Partie B

Théorie des Systèmes

Chapitre V

Systèmes dynamiques linéaires sur un dioïde

Introduction

Ici commence la partie relative à la "Théorie des Systèmes" proprement dite. On donne tout d'abord des exemples de systèmes simples linéaires sur certaines structures de dioïdes déjà étudiés. On établit ensuite des résultats de représentation pour ces systèmes. On montre qu'un système linéaire continu se représente par un opérateur à noyau. Dans le cas stationnaire, cet opérateur se réduit à un opérateur de convolution par la réponse impulsionnelle. On caractérise la causalité de manière naturelle. On montre que le rôle de la transformée de Laplace pour les systèmes classiques est ici joué par une transformée de type Fenchel (ou conjugaison convexe). On met en évidence une notion de fonction de transfert, qui représente physiquement le gain du système. Les développements de ce chapitre correspondent essentiellement aux deux papiers publiés en commun avec G.Cohen, R. Nikoukhah, J.P. Quadrat et M. Plus [19, 81]. Le lecteur trouvera des résultats analogues de représentation des endomorphismes continus de moduloïdes, établis antérieurement par Dudnikov et Samborskiĭ[31, 89]. On trouvera par ailleurs des idées analogues chez Maslov [67]. Les résultats de Dudnikov et Samborskiĭ sont équivalents à notre Théorème 3.1.2.

1 Exemples

1.1 Un système continu et son analogue discret

Considérons le système mono-entrée mono-sortie $\mathcal{S} : u \mapsto y$ représenté à gauche de la Figure V.1. Un fluide circule à travers un long tuyau vers un premier réservoir (vide à la date 0). L'entrée $u(t)$ représente la quantité *cumulée* de liquide entrée dans le tuyau jusqu'à l'instant t (la fonction $t \mapsto u(t)$ est donc croissante, et l'on a $u(t) = 0$ pour $t \leq 0$). Le liquide met un temps t à parcourir le tuyau. Le liquide passe du premier au second réservoir à travers une ouverture qui limite le débit instantané à la valeur maximale de $\beta > 0$. On note $y(t)$ le volume de fluide dans le second réservoir à l'instant t. On a une quantité initiale $y(0) = c$.

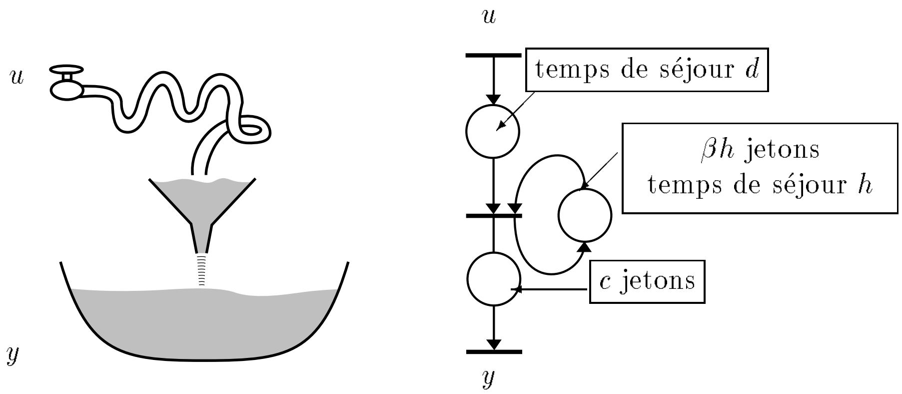

Figure V.1: Système continu et analogue discret

1.2 Equations dynamiques

Le débit d'entrée dans le second réservoir étant limité à β, on a:

$$\forall t, \forall \theta \geq 0, \quad y(t+\theta) \leq y(t) + \beta\theta \ . \tag{1.2.a}$$

D'autre part,

$$\forall t, \quad y(t) \leq u(t-d) + c \ . \tag{1.2.b}$$

Il en résulte immédiatement que $\forall t$ et $\forall \theta \geq 0$,

$$y(t) \leq y(t-\theta) + \beta\theta \leq u(t-d-\theta) + c + \beta\theta \ ,$$

d'où pour tout t,

$$y(t) \leq \inf_{\theta \geq 0}[u(t-d-\theta) + c + \beta\theta] = \inf_{\tau \geq d}[u(t-\tau) + c + \beta(\tau - d)] \ . \tag{1.2.c}$$

Posons

$$k(t) = \begin{cases} +\infty & \text{pour } t \leq d \ ; \\ c + \beta(t-d) & \text{sinon.} \end{cases} \tag{1.2.d}$$

et définissons $\overline{y}$ par:

$$\overline{y}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{\tau \in \mathbb{R}}[u(t-\tau) + k(\tau)] \ . \tag{1.2.e}$$

Toute sortie y vérifie $y \leq \overline{y}$. En outre:

$$\begin{aligned} \overline{y}(t+\theta) &= \inf_{\tau \in \mathbb{R}}[u(t+\theta-\tau) + k(\tau)] \\ &= \inf_{s \in \mathbb{R}}[u(t-s) + k(s+\theta)] \\ &\leq \inf_{s \in \mathbb{R}}[u(t-s) + k(s)] + \beta\theta \\ &= \overline{y}(t) + \beta\theta \ . \end{aligned}$$

d'où il résulte que $\overline{y}$ est la solution maximale de (1.2.a). C'est cette solution $\overline{y}$ qui décrira le comportement physique du système si l'on suppose que le liquide s'écoule aussi rapidement que possible. On a ainsi montré que la sortie au plus tôt du système est représentée par une *inf-convolution* de l'entrée avec la fonction k. De cela, il résulte immédiatement que le système $u \mapsto \mathcal{S}(u)$ est $(\min, +)$ linéaire, i.e. vérifie les deux propriétés suivantes:

$$\begin{array}{lll} \text{min-superposition} & \forall u, u' \in \overline{\mathbb{R}}^{\mathbb{R}} & \mathcal{S}(\min(u,v)) = \min(\mathcal{S}(u), \mathcal{S}(v)) \\ \text{invariance additive} & \forall \lambda \in \overline{\mathbb{R}} & \mathcal{S}(\lambda + u) = \lambda + \mathcal{S}(u). \end{array}$$

1.2.1 Remarque On peut voir le calcul qui précède comme la résolution (en fait le calcul de la solution maximale) de l'équation fonctionnelle $(\min, +)$:

$$y(t) = \min(\inf_{\theta \geq 0}[y(t-\theta) + \beta\theta], u(t-d) + c) \ .$$

1.3 Analogue discret

On peut voir le système précédent comme la version continue d'un système à événements discrets. Considérons la version discrétisée suivante de $\mathcal{S}$:

$$\mathcal{S}_h : \sup y \text{ t.q. } \begin{cases} y(t+h) - y(t) \leq \beta h \ , \\ y(t) \leq c + u(t-d) \ , \end{cases} \tag{1.3.a}$$

où le temps varie dans $h\mathbb{Z}$. La solution maximale de (1.3.a) vérifie clairement la récurrence suivante:

$$\overline{y}(t) = \min(\overline{y}(t-h) + \beta h, c + u(t-d)) \ . \tag{1.3.b}$$

Si c et βh sont entiers, (1.3.b) n'est autre que l'équation dynamique du graphe d'événements temporisé à droite de la Figure V.1. Un tel graphe correspondrait par exemple au système de production suivant: les pièces rentrent dans un atelier, au bout d'un temps de préparation de d unités de temps, on les place dans un stock en attente devant un groupe de βh machines identiques travaillant en parallèle. Chaque pièce reste h unités de temps sur une machine.

On montre en raisonnant comme précédemment que la sortie est donnée par l'inf-convolution discrète:

$$\forall t \in h\mathbb{Z}, \quad \overline{y}(t) = \inf_{\tau \in h\mathbb{Z}}[k(\tau) + u(t-\tau)] \tag{1.3.c}$$

où la fonction k est la même que dans le cas continu.

