^c \quad .$$

On pose $K = \Gamma^*(\mathcal{K}(\lambda))$, $\tilde{A} = \lambda^{-1} A_{[K|K]}$ et l'on définit les vecteurs $v_{i_1}^k, \ldots, v_{i_{r_k}}^k$ comme dans la première partie de la preuve du Théorème 2.2.4 (cf. (2.2.a)), i.e.

$$(v_{i_l}^k)_m = \begin{cases} \tilde{A}^+_{m i_l} & \text{si } m \in K \\ \varepsilon & \text{sinon.} \end{cases} \tag{2.3.a}$$

On pose

$$\mathcal{W}(C_k) = \{v_{i_1}^k, \ldots, v_{i_{r_k}}^k\}, \quad \mathcal{V}(\lambda) = \bigcup_{C_k \in \mathcal{K}(\lambda)} \mathcal{W}(C_k) \quad . \tag{2.3.b}$$

Le lemme suivant montre que la famille $\mathcal{W}(C_k)$ ne dépend essentiellement pas du choix des indices $i_1, \ldots, i_{r_k}$.

2.3.1 Lemme *Si i_s et i_t appartiennent à la même composante fortement connexe du graphe critique, alors les vecteurs $v_{i_s}^k$ et $v_{i_t}^k$ sont proportionnels.*

Preuve Montrons que les deux colonnes $\tilde{A}^+_{\cdot,i_s}$ et $\tilde{A}^+_{\cdot,i_t}$ sont proportionnelles. Comme i_s et i_t appartiennent à la même composante fortement connexe du graphe critique, on a $\tilde{A}^+_{i_t i_s} \tilde{A}^+_{i_s i_t} = e$, et donc, pour tout r:

$$\begin{aligned} \tilde{A}^+_{r,i_s} &\succeq \tilde{A}^+_{r,i_t} \tilde{A}^+_{i_t i_s} \\ &\succeq \tilde{A}^+_{r,i_s} \tilde{A}^+_{i_s,i_t} \tilde{A}^+_{i_t,i_s} \\ &\succeq \tilde{A}^+_{r,i_s} \end{aligned}$$

d'où l'on conclut que

$$\tilde{A}^+_{\cdot,i_s} = \tilde{A}^+_{\cdot,i_t} \tilde{A}^+_{i_t,i_s} \quad .$$

∎

2.3.2 Proposition *La famille $\mathcal{V}(\lambda)$ définie en (2.3.b) est non redondante (cf. 0,3.2.1).*

Preuve Comme le rang faible est minoré par le rang mineur, il suffit de voir que cette famille est de rang mineur maximal. Nous montrons que le déterminant extrait de la matrice $\{v_{i_\ell}^k\}_{k,\ell}$ correspondant aux lignes et colonnes d'indices i_ℓ, pour $1 \leq \ell \leq r_k$ et $C_k \in \mathcal{K}(\lambda)$, est non équilibré. Comme ce déterminant est bloc-triangulaire, il suffit de montrer que le déterminant de chaque bloc (correspondant à une valeur de k donnée) est non équilibré. Il faut donc voir que:

$$\det \tilde{A}^+_{[i_1 \ldots i_{r_k} | i_1 \ldots i_{r_k}]} \;\not\nabla\; \varepsilon \quad . \tag{2.3.c}$$

Tout les circuits de la matrice $\tilde{A}^+_{[C_k|C_k]}$ étant de poids inférieur à e, il s'ensuit que pour toute permutation σ de $\{i_1 \ldots i_{r_k}\}$, $\prod_s \tilde{A}^+_{s\sigma(s)} \preceq e$ (décomposer σ en produit de cycles). En outre, l'égalité est atteinte seulement pour la permutation identité (sinon, le poids d'un cycle non trivial serait égal à e, contredisant le fait que i_s et i_t appartiennent à des composantes fortement connexes différentes du graphe critique). Ainsi, le déterminant (2.3.c) est égal à e, et n'est donc pas équilibré. ∎

2.3.3 Remarque Le non équilibre du déterminant dans la preuve ci-dessus montre non seulement qu'aucun vecteur de la famille $\mathcal{V}(\lambda)$ n'est combinaison linéaire des autres, mais aussi que cette famille est indépendante au sens des combinaisons linéaires symétrisées.

