Chapitre VI

Quelques remarques sur la réalisation minimale

Introduction

On étudie ici les séries rationnelles (ou réalisables) en une indéterminée et à coefficients dans $\mathbb{R}_{\max}$. On caractérise tout d'abord les séries rationnelles par une certaine propriété de périodicité: les séries obtenues en ne prenant qu'un terme tous les c, où c est la période, se comportent comme des séries "géométriques" à partir d'un certain rang. Lorsque la série se réalise à l'aide d'une matrice irréductible, la situation est fort simple: tous les séries géométriques ainsi extraites ont alors même raison. On applique ensuite les notions de rang étudiées précédemment au problème de réalisation minimale. Le rang faible (i.e. la taille minimale d'une famille génératrice du moduloïde des colonnes) de la matrice de Hankel est fini ssi toutes les séries "géométriques" extraites ont même raison, auquel cas on peut appliquer les algorithmes standards de réalisation. Ce dernier résultat a été obtenu antérieurement par Cuninghame-Green [26] (avec un algorithme un peu différent et à l'omission près de la condition d'irréductibilité). Nous donnons un exemple où le rang faible donne des réalisations arbitrairement grossières. Nous montrons que la dimension minimale de réalisation est minorée par le rang mineur de la matrice de Hankel (taille du plus grand mineur inversible dans le dioïde symétrisé). Cette minoration peut être stricte: nous exhibons un système non réalisable de rang mineur fini. La situation est assez analogue au problème classique de réalisation positive d'une série rationnelle à coefficients dans $\mathbb{R}^+$ [7, 37]. Signalons par ailleurs l'approche d'Olsder [73], qui obtient dans certains cas des réalisations minimales en réalisant dans l'algèbre habituelle la matrice $H_{ij} = \exp(h_{ij}t)$ et en passant à la limite.

1 Séries $(\max, +)$ rationnelles

1.1 Réalisabilité, rationalité, périodicité

On étudie ici les séries $s \in \mathbb{R}_{\max}[[\gamma]]$ à coefficients dans $\mathbb{R}_{\max}$ et en une unique indéterminée γ. Les deux notions suivantes sont classiques.

1.1.1 Définition (rationalité) *Une série $s \in \mathbb{R}_{\max}[[\gamma]]$ est dite rationnelle si elle s'obtient par un nombre fini de sommes, produits, étoiles de polynômes.*

1.1.2 Définition (réalisabilité) *La série $s \in \mathbb{R}_{\max}[[\gamma]]$ est* réalisable *ssi il existe un entier n, des matrices $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times 1}$, $C \in \mathbb{R}_{\max}^{1\times n}$, telles que*

$$s = \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} CA^k B\,\gamma^k \quad .$$

Un tel triplet (A, B, C) sera dit *réalisation* de s. Un triplet tel que $n = \dim A$ soit minimal sera qualifiée de réalisation minimale. La définition 1.1.2 est motivée comme suit. Considérons le système récurrent dans $\mathbb{R}_{\max}$:

$$x_{k+1} = Ax_k \oplus Bu_{k+1}, \quad y_k = Cx_k \quad , \tag{1.1.a}$$

avec $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times 1}$, $C \in \mathbb{R}_{\max}^{1\times n}$. L'équation (1.1.a) se réécrit à l'aide de l'opérateur de décalage γ, tel que $x_k = \gamma x_{k+1}$:

$$x = A\gamma x \oplus Bu \quad ,$$

d'où

$$y = C(A\gamma)^* Bu = \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} CA^k B\gamma^k u \quad . \tag{1.1.b}$$

Autrement dit, une série réalisable n'est autre que la série de transfert d'un système linéaire récurrent. D'après le Théorème de Kleene [7], une série est rationnelle ssi elle est réalisable. Afin de caractériser les séries rationnelles, nous introduisons une nouvelle notion de périodicité. Cette notion apparaît naturellement lors de l'étude des puissances des matrices (cf. remarque 1.1.10 supra).

1.1.3 Définition (périodicité) *Soit c un naturel non nul, λ une application $\mathbb{Z}/c\mathbb{Z} \to \mathbb{R}_{\max}$, $u \mapsto \lambda_u$. La suite $s \in \mathbb{R}_{\max}^{\mathbb{N}}$ est dite c, λ-périodique (ou plus simplement périodique) s'il existe un naturel N tel que[1]:*

$$n \geq N \Rightarrow s_{n+c} = (\lambda_{\overline{n}})^c s_n \quad . \tag{1.1.c}$$

La plus petite valeur de c sera qualifiée de *période*. L'application λ sera qualifiée de *taux*. Dans la suite, on notera plus simplement λ_n au lieu de $\lambda_{\overline{n}}$. Introduisons la suite extraite $s^i = \{s_{kc+i}\}_{k\in\mathbb{N}}$. La définition est équivalente à affirmer que pour $i = 0, \ldots, c-1$,

$$kc + i \geq N \Rightarrow s^i_{k+1} = \alpha s^i_k \quad . \tag{1.1.d}$$

où $\alpha = (\lambda_i)^c$, i.e. que les suites extraites coïncident à partir d'un certain rang avec des suites géométriques (c'est à dire arithmétiques dans l'algèbre usuelle).

1.1.4 Exemple La suite

$$s_n = \begin{cases} 2 \times n & \text{si } n \text{ pair} \\ 3 \times n + 1 & \text{si } b \text{ impair} \end{cases}$$

est $2, \lambda$-périodique, avec $\lambda_0 = 2$ et $\lambda_1 = 3$.

La série $s = \bigoplus_n s_n \gamma^n$ sera dite périodique lorsque la suite $\{s_n\}$ l'est.