1.4 Mélangeur

Soient maintenant deux systèmes du type de celui de la Figure V.1, le premier traitant du liquide de couleur rouge, le second du liquide blanc, et un mélangeur produisant du rose à partir de ces deux liquides en proportions égales. Soient u_{r} la quantité cumulée de rouge entrée jusqu'à l'instant t, u_{b} idem pour le blanc. Si le mélange est instantané, la quantité de rose produit est

$$y(t) = \min(u_{\mathrm{r}}(t), u_{\mathrm{b}}(t)) \ .$$

Le système $(u_{\mathrm{r}}, u_{\mathrm{b}}) \mapsto y$ est clairement $(\min, +)$-linéaire. L'analogue discret du mélange est l'opération d'assemblage de deux types de pièces. Dans le langage des graphes d'événements temporisés, on la représenterait par une transition confluente, soit le dessin de la Figure V.2:

1.5 Exemple de système $(\max, +)$ linéaire

Nous reprenons l'exemple du limitateur de débit, mais au lieu d'introduire les quantités cumulées $u(t)$ et $y(t)$, nous définissons les deux fonctions suivantes, dites fonctions dateur:

$$u(n) = \text{“première date où la quantité cumulée de liquide entré est au moins égale à } n\text{”} \tag{1.5.a}$$

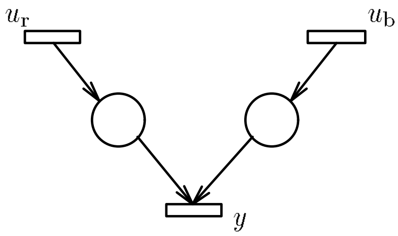

Figure V.2: Mélangeur

La fonction $n \mapsto y(n)$ est définie de manière analogue pour les quantités sorties. Pour simplifier l'exposé, nous supposons la quantité cumulée entrée croissante (ce qui revient à interdire de retirer du liquide dans les réservoir d'entrée). La fonction u définie par (1.5.a) est alors croissante. En raisonnant comme en §1.1, on obtient l'inéquation suivante

$$y(n) \geq \sup_{\nu \geq 0}[\beta^{-1}\nu + u(t-\nu)] \ . \tag{1.5.b}$$

Si l'on suppose que le liquide s'écoule au plus tôt, la sortie du système est donnée par:

$$\overline{y}(n) = \sup_{\nu \geq 0}[\beta^{-1}\nu + u(t-\nu)] = \sup_{\nu \in \mathbb{R}}[k(\nu) + u(t-\nu)] \ , \tag{1.5.c}$$

où la fonction k est donnée par

$$k(\nu) = \begin{cases} \beta^{-1}\nu & \text{si } \nu \geq 0 \\ -\infty & \text{si } \nu < 0. \end{cases} \tag{1.5.d}$$

La fonction $\mathcal{S}$ qui à la fonction dateur d'entrée u associe la fonction dateur au plus tôt de la sortie vérifie les deux propriétés suivantes:

max-superposition	$\forall u, u' \in \overline{\mathbb{R}}^{\mathbb{R}}$	$\mathcal{S}(\max(u,v)) = \max(\mathcal{S}(u), \mathcal{S}(v))$
invariance additive	$\forall \lambda \in \overline{\mathbb{R}}$	$\mathcal{S}(\lambda + u) = \lambda + \mathcal{S}(u)$.

Le système $\mathcal{S}$ peut donc être qualifié de $(\max, +)$-linéaire.

2 Systèmes linéaires

Nous donnons maintenant une théorie générale couvrant en particulier les systèmes décrits en §1.

2.0.1 Définition (Signaux) *Soit $\mathcal{D}$ un dioïde. On appelle* ensemble de signaux *un sous-moduloïde Σ de $\mathcal{D}^{\mathbb{R}}$ (cf. 0,3.1.1).*

Un signal est donc une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{D}$. L'ensemble Σ est tel que la somme de deux signaux soit un signal, et le produit d'un signal par un scalaire soit un signal.

2.0.2 Exemple L'ensemble des applications croissantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_{\max}$ est un ensemble de signaux.

2.0.3 Définition (Système linéaire) *On appelle* système linéaire *une application $\mathcal{S} \in \mathsf{L}(\Sigma)$ (cf. 0,3.1.4).*

La somme et le produit de systèmes correspondent respectivement à la mise en parallèle et à la mise en série. On notera

$$\mathcal{S}u := \mathcal{S}(u) \tag{2.0.a}$$

de sorte que quand on écrit $\mathcal{S}u(t)$, il faut comprendre la valeur de la sortie à l'instant t, soit $(\mathcal{S}(u))(t)$. Un système linéaire vérifie donc les propriétés caractéristiques suivantes:

(i) Pour toutes entrées $u, v \in \Sigma$, on a $\mathcal{S}(u \oplus v) = \mathcal{S}u \oplus \mathcal{S}v$

(ii) Pour toute entrée $u \in \Sigma$ et pour tout scalaire $\lambda \in \mathcal{S}$, on a $\mathcal{S}\lambda u = \lambda \mathcal{S}u$.

La propriété (i) n'est autre que le "principe de superposition" classique.

2.0.4 Remarque Σ, équipé de la loi externe $\mathsf{L}(\Sigma) \times \Sigma \to \Sigma, (\mathcal{S}, u) \mapsto \mathcal{S}(u)$, est un $\mathsf{L}(\Sigma)$ moduloïde, ce qui justifie la notation (2.0.a).

2.0.5 Définition (Continuité) *Le système $\mathcal{S}$ est dit continu s'il préserve les bornes-sup (cf. 0,2.3.1).*

Dans la suite, nous supposerons l'ensemble Σ des signaux admissibles complet, de sorte qu'un système continu est caractérisé par la propriété suivante: pour toute famille de signaux admissibles $\{u_i\}_{i \in I} \in \Sigma^I$, on a

$$\mathcal{S} \oint_{i \in I} u_i = \oint_{i \in I} \mathcal{S}u_i \quad . \tag{2.0.b}$$

On notera $\mathcal{L}(\Sigma)$ le dioïde complet des systèmes linéaires continus sur $\mathcal{D}$, en conformité avec 0,3.1.4.

A titre de curiosité, nous exhibons un système linéaire non continu.

2.0.6 Contre exemple Soit le système linéaire sur le dioïde $\overline{\mathbb{R}}_{\min}$:

$$\overline{\mathbb{R}}_{\min}^{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}_{\min}^{\mathbb{R}}, \quad u \mapsto \mathcal{S}u : \quad \mathcal{S}u(t) = \liminf_{s \to t} u(s) \quad .$$

Ce système vérifie (i) et (ii), il n'est cependant pas continu. Posons en effet

$$u_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \ ; \\ -nt & \text{si } 0 < t < \frac{1}{n} \ ; \\ -1 & \text{si } \frac{1}{n} \leq t \ . \end{cases}$$

On a pour tout tout $n \geq 1, \mathcal{S}u_n(0) = 0$, et

$$\oint_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} u_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \ ; \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi, $\mathcal{S} \oint_n u_n(0) = -1 \neq \oint_n \mathcal{S}u_n(0) = 0$.

Dans la suite, nous considérerons exclusivement des systèmes continus

2.0.7 Mise en Feedback On considère le système représenté sur la Figure V.3,(iii). On peut écrire:

$$y = \mathcal{S}_1 x, \quad x = u \oplus \mathcal{S}_2 y \tag{2.0.c}$$

Dans le cas des graphes d'événements temporisés, on a vu qu'à une certaine entrée peuvent correspondre plusieurs comportements du système, et l'on a considéré uniquement le comportement au

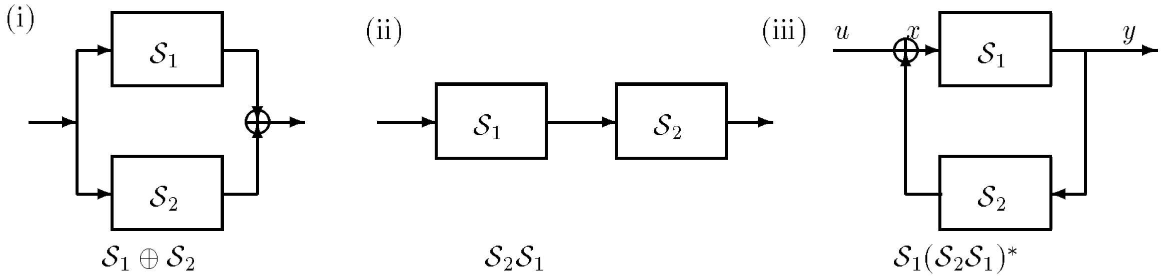

Figure V.3: Mise en parallèle, série, feedback

plus tôt. C'est pourquoi nous appelons mise en feedback de $\mathcal{S}_2$ et $\mathcal{S}_1$ le système associant à u le *plus petit* y vérifiant (2.0.c). On a en substituant x

$$y = \mathcal{S}_1\mathcal{S}_2 y \oplus \mathcal{S}_1 u$$

et en appliquant 0,4.1.2, on trouve la solution minimale:

$$y = (\mathcal{S}_1\mathcal{S}_2)^*\mathcal{S}_1 u \ .$$

Le système résultant est donc linéaire continu.