2.3.4 Théorème *La famille $\mathcal{V}(\lambda)$ forme une famille génératrice minimale du moduloïde propre pour la valeur propre λ.*

Preuve Quitte à se restreindre à la sous matrice correspondant à $\Gamma^*(\mathcal{K}(\lambda))$, on peut supposer que $\rho(A) = \lambda$. On prétend qu'un vecteur propre u pour la valeur propre λ vérifie

$$u = \tilde{A}^+ u = \bigoplus_{k\in\mathcal{K}(\lambda),\, j_s\in G^c(\lambda)} v^k_{j_s} u_{j_s} \tag{2.3.d}$$

ce qui montrera que la famille est génératrice, et donnera le résultat par 2.3.2. On a, comme les $v^k_{j_s}$ correspondent à des colonnes de $\tilde{A}^+$:

$$\tilde{A}^+ u = \bigoplus_k \tilde{A}^+_{\cdot,k} u_k \succeq \bigoplus_{k\in\mathcal{K}(\lambda),\, j_s\in G^c(\lambda)} v^k_{j_s} u_{j_s} \ . \tag{2.3.e}$$

On a d'autre part en choisissant des indices réalisant le max dans $u = \tilde{A}u$:

$$\begin{aligned} u_i &= \tilde{A}_{ii_2} u_{i_2} \\ u_{i_2} &= \tilde{A}_{i_2 i_3} u_{i_3} \quad \dots \end{aligned}$$

En poursuivant de la sorte, on finit par obtenir un indice i_k appartenant à un circuit c tel que $w_{\tilde{A}}(c) = e$, i.e. un circuit critique. On a alors:

$$\tilde{A}^+_{r,i} u_i = \tilde{A}_{ri}\tilde{A}_{ii_2}\dots\tilde{A}_{i_{k-1}i_k} u_{i_k} \preceq \tilde{A}^+_{ri_k} u_{i_k}$$

ce qui montre l'inégalité opposée à (2.3.e). ∎

Avant de traiter des exemples, nous rappelons deux formules (cf. 0,4.2.6) qui nous permettront de calculer les étoiles de matrices de la forme (2.1.a).

$$\begin{bmatrix} A & \varepsilon \\ B & D \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} A^* & \varepsilon \\ D^*BA^* & D^* \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} A & \varepsilon \\ B & D \end{bmatrix}^+ = \begin{bmatrix} A^+ & \varepsilon \\ D^*BA^* & D^+ \end{bmatrix} .$$

2.3.5 Exemple Revenons à la matrice A de l'exemple 1.1.4. On a noté en 1.3.2 que $\rho(A) = 3$. Pour $\Gamma^*(C_1)$, on a:

$$\tilde{A} = \rho(A)^{-1}A = \begin{bmatrix} \varepsilon & -1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 1 & \varepsilon & -3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & -3 & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -2 & \varepsilon \\ \varepsilon & -3 & \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon \end{bmatrix}$$

Après calcul:

$$\tilde{A}^+ = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -4 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 1 & 0 & -3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ -2 & -3 & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ -4 & -5 & -8 & -2 & -2 & \varepsilon \\ -2 & -3 & -6 & 0 & -2 & \varepsilon \\ 2 & 1 & -2 & 0 & 0 & \varepsilon \end{bmatrix}$$

Le graphe critique est réduit aux deux composantes fortement connexes $\{1,2\}$ et $\{3\}$, ce qui donne la famile génératrice minimale du moduloïde propre pour la valeur propre 3, formée des deux vecteurs suivants:

$$v_1^1 = \tilde{A}^+_{\cdot,1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ -4 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad v_2^1 = \tilde{A}^+_{\cdot,1} = \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \\ 0 \\ -8 \\ -6 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Pour le second ensemble clos $\Gamma^*(C_2)$,

$$A' = A_{[456|456]} = \begin{bmatrix} \varepsilon & 1 & \varepsilon \\ 3 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon \end{bmatrix}$$