1.1.5 Théorème *Une série $s \in \mathbb{R}_{\max}[[\gamma]]$ est rationnelle ssi elle est périodique.*

[1] $\overline{n}$ désigne la classe de n dans $\mathbb{Z}/c\mathbb{Z}$

Preuve Périodique $\Rightarrow$ rationnel. D'après (1.1.c):

$$s = \bigoplus_{n=0}^{N-1} s_n\gamma^n \oplus s_N\gamma^N((\lambda_N\gamma)^c)^* \oplus \ldots \oplus s_{N+c-1}\gamma^{N+c-1}((\lambda_{N+c-1}\gamma)^c)^* \ . \tag{1.1.e}$$

La rationalité de s en résulte.

Rationnel $\Rightarrow$ périodique. Soient $\mathcal{P}$ (resp. $\mathcal{R}$) l'ensemble des séries périodiques (resp. rationnelles). $\mathcal{R}$ est par définition le plus petit ensemble rationnellement clos tel que $\mathcal{R} \supset \mathbb{R}_{\max}[\gamma]$. Comme trivialement, $\mathcal{P} \supset \mathbb{R}_{\max}[\gamma]$, il suffit de montrer que $\mathcal{P}$ est rationnellement clos. On établit pour cela quelques lemmes.

1.1.6 Propriétés *Soit s (resp. s') une série c,λ(resp. c',λ')-périodique.*

(i) *Si c divise c'', alors s est c'',λ périodique.*

(ii) *$s \oplus s'$ est périodique et sa période divise* $\mathrm{ppcm}(c,c')$.

1.1.7 Lemme *Une série est périodique ssi elle est somme finie de séries de la forme*

$$p((a\gamma)^n)^* \ ,$$

où p est un polynôme,a un scalaire et $n \in \mathbb{N}$.

1.1.8 Lemme *Soient $s = ((a\gamma)^\alpha)^*$ et $s' = ((b\gamma)^\beta)^*$, a et b étant des scalaires. Si $a > b$, on a une écriture de la forme:*

$$ss' = q((a\gamma)^\alpha)^* \ , \tag{1.1.f}$$

où q est un polynôme. Si $a = b$, on a

$$ss' = p \oplus q((a\gamma)^{\gcd(\alpha,\beta)})^* \ , \tag{1.1.g}$$

où p et q sont des polynômes.

Les deux Lemmes 1.1.8 et 1.1.7 entraînent que le produit de deux séries périodiques est périodique. En outre, moyennant les deux règles

$$(\bigoplus_{i=1}^{k} s_i)^* = \bigotimes_{i=1}^{k} s_i^*, \qquad (p((a\gamma)^n)^*)^* = e \oplus p(p \oplus (a\gamma)^n)^* \ ,$$

on a que l'étoile d'une série périodique est périodique, donc que $\mathcal{P}$ est rationnellement clos, et donc d'après ce qui précède, $\mathcal{P} = \mathcal{R}$. Il reste à vérifier les Lemmes.

Preuve des propriétés 1.1.6. (i) est immédiate. Montrons (ii). D'après (i), quitte à remplacer c et c' par leur ppcm, on peut supposer $c = c' = \mathrm{ppcm}(c,c')$. D'après une remarque précédente, il suffit de vérifier que les suites extraites $\{s_{n+kc}\}_k, \ldots, \{s_{n+c-1+kc}\}_k$ sont périodiques de période 1. On peut donc supposer $c = c' = 1$. On a alors pour n assez grand:

$$s_{n+1} = \lambda s_n, \quad s'_{n+1} = \lambda' s'_n \ . \tag{1.1.h}$$

Si $\lambda = \lambda'$, la périodicité de $s \oplus s'$ est claire. Dans le cas contraire, on a par exemple $s_n \neq \varepsilon$ et $\lambda > \lambda'$. La suite s_n croissant plus vite que s'_n, on a à partir d'un certain rang $(s \oplus s')_n = s'_n$ et la périodicité de $s \oplus s'$ en résulte. ∎

Preuve du Lemme 1.1.7. D'après (1.1.e), une série périodique s'écrit comme somme de séries de la forme $p((a\gamma)^n)^*$. Réciproquement, la somme de séries périodiques étant périodique, il suffit de voir que $m((a\gamma)^n)^*$, m étant un monôme, est périodique, ce qui est immédiat. ∎

Preuve du Lemme 1.1.8. 1/ Cas $a > b$. On a

$$ss' = ((a\gamma)^\alpha)^*((b\gamma)^\beta)^* = \bigoplus_{x,y\in\mathbb{N}} (a\gamma)^{x\times\alpha}(b\gamma)^{y\times\beta} \ . \tag{1.1.i}$$

Le coefficient de γ^n est égal à:

$$(ss')_n = \bigoplus_{\alpha x+\beta y=n} a^{x\times\alpha}b^{y\times\beta} = \sup_{\alpha x+\beta y=n} a\alpha x + b\beta y \ . \tag{1.1.j}$$

Si $\alpha x + \beta y = n$ et $y \geq \alpha$, on a $\alpha x' + \beta y' = n$, avec $x' = (x+\beta)$, $y' = (y-\alpha)$. Comme $a > b$, on a $a\alpha x' + b\beta y' > a\alpha x + b\beta y$, ce qui montre que le sup à droite de (1.1.j) est atteint pour $y < \alpha$. On a donc:

$$ss' = (e \oplus (b\gamma)^\beta \oplus \ldots \oplus (b\gamma)^{(\alpha-1)\times\beta})((a\gamma)^\alpha)^*$$

ce qui est bien de la forme (1.1.f).