2.1 Systèmes élémentaires (min,+) linéaires

Nous étudions maintenant les systèmes élémentaires linéaires sur le dioïde $\overline{\mathbb{R}}_{\min}$. Nous considérons trois ensembles de signaux:

1/ $\overline{\mathbb{R}}_{\min}^{\mathbb{R}}$, moduloïde complet des signaux à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_{\min}$,

2/ $\mathsf{Croiss}(\mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}}_{\min})$, sous-moduloïde complet des signaux croissants.

3/ $\mathsf{Croiss.scs}(\mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}}_{\min})$, sous-moduloïde complet[1] des signaux croissants semi-continus supérieurement.

2.1.1 Stock γ^c Il s'agit du système γ^c défini par:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \gamma^c u(t) := c \otimes u(t) \ (= c + u(t)) \ . \tag{2.1.a}$$

L'interprétation de l'opérateur γ^c est claire au vu des exemples précédents: un stock initial de c unités (mètres cubes dans un réservoir, nombres de places de stocks dans un atelier) induit un décalage sur les quantités en entrée et en sortie. La notation γ^c est justifiée si l'on remarque que $\gamma^c\gamma^{c'} = \gamma^{c+c'}$. En particulier, $\gamma^0 = \mathrm{Id}$ et on notera $\gamma := \gamma^1$. On a en outre

$$(\gamma^c \oplus \gamma^{c'})u(t) = \min(\gamma^c u(t), \gamma^{c'} u(t)) = \min(c + u(t), c' + u(t)) = \min(c, c') + u(t) = \gamma^{\min(c,c')} u(t)$$

d'où la règle essentielle:

$$\gamma^c \oplus \gamma^{c'} = \gamma^{\min(c,c')} \qquad \text{dans } \mathcal{L}(\overline{\mathbb{R}}_{\min}^{\mathbb{R}}) \ . \tag{2.1.b}$$

[1]On rappelle que l'inf d'une famille quelconque de fonctions scs est scs

2.1.2 Opérateur de retard δ^d Il s'agit du système δ^d défini par

$$\forall t, \quad \delta^d u(t) := u(t-d) \ .$$

L'opérateur δ^d représente un retard pur. Pour les graphes d'événements temporisés, δ^d est l'opérateur associé à une place avec un temps de séjour de d. Ici encore, la notation δ^d est justifiée par

$$\delta^d \otimes \delta^{d'} = \delta^{d+d'}$$

On notera donc δ pour δ^1. Pour la somme $\delta^d \oplus \delta^{d'}$, il n'y a en général pas de règle de simplification analogue à (2.1.b). Cependant, si l'on se restreint aux signaux croissants, on a

$$(\delta^d \oplus \delta^{d'})u(t) = \min(u(t-d), (t-d')) = u(t-\max(d,d')),$$

d'où la règle

$$\delta^d \oplus \delta^{d'} = \delta^{\max(d,d')} \qquad \text{dans } \mathcal{L}(\mathsf{Croiss}(\mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}}_{\min})). \tag{2.1.c}$$

2.1.3 Limitateur de débit ω_β Le système représenté sur la Figure V.1 est constitué de trois blocs élémentaires, deux d'entre eux étant étant les opérateurs "stock" γ^c et "retard" δ^d. Nous reprenons cet exemple avec $c = 0$ et $d = 0$. On obtient alors le "limitateur de débit", $y = \omega_\beta(u)$, qui à l'entrée $u(\cdot)$, associe la solution maximale (au sens usuel) $y(\cdot)$ solution du système (1.2.a)–(1.2.b) avec $c = d = 0$ (et $\beta \geq 0$). En § 1.1, on a montré que ω_β se représente comme suit:

$$\omega_\beta u(t) = \inf_\tau [k(t-\tau) + u(\tau)]$$

où $k(s)$ est donné par

$$k(s) = \begin{cases} \beta s & \text{si } s \geq 0 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

(i.e. (1.2.c) avec $c = d = 0$). A la différence de γ^c et δ^d, nous notons ω_β avec β en indice, parce que β ne se comporte pas comme un exposant. On a en fait:

$$\omega_\beta \otimes \omega_{\beta'} = \omega_{\min(\beta,\beta')} \ , \tag{2.1.d}$$

comme il résulte d'une vérification élémentaire. Physiquement, deux limitateurs de débit placés en série se comportent comme un seul (le plus contraignant des deux). De même, pour la mise en parallèle, on a:

$$\omega_\beta \oplus \omega_{\beta'} = \omega_{\min(\beta,\beta')} \ . \tag{2.1.e}$$

Il faut bien voir ici que la mise en parallèle correspond au *mélange* des flux en proportion égale, et non à leur l'addition au sens usuel.

2.2 Systèmes élémentaires $(\max, +)$ linéaires

On considère les trois ensemble de signaux:

1/ $\overline{\mathbb{R}}_{\max}^{\mathbb{R}}$, moduloïde complet des fonctions à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_{\max}$,

2/ $\mathsf{Croiss}(\mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}}_{\max})$, sous-moduloïde complet des fonctions dateur croissantes.

3/ $\mathsf{Croiss.sci}(\mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}}_{\max})$, sous-moduloïde complet[2] des signaux croissants sci (semi-continus inférieurement).

[2]On rappelle que l'inf d'une famille quelconque de fonctions scs est scs

Nous examinons maintenant la version $(\max, +)$ linéaires des systèmes traités en §2.1

2.2.1 Opérateur de stock γ^c Nous notons γ^c l'opérateur qui à un dateur $u \in \overline{\mathbb{R}}_{\max}^{\mathbb{R}}$ associe le dateur suivant:

$$\gamma^c u(t) = u(t-c) \ . \tag{2.2.a}$$

On a toujours $\gamma^c \gamma^{c'} = \gamma^{c+c'}$. Cependant, la règle $\gamma^c \oplus \gamma^{c'} = \gamma^{\min(c,c')}$ est *fausse* dans $\mathcal{L}(\overline{\mathbb{R}}_{\min}^{\mathbb{R}})$. Si l'on suppose u croissante, on a

$$(\gamma^c \oplus \gamma^{c'})u(n) = \max(u(n-c), u(n-c')) = u(n - \min(c,c')) = \gamma^{\min(c,c')}u(n),$$

d'où:

$$\gamma^c \oplus \gamma^{c'} = \gamma^{\min(c,c')} \qquad \text{dans } \mathcal{L}(\mathsf{Croiss}(\mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}}_{\max})). \tag{2.2.b}$$

2.2.2 Remarque Il peut sembler désinvolte d'utiliser la même notation γ^c pour l'opérateur appartenant à $\mathcal{L}(\overline{\mathbb{R}}_{\min}^{\mathbb{R}})$ défini en 2.1.1 et pour l'opérateur appartenant à $\mathcal{L}(\overline{\mathbb{R}}_{\max}^{\mathbb{R}})$ défini ci dessus. Nous montrerons dans la suite que (2.2.a) est duale en un sens précis de (2.1.a), et représente physiquement le même système.