On a $\rho(a') = 2$ et

$$\tilde{A}' = \rho(A')^{-1}A' = \begin{bmatrix} \varepsilon & -1 & \varepsilon \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 & \varepsilon \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A}'^+ = \begin{bmatrix} 0 & -1 & \varepsilon \\ 1 & 0 & \varepsilon \\ 2 & 1 & \varepsilon \end{bmatrix} .$$

Il y a une seule composante fortement connexe du graphe critique, donc une famille génératrice minimale pour le moduloïde propre réduite au vecteur suivant:

$$v_1^2 = [\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \tilde{A}'^+_{1,\cdot}] = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Enfin, associé à la valeur propre nulle, on a le vecteur propre suivant:

$$v_1^3 = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ 0 \end{bmatrix} .$$

2.3.6 Exemple Soit la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 0 & 0 & 4 & \varepsilon \\ \varepsilon & 6 & \varepsilon & \varepsilon \\ 0 & \varepsilon & \varepsilon & 4 \end{bmatrix} \tag{2.3.f}$$

On a trois classes $C_1 = \{1\}, \rho(C_1) = 1$, $C_2 = \{2, 3, \}, \rho(C_2) = 5$, $C_3 = \{4\}, \rho(C_3) = 4$. En outre, $C_1 \xrightarrow{*} C_2$ et $C_1 \xrightarrow{*} C_3$, ce qui donne le graphe représenté sur la Figure IV.5. Il résulte de 2.2.4 que

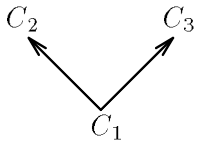


Figure IV.5: Classes de la matrice (2.3.f)

seules $\rho(C_2)$ et $\rho(C_3)$ sont valeurs propres, associées aux ensembles clos respectifs $C_2 = \Gamma^*(C_2)$ et $C_3 = \Gamma^*(C_3)$. On a

$$\tilde{A}' = \rho(C_2)^{-1} A_{[C_2|C_2]} = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 1 & \varepsilon \end{bmatrix},$$

$$(\tilde{A}')^+ = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 6 & \varepsilon \end{bmatrix},$$

soit le vecteur propre

$$v_1^2 = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ 0 \\ 1 \\ \varepsilon \end{bmatrix} .$$

Semblablement,

$$v_1^3 = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ 0 \end{bmatrix}$$

est vecteur propre pour $\rho(C_3) = 4$.

3 Lien avec le rayon spectral usuel

3.1 Rayon spectral usuel et $(\max, \times)$

3.1.1 Notation (demi-corps $\mathbb{R}^+_{\max,\times}$)
Dans cette section, nous considérons l'ensemble $\mathbb{R}^+$ équippé du max et du produit usuel. On obtient de la sorte un demi-corps idempotent, que nous noterons $\mathbb{R}^+_{\max,\times}$. On a l'isomorphisme $\mathbb{R}^+_{\max,\times} \to \mathbb{R}_{\max}$, $x \mapsto \log x$. Nous noterons $\rho_{\max,\times}(A)$ le rayon spectral d'une matrice A dans $\mathbb{R}^+_{\max,\times}$. Le rayon spectral $\rho_{\max,\times}(A)$ est caractérisé par la formule (1.3.b), qui se réécrit ici:

$$\rho_{\max,\times}(A) = \max_{1 \le k \le n} \max_{i_1,\dots,i_k} \sqrt[k]{A_{i_1,i_2} A_{i_2,i_3} \dots A_{i_k,i_1}} \ . \tag{3.1.a}$$

Ainsi, $\rho_{\max,\times}(A)$ est égal à la moyenne géométrique maximale des circuits de A, au sens de l'algèbre usuelle. Nous noterons

$$A \otimes B : \quad (A \otimes B)_{ij} = \bigoplus_k A_{ik} \otimes B_{kj} = \max_k (A_{ik} B_{kj})$$

le produit de matrice dans $\mathbb{R}^+_{\max,\times}$.

