Partie C

Outils et applications

Chapitre VII

Algèbre rationnelle des graphes d'événements temporisés

Introduction

On a vu au cours du Chapitre V que les graphes d'événements temporisés se modélisent naturellement par des opérateurs linéaires stationnaires continus sur le moduloïde des compteurs, ou dualement, sur le moduloïde des dateurs. D'ordinaire, les équations stationnaires faisant intervenir des opérateurs linéaires du type dérivation, différence finie ou retard, se résolvent par un calcul sur les transformées de Fourier, transformées en $z, \ldots$, ce qui a pour effet de ramener un problème d'intégration d'équations différentielles ou d'équations récurrentes à un problème d'algèbre sur les fractions rationnelles. Ici, on ne peut raisonner sur les transformées de Fenchel, ou "fonctions de transfert" introduites en V,§4. Il y a en effet une "perte d'information" par transformée de Fenchel (celle ci n'est pas injective). Il est cependant pertinent d'étudier les opérateurs continus stationnaires d'un point de vue purement algébrique. Le dioïde de ces opérateurs est isomorphe à un dioïde de séries formelles convenablement quotienté. Ce dioïde de séries rationnelles joue en quelque sorte le même rôle que le corps des fractions rationnelles dans le calcul de Heaviside. Cette approche est due à Cohen, Moller, Quadrat et Viot [23]. Notre contribution consiste à avoir précisé (et implémenté) l'algèbre effective de ces opérateurs. Ce chapitre développe les résultats publiés dans un papier antérieur en collaboration avec C. Klimann [42] et y ajoute la caractérisation des périodes des séries rationnelles (c'est l'analogue pour les séries formelles de l'étude des cyclicités des matrices dans la théorie de Perron-Frobenius). Signalons la contribution de X. Xinhe, Y. Haibin, L. Changyou et W. Liming [101], légèrement postérieure à la notre [42]. Ces auteurs obtiennent par des techniques de nature "géométrique" des résultats analogues sur les sommes et produits de séries rationnelles (sans les questions de périodicité).

Les algorithmes que nous avons obtenus ont été implémentés, et constituent le "package" MAX, écrit en MAPLE, qui fait l'objet du Chapitre suivant. Les problèmes algorithmiques les plus techniques sont traités en détail dans l'Appendice B.

1 Un exemple de graphe d'événements temporisé

On considère le graphe d'événements temporisé représenté sur la Figure VII.1. Nous renvoyons le lecteur à [23] pour les questions de modélisation des graphes d'événements, et rappelons seulement les faits suivants. Un graphe d'événements est un graphe biparti avec deux sortes de sommets: les places (cercles) et les transitions (rectangles). Dans le graphe circulent des jetons (cercles noirs) selon la règle illustrée sur la Figure VII.2: on dit qu'une transition est tirable s'il y a au moins 1 jeton dans chaque place amont. Lorsque la transition est tirée, on retire un jeton dans chaque place amont et l'on rajoute un jeton dans chaque place aval. Ici, le graphe est temporisé: les jetons doivent séjourner au moins un temps donné dans une place avant de devenir disponible pour le tir d'une transition aval. Les temps sont représentés par des bâtonnets sur la Figure VII.1. Par exemple, un jeton doit séjourner au moins 3 unités de temps dans la place entre u^1 et x^1 avant de permettre le tir de x^1. On va donner deux points de vue sur ce système.

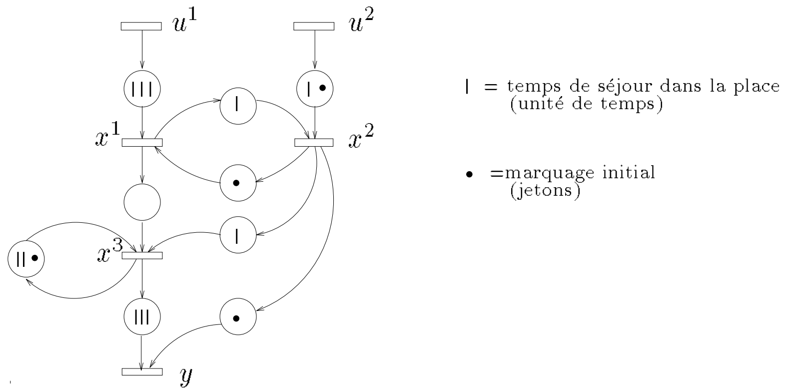


Figure VII.1: Un graphe d'événements temporisé

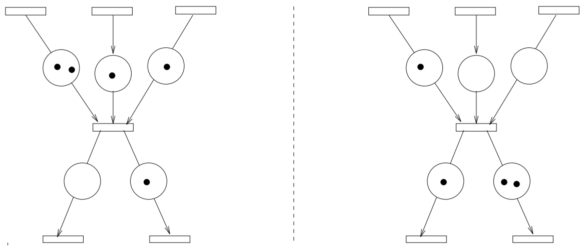


Figure VII.2: Tir d'une transition

1.1 Représentation par des systèmes linéaires récurrents

En associant à chaque transition x^i ($u^i, y \dots$) le *compteur* x^i_t (nombre de tirs de la transition i jusqu'à l'instant t), on peut écrire le système d'équations $(\min,+)$-linéaires suivant:

$$\begin{cases} x^1_t = \min(1 + x^2_t, u^1_{t-3}) \\ x^2_t = \min(x^1_{t-1}, 1 + u^2_{t-1}) \\ x^3_t = \min(x^1_t, x^2_{t-1}, 1 + x^3_{t-2}) \end{cases} \qquad y_t = \min(1 + x^2_t, x^3_{t-3}) \ , \tag{1.1.a}$$

Avec les notations du dioïde $\mathbb{R}_{\min}$, on peut écrire:

$$\left\{\begin{array}{l} x_t^1 = 1x_t^2 \oplus u_{t-3}^1 \\ x_t^2 = x_{t-1}^1 \oplus 1u_{t-1}^2 \\ x_t^3 = x_t^1 \oplus x_{t-1}^2 \oplus 1x_{t-2}^3 \end{array}\right. \qquad y_t = 1x_t^2 \oplus x_{t-3}^3 \ , \tag{1.1.b}$$

Matriciellement, il s'agit d'un système récurrent avec une partie implicite, soit $x_t = A_0 x_t \oplus A_1 x_{t-1} \oplus A_2 x_{t-2} \oplus B_1 u_{t-1} \oplus B_3 u_{t-3}$. La solution au plus tôt est donné par

$$x_t = A_0^*(A_1 x_{t-1} \oplus A_2 x_{t-2} \oplus B_1 u_{t-1} \oplus B_3 u_{t-3}) \ . \tag{1.1.c}$$

Le calcul de (1.1.c) revient à éliminer la partie implicite dans (1.1.b) (par exemple, on substitue $x_t^2 = x_{t-1}^1 \oplus 1u_{t-1}^2$ dans la première équation). On obtient alors:

$$\left\{\begin{array}{l} x_t^1 = 1x_{t-1}^1 \oplus 2u_{t-1}^2 \oplus u_{t-3}^1 \\ x_t^2 = x_{t-1}^1 \oplus 1u_{t-1}^2 \\ x_t^3 = 1x_{t-1}^1 \oplus 2u_{t-1}^2 \oplus u_{t-3}^1 \oplus x_{t-1}^2 \oplus 1x_{t-2}^3 \end{array}\right. \qquad y_t = 1x_t^2 \oplus x_{t-3}^3 \ .$$

En prenant les vecteurs $x_t = [x_t^1, x_t^2, x_t^3, x_{t-1}^3, x_{t-2}^3, x_{t-3}^3]^{\mathrm{T}}$ et $u_t = [u_{t-3}^1, u_{t-1}^2]$, on se ramène à la forme standard

$$x_t = Ax_{t-1} \oplus Bu_t, \quad y_t = Cx_t \tag{1.1.d}$$

avec

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 1 & e & \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} e & 2 \\ \varepsilon & 1 \\ e & 2 \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e \end{bmatrix} \ . \tag{1.1.e}$$

Plus généralement, l'étude des graphes d'événements temporisés se ramène à celle des systèmes linéaires récurrents (1.1.d). Un cas particulier intéressant est celui d'une entrée non contraignante ($u = \varepsilon$). On obtient alors $x_t = A^t x_0$, de sorte que l'étude du comportement du graphe en régime autonome se ramène au l'étude des puissances de A. Lorsque A est irréductible, on a le résultat de cyclicité suivant, du à Cohen, Dubois, Quadrat et Viot [17]:

$$\exists N \in \mathbb{N}, \ \exists c \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \qquad \forall n \geq N, \quad A^{n+c} = \rho(A)^c A^n \ , \tag{1.1.f}$$

où $\rho(A)$ dénote la moyenne arithmétique minimale (pour l'ordre naturel) des circuits de la matrice A (cf. Chapitre IV). Autrement dit, le système atteint un régime périodique en un temps fini, au bout duquel on a