2/ Cas $a = b$. On a

$$ss' = ((a\gamma)^\alpha)^*((a\gamma)^\beta)^* = \bigoplus_{n\in\alpha\mathbb{N}+\beta\mathbb{N}} (a\gamma)^n$$

et la périodicité de cette série résulte du Lemme diophantien 3.3.6 du Chapitre VII. ∎

1.1.9 Corollaire *Soit $A \in \mathbb{R}_{\max}^{p\times p}$. Pour tous $i,j \in \{1,\ldots,p\}$, la suite $\{A_{ij}^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique.*

Preuve Cela résulte de la rationalité de $(\gamma A)^* = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \gamma^n A^n$ et du fait que les coefficients d'une matrice rationnelle sont rationnels. ∎

1.1.10 Remarque Cohen, Dubois, Quadrat et Viot [17] ont montré que lorsque A est *irréductible*, on a à partir d'un certain rang $A^{n+c} = \lambda^c A^n$, ce qui est un cas particulier de périodicité où λ_n est constant (i.e. ne dépend pas du reste de n modulo c). λ est égal aux rayon spectral de la matrice A et la période c est caractérisée de manière très analogue à la théorie de Perron-Frobenius (voir à ce propos la section 6.4 du chapitre VII). Lorsque la matrice A n'est plus irréductible, la situation est plus délicate. Il est possible, mais fastidieux, de borner la période c et de caractériser l'application λ à partir du graphe de la matrice. Nous ne le ferons pas ici, et considérons simplement l'exemple suivant. Soient les matrices

$$A = \begin{bmatrix} \varepsilon & e & \varepsilon & e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon & e \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -2 & e \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ e \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} \tag{1.1.k}$$

Soit $s_n = CA^nB$. On trouve

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
s_n	ε	ε	e	1	-4	3	-8	5	-12	7	-16	...

soit une série $2,\lambda$ périodique, d'où $\lambda_0 = -2$ et $\lambda_1 = 1$. Graphiquement, s_n est égal au chemin de poids maximal de 5 à 1 dans le graphe de la Figure VI.1. Il est clair que si n est pair, un tel chemin passe nécessairement par la composante connexe $\{4\}$ de rayon spectral égal à -2 et pas par la composante connexe $\{2,3\}$ de rayons spectral égal à 1, et donc que le comportement de A_{15}^{2n} sera analogue à celui de A_{44}^{2n}. Au contraire, les chemins de longueur impaire passent par la composante connexe de rayon spectral 1, ce qui rend compte de $\lambda_1 = 1$.

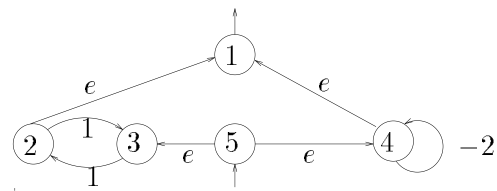

Figure VI.1: Graphe associé à (1.1.k): le comportement de A_{15}^n dépend de la parité de n

1.2 Réalisation faible

Classiquement, on forme la *matrice de Hankel* associée à $s = \bigoplus_k s_k\gamma^k$, soit la matrice infinie suivante:

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \dots & \\ s_1 & s_2 & s_3 & \dots & \\ s_2 & s_3 & & & \\ \vdots & \vdots & & & \ddots \end{bmatrix}$$

On a défini en III,§10 le rang faible par colonne d'une matrice comme le cardinal d'une famille génératrice minimale du moduloïde engendré par les colonnes. La matrice de Hankel étant symétrique, on appellera rang faible de $\mathcal{H}$ son rang faible par colonnes (égal à son rang faible par ligne).

1.2.1 Proposition *Si le rang faible de la matrice de Hankel d'une série est fini, alors il existe une réalisation de dimension ce rang faible.*

La preuve est classique (cf. par exemple [53]). En identifiant une colonne infinie à une suite, étant donné une $\mathbb{N}\times p$ matrice A, on définit naturellement:

$$\gamma^{-1}\begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & \dots \\ a_{10} & a_{11} & \dots \\ \vdots & \vdots & \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{10} & a_{11} & \dots \\ a_{20} & a_{21} & \dots \\ \vdots & \vdots & \dots \end{bmatrix} .$$

On note les deux propriétés:

$$\gamma^{-1}\mathcal{H}_{\cdot,i} = \mathcal{H}_{\cdot,i+1} \tag{1.2.a}$$

$$\forall U \in \mathbb{R}_{\max}^{\mathbb{N}\times k},\ V \in \mathbb{R}_{\max}^{k\times l},\quad (\gamma^{-1}U)V = \gamma^{-1}(UV)\ . \tag{1.2.b}$$

La première résulte de la structure de la matrice de Hankel, la seconde est triviale. En numérotant à partir de 0 les lignes et les colonnes de la matrice de Hankel, on peut écrire:

$$\forall i \in \mathbb{N},\quad s_i = CA^iB = \mathcal{H}_{0i} = \mathcal{H}_{i0}\ .$$

Soit$\{i_1, \ldots, i_r\}$ une famille génératrice minimale du moduloïde engendré par les colonnes de $\mathcal{H}$ (d'après la remarque 5.5.7 du Chapitre 0, on peut toujours supposer une telle famille formée de colonnes de $\mathcal{H}$). On a pour toute colonne $\mathcal{H}_{\cdot,q}$ un relation de dépendance de la forme

$$\mathcal{H}_{\cdot,q} = \bigoplus_{l=1}^{r} \mathcal{H}_{\cdot,i_l} \lambda_{lq} \ ,$$

laquelle se réécrit matriciellement

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{|i_1 \ldots i_r]} L$$

avec $L = (\lambda_{lq}) \in \mathbb{R}_{\max}^{r \times \mathbb{N}}$. On peut écrire

$$\gamma^{-1} \mathcal{H}_{\cdot,i_l} = \mathcal{H}_{\cdot,i_l+1} = \mathcal{H}_{|i_1 \ldots i_r]} L_{|i_l+1]} \ ,$$

d'où en posant $A = L_{|i_1+1,\ldots,i_r+1]} \in \mathbb{R}_{\max}^{r \times r}$:

$$\gamma^{-1} \mathcal{H}_{|i_1 \ldots i_r]} = \mathcal{H}_{|i_1 \ldots i_r]} A \ .$$