2.2.3 Opérateur de retard δ^d Il s'agit de l'opérateur qui à $u \in \overline{\mathbb{R}}_{\max}^{\mathbb{R}}$ associe le dateur:

$$\delta^d u(n) = d + u(n) \ . \tag{2.2.c}$$

On a toujours $\delta^d \delta^{d'} = \delta^{d+d'}$. Mais maintenant:

$$\delta^d \oplus \delta^{d'} = \delta^{\max(d,d')} \qquad \text{dans } \mathcal{L}(\overline{\mathbb{R}}_{\max}^{\mathbb{R}}). \tag{2.2.d}$$

Le lecteur aura noté l'inversion entre (2.1.b),(2.1.c) et (2.2.b),(2.2.d) quant aux domaines où les sommes d'opérateurs γ et les sommes d'opérateurs δ se simplifient.

3 Représentation des systèmes linéaires

3.1 Systèmes linéaires sur $\mathcal{D}^{\mathbb{R}}$

Dans cette section, nous étendons les résultats classiques de représentation des systèmes linéaires au systèmes linéaires continus sur un dioïde complet $\mathcal{D}$. Nous commençons par traiter le cas où le moduloïde des signaux admissibles Σ est de la forme $\mathcal{D}^{\mathbb{R}}$, puis étendrons simplement les résultats à des signaux plus généraux. On définit la fonction e, qui jouera le rôle du Dirac usuel.

3.1.1 Définition (Impulsion) *On appelle* impulsion *le signal e défini par*

$$e(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} e_{\mathcal{D}} & si\ t = 0\ ; \\ \varepsilon_{\mathcal{D}} & sinon. \end{cases} \tag{3.1.a}$$

On a trivialement

$$\forall u, \forall t, \quad u(t) = \oint_s u(s)e(t-s) \ , \tag{3.1.b}$$

i.e.

$$u = \oint_s u(s)\delta^s e \tag{3.1.c}$$

ce qui est la décomposition d'un signal sur la "base canonique" $\{\delta^s e\}_{s\in\mathbb{R}}$. Une telle décomposition est unique, puisque si $u = \oint_s v_s \delta^s e$, on applique (3.1.b) à $s \mapsto v_s$, d'où $v_t = u(t)$ pour tout t. Le théorème suivant montre que les systèmes linéaires continus sur $\mathcal{D}^{\mathbb{R}}$ se représentent par un opérateur à noyau:

3.1.2 Théorème *Le système $\mathcal{S}$ est linéaire continu sur $\mathcal{D}^{\mathbb{R}}$ ssi il existe une application k, $\mathbb{R}^2 \to \mathcal{D}$, appelée* réponse impulsionnelle *telle que:*

$$\forall u \in \mathcal{D}^{\mathbb{R}},\ \forall t,\quad \mathcal{S}u(t) = \oint_s u(s)k(t,s)\ . \tag{3.1.d}$$

En outre, un tel k est unique.

Preuve Le sens "si" est immédiat. Réciproquement, on a

$$y(t) = \mathcal{S}u(t) = \mathcal{S}\oint_s u(s)\delta^s e(t)\ ,$$

ce qui en raison des hypothèses de linéarité et continuité, entraîne,

$$y(t) = \oint_s u(s)\mathcal{S}\delta^s(t) = \oint_s u(s)k(t,s)\ ,$$

où l'on a posé

$$k(t,s) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{S}\delta^s e(t)\ .$$

Pour l'unicité, supposons une autre fonction κ vérifiant (3.1.d). En prenant $u = \delta^s e$, on obtient

$$\begin{aligned} k(t,s) &= \mathcal{S}\delta^s e(t) \\ &= \oint_\tau \delta^s e(\tau)\kappa(t,\tau) \\ &= \kappa(t,s)\ . \end{aligned}$$

■

3.1.3 Définition (stationnarité) *Le système linéaire $\mathcal{S}$ est dit stationnaire s'il commute avec l'opérateur retard, i.e.*

$$\text{pour tout } d \in \mathbb{R}, \qquad \mathcal{S}\delta^d = \delta^d\mathcal{S}\ .$$

On notera $\mathcal{L}_{\mathrm{stat}}(\mathcal{D}^{\mathbb{R}})$ le sous-dioïde de $\mathcal{L}(\mathcal{D}^{\mathbb{R}})$, formé des systèmes continus stationnaires.

3.1.4 Théorème *Le système continu $\mathcal{S}$ est stationnaire ssi sa réponse impulsionnelle $k(t,s)$ dépend seulement de la différence $t-s$, i.e., avec l'abus de notation coutumier:*

$$k(t,s) = k(t-s)\ ,$$

et $k = \mathcal{S}e$.

Preuve Si $\mathcal{S}$ est stationnaire, on a

$$k(t,s) = \mathcal{S}\delta^s e(t) = \delta^s\mathcal{S}e(t) = \mathcal{S}e(t-s)\ .$$

Réciproquement, soit $\mathcal{S} : \mathcal{S}u(t) = \oint u(s)k(t-s)$. On a

$$\mathcal{S}\delta^\tau u(t) = \oint \delta^\tau u(s)k(t-s),$$

et en posant $s' = s - \tau$,

$$\mathcal{S}\delta^\tau u(t) = \oint u(s')\delta^\tau k(t-s') = \delta^\tau \mathcal{S}u(t) \ .$$

■

3.1.5 Définition (Produit de convolution) *On appelle convolée de u et $v \in \mathcal{D}^{\mathbb{R}}$ l'application $u * v \in \mathcal{D}^{\mathbb{R}}$ définie comme suit:*

$$u * v(t) = \oint_{\tau \in \mathbb{R}} u(\tau)v(t-\tau) \ .$$

$\mathcal{D}^{\mathbb{R}}$, muni de la somme point par point et du produit de convolution est un dioïde complet. L'unité de $\mathcal{D}^{\mathbb{R}}$ est l'impulsion e, ce qui légitime a posteriori la notation “e”. On a montré que dans le cas stationnaire, la relation entrée-sortie s'exprime par

$$y(t) = \oint_s u(s)k(t-s) \ .$$

Autrement dit, la sortie n'est autre que la convolée de l'entrée par la réponse impulsionnelle k du système. Dans le cas de $\mathcal{D} = \overline{\mathbb{R}}_{\min}$, la $\mathcal{D}$-convolution coïncide avec le produit d'inf-convolution bien connu en analyse convexe [87].

3.1.6 Corollaire *L'application qui à un système associe sa réponse impulsionnelle est un isomorphisme continu du dioïde des systèmes linéaires continus stationnaires sur $\mathcal{D}^{\mathbb{R}}$, muni de la somme point par point et du produit de convolution, i.e.*

$$(\mathcal{L}_{\text{stat}}(\mathcal{D}^{\mathbb{R}}), \oplus, \circ) \simeq (\mathcal{D}^{\mathbb{R}}, \oplus, *) \ .$$

3.1.7 Corollaire *Si $\mathcal{D}$ est commutatif, les systèmes linéaires continus stationnaires mono-entrée mono-sortie forment un dioïde commutatif.*

3.1.8 Définition (Causalité) *Le système linéaire $\mathcal{S}$ est dit causal si pour toutes entrées u_1 et u_2,*

$$u_1(t) = u_2(t) \text{ pour } t \le \tau \Rightarrow \mathcal{S}u_1(t) = \mathcal{S}u_2(t) \text{ pour } t \le \tau \ .$$

3.1.9 Théorème *Le système $\mathcal{S}$ est causal ssi sa réponse impulsionnelle est telle que $k(t,s) = \varepsilon$ pour $s > t$.*

Preuve On a $k(t,s) = \mathcal{S}\delta^s e(t)$. Pour $t < s$, $\delta^s e$ coïncide avec la fonction nulle ε sur $]-\infty, t]$. ■

3.1.10 Corollaire *Un système stationnaire de réponse impulsionnelle k est causal ssi $k(t) = \varepsilon$ pour $t < 0$.*

3.1.11 Exemple Considérons les trois systèmes élémentaires introduits en § 2.1: ce sont des systèmes linéaires stationnaires continus sur $\overline{\mathbb{R}}_{\min}$ dont les réponses impulsionnelles sont respectivement

$$\gamma^c e(t) = \begin{cases} c & \text{si } t = 0 \;; \\ \varepsilon & \text{sinon.} \end{cases} \tag{3.1.e}$$

$$\delta^d e(t) = \begin{cases} e & \text{si } t = d \;; \\ \varepsilon & \text{sinon.} \end{cases} \tag{3.1.f}$$

$$\omega_\beta e(t) = \begin{cases} \varepsilon & \text{si } t < 0 \;; \\ \beta \times t & \text{sinon.} \end{cases} \tag{3.1.g}$$

3.2 Système linéaires continus sur des bons ensembles de signaux

3.2.1 Définition *On dit que Σ est un* bon ensemble de signaux *si*

(i) *Σ est un sous moduloïde complet de $\mathcal{D}^{\mathbb{R}}$,*

(ii) $\forall s \in \mathbb{R},\ \delta^s \Sigma \subset \Sigma$,

(iii) *Il existe $e' \in \Sigma$ telle que $\forall u \in \Sigma,\ \ e' * u = u * e' = u$.*

La condition (ii) exige que si Σ contient un signal u, alors il contient tous les translatés de u. La dernière exprime que Σ admet un élément unité e' pour le produit de convolution. $(\Sigma, \oplus, *)$ est alors un dioïde complet, qui n'est cependant pas un sous-dioïde de $\mathcal{D}^{\mathbb{R}}$ dans la mesure où l'élément neutre e' ne coïncide pas en général avec e.