$$x_{t+c} = \rho(A)^c x_t = c \times \rho(A) + x_t \ , \tag{1.1.g}$$

i.e. $c \times \rho(A)$ événements arrivent toutes les c unités de temps. Au vu de (1.1.g), le rayon spectral $\rho(A)$ s'interprète comme le *taux de production* du système. En l'occurrence, $\rho(A)$ est égal au poids moyen du circuit $a_{34}a_{43}$, soit

$$\rho(A) = \frac{A_{34} + A_{43}}{2} = \frac{1}{2} \ .$$

1.2 Approche opératorielle

On introduit deux opérateurs de décalage γ et δ sur les compteurs, soient:

$$\begin{aligned}(\gamma x)(t) &= x(t)+1\\ (\delta x)(t) &= x(t-1)\ .\end{aligned}$$

On rappelle (cf. V,§2.1) que γ et δ vérifient les règles de simplification suivantes:

$$\forall c,c',d,d' \in \mathbb{Z},\quad \begin{array}{ll}\text{(i)} & \gamma^c \oplus \gamma^{c'} = \gamma^{\min(c,c')}\\ \text{(ii)} & \delta^d \oplus \delta^{d'} = \delta^{\max(d,d')}\ .\end{array} \tag{1.2.a}$$

Le système (1.1.b) se réécrit comme suit à l'aide de ces opérateurs:

$$x = ax \oplus bu,\ y = cx,\ \text{ où }\ a = \begin{bmatrix} \varepsilon & \gamma & \varepsilon\\ \delta & \varepsilon & \varepsilon\\ e & \delta & \gamma\delta^2 \end{bmatrix},\ b = \begin{bmatrix} \delta^3 & \varepsilon\\ \varepsilon & \gamma\delta\\ \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix},\ c = \begin{bmatrix} \varepsilon & \gamma & \delta^3 \end{bmatrix}\ . \tag{1.2.b}$$

Il s'agit là d'un système matriciel implicite en les opérateurs γ et δ, que l'on résout formellement par $y = ca^*bu$. L'opérateur $h = ca^*b$ mérite le nom de *transfert*. En l'occurrence, on calcule

$$y = hu = h_1u_1 \oplus h_1u_2 = \delta^8(\gamma\delta^2)^*u_1 \oplus \gamma\delta^5(\gamma\delta^2)^*u_2\ . \tag{1.2.c}$$

Le coefficient h_1 représente le transfert de la première entrée à la sortie. On constate que les coefficients de h sont des séries rationnelles en γ et δ s'exprimant à l'aide d'une seule étoile. On verra plus loin que l'étoile $(\gamma\delta^2)^*$ commune à h_1 et h_2 représente la *cyclicité* du système en régime autonome: ultimement, les transitions x^i et y seront tirées une fois (exposant de γ) toute les deux (exposant de δ) unités de temps. En particulier, le taux de production s'obtient en divisant l'exposant de γ par celui de δ dans $(\gamma\delta^2)^*$, soit $\frac{1}{2}$, en conformité avec §1.1. On voit sur cet exemple le gain (en compacité des notations) de la représentation par transfert (1.2.c) par rapport à la représentation récurrente. D'autres problèmes se posent par ailleurs en termes de transfert. Par exemple, on voit facilement que le graphe d'événements de la Figure VII.3 a même série de transfert. La caractérisation des graphes d'événements "minimaux" est un problème (ouvert) de réalisation minimale qui soulève les mêmes difficultés qu'en VI,1.2.8. Ce Chapitre étudie l'algèbre des opérateurs γ et δ, et montre

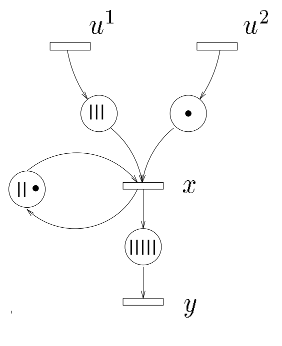


Figure VII.3: Graphe d'événements simplifié

en particulier comment calculer les séries de transfert de type (1.2.c)