Via (1.2.b), on induit:

$$\gamma^{-i} \mathcal{H}_{|i_1 \ldots i_r]} = \mathcal{H}_{|i_1 \ldots i_r]} A^i \ .$$

On a alors

$$s_i = (\gamma^{-i} \mathcal{H}_{\cdot,0})_0 = (\gamma^{-i} \mathcal{H}_{|i_1 \ldots i_r]} L_{[1,\ldots,r|0]})_0 = (\mathcal{H}_{|i_1 \ldots i_r]} A^i L_{[1,\ldots,r|0]})_0 = \mathcal{H}_{[0|i_1 \ldots i_r]} A^i L_{[1,\ldots,r|0]} \ .$$

En posant B égal à la colonne d'indice 0 de L et $C = \mathcal{H}_{[0|i_1 \ldots i_r]}$, on obtient une réalisation de dimension r. ∎

1.2.2 Exemple Soit le système:

$$a = \begin{bmatrix} 4 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 5 & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 & \varepsilon \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon & 0 \end{bmatrix}$$

On a la matrice de Hankel tronquée:

$$h_{[0..6|0..6]} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 8 & 12 & 16 & 20 & 25 \\ 4 & 8 & 12 & 16 & 20 & 25 & 30 \\ 8 & 12 & 16 & 20 & 25 & 30 & 35 \\ 12 & 16 & 20 & 25 & 30 & 35 & 40 \\ 16 & 20 & 25 & 30 & 35 & 40 & 45 \\ 20 & 25 & 30 & 35 & 40 & 45 & 50 \\ 25 & 30 & 35 & 40 & 45 & 50 & 55 \end{bmatrix} .$$

On constate que les colonnes de la matrice de Hankel sont égales (à une constante près) à partir de la colonne numérotée 5. En appliquant l'algorithme donné en 0,5.5.5, on détermine aisément une famille génératrice minimale de la matrice de Hankel tronquée, soit la famille formée des deux colonnes 0 et 5. On appliquant l'algorithme donné dans la preuve de la Proposition ci-dessus, on a

$$\mathcal{H}_{\cdot,1} = 4\mathcal{H}_{\cdot,0} \oplus (-20)\mathcal{H}_{\cdot,5}, \quad \mathcal{H}_{\cdot,6} = 4\mathcal{H}_{\cdot,0} \oplus 25\mathcal{H}_{\cdot,5}, \mathcal{H}_{\cdot,0} = 0\mathcal{H}_{\cdot,0} \oplus (\varepsilon)\mathcal{H}_{\cdot,5}, \ ,$$

d'où la réalisation de dimension 2:

$$a' = \begin{bmatrix} 4 & 25 \\ -20 & 5 \end{bmatrix}$$

$$b' = \begin{bmatrix} 0 \\ \varepsilon \end{bmatrix}$$

$$c' = \begin{bmatrix} 0 & 20 \end{bmatrix}$$

Comme on a aussi la dépendance linéaire $\mathcal{H}_{\cdot,0} = 0\mathcal{H}_{\cdot,0} \oplus (-25)\mathcal{H}_{\cdot,5}$, on aurait pu prendre $b'' = \begin{bmatrix} 0 \\ -25 \end{bmatrix}$.

1.2.3 Remarque Les réalisations ci-dessus ne se déduisent pas les unes des autres par des changements de base. D'après 0,6.2.2, les matrice inversibles sont de la forme DP (D diagonale, P matrice de permutation). On n'aura jamais $b'' = DPb'$ dans l'exemple ci-dessus. Nous montrons dans la section suivante que les réalisations faibles de dimension 2 ci-dessus sont des réalisations minimales.

La réciproque de la Proposition 1.2.1 est fausse: la matrice de Hankel d'une série rationnelle n'est pas en général de rang faible fini.

1.2.4 Contre exemple Soit la série rationnelle

$$s = (\gamma^2)^* \oplus 1\gamma((1\gamma)^2)^* \enspace ,$$

soit en identifiant le coefficient de γ^i

$$s_i = \begin{cases} e & \text{si } i \text{ pair} \\ 1^i & \text{si } i \text{ impair.} \end{cases}$$

Le moduloïde engendré par les colonnes de la matrice de Hankel de s n'est pas de type fini. Supposons par l'absurde ce moduloïde de type fini. D'après la remarque 5.5.7 du chapitre 0, il existe une famille finie $\{\mathcal{H}_{\cdot,i_1}, \ldots, \mathcal{H}_{\cdot,i_k}\}$ de colonnes de $\mathcal{H}$ engendrant le moduloïde des colonnes, soit pour tout $i \in \mathbb{N}$, une combinaison linéaire de la forme

$$\mathcal{H}_{\cdot,i} = \bigoplus_{l=1}^{k} \lambda_{il}\mathcal{H}_{\cdot,i_l} \enspace . \tag{1.2.c}$$

(i) *Si i et i_l n'ont pas même parité, alors $\lambda_{il} = \varepsilon$.* Sous cette hypothèse, on a en effet:

$$\lambda_{il} \leq \bigwedge_{j\in\mathbb{N}} \frac{\mathcal{H}_{j,i}}{\mathcal{H}_{j,i_l}} = \left(\bigwedge_{j\in\mathbb{N}\cap(i+2\mathbb{Z})} \frac{e}{1^{j+i_l}} \right) \wedge \left(\bigwedge_{j\in\mathbb{N}\cap(i+2\mathbb{Z}+1)} \frac{1^{j+i}}{e} \right) = \varepsilon \enspace .$$

(ii) *On a $\lambda_{il} \leq e$.* Via (i), on peut supposer i et i_l de même parité. On a alors:

$$\lambda_{il} \leq \frac{\mathcal{H}_{ii}}{\mathcal{H}_{ii_k}} = \frac{e}{e} = e \enspace .$$

(iii) *Il n'y a pas de famille génératrice finie formée de colonnes de $\mathcal{H}$.* Sinon, compte tenu de (ii), le premier coefficient de toute colonne de $\mathcal{H}$ serait majoré: contradiction.