3.2.2 Proposition *Si Σ vérifie 3.2.1,(i) et (ii), alors $\mathcal{D}^{\mathbb{R}} * \Sigma \subset \Sigma$ et $\Sigma * \mathcal{D}^{\mathbb{R}} \subset \Sigma$.*

Preuve Soit $u \in \mathcal{D}^{\mathbb{R}}$ et $v \in \Sigma$, montrons que $u * v \in \Sigma$. On a

$$u * v = \oint_\tau u(\tau) \delta^\tau v$$

qui via (ii) et le fait que Σ est complet, appartient à Σ. ∎

La proposition exprime que Σ est l'analogue d'un *idéal* dans $(\mathcal{D}^{\mathbb{R}}, \oplus, *)$. On a ici l'analogue des propriétés de *régularisation* de la convolution usuelle.

3.2.3 Prolongement à $\mathcal{D}^{\mathbb{R}}$ Il résulte de l'existence d'un opérateur linéaire de projection sur Σ qu'un système $\mathcal{S}$ linéaire défini a priori sur Σ se prolonge trivialement à $\mathcal{D}^{\mathbb{R}}$, en l'occurrence par le système $\tilde{\mathcal{S}}$ suivant:

$$\tilde{\mathcal{S}} u = \mathcal{S}(u * e') \;, \tag{3.2.a}$$

ce qui se représente par le diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}^{\mathbb{R}} & \xrightarrow{\tilde{\mathcal{S}}} & \mathcal{D}^{\mathbb{R}} \\ \uparrow i & & i \uparrow \\ \Sigma & \xrightarrow{\mathcal{S}} & \Sigma \end{array}$$

où i dénote l'injection canonique.

Appelons $-\Sigma$ l'ensemble des $u \in \mathcal{D}^{\mathbb{R}}$ tels que $t \mapsto u(-t)$ appartienne à Σ. On a le résultat d'unicité suivant.

3.2.4 Théorème *Pour tout système $\mathcal{S}$ linéaire sur Σ, il existe une unique application $k : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{D}$, telle que:*

(i) $\forall s \in \mathbb{R}$, $t \mapsto k(t,s) \in \Sigma$

(ii) $\forall t \in \mathbb{R}$, $s \mapsto k(t,s) \in -\Sigma$

(iii) *Le système de noyau k prolonge $\mathcal{S}$ à $\mathcal{D}^{\mathbb{R}}$.*

Preuve Soit $\tilde{k}$ le noyau associé au prolongement (3.2.a). On a:

$$\tilde{k}(t,s) := \mathcal{S}\delta^s e'(t) \ . \tag{3.2.b}$$

En outre, pour tout $u \in \Sigma$:

$$\mathcal{S}u(t) = \mathcal{S}(u * e')(t) = \oint_{s\in\mathbb{R}}\oint_{\tau\in\mathbb{R}} u(\tau)e'(s-\tau)\tilde{k}(t,s).$$

Il résulte de cette dernière formule et de (3.2.b) que le noyau

$$k(t,\tau) := \oint_{s\in\mathbb{R}} e'(s-\tau)\tilde{k}(t,s)$$

répond à la question. Réciproquement soit k une application vérifiant les conditions du Théorème. Posons $\hat{k}(t,s) := k(t,-s)$. On a, pour tous $t,\tau \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\mathcal{S}\delta^\tau e'(t) &= \oint_{s\in\mathbb{R}} \delta^\tau e'(s)k(t,s) = \oint_{s\in\mathbb{R}} e'(s-\tau)k(t,s)\\ &= \oint_{s'\in\mathbb{R}} e'(-s'-\tau)\hat{k}(t,s') = \hat{k}(t,-\tau) = k(t,\tau) \ ,\end{aligned}$$

ce qui montre l'unicité d'une telle application. ∎

On en déduit sans difficulté les deux corollaires suivants:

3.2.5 Corollaire *Soit $\mathcal{S}$ un système linéaire* stationnaire *sur un bon ensemble de signaux Σ. Il existe un unique $k \in \Sigma$ tel que*

$$\forall u \in \Sigma, \quad \mathcal{S}u = u * k \ .$$

3.2.6 Corollaire *On a l'isomorphisme de dioïdes:*

$$(\mathcal{L}_{\mathrm{stat}}(\Sigma), \oplus, \circ) \simeq (\Sigma, \oplus, *) \ .$$

Nous appliquons maintenant ce résultat aux fonctions croissantes, qui seront d'un usage constant dans la suite.

3.3 Application aux fonctions croissantes

Soit $\Sigma = \mathsf{Croiss}(\mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}}_{\min})$, sous-moduloïde de $\overline{\mathbb{R}}_{\min}^{\mathbb{R}}$ formé des applications croissantes pour l'ordre usuel, i.e. décroissantes pour l'ordre $\preceq$. On va montrer que Σ est un bon ensemble de signaux, et en particulier que l'unité de Σ pour le produit de convolution est la fonction suivante:

$$e_{\mathrm{cr}}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \le 0 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \ , \tag{3.3.a}$$

ou de manière équivalente

$$e_{\mathrm{cr}} = \oint_{\tau\ge 0} \delta^{-\tau} e \ .$$

3.3.1 Proposition *Un signal $s \in \overline{\mathbb{R}}_{\min}^{\mathbb{R}}$ est décroissant (pour l'ordre naturel $\preceq$), i.e. croissant au sens usuel, ssi $e_{\mathrm{cr}} * s = s$.*

Preuve Les propositions suivantes sont équivalentes:

$$\begin{aligned} u \ \text{ croissante} \\ \forall \tau \le 0, \quad u(t-\tau) \ge u(t) \\ \forall \tau \le 0, \quad u(t-\tau) \preceq u(t) \\ \oint_{\tau \le 0} \delta^\tau u(t) \preceq u(t) \\ e_{\mathrm{cr}} * u \preceq u \\ e_{\mathrm{cr}} * u = u \ , \end{aligned}$$

la dernière équivalence résultant de $e_{\mathrm{cr}} \succeq e$. ∎

On réécrit $e_{\mathrm{cr}} * s = s$ comme suit:

$$u(t) = \inf_{\tau \ge 0} u(\tau) \ .$$

Sous cette forme, la proposition 3.3.1 devient immédiate.