2 Etude de l'algèbre des opérateurs γ et δ

2.1 Le dioïde $\mathcal{M}_{\mathrm{ax}}^{\mathrm{in}}[[\gamma,\delta]]$

Les opérateurs qui interviennent dans les graphes d'événements temporisés s'exprimeront comme somme d'opérateurs élémentaires $\gamma^n\delta^t$ (on rappelle que γ et δ commutent). Il est donc commode s'introduire le dioïde $\mathbb{B}[[\gamma,\delta]]$ des séries formelles commutatives à coefficients booléiens en deux indéterminées γ et δ et à exposants dans $\mathbb{Z}$ (contrairement à 0,1.0.8, où les exposants étaient positifs ou nuls). γ et δ désignent donc dans l'écriture $\mathbb{B}[[\gamma,\delta]]$ deux *indéterminées*, et non plus les opérateurs de décalage. Une série formelle de $\mathbb{B}[[\gamma,\delta]]$ s'écrira de manière unique

$$s=\bigoplus_{n,t\in\mathbb{Z}} s(n,t)\gamma^n\delta^t, \tag{2.1.a}$$

avec $s(n,t)=e$ ou ε. On note que $\mathbb{B}[[\gamma,\delta]]$ est un dioïde complet. Le *support* d'une série s est la partie de $\mathbb{Z}^2$ suivante:

$$\operatorname{supp} s := \{(n,t)\in\mathbb{Z}^2 \mid s(n,t)\neq\varepsilon\} \ .$$

On a l'écriture creuse

$$s=\bigoplus_{(n,t)\in\operatorname{supp} s}\gamma^n\delta^t,$$

et l'on notera parfois $s=\bigoplus_{i\in I}\gamma^{n_i}\delta^{t_i}$. On traduit ensuite les règles de simplification (1.2.a). On notera $\mathcal{M}_{\mathrm{ax}}^{\mathrm{in}}[[\gamma,\delta]]$ le "quotient"[1] de $\mathbb{B}[[\gamma,\delta]]$ par les règles (1.2.a). On peut caractériser simplement le dioïde $\mathcal{M}_{\mathrm{ax}}^{\mathrm{in}}[[\gamma,\delta]]$. Introduisons l'application φ suivante (ce qui sera justifié de manière heuristique dans un instant):

$$\varphi:\mathbb{B}[[\gamma,\delta]]\to\mathbb{B}[[\gamma,\delta]],\qquad \varphi(s)=s\gamma^*(\delta^{-1})^* \tag{2.1.b}$$

Le résultat central est que deux séries booléiennes s et s' donnent la même classe d'équivalence dans $\mathcal{M}_{\mathrm{ax}}^{\mathrm{in}}[[\gamma,\delta]]$ ssi on a $\varphi(s)=\varphi(s')$.

2.1.1 Théorème *On a les égalités et isomorphismes de dioïdes:*

$$\mathcal{M}_{\mathrm{ax}}^{\mathrm{in}}[[\gamma,\delta]]=\mathbb{B}[[\gamma,\delta]]/\varphi\simeq\mathcal{L}_{\mathrm{stat}}(\mathsf{Croiss}(\mathbb{Z},\overline{\mathbb{Z}}_{\min}))\simeq\mathcal{L}_{\mathrm{stat}}(\mathsf{Croiss}(\mathbb{Z},\overline{\mathbb{Z}}_{\max})) \ .$$

2.1.2 Argument heuristique On constate que la règle (1.2.a),(i) entraîne

$$e=e\oplus\gamma\oplus\gamma^2\oplus\ldots=\gamma^* \ .$$

De même (1.2.a),(ii) entraîne

$$e=e\oplus\delta^{-1}\oplus\delta^{-2}\oplus\ldots=(\delta^{-1})^* \ .$$

On a donc $e=\gamma^*=(\delta^{-1})^*=\gamma^*(\delta^{-1})^*$, et donc généralement pour tout opérateur s, l'identité $s\gamma^*(\delta^{-1})^*=s$. Cela suggère d'introduire l'application φ définie plus haut. Il résulte alors de $(\gamma^*(\delta^{-1})^*)^2=\gamma^*(\delta^{-1})^*$ (cf. 0,4.1.6,(v)) que

$$\varphi(s)=\varphi(s\gamma^*(\delta^{-1})^*)$$

i.e. que s et $s\gamma^*(\delta^{-1})^*$ représentent bien le même élément dans le dioïde $\mathbb{B}[[\gamma,\delta]]$ quotienté par φ.

[1] De manière précise, le quotient par la plus fine des congruences $\mathcal{R}$ vérifiant la règle (1.2.a). C'est l'analogue d'une *présentation* pour un groupe [65].