Ce contre exemple contredit le résultat de Cuninghame-Green ([26], Proposition 4 et assertion suivante), qui ne tient pas compte de la condition de coïncidence des taux des suites extraites. De manière plus précise, on peut caractériser les séries dont la matrice de Hankel est de rang faible fini. On dira que la série périodique s admet *un seul taux* s'il existe un scalaire $\overline{\lambda}$ tel que $s_{n+c} = \overline{\lambda}^c s_n$ (ou de manière équivalente, si l'application λ ne prend que les valeurs ε et $\overline{\lambda}$ dans la définition générale de la périodicité 1.1.3). En particulier, d'après le théorème de cyclicité des puissances de A, lorsque A est *irréductible*, la suite $s_n = CA^nB$ admet un seul taux (avec $\overline{\lambda} = \rho(A)$).

1.2.5 Proposition *La matrice de Hankel de s est de rang faible fini ssi s admet un seul taux.*

Si s admet un seul taux, la matrice de Hankel n'a qu'un nombre fini de colonnes distinctes (à la multiplication par un scalaire près), et est a fortiori de rang faible fini. Réciproquement, on montre que si l'application λ prend plusieurs valeurs non nulles dans 1.1.3, il n'existe pas de sous famille génératrice finie extraite de l'ensemble des colonnes de la matrice de Hankel. Quitte à tronquer les premiers termes, on pourra supposer une série de terme général

$$s_{i+kc} = a_i \lambda_i^k$$

où tous les a_i sont non nuls et les scalaires λ_i prennent au moins deux valeurs non nulles distinctes. On est alors ramené à une version générale du contre exemple 1.2.4, qui se traite par un argument (un peu plus technique) analogue laissé au lecteur.

1.2.6 Remarque Lorsque la série périodique s n'a pas un unique taux, on peut cependant adapter l'algorithme de la Proposition 1.2.1. Soit pour n grand $s_{n+c} = \lambda_n^c s_n$. On considère les c séries $s^0, \ldots, s^{c-1}$ définies par:

$$s_n^i = \begin{cases} s_n & \text{si } n \in i + c\mathbb{N} \\ \varepsilon & \text{sinon.} \end{cases}$$

Chacune de ces séries admet un unique taux, et l'on a $s = s^0 \oplus \ldots \oplus s^{c-1}$. On peut alors réaliser chaque s^i à l'aide de l'algorithme de l'algorithme de la Proposition 1.2.1 soit une réalisation (C_i, A_i, B_i). Il est clair que

$$C = [C_0, \ldots, C_{c-1}], \quad A = \operatorname{diag}(A_0, \ldots, A_{c-1}), \quad B = \begin{bmatrix} B_0 \\ \vdots \\ B_{c-1} \end{bmatrix}$$

est une réalisation de s.

1.2.7 Interprétation en termes de réseau de Petri On a représenté à gauche de la Figure VI.2 le graphe d'événements temporisés associé à (a, b, c). La réalisation (a', b', c') ci-dessus n'a

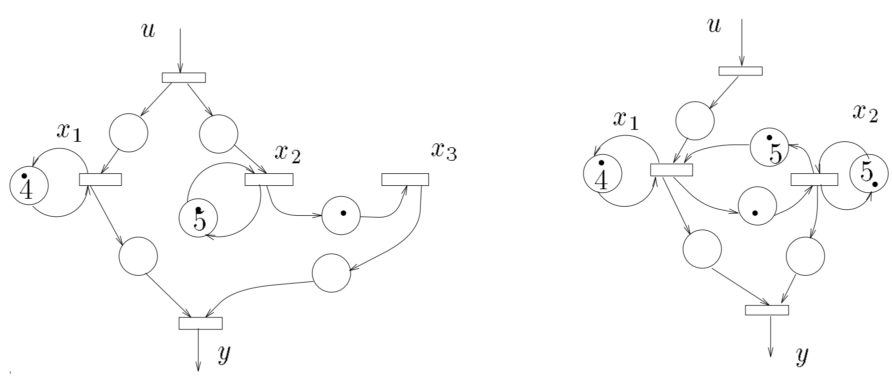

Figure VI.2: Graphe d'événements et graphe d'événements minimal

pas de sens en termes de graphes d'événements temporisés dans la mesure où les temporisations sont négatives. En considérant le changement de base $a_0 = Da'A^{-1}, b_0 = Db', c_0 = c'D^{-1}$ où $D = \mathrm{diag}(25, 20)$, on a la réalisation équivalente

$$a_0 = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad b_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ \varepsilon \end{bmatrix}, \quad c_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

On obtient ainsi un système à coefficients positifs correspondant au réseau de Petri dessiné à droite de la Figure VI.2. Trouver une réalisation minimale est équivalent à trouver un réseau de Petri avec un nombre minimal de transitions internes, tel qu'on ait exactement un jeton sur chaque place entre des transitions internes et aucun jeton entre les transitions internes et les entrées (resp. les sorties).