3.1.2 Notation (Rayon spectral usuel) Dans cette section, nous noterons $\rho(A)$ le rayon spectral usuel de A (i.e. le module de la plus grande valeur propre de A).

On a l'encadrement suivant du rayon spectral usuel en fonction du rayon spectral $(\max, \times)$:

3.1.3 Théorème *Soit A une matrice $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{R}^+$. On a:*

$$\rho_{\max,\times}(A) \leq \rho(A) \leq n\rho_{\max,\times}(A) \ . \tag{3.1.b}$$

Preuve Si A admet les composantes irréductibles $A_1, \ldots, A_k$, on a

$$\rho(A) = \max_i \rho(A_i) \quad \text{et} \quad \rho_{\max,\times}(A) = \max_i \rho_{\max,\times}(A_i) \ .$$

Il suffit donc de prouver le résultat pour une matrice irréductible. D'après un résultat classique de la Théorie de Perron-Frobenius, $\rho(A)$ est une valeur propre de A, et le vecteur propre u associé a ses composantes positives. La démonstration se résume aux deux inégalités suivantes,

$$A \otimes u \leq Au = \rho(A)u \leq nA \otimes u \ , \tag{3.1.c}$$

soit

$$\forall i, \ \max_k A_{ik}u_k \leq \sum_k A_{ik}u_k \leq n \max_k A_{ik}u_k$$

qui résultent de la positivité de A et de u: Le Théorème 3.1.3 s'obtient en appliquant les Lemmes 1.3.9 et 1.3.8 aux matrices A et nA respectivement, avec λ égal au rayon spectral usuel et $\rho_{\max,\times}$ à la place de ρ. ■

Les conditions d'égalité pour les bornes sont assez naturelles.

3.1.4 Proposition *la borne inférieure est atteinte dans le Théorème 3.1.3 ssi l'une des composantes irréductibles de A, disons de taille k, est égale au produit DC d'une matrice diagonale D telle que $\prod_{j=1}^k D_{j,j} = (\rho(A))^k$ avec une matrice C associée à un cycle d'ordre k.*

Notons J_n la matrice $n \times n$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. On a:

3.1.5 Proposition *La borne supérieure est atteinte dans le Théorème 3.1.3 ssi A est sans cycle, ou bien si A est de la forme*

$$A = \alpha D J_n D^{-1} \ , \tag{3.1.d}$$

où D est une matrice de permutation à coefficients diagonaux positifs et α un scalaire positif.

Preuve de la Proposition 3.1.4. Quitte à remplacer A par l'une de ses composantes irréductibles de rayon spectral maximal, on peut supposer A irréductible. Soit c un circuit critique de longueur k. Après réordonnement éventuel des colonnes, on peut supposer $c = (1, 2, \ldots, k)$. La sous-matrice A' de taille $k \times k$ définie pas $A'_{1,2} = A_{1,2}, \ldots, A'_{k,1} = A_{k,1}$ et $A'_{i,j} = 0$ sinon s'écrit clairement sous la forme DC, où D est diagonale, de coefficients diagonaux $A_{1,2}, \ldots, A_{k,1}$ et C est la matrice associée au cycle c. Comme c est critique, $\rho_{\max,\times}(A)^k = w(c) = \prod_i D_{ii}$. Si l'on a des coefficients non nuls autres que ceux de c dans les k premières lignes de A, on obtient des inégalités strictes à gauche de (3.1.c), ainsi qu'en (1.3.h) pour i appartenant au circuit critique, et donc en (1.3.i). Ainsi, les k premières lignes de A se réduisent à la composante irréductible DC. ■