2.2 Preuve du théorème 2.1.1

2.2.1 Lemme *La relation $\mathcal{R}_\varphi$ est une congruence vérifiant (1.2.a).*

Preuve Le fait que $\mathcal{R}_\varphi$ est compatible avec la structure de dioïde complet de $\mathbb{B}[[\gamma,\delta]]$ résulte de ce que $\varphi(\bigoplus_{i\in I} a_i) = \bigoplus_{i\in I}\varphi(a_i)$ et $\varphi(ab) = \varphi(a)b = a\varphi(b)$. Le fait que

$$\varphi(\gamma^c \oplus \gamma^{c'}) = \varphi(\gamma^{\min(c,c')}),\ \varphi(\delta^d \oplus \delta^{d'}) = \varphi(\delta^{\max(d,d')})$$

résulte d'un calcul immédiat. ∎

2.2.2 Lemme *Toute congruence $\mathcal{R}'$ vérifiant (1.2.a) est plus grossière que $\mathcal{R}_\varphi$.*

Preuve Il résulte de l'argument heuristique ci-dessus que toute série x est égale à $x\gamma^*(\delta^{-1})^* = \varphi(x)$ modulo $\mathcal{R}'$. On a donc

$$\varphi(x) = \varphi(y) \Rightarrow x\mathcal{R}'\varphi(x) = \varphi(y)\mathcal{R}'y$$

i.e. $x\mathcal{R}_\varphi y \Rightarrow x\mathcal{R}'y$. ∎

L'égalité des deux premiers dioïdes dans le Théorème 2.1.1 résulte immédiatement des deux lemmes ci-dessus. ∎

2.2.3 Proposition (Isomorphisme séries-compteurs) *On a l'isomorphisme suivant:*

$$\mathsf{ser_c} : \begin{cases} \mathsf{Croiss}(\mathbb{Z},\overline{\mathbb{Z}}_{\min}) & \longrightarrow \quad \mathcal{M}_{\mathrm{ax}}^{\mathrm{in}}[[\gamma,\delta]] \\ k & \longmapsto \quad \mathsf{ser_c}k = \bigoplus_{t\in\mathbb{Z}}\gamma^{k(t)}\delta^t \end{cases}$$

(avec la convention $\gamma^{-\infty} = (\gamma^{-1})^*$ et $\gamma^{+\infty} = \varepsilon$). L'isomorphisme compt *inverse de* $\mathsf{ser_c}$ *est défini par*

$$\mathsf{compt} := \mathsf{ser_c}^\sharp, \quad [\mathsf{ser_c}^\sharp(s)](t) = \inf\{n\in\mathbb{Z} \mid \gamma^n\delta^t \preceq s\}\ . \tag{2.2.a}$$

Preuve de la proposition 2.2.3.

(i): Il est immédiat que $\mathsf{ser_c}$ est résiduable, de résiduée compt donnée par (2.2.a).

(ii): $\mathsf{ser_c}$ est inversible à droite. Soit en effet

$$s = \bigoplus_{i\in I}\gamma^{n_i}\delta^{t_i}\ .$$

On a pour tout $i \in I$, $(\mathsf{ser_c}^\sharp(s))(t_i) \leq n_i$, d'où $(\mathsf{ser_c}\circ\mathsf{ser_c}^\sharp(s)) \succeq \gamma^{n_i}\delta^{t_i}$ et en sommant sur les i $\mathsf{ser_c}\circ\mathsf{ser_c}^\sharp(s) \succeq s$, i.e. $\mathsf{ser_c}\circ\mathsf{ser_c}^\sharp \succeq \mathrm{Id}$. L'autre inégalité résultant de la définition même d'une application résiduée (cf. 0,5.1.1), on a que $\mathsf{ser_c}^\sharp$ est un inverse à droite de $\mathsf{ser_c}$.

(iii) $\mathsf{ser_c}$ est injective (i.e. inversible à gauche). Cela résulte du lemme suivant:

2.2.4 Lemme $\mathsf{ser_c}k \preceq \mathsf{ser_c}k'$ *entraîne* $k \preceq k'$

Preuve de 2.2.4. Si

$$\bigoplus_{t\in\mathbb{Z}} \gamma^{k(t)}\delta^t \preceq \bigoplus_{t'\in\mathbb{Z}} \gamma^{k'(t')}\delta^{t'}$$

on a pour tout t

$$\gamma^{k(t)}\delta^t \preceq \bigoplus_{t'\in\mathbb{Z}} \gamma^{k'(t')}\delta^{t'}$$

i.e.

$$\exists t' \in \mathbb{Z},\ \gamma^{k(t)}\delta^t \preceq \gamma^{k'(t')}\delta^{t'}$$

ce qui entraîne $t' \geq t$ et $k(t) \preceq k'(t')$. Comme k' est décroissante pour l'ordre $\preceq$, on a $k'(t) \succeq k'(t') \succeq k(t)$, d'où $k \leq k'$ ce qui est bien 2.2.4.