On avait a priori via le lemme de projection 0,5.1.15 l'existence d'une application $\mathsf{pr}_{\mathsf{Croiss}(\mathbb{R},\overline{\mathbb{R}})}$. Ce qui est non banal, c'est la réalisation de $\mathsf{pr}_{\mathsf{Croiss}(\mathbb{R},\overline{\mathbb{R}})}$ par une convolution, i.e. $\mathsf{pr}_{\mathsf{Croiss}(\mathbb{R},\overline{\mathbb{R}})}(x) = e_{\mathrm{cr}} * x$. On a en traduisant l'idempotence de $\mathsf{pr}_{\mathsf{Croiss}(\mathbb{R},\overline{\mathbb{R}})}$:

$$e_{\mathrm{cr}} * e_{\mathrm{cr}} = e_{\mathrm{cr}} \tag{3.3.b}$$

(on peut aussi appliquer 3.3.1 à $s = e_{\mathrm{cr}}$). Cela montre que le moduloïde complet $\mathsf{Croiss}(\mathbb{R},\overline{\mathbb{R}}_{\min})$ vérifie les propriétés 3.2.1,(ii) et (iii), et est donc un bon ensemble de signaux. Les systèmes γ^c, δ^d et ω_β admettent des restrictions à $\mathsf{Croiss}(\mathbb{R},\overline{\mathbb{R}}_{\min})$. Les réponses impulsionnelles de ces systèmes sont les suivantes:

$$\begin{aligned} \gamma^c e_{\mathrm{cr}} : \quad & \gamma^c e_{\mathrm{cr}}(t) = \begin{cases} c & \text{si } t \le 0 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \\ \delta^d e_{\mathrm{cr}} : \quad & \delta^d e_{\mathrm{cr}}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \le d \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \\ \omega_\beta e_{\mathrm{cr}} : \quad & \omega_\beta e_{\mathrm{cr}}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \le 0 \\ \beta \times t & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned} \tag{3.3.c}$$

On constate que la réponse impulsionnelle $\gamma^c e$ définit le même système sur $\mathsf{Croiss}(\mathbb{R},\overline{\mathbb{R}}_{\min})$ que la réponse impulsionnelle $\gamma^c e_{\mathrm{cr}}$, à savoir le système γ^c. En d'autres termes, quant on restreint l'ensemble des signaux, la correspondance système $\to$ réponse impulsionnelle cesse d'être injective.

3.3.2 Corollaire *Soit $\mathcal{S} \in \mathcal{L}(\mathsf{Croiss}(\mathbb{R},\overline{\mathbb{R}}_{\min}))$. Il existe une unique fonction $k \in \mathsf{Croiss}(\mathbb{R},\overline{\mathbb{R}}_{\min})$ (réponse impulsionnelle) telle que*

$$\mathcal{S} = \oint_{t \in \mathbb{R}} \gamma^{k(t)} \delta^t \ . \tag{3.3.d}$$

Résultat dual pour $\mathcal{L}(\mathsf{Croiss}(\mathbb{R},\overline{\mathbb{R}}_{\max}))$.

3.3.3 Corollaire (Causalité pour les fonctions croissantes)
Le système $\mathcal{S} \in \mathcal{L}(\mathsf{Croiss}(\mathbb{R},\overline{\mathbb{R}}_{\min}))$ est causal ssi sa réponse impulsionnelle k vérifie

$$\forall t < 0, \ \ k(t) = k(0) \ .$$

Preuve Le relèvement canonique de $\tilde{\mathcal{S}}$ à $\overline{\mathbb{R}}_{\min}^{\mathbb{R}}$ est causal. On a donc via 3.1.10 $\tilde{\mathcal{S}}u = k_0 * u$ avec $k_0(t) = +\infty$ pour $t < 0$. On a $k = k_0 * e_{\mathrm{cr}}$, d'où

$$k(t) = \inf_{\tau \geq 0}[k_0(\tau) + e_{\mathrm{cr}}(t-\tau)] = \inf_{\tau \geq 0}[k_0(\tau) + 0] = k_0(0) \ .$$

On a la version duale de 3.3.3 suivante:

3.3.4 Corollaire *Le système* $\mathcal{S} \in \mathcal{L}(\mathsf{Croiss}(\mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}}_{\max}))$ *est causal ssi sa réponse impulsionnelle* k *vérifie*

$$\forall t < 0, \ \ k(t) = -\infty \ .$$

3.3.5 Proposition *On a la règle de simplification suivante:*

$$\text{pour } n, t, \beta \geq 0, \ \ n \geq t\beta \Rightarrow \gamma^n \delta^t \oplus \omega_\beta = \omega_\beta \text{ dans } \mathcal{L}(\mathsf{Croiss}(\mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}}_{\min})) \ .$$

Preuve On obtient la somme des opérateurs en prenant l'enveloppe inférieure des réponses impulsionnelles données en (3.3.c). ∎

3.3.6 Exemple (Fonctions croissantes scs) L'ensemble des fonctions croissantes scs $\mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}_{\min}$ semi-continues supérieurement est complet (un inf de fonctions scs est scs). Il admet l'unité suivante:

$$e_{\mathrm{scs}} : \ \ e_{\mathrm{scs}}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ +\infty & \text{si } t \geq 0, \end{cases} \tag{3.3.e}$$

qui ne diffère de l'unité e_{cr} des fonctions croissantes définie en (3.3.a) que par la valeur 0. On notera en effet qu'une fonction croissante est scs si et seulement si elle est continue à droite. On a donc nécessairement $e_{\mathrm{scs}}(0) = \lim_{t \to 0^+} e_{\mathrm{scs}}(t)$, ce qui est bien le cas pour (3.3.e). On vérifie qu'une fonction est scs croissante (au sens usuel) ssi $e_{\mathrm{scs}} * u = u$.

3.3.7 Contre exemple L'ensemble des fonctions concaves scs de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_{\min}$ n'est pas un bon ensemble de signaux. Il est en effet stable par somme et produit d'inf-convolution, mais n'admet pas d'unité.

3.3.8 Systèmes en temps discret Pour la simplicité de l'exposé, nous avons pris le temps à valeur réelle et on a pris des signaux définis sur tout $\mathbb{R}$. La théorie est identique pour des signaux définis pour un temps discret, ce qui revient à considérer des sous-moduloïdes de $\mathcal{D}^{\mathbb{Z}}$. au lieu de $\mathcal{D}^{\mathbb{R}}$. Nous donnons à titre d'exemple un énoncé utile pour les opérateurs linéaires dans $\mathsf{Croiss}(\mathbb{Z}, \overline{\mathbb{R}}_{\min})$:

3.3.9 Proposition *Soit* $\mathcal{S} \in \mathcal{L}(\mathsf{Croiss}(\mathbb{Z}, \overline{\mathbb{R}}_{\min}))$. *Il existe une unique fonction* $k \in \mathsf{Croiss}(\mathbb{Z}, \overline{\mathbb{R}}_{\min})$, *dite réponse impulsionnelle de* $\mathcal{S}$, *telle que*

$$\mathcal{S} = \bigoplus_{t \in \mathbb{Z}} \gamma^{k(t)} \delta^t \ . \tag{3.3.f}$$

3.4 Systèmes vectoriels sur les bons ensembles de signaux

Soit Σ un bon ensemble de signaux. On a pour les matrices à coefficients dans Σ le produit induit par la structure de dioïde $(\Sigma, \oplus, *)$:

$$(AB)_{ij} = \bigoplus_k A_{ik} * B_{kj} \ . \tag{3.4.a}$$

Le résultat suivant est une généralisation immédiate de 3.2.5.

3.4.1 Proposition *Soit $\mathcal{S} \in \mathcal{L}(\Sigma^p, \Sigma^n)$ stationnaire. Il existe une unique matrice $K \in \Sigma^{p\times n}$, dite réponse impulsionnelle, telle que:*

$$\mathcal{S}u = Ku \ ,$$

où le produit de matrice du second membre s'entend au sens de (3.4.a).

Un système général obtenu par mise en série, parallèle et feedback d'opérateurs linéaires stationnaires s'écrira comme la plus petite solution d'un système du type:

$$X = AX \oplus BU, Y = CX \ . \tag{3.4.b}$$

On solution minimale s'obtient immédiatement par:

$$Y = CA^*Bu =: HU$$

où l'étoile de la matrice A peut être calculée à l'aide de l'algorithme de Gauss-Jordan 0,4.2.1. H est appelée matrice de transfert.