1.2.8 Remarque On a des résultats duaux faisant intervenir le dioïde $\mathbb{R}_{\min}$ en considérant des séries dans $\mathbb{R}_{\min}[[\delta]]$, ce qui revient à minimiser le nombre de transitions internes du réseau de Petri, avec la contrainte d'un retard d'une unité de temps entre ces transitions. Il paraît plus difficile de traiter des contraintes mixtes (un jeton ou un retard entre deux transitions internes) ce qui se traduirait par un problème de réalisation minimale pour des séries rationnelles à coefficients booléiens en les variables *commutatives* γ et δ.

1.2.9 Contre exemple Nous montrons que la réalisation faible peut être arbitrairement "mauvaise". On considère le système suivant:

$$a = \begin{bmatrix} 5 & \varepsilon & 0 \\ \varepsilon & 4 & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & 3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

On a la matrice de Hankel tronquée:

$$h_{[0..5|0..5]} = \begin{bmatrix} 6 & 9 & 12 & 16 & 20 & 25 \\ 9 & 12 & 16 & 20 & 25 & 30 \\ 12 & 16 & 20 & 25 & 30 & 35 \\ 16 & 20 & 25 & 30 & 35 & 40 \\ 20 & 25 & 30 & 35 & 40 & 45 \\ 25 & 30 & 35 & 40 & 45 & 50 \end{bmatrix}$$

On trouve en appliquant 0,§5.5 une base faible formée des colonnes d'indices 0,1,2,4. On a donc une réalisation faible de dimension 4 supérieure à la dimension initiale. Plus généralement, prenons la nouvelle matrice à coefficients dans $\mathbb{R}_{\max}$.

$$c = \begin{bmatrix} 0 & r & s \end{bmatrix} .$$

On obtient après un calcul simple l'expression suivante de la série de transfert du système (a, b, c):

$$h = (\gamma\delta^5)^* \oplus \delta^r(\gamma\delta^4)^* \oplus \delta^s(\gamma\delta^3)^* .$$

La fonction $\mathsf{dat}\, h$ est la suivante (pour des valeurs entières de N)

$$\mathsf{dat}\, h(N) = \max(5\times N, r + 4\times N, s + 2\times N) = N^5 \oplus rN^4 \oplus sN^3 = N^3(N \oplus r \oplus \sqrt{s})(N \oplus (\frac{s}{r} \wedge \sqrt{s})) ,$$

qui n'est autre que la max de trois fonctions affines. La première colonne de la matrice de Hankel est donnée par $\mathcal{H}_{n0} = \mathsf{dat}\, h(n)$, et l'on a plus généralement $\mathcal{H}_{ni} = \mathsf{dat}\, h(n+i)$. Supposons $r^2 > s$, on a alors deux coins distincts positifs pour la fonction affine par morceaux $\mathsf{dat}\, h$

$$n_1 = r > n_2 = \frac{s}{r} .$$

On suppose en outre $s, r \in \mathbb{N}$ et $s > r$ de sorte que $\frac{s}{r} = s - r \in \mathbb{N}$. On a donc:

$$\mathcal{H}_{ni} = (ni)^3(ni \oplus r)(ni \oplus \frac{s}{r}) \ . \tag{1.2.d}$$

1.2.10 Lemme *Sous les hypothèses précédentes, et si* $1 \otimes \frac{s}{r} \prec r$, *les colonnes* $\mathcal{H}_{\cdot,0}, \ldots, \mathcal{H}_{\cdot,\frac{s}{r}}$ *sont faiblement indépendantes dans le moduloïde des colonnes de* $\mathcal{H}$.

Il en résulte que la dimension de la réalisation faible de $\mathcal{H}$ est supérieure à $1 \otimes \frac{s}{r} = s - r + 1$ et peut donc être arbitrairement grande devant la dimension minimale de réalisation (majorée par 3).

On peut voir sur la Figure VI.3 que les colonnes $\mathcal{H}_{\cdot,i}$ pour $0 \leq i \leq s - r$ sont faiblement indépendantes, i.e. que l'on n'a pas une combinaison:

$$\mathcal{H}_{\cdot,i} = \bigoplus_{j \in J} \lambda_j \mathcal{H}_{\cdot,j} \ , \tag{1.2.e}$$

où J est une partie finie de $\mathbb{N}$ ne contenant pas i. Le coefficient λ_j est en effet tel que la fonction associée à $\lambda_j \mathcal{H}_{\cdot,j}$ soit en dessous de $\mathcal{H}_{\cdot,i}$. Comme on passe du graphe de la colonne 0 au graphe de la colonne i par une translation de i unités vers la gauche, il est géométriquement clair que la partie du graphe de $\mathcal{H}_{\cdot,i}$ entre $\frac{s}{r}$ et r ne sera pas atteinte par le max à droite de (1.2.e). Cet argument motive la preuve algébrique suivante.