(iii) il est immédiat que $\mathsf{ser_c}$ transforme le min point par point en somme de séries et l'inf-convolution en produit. ∎

De manière analogue:

2.2.5 Proposition (Isomorphisme séries-dateurs) *On a l'isomorphisme*

$$\mathsf{ser_d} : \begin{cases} (\mathsf{Croiss}(\mathbb{Z},\overline{\mathbb{Z}}_{\max}), \max, *) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{\mathrm{ax}}^{\mathrm{in}}[[\gamma,\delta]] \\ k & \longmapsto & \mathsf{ser_d}k = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \gamma^n\delta^{k(n)}. \end{cases}$$

avec la convention $\delta^{+\infty} := \delta^*$ et $\delta^{-\infty} := \varepsilon$. L'isomorphisme dat *inverse de* $\mathsf{ser_d}$ *est défini par*

$$\mathsf{dat} = \mathsf{ser_d}^{\uparrow},\quad \mathsf{dat}\, s(n) = \sup\{t\in\mathbb{Z} \mid \gamma^n\delta^t \preceq s\}\ . \tag{2.2.b}$$

Le théorème résulte de 2.2.3 et du fait que le dioïde des systèmes linéaires stationnaires sur $\mathsf{Croiss}(\mathbb{Z},\overline{\mathbb{Z}}_{\min})$ est isomorphe à $(\mathsf{Croiss}(\mathbb{Z},\overline{\mathbb{Z}}_{\min}),\oplus,*)$ (cf. V,3.2.6). ∎

L'application $\mathsf{compt}\, s$ (resp. $\mathsf{dat}\, s$) définie ci dessus sera qualifiée de "fonction compteur associée à s" (resp. "fonction dateur associée à s").

2.2.6 Lemme *L'application $\varphi : s \mapsto \varphi(s) = s\gamma^*(\delta^{-1})^*$. est un isomorphisme continu de $\mathcal{M}_{\mathrm{ax}}^{\mathrm{in}}[[\gamma,\delta]]$ sur $\varphi(\mathbb{B}[[\gamma,\delta]])$.*

Preuve le seul point non trivial est $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$. Posons $z = (\gamma \oplus \delta^{-1})$. Par 0,4.1.6,(iv), on a $z^*z^* = z^*$, d'où $\varphi(a)\varphi(b) = az^*bz^* = abz^* = \varphi(ab)$. ∎

Ce résultat autorise une représentation géométrique simple de $\mathcal{M}_{\mathrm{ax}}^{\mathrm{in}}[[\gamma,\delta]]$. L'application $s \mapsto \mathrm{supp}\varphi(s)$ permet em effet de représenter une série formelle de $\mathcal{M}_{\mathrm{ax}}^{\mathrm{in}}[[\gamma,\delta]]$ par une partie de $\mathbb{Z}^2$. Par exemple, on représente la classe d'équivalence de $\gamma^2\delta^2$ par le cône de $\mathbb{Z}^2$ de type "sud-est" $\{(2+n', 2-t');\ (n',t')\in\mathbb{N}^2\}$. Plus généralement, on associe au monôme $\gamma^n\delta^t$ l'ensemble

$$\mathrm{supp}\varphi(\gamma^n\delta^t) = [n,+\infty[\times]-\infty,t] = (n,t) + \mathbb{N}\times(-\mathbb{N})\ , \tag{2.2.c}$$

et l'on représente une somme de tels monômes par l'union des cônes de type (2.2.c) associés. La Figure VII.4 représente le polynôme $p = e \oplus \gamma^2 \oplus \gamma^2\delta^2 \oplus \gamma^3\delta^3$. On observe que le monôme γ^2 (représenté par le cône issu du carré noir) est innessentiel (i.e. peut être retiré du représentant sans en changer la classe d'équivalence modulo φ), car dans l'"ombre" de $\gamma^2\delta^2$.

Nous donnons maintenant deux formules utiles exprimant $\mathsf{compt}\, s$ et $\mathsf{dat}\, s$ en fonction d'un représentant quelconque de s.