Preuve de la Proposition 3.1.5. Le cas où A est sans circuits est immédiat, et nous supposerons $\rho_{\max,\times}(A) \neq 0$. Il suffit de considérer le cas d'une matrice A irréductible, sinon, on appliquerait

3.1.3 à l'une des composantes irréductibles de A et l'on obtiendrait un facteur meilleur que n. En introduisant la matrice diagonale $D = \mathrm{diag}(u_1, \dots, u_n)$, on obtient à partir de (3.1.c):

$$D^{-1}ADe_n = n\rho_{\max,\times}(A).e_n \leq (nD^{-1}AD) \otimes e_n \tag{3.1.e}$$

où e_n dénote le vecteur dont les n coefficients sont égaux à 1. Quitte à remplacer A par

$$A' = \rho_{\max,\times}(A)^{-1}D^{-1}AD \ ,$$

on supposera $\rho_{\max,\times}(A) = 1$ et $\rho(A) = n$, A ayant e_n pour vecteur propre. Nous montrons par récurrence sur n la propriété suivante:

$$A \in (\mathbb{R}^+)^{n\times n}, \quad Ae_n \geq ne_n \quad \text{et} \quad \rho_{\max,\times}(A) \leq 1 \quad \Rightarrow A = J_n \ . \tag{3.1.f}$$

On a d'après (1.3.l):

$$n^k \leq (nA)_{i,i_2} \dots (nA)_{i_k,i} \leq \rho_{\max,\times}(nA)^k \leq n^k \ .$$

On a donc forcément l'égalité dans 1.3.j), i.e.

$$n = n(e_n)_i \leq (Ae_n)_i \leq (nA \otimes e_n)_i = n \ ,$$

ce qui n'est possible que si $A_{i,1} = A_{i,2} = \dots = A_{i,n} = 1$. On a également $A_{l,i} = A_{l,i}A_{i,l} \leq \rho_{\max,\times}(A)^2 \leq 1$, et donc:

$$A(i|i)e_{n-1} = A(i|e_n - A(i|i].1 \geq (n-1)e_{n-1} \ .$$

Comme trivialement, $\rho_{\max,\times}(A(i|i)) \leq \rho_{\max,\times}(A) \leq 1$, on applique l'hypothèse de récurrence à $A(i|i)$, d'où $A(i|i) = J_{n-1}$, ce qui avec $Ae_n = ne_n$ entraîne $A_{l,i} = 1$ pour tout $l \neq i$. Cela montre $A = J_n$. ■

3.1.6 Remarque On peut caractériser les matrices de la forme $A = \alpha DJD^{-1}$ par la propriété suivante: *pour tout circuit c de longueur k, on a*

$$w_A(c) = \alpha^k \ . \tag{3.1.g}$$

Le Lemme 1.3.3 montre en effet que αDJD^{-1} satisfait (3.1.g). Réciproquement, supposons (3.1.g) et considérons $A' = \alpha^{-1}D^{-1}AD$ où $D = \mathrm{diag}(A_{1,1}, \dots A_{n,1})$. On $w_{A'}(c) = e$ pour tout circuit c. Comme par construction $A'_{i1} = e$ pour tout i, on tire de $A'_{i1}A'_{1i} = w(1i) = e$ $A'_{1i} = e$. Ainsi, la première colonne et la première ligne de A' ne sont formées que de 1. La conclusion résulte d'une récurrence immédiate.

3.1.7 Remarque En définissant la matrice $|A|$: $(|A|)_{ij} = |A_{ij}|$, et de même $(|u|)_i = |u_i|$, on obtient la borne $\rho(A) \leq n\rho_{\max,\times}(|A|)$ pour une matrice quelconque à coefficients complexes. On écrit en effet $|\lambda u| \preceq |A||u| \preceq n|A| \otimes |u|$ et l'on applique le Lemme 1.3.9.