3.4.2 Exemple Soit le système linéaire sur $\mathsf{Croiss}(\mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}}_{\min})$ représenté sur la Figure V.4,(i). On

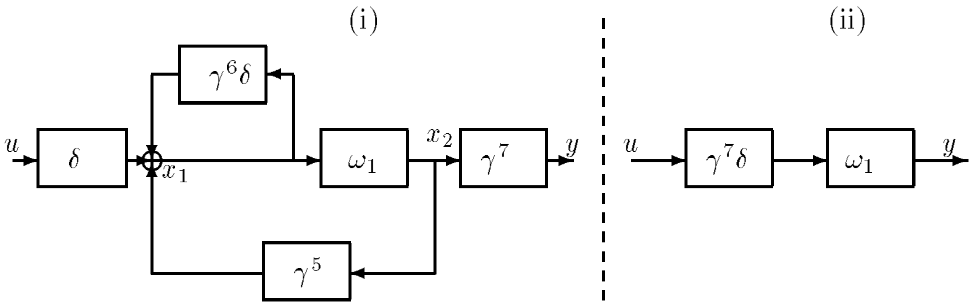

Figure V.4: Un système linéaire sur $\mathsf{Croiss}(\mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}}_{\min})$ et son équivalent simplifié

peut écrire:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \gamma^6\delta & \gamma^5 \\ \omega_1 & \varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} \delta \\ \varepsilon \end{bmatrix} u = Ax \oplus B \\ y &= \begin{bmatrix} \varepsilon & \gamma^7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} u = Cu \ . \end{aligned} \tag{3.4.c}$$

Au lieu de calculer $y = CA^*Bu$, l'étoile de A s'obtenant par exemple par 0, 4.2.1, nous préférons éliminer à la main x_1 et x_2. En éliminant x_2, il vient:

$$x_1 = \gamma^6\delta x_1 \oplus \gamma^5\omega_1 x_1 \oplus \delta u \ . \tag{3.4.d}$$

On a par 3.3.5 $\gamma^6\delta \preceq \gamma^5\omega_1$. En outre, via (2.1.d), on a $\omega_1^* = \omega_1$, et par 0,4.1.6,(vii)

$$(\gamma^5\omega_1)^* = (\gamma^5\omega_1^*)^* = e \oplus \gamma^5(\gamma^5 \oplus \omega_1)^* = e \oplus \gamma^5\omega_1 \ .$$

La plus petite solution de (3.4.d) est donc

$$x_1 = (e \oplus \gamma^5\omega_1)\delta u,$$

d'où

$$x_2 = \omega_1 x_1 = (\omega_1 \oplus \gamma^5 \omega_1)\delta u = \omega_1 \delta u \ .$$

On a finalement la relation entrée sortie fort simple:

$$y = hu = \gamma^7 \delta \omega_1 u \ .$$

Cela montre en particulier que le système plus simple représenté à droite sur la figure V.4,(ii), est équivalent du point de vue de la relation entrée-sortie au système V.4,(i).

4 Fonction de transfert des systèmes $(\min, +)$ linéaires stationnaires

4.1 Transformation de Fenchel

Nous introduisons ici la notion de fonction *numérique* de transfert. On obtient ces fonctions par une opération analogue à la transformation de Laplace en théorie classique. Dans notre cas, ce rôle sera joué par une transformation de type Fenchel [87].

Il résulte de 3.2.5 qu'un système linéaire stationnaire sur $\mathcal{D}^{\mathbb{R}}$ de réponse impulsionnelle k admet la représentation suivante (unique):

$$\mathcal{S} = \oint_{s \in \mathbb{R}} k(s) \delta^s \ , \tag{4.1.a}$$

laquelle somme s'entend dans $\mathcal{L}(\mathcal{D}^{\mathbb{R}})$. On a aussi la forme équivalente:

$$\mathcal{S} = \oint_{s \in \mathbb{R}} \gamma^{k(s)} \delta^s \ .$$

4.1.1 Définition (Fonction de transfert) *On appelle fonction de transfert associée à la réponse impulsionnelle k la fonction $\mathcal{F}k$, $\mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ définie par*

$$\mathcal{F}k(p) = \oint_{x \in \mathbb{R}} k(x) p^{-x} = \inf_{x \in \mathbb{R}} [k(x) - px] \ .$$

4.1.2 Remarque $\mathcal{F}k(p)$ peut s'interpréter comme l'évaluation de l'expression formelle (4.1.a) dans le dioïde $\overline{\mathbb{R}}_{\min}$, obtenue en donnant à la lettre δ la valeur $-p$. On notera en effet que $p^{-x} = -p^x$ (en fait, les expressions x^p, p^x et $1^{p \otimes x}$ dans le dioïde $\overline{\mathbb{R}}_{\min}$ désignent le même élément, à savoir $p \times x$ dans l'algèbre usuelle).

4.1.3 Proposition *L'application $\mathcal{F}$ est un morphisme continu de $(\Sigma, \oplus, *)$ dans $(\overline{\mathbb{R}}_{\min}^{\mathbb{R}}, \min, +)$.*[3]

Preuve La seul point non trivial est le suivant, qui est bien classique:

4.1.4 Lemme (Trivialisation du produit d'inf-convolution) *On a pour tout $(u, v) \in \overline{\mathbb{R}}_{\min}^{\mathbb{R}}$:*

$$\mathcal{F}(u * v) = \mathcal{F}u + \mathcal{F}v \ .$$

[3] $+$ désigne la somme point par point.

Preuve du lemme:

$$\mathcal{F}(u*v)(p) = \oint_{t\in\mathbb{R}}\oint_{\tau\in\mathbb{R}} u(t-\tau)v(\tau)p^{-t} = \oint_{t\in\mathbb{R}}\oint_{\tau\in\mathbb{R}} u(t-\tau)v(\tau)p^{-(t-\tau)}p^{-\tau}$$
$$= \left(\oint_{t'\in\mathbb{R}} u(t')p^{-t'}\right)\left(\oint_{\tau\in\mathbb{R}} u(\tau)p^{-\tau}\right) = (\mathcal{F}u(p))(\mathcal{F}v(p)) \ .$$

où l'on a fait le changement de variables $t' = t-\tau$. ∎

4.1.5 Exemple on vérifie immédiatement les formules suivantes, pour les opérateurs γ^c, δ^d et ω_β définis sur $\mathbb{R}^{\overline{\mathbb{R}}_{\min}}$:

$$\mathcal{F}\gamma^c e(p) = c, \quad \forall p \ ;$$
$$\mathcal{F}\delta^d e(p) = -d\times p, \quad \forall p \ ;$$
$$\mathcal{F}\omega_\beta e(p) = \begin{cases} 0 & \text{si } p\leq\beta \ ; \\ -\infty & \text{sinon.}\end{cases} \tag{4.1.b}$$

4.1.6 Remarque (Lien avec la transformée de Fenchel classique) On a:

$$\mathcal{F}k(p) = \inf_{x\in\mathbb{R}}[f(x)-px] = -\sup_{x\in\mathbb{R}}[px-fx] = -\mathcal{F}_e k(p) \ , \tag{4.1.c}$$

où l'on a noté $\mathcal{F}_e$ la transformée de Fenchel classique[87]. Autrement dit, $\mathcal{F}$ n'est autre que la transformation de Fenchel changée de signe.

4.1.7 Remarque (Cas des systèmes définis sur $\mathsf{Croiss}(\mathbb{R},\mathbb{R}_{\min})$**)** Soit $\mathcal{S}\in\mathcal{L}(\mathsf{Croiss}(\mathbb{R},\mathbb{R}_{\min}))$, de réponse impulsionnelle croissante k. On a

$$p<0 \ \Rightarrow \mathcal{F}k(p) = -\infty \ ,$$

comme il résulte de $\lim_{x\to-\infty}(k(x)-px) = \infty$.

4.1.8 Exemple L'opérateur $\delta\oplus\delta^2$ a la même fonction de transfert que $\oint_1^2\delta^t$, à savoir la fonction numérique $x\mapsto x\oplus x^2$.

La transformation $\mathcal{F}$ n'est donc pas un isomorphisme. On a cependant le résultat suivant:

4.1.9 Proposition *L'application* $\mathcal{F}:\overline{\mathbb{R}}_{\min}^{\mathbb{R}}\to\overline{\mathbb{R}}_{\min}^{\mathbb{R}}$ *est résiduable. Les* fermés *(cf. 0,5.1.13) sont les fonctions convexes sci ne valant jamais $-\infty$ ou le valant identiquement. Les fermés duaux sont les fonctions concaves scs ne valant jamais $+\infty$ ou le valant identiquement. En outre, l'application résiduée de $\mathcal{F}$ est donnée par la formule suivante:*

$$[\mathcal{F}^\uparrow(g)](t) = \bigwedge_{p\in\mathbb{R}} g(p)t^p = \sup_{p\in\mathbb{R}}[g(p)+pt] \ . \tag{4.1.d}$$

Le lecteur aura noté l'analogie avec la transformation de Fourier inverse.