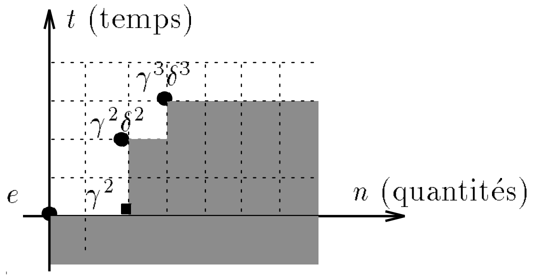


Figure VII.4: Représentation graphique du polynôme $p = e \oplus \gamma^2\delta^2 \oplus \gamma^2 \oplus \gamma^3\delta^3$

2.2.7 Proposition *Soit* $s = \bigoplus_{i \in I} \gamma^{n_i}\delta^{t_i}$. *Les fonctions compteur et dateur associées à* s *sont données par*

$$\mathsf{compt}\, s(t) = \inf_{t_i \geq t} n_i, \quad \mathsf{dat}\, s(n) = \sup_{n_i \leq n} t_i \ .$$

Preuve Les propositions suivantes sont équivalentes:

$$\begin{array}{rll}
\gamma^n\delta^t \preceq s & \text{dans } \mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\gamma,\delta]] & \\
\varphi(\gamma^n\delta^t) \preceq \varphi(s) & \text{dans } \mathbb{B}[[\gamma,\delta]] & \\
\gamma^n\delta^t \preceq \varphi(s) & & (\text{car } \varphi \succeq \text{Id et } \varphi^2 = \varphi) \\
\{(n,t)\} \subset \text{supp}\varphi(s) & & (\text{par } 2.2.6) \\
\{(n,t)\} \subset \cup_i \text{supp}\varphi(\gamma^{n_i}\delta^{t_i}) & & \\
\{(n,t)\} \subset \cup_i [n_i, +\infty[\times] - \infty, t_i] & & (\text{cf } (2.2.\text{c})) \\
\exists i \in I, \ \ n \geq n_i \text{ et } t \leq t_i & &
\end{array}$$

Compte tenu de la dernière condition, l'expression de $\mathsf{compt}\, s$ donnée en (2.2.a) se réécrit:

$$\mathsf{compt}\, s(t) = \inf\{n \in \mathbb{Z} \mid \ \exists i \in I, \ n \geq n_i \text{ et } t \leq t_i\} = \inf\{n_i \mid \ t_i \geq t\} \ .$$

Preuve analogue pour $\mathsf{dat}\, s$. ■

Signalons enfin que l'on passe de $\mathsf{dat}\, s$ à $\mathsf{compt}\, s$ par une formule de type résiduation (cf. Caspi et Halbwachs [15]). On a

$$\mathsf{dat}\, s(n) = \sup\{t \in \mathbb{Z} \mid \ \mathsf{compt}\, s(t) \leq n\} \ . \tag{2.2.d}$$

Soit en effet $s = \bigoplus_{l \in \mathbb{Z}} \gamma^{k(l)}\delta^l$ où $k = \mathsf{compt}\, s$. On a

$$\begin{aligned}
\mathsf{dat}\, s(n) = h(n) &= \sup\{t \in \mathbb{Z} \mid \ \gamma^n\delta^t \preceq \textstyle\bigoplus_{l \in \mathbb{Z}} \gamma^{k(l)}\delta^l\} \\
&= \sup\{t \in \mathbb{Z} \mid \ \exists \tau \geq t, \ \ n \geq k(\tau)\} \\
&= \sup\{t \in \mathbb{Z} \mid \ n \geq k(t)\} \qquad \text{car } k \text{ est croissante.}
\end{aligned}$$

■

2.3 Calcul dans le dioïde $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[\gamma,\delta]$

2.3.1 Test d'inégalité Le test d'inégalité (et donc d'égalité) de deux séries est simple. Comme on a

$$\bigoplus_{i \in I} a_i \preceq p \Leftrightarrow \forall i \in I, \ a_i \preceq p \tag{2.3.a}$$

il suffit de savoir vérifier si un monôme est inférieur à une série s. On a $\gamma^n\delta^t \preceq s = \bigoplus_{i\in I}\gamma^{n_i}\delta^{t_i}$ dans le dioïde $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\gamma,\delta]]$ ssi on a dans $\mathbb{B}[[\gamma,\delta]]$

$$\gamma^n\delta^t \preceq \varphi(s) = s\gamma^*(\delta^{-1})^*$$

soit en développant les étoiles:

$$\exists i \in I, \exists(n,t) \in \mathbb{N}^2 \quad \gamma^n\delta^t \preceq \gamma^{n_i+n}\delta^{t_i-t}$$

soit pour conclure

$$\gamma^n\delta^t \preceq \bigoplus_{i\in I}\gamma^{n_i}\delta^{t_i} \Leftrightarrow \exists i \in I,\ n \geq n_i \text{ et } \ t \leq t_i \ . \tag{2.3.b}$$

Graphiquement, (n,t) appartient à l'un des "cônes sud-est" $(n_i,t_i) + \mathbb{N}\times(-\mathbb{N})$, cf. Figure VII.4.