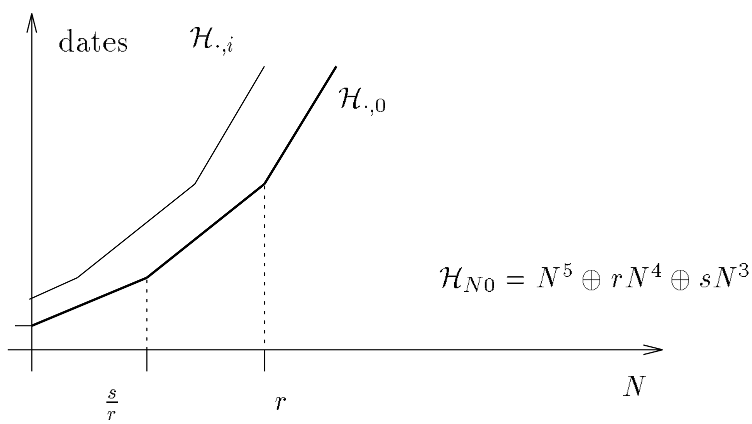

Figure VI.3: Transfert d'un système de rang faible élevé

Preuve de 1.2.10. Supposons une combinaison linéaire de type (1.2.e).

a/ *Si* $j \prec i$, *alors* $\lambda_j \preceq (\frac{i}{j})^3$. En effet, on a en remplaçant dans (1.2.d),

$$\mathcal{H}_{0i} = i^3 s \succeq \lambda_j \mathcal{H}_{0j} = \lambda_j j^3 s,$$

d'où a/.

b/ *Si* $j \succ i$, *alors* $\lambda_j \preceq (\frac{i}{j})^5$. En effet, on a pour n assez grand:

$$\mathcal{H}_{ni} = (ni)^5 \succeq \lambda_j \mathcal{H}_{nj} = \lambda_j (nj)^5,$$

d'où b/.

c/ *Choisissons* k *tel que* $\frac{s}{r} \prec ki \prec r$. *On a* $\bigoplus_{j\in J} \lambda_j \mathcal{H}_{kj} \prec \mathcal{H}_{ki}$.
Dans le cas où $j < i$, via a/, on a

$$\begin{aligned}\lambda_j \mathcal{H}_{kj} \preceq (\frac{i}{j})^3 \mathcal{H}_{kj} &= (\frac{i}{j})^3 (kj)^3 (kj \oplus r)(kj \oplus \frac{s}{r}) \\ &= i^3 k^3 r (kj \oplus \frac{s}{r}) = r(ki)^4 \frac{(kj \oplus \frac{s}{r})}{ki} \prec r(ki)^4 = \mathcal{H}_{ki} \ .\end{aligned}$$

Dans le cas où $j > i$, via b/, on a:

$$\begin{aligned}\lambda_j \mathcal{H}_{kj} \preceq (\frac{i}{j})^5 \mathcal{H}_{kj} &= (\frac{i}{j})^5 (kj)^3 (kj \oplus r)(kj \oplus \frac{s}{r}) \\ &= \frac{i^5}{j^2} k^3 (kj \oplus \frac{s}{r}) kj = r(ki)^4 (\frac{ki}{r} \oplus \frac{i}{j}) \prec r(ki)^4 = \mathcal{H}_{ki} \ .\end{aligned}$$

Cela achève la preuve de c/ et du Lemme. ∎

1.2.11 Remarque Dans le cas ci-dessus, $\frac{s}{r} = 6 - 4 = 2$. On a trouvé les colonnes 0,1,2 faiblement indépendantes ce qui est en accord avec le Lemme 1.2.10.

2 Critères de minimalité

2.1 Critère de rang mineur

2.1.1 Proposition *Le rang mineur de la matrice de Hankel est au plus égal à la dimension de la matrice* A.

Preuve Cela résulte de $\mathcal{H} = \mathcal{O}\mathcal{C}$, où $\mathcal{O} = [C, CA, CA^2, \ldots]^{\mathrm{T}}$ et $\mathcal{C} = [B, AB, A^2B, \ldots]$ sont les matrices d'observabilité et de commandabilité usuelles. Soit un mineur extrait de $\mathcal{H}$, $\det \mathcal{H}_{[I|J]}$. Il résulte de la formule de Binet-Cauchy symétrisée (cf. I,2.1.8) que

$$\det \mathcal{H}_{[I|J]} \ \nabla \ \bigoplus_K \det \mathcal{O}_{[I|K]} \det \mathcal{C}_{[K|J]}$$

laquelle somme est nulle dès que l'ordre du mineur est plus grand que n. ∎

Le corollaire suivant en résulte immédiatement.

2.1.2 Corollaire *La dimension minimale de réalisation est supérieure ou égale au rang mineur de la matrice de Hankel.*

2.1.3 Application au système étudié en 1.2.2 On a

$$\det \mathcal{H}_{[12|56]} = \det \begin{bmatrix} 16 & 20 \\ 20 & 25 \end{bmatrix} = 41 \ \not\nabla\ \varepsilon \ ,$$

d'où il résulte que le rang mineur de la matrice de Hankel est au moins égal à 2, et donc que les réalisations faibles de dimension 2 exhibées plus haut sont des réalisations minimales.

2.1.4 Remarque Le critère 2.1.2 est valable dans un demi-anneau commutatif quelconque.

2.2 Un contre exemple

2.2.1 Proposition *On considère la suite suivante*

$$s_k = \begin{cases} \varepsilon & si\ \exists p \in \mathbb{N},\quad k = 3^p \\ e & sinon \end{cases}$$

La suite s_k n'est pas réalisable, cependant, la matrice de Hankel H associée est de rang mineur fini.

Comme la suite s_k n'est pas périodique, elle n'est pas réalisable. Le fait que les déterminants extraits de H d'ordre assez grand sont égaux à $e^\bullet$ résulte des petits résultats combinatoires suivants.

2.2.2 Proposition *Soit $A \in \mathbb{B}^{n\times n}$. Si $\det A \not\nabla \varepsilon$, alors A a au moins $\frac{n(n-1)}{2}$ coefficients nuls.*

Preuve Pour une matrice 2×2, c'est immédiat. Quitte à multiplier A par une matrice de permutation, on peut supposer $\bigotimes_i A_{ii} = e$. Si le coefficient A_{ij} est non nul, le coefficient A_{ji} est nécessairement nul (sinon, via le résultat en dimension 2, $\det A = \det A[ij|ij]e \oplus \ldots = e^\bullet \oplus \ldots = e^\bullet$). Ainsi, la moitié seulement des coefficients hors diagonaux peut être non nul. On observe que la borne est atteinte pour les matrices triangulaires. ■

Il est intuitivement assez clair que si s_k a asymptotiquement peu de zéros, les mineurs d'ordre élevé de H auront beaucoup de e, et seront donc équilibrés. Pour montrer cela, étant donnée la structure de la matrice de Hankel, il n'est pas étonnant de faire appel à la notion suivante de triangle.