Preuve La formule pour la résiduée de $\mathcal{F}$ est conséquence immédiate de 0,5.4.7. La caractérisation des fermés n'est autre que la traduction des propriétés classiques de la transformée de Fenchel [87]. ∎

On considère la fonction linéaire de pente p, $\ell_p\in\overline{\mathbb{R}}_{\min}^{\mathbb{R}}$, i.e.

$$\ell_p(x) = px \ .$$

4.1.10 Théorème *Soit $\mathcal{S}$ un système linéaire continu stationnaire sur $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}_{\min}$, de réponse impulsionnelle k. La droite ℓ_p est un vecteur propre du système $\mathcal{S}$ pour la valeur propre $\lambda_p = \mathcal{F}k(p)$, i.e.*

$$\mathcal{S}\ell_p = \lambda_p \ell_p \ .$$

Preuve

$$k * \ell_p(t) = \oint_{\tau\in\mathbb{R}} k(\tau)p^{t-\tau} = \oint_{\tau\in\mathbb{R}} k(\tau)p^{-\tau}p^t = \left(\oint_{\tau\in\mathbb{R}} k(\tau)p^{-\tau}\right)p^t = (\mathcal{F}k(p))\,\ell_p(t) \ .$$

■

4.1.11 Interprétation: fonction de gain De même que d'ordinaire, la valeur du transfert au point $j\omega$ s'interprète comme le gain du système pour la fréquence ω, de même ici, $\mathcal{F}k(p)$ apparaît comme le décalage (additif) du système associé à la pente p.

4.1.12 Remarque (Décomposition spectrale de $\mathcal{S}$) Les fonctions concaves scs apparaîssent comme les sommes infinies de droites. Ce sont précisément les signaux qui se décomposent sur la base $\{\ell_p\}_{p\in\mathbb{R}}$. Soit

$$u = \oint_{p\in\mathbb{R}} u_p \ell_p \tag{4.1.e}$$

une telle décomposition. On a

$$\mathcal{S}u = \oint_{p\in\mathbb{R}} \mathcal{F}k(p)u_p\ell_p \ , \tag{4.1.f}$$

laquelle fonction est clairement concave scs. La formule (4.1.f) est l'équivalent d'une décomposition spectrale de l'opérateur $\mathcal{S}$ restreint au sous moduloïde complet des fonctions concaves. On observe que les coordonnées u_p s'obtiennent au moyen de la formule de résiduation suivante:

$$u_p = \bigwedge_t u(t) \otimes p^{-t} \ .$$

4.1.13 Diagramme de Bode La graphe de l'application $p \mapsto \mathcal{F}k(p)$ est l'analogue du diagramme de Bode. Soit par exemple le système

$$\mathcal{S} = \gamma\delta^2 \oplus \omega_2 \ .$$

On a représenté la réponse impulsionnelle, donnée par:

$$h(t) = \min(\gamma\delta^2 e_{\mathrm{cr}}(t), \omega_2 e_{\mathrm{cr}}(t))$$

(les réponses impulsionnelles élémentaires $\gamma\delta^2 e_{\mathrm{cr}}$ et $\omega_2 e_{\mathrm{cr}}$ sont données par les formules (3.3.c)). On a en appliquant (4.1.5), pour $p \geq 0$:

$$\mathcal{F}h(p) = \min(1 - 2p, \chi_{]-\infty,2]}(p)),$$

où la fonction indicatrice χ est donnée par

$$\chi_A(p) = \begin{cases} 0 & \text{si } p \in A \\ -\infty & \text{si } p \notin A. \end{cases}$$

On a représenté $\mathcal{F}h$ sur la Figure V.5, ainsi que l'entrée ℓ_1 (droite de pente 1 passant par l'origine). La sortie $h * \ell_1$ est égale à $(-1) \otimes \ell_1 = -1 + \ell_1$, où le *gain* -1 est égal à $\mathcal{F}h(1)$ en accord avec le Théorème 4.1.10.

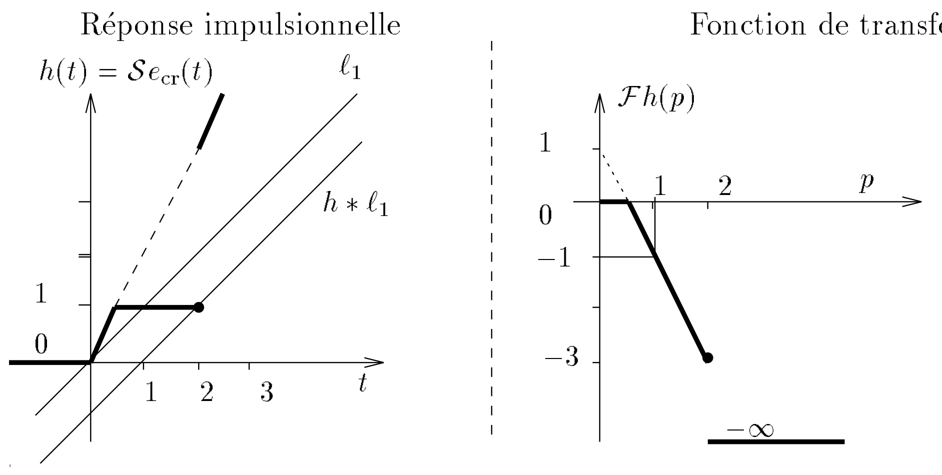

Figure V.5: Diagramme de Bode de $\mathcal{S} = \gamma\delta^2 \oplus \omega_2$

4.2 Résumé

Nous concluons cette section par un tableau faisant le parallèle entre les systèmes classiques et les systèmes $(\min, +)$ linéaires.

Systèmes $(\min, +)$ linéaires	Systèmes linéaires usuels.
$\min,\ +$	$+,\ \times$
inf-convolution $k * k'(t) = \oint_{\tau \in \mathbb{R}} k(\tau)k'(t-\tau) = \inf_{\tau\in\mathbb{R}}[k(\tau) + k'(t-\tau)]$	convolution $k * k'(t) = \int_{\tau\in\mathbb{R}} k(\tau)k'(t-\tau)$
Systèmes min-linéaires continus $y(t) = \oint_{\tau\in\mathbb{R}} k(t,\tau)u(\tau) = \inf_{\tau\in\mathbb{R}}[k(t,\tau) + u(\tau)]$	Opérateurs à noyau $y(t) = \int_{\tau\in\mathbb{R}} k(t,\tau)u(\tau)$
Systèmes stationnaires $y(t) = \oint_{\tau\in\mathbb{R}} k(\tau)u(t-\tau) = \inf_{\tau\in\mathbb{R}}[k(\tau) + u(t-\tau)]$	Systèmes stationnaires $y(t) = \int_{\mathbb{R}} h(t-\tau)u(\tau)\,d\tau$
Transformée de type Fenchel $\mathcal{F}k(p) = \oint_{x\in\mathbb{R}} k(x)p^{-x} = \inf_{x\in\mathbb{R}}[k(x) - px]$	Transformée de Fourier $\mathcal{F}k(\omega) = \int_{\mathbb{R}} h(t)e^{-j\omega t}\,dt$
Trivialisation de l'inf-convolution $\mathcal{F}(k * k') = (\mathcal{F}k) \otimes (\mathcal{F}k') = (\mathcal{F}k) + (\mathcal{F}k')$	Trivialisation de la convolution $\mathcal{F}(k * k') = (\mathcal{F}k)(\mathcal{F}k')$
Droites $\ell_p(x) = p^x = p \times x$	Fonctions exponentielles $e_\omega(t) = e^{j\omega t}$
$k * \ell_p = (\mathcal{F}k(p))\ell_p$	$k * e_\omega = (\mathcal{F}k(\omega))e_\omega$