3.1.8 Exemple Soit la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \eta \\ \eta^{-1} & 0 \end{bmatrix} \ .$$

On est dans le cas d'égalité de la Proposition 3.1.4. Comme le seul circuit de $\mathsf{G}(A)$ est $(1,2)$, on a $\rho_{\max,\times}(A) = \sqrt{(}A_{1,2}A_{2,1}) = \sqrt{(}\eta\eta^{-1}) = 1$. D'autre part, $\rho(A) = 1$. Pour η petit, la borne $\rho_{\max,\times}(A)$ est meilleure que les bornes plus classiques:

$$\|A\|_\infty = \|A\|_2 = \eta^{-1}, \quad \|A\|_1 = \eta + \eta^{-1} \ .$$

3.1.9 Exemple Soit la matrice

$$A = \begin{bmatrix} i & -\eta \\ \eta^{-1} & i \end{bmatrix}$$

($i^2 = -1$). On a $w_A(1) = w_A(2) = i$ et $w_A(1,2) = -1 = i^2$, et donc A vérifie la condition de la Remarque 3.1.6. Ainsi, $\rho_{\max,\times}(|A|) = 1$. La borne $\rho(A) = n\rho_{\max,\times}(|A|)$ est atteinte, puisque la valeur propre de module maximal de A est $2i$.

3.2 Applications

On retrouve de la sorte un résultat de Friedland [39] (voir aussi Elsner, Johnson et Dias da Silva's [33]). Rappelons que le produit de Hadamard de deux matrices est défini par: $(A \odot B)_{i,j} = A_{i,j}B_{i,j}$. On notera $A^{\odot k}$ le produit $A \odot A \odot \ldots \odot A$ (k-fois). En observant que $\rho_{\max,\times}(A^{\odot k}) = (\rho_{\max,\times}(A))^k$ et en appliquant le Théorème 3.1.3, on obtient

$$\rho_{\max,\times}(A)^k = \rho_{\max,\times}(A^{\odot k}) \leq \rho(A^{\odot k}) \leq n\rho_{\max,\times}(A^{\odot k}) = n\rho_{\max,\times}(A)^k \ ,$$

et donc

$$\lim_{k\to\infty} \rho(A^{\odot k})^{\frac{1}{k}} = \rho_{\max,\times}(A),$$

ce qui n'est autre que le Théorème 1 de Friedland [39].

On peut donner une autre application à l'estimation asymptotique du rayon spectral de certaines matrices. Ventcel [93] considère des matrices de Markov dont les coefficients non-diagonaux sont de la forme

$$(A_\epsilon)_{i,j} = \exp(-a_{i,j}/\epsilon^2) \ , \tag{3.2.a}$$

où ϵ est un petit paramètre et $a_{i,j} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Nous considérons ici le cas où les coefficients diagonaux sont aussi de la forme (3.2.a). Notons $\asymp$ l'équivalence logarithmique, i.e. $u \asymp v \Leftrightarrow \log u \simeq \log v$. En posant $a = (a_{i,j})$ où $a_{i,j} = -\log A_{i,j}$ et en introduisant

$$\rho_{\min,+}(a) = -\log \rho_{\max,\times}(A) \ , \tag{3.2.b}$$

notation justifiée par le fait que $\rho_{\min,+}(a)$ est égal au rayon spectral de a dans le demi-corps $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \min, +))$, on obtient:

3.2.1 Corollaire *On a $\rho(A_\epsilon) \asymp \exp(-\rho_{\min,+}(a)/\epsilon^2)$ pour $\epsilon \to 0^+$.*

Preuve On applique le Théorème 3.1.3 et la Formule (3.2.b) à A. ∎

3.2.2 Remarque (cas symétrique) Notons que dans le cas symétrique, $\rho(A)$ se calcule trivialement:

$$\rho_{\max,\times}(A) = \max_{i,j} A_{i,j} \ . \tag{3.2.c}$$

On observe en effet que le max est atteint dans (3.1.a) pour des poids de la forme A_{ii} ou $(A_{ij}A_{ji})^{\frac{1}{2}} = A_{ij}$).