2.2.3 Définition *La matrice A est dite* sans triangle inférieur *si on n'a pas*

$$A_{ij} = \varepsilon, \quad A_{lk} = \varepsilon, \quad A_{\max(i,l),\max(j,k)} = \varepsilon \quad \text{pour } i \neq l \text{ et } j \neq k.$$

Cette définition correspond au dessin de la Figure VI.4:

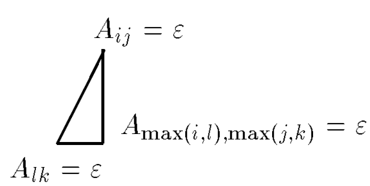

Figure VI.4: Triangle inférieur

2.2.4 Lemme *La matrice H est sans triangles inférieurs.*

Preuve Si $i+j = 3^p$, $l+k = 3^q$, on a $\max(i,l)+\max(j,k) \leq 2\times 3^{\max(p,q)}$. Si H admet un triangle inférieur, on a $\max(i,l)+\max(j,k) = 3^r$ avec nécessairement $r > \max(p,q)$, d'où $3^r \leq 2\times 3^{\max(p,q)}$: contradiction. ■

On montre maintenant qu'une grande matrice sans triangles inférieurs n'a pas trop de ε, ce qui d'après 2.2.1, entraîne la finitude du rang mineur de H. Cela résulte de la proposition suivante.

2.2.5 Proposition *Soit $C(n,p)$ le nombre maximal de zéros d'une matrice de taille $n \times p$ sans triangles inférieurs. On a:*

$$C(n,p) = n + p - 1 \ .$$

Preuve Tout d'abord, $C(n,1) = n$, $C(p,q) = C(q,p)$. Soit r le nombre de zéros dans la dernière colonne de A. On a l'équation de type programmation dynamique suivante:

$$C(n,p) = \max_{1 \le r \le n} [C(n-r+1, p-1) + r] \ . \tag{2.2.a}$$

Supposons en effet des zéros sur la dernière colonne en position $(i_1,p),(i_2,p),\ldots,(i_r,p)$ avec $i_1 < i_2 < \ldots < i_r$.

$$A = \begin{array}{c} \\ i_1 \\ \\ i_2 \\ \\ i_r \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & \ldots & p-1 & p \end{array} \\ \begin{bmatrix} & & & \varepsilon \\ & & & \\ + & \ldots & + & \varepsilon \\ & & & \\ + & \ldots & + & \varepsilon \end{bmatrix} \end{array} \ .$$

Les coefficients des $p-1$ premières colonnes sur les lignes $i_2, \ldots i_r$ sont nécessairement non-nuls (coefficients marqués d'un signe $+$). Moyennant le choix de r, on se ramène à maximiser le nombre de coefficients non nuls sur la sous-matrice de taille $(n-r+1) \times (p-1)$, $A(i_2 \ldots i_r | p)$ (soit A privée des lignes avec des $+$ et de la dernière colonne), ce qui donne la récurrence ci-dessus. On obtient les premières valeurs de $C(n,p)$:

n,p	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	2	3	4	5	...
3	3	4	5	...	
4	4	...			

d'où l'on induit immédiatement la formule 2.2.5. ∎

Ainsi, le nombre de zéros d'un mineur d'ordre n extrait de H est au maximum $C(n,n) = 2n-1$. Comme $\frac{n(n-1)}{2} > 2n-1$ pour $n \ge 5$, on a par la proposition 2.2.2 que tous les mineurs de H de taille supérieure à 5 sont équilibrés. Cela achève la preuve du contre exemple 2.2.1. ∎

2.3 Critère classique

Un moduloïde M de $\mathbb{R}_{\max}^{\mathbb{N}}$ sera dit stable si $\gamma^{-1}M \subset M$. On a de manière analogue au cas des séries "posi-rationnelles" [37]:

2.3.1 Proposition *La dimension minimale de réalisation d'une série rationnelle est égal à la plus petite dimension faible (cf. 0,5.5.3) d'un moduloïde stable contenant les colonnes de $\mathcal{H}$.*

Preuve Si $\mathcal{H} = \mathcal{O}\mathcal{C}$, où les matrices $\mathcal{O}$ et $\mathcal{C}$ ont été définies plus haut, on a $\gamma^{-1}\mathcal{O} = \mathcal{O}A$, et donc le moduloïde engendrée par les colonnes de $\mathcal{O}$ est stable. Réciproquement, soit $u_1, \ldots, u_r$ une base faible de ce moduloïde. On obtient une réalisation de dimension r en adaptant la preuve de 1.2.1. ∎

La caractérisation ci-dessus n'est pas effective, et la réalisation minimale d'une série rationnelle reste un problème ouvert. La condition dans 2.3.1 est équivalente à trouver une factorisation $\mathcal{H} = UV$, avec U stable. On notera que le problème plus général que 2.3.1, qui consiste à trouver le rang de Schein de la matrice $\mathcal{H}$, i.e. une factorisation UV sans la condition de stabilité est lui même ouvert. Même dans le cas des matrices de Boole, il semble qu'il n'y ait pas d'algorithmes polynômiaux connus pour trouver le rang de Schein [50].