2.3.2 Représentant minimal des polynômes

Il est "clair" sur le dessin VII.4 que le représentant minimal[2] du polynôme représenté par une partie de $\mathbb{Z}^2$ modulo φ est donné par "l'ensemble des points extrémaux en haut à gauche" de cette partie, en l'occurrence $p_0 = e \oplus \gamma^2\delta^2 \oplus \gamma^3\delta^3$. De manière précise, on dira que le monôme $\gamma^{n_i}\delta^{t_i}$ est redondant dans la somme $p = \bigoplus_{j\in J}\gamma^{n_j}\delta^{t_j}$ si $p = \bigoplus_{j\in J\setminus\{i\}}\gamma^{n_j}\delta^{t_j}$, ou d'après (2.3.b):

$$\gamma^{n_i}\delta^{t_j} \text{ redondant } \ \Leftrightarrow \exists j \in J,\ n_i \geq n_j \ \text{ et } \ t_i \leq t_j \ .$$

Il est clair qu'en enlevant éventuellement des monômes redondants, on obtient *un* représentant minimal. L'unicité résulte de ce que les monômes $\gamma^{n_k}\delta^{t_k}$ du représentant minimal sont "extémaux en haut à gauche", i.e. vérifient:

$$\gamma^{-1}\gamma^{n_k}\delta^{t_k} \not\preceq p \text{ et } \ \delta\gamma^{n_k}\delta^{t_k} \not\preceq p \ .$$

Nous laissons le lecteur préciser ce dernier point. On pourra aussi se reporter à l'annexe B où un résultat de représentant minimal est donné pour une classe générale dioïdes quotientés par de "bonnes congruences", dont $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\gamma,\delta]]$ est un cas particulier.

En résumé, on peut énoncer:

2.3.3 Proposition (Forme canonique) *Un polynôme $a \in \mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[\gamma,\delta]$ s'écrit de manière unique sous la forme:*

$$a = \gamma^{n_1}\delta^{t_1} \oplus \gamma^{n_2}\delta^{t_2} \oplus \ldots \oplus \gamma^{n_k}\delta^{t_k} \ . \tag{2.3.c}$$

où $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$ et $t_1 < t_2 < \ldots < t_k$. Le terme à droite de (2.3.c) est le représentant minimal de a.

Pour le polynôme de la Figure VII.4, la forme canonique de p est $p = e\oplus\gamma^2\delta^2\oplus\gamma^3\delta^3$. Nous renvoyons le lecteur à l'annexe B où les questions d'algorithmique des représentants minimaux (réduction de la somme, du produit,...) sont précisément traitées.

[2]i.e. la plus petite série booléienne dans la classe d'équivalence

3 Séries rationnelles

3.1 Généralités

On rappelle que la *clôture rationnelle* d'un sous ensemble $\mathcal{E}$ d'un dioïde est définie comme le plus petit dioïde *rationnellement clos* (i.e. stable par l'opération étoile) contenant $\mathcal{E}$. On le note $\mathcal{E}^*$. On le caractérise comme l'ensemble formé sommes, produits et étoiles d'un nombre fini d'éléments de $\mathcal{E}$, ainsi que de ε et e. On a $(\mathcal{E}^*)^* = \mathcal{E}^*$.

3.1.1 Définition (Séries rationnelles de $\mathcal{M}_{\mathrm{ax}}^{\mathrm{in}}[[\gamma,\delta]]$) *On appelle séries* rationnelles *les séries de $\mathcal{M}_{\mathrm{ax}}^{\mathrm{in}}[[\gamma,\delta]]$ appartenant à la clôture rationnelle de l'ensemble $\{\gamma,\delta\}$.*

Le dioïde des séries rationnelles coïncide évidemment avec la clôture rationnelle du dioïde des polynômes causaux. Les séries qui interviendront dans le calcul des transferts de graphes d'événements temporisés seront donc rationnelles.

3.2 Représentation des rationnels

On a montré en 2.2.6 que le dioïde $\mathcal{M}_{\mathrm{ax}}^{\mathrm{in}}[[\gamma,\delta]]$ se représentait comme l'ensemble des parties de $\mathbb{Z}^2$ de la forme $X+\mathcal{C}$, où $\mathcal{C}$ est le cône "sud-est" $(1,0)\mathbb{N}+(0,-1)\mathbb{N}$. L'étude des rationnels de $\mathcal{M}_{\mathrm{ax}}^{\mathrm{in}}[[\gamma,\delta]]$ apparaît donc comme une spécialisation de la théorie des parties rationnelles de $\mathbb{Z}^2$ (l'ensemble des rationnels de $\mathbb{Z}^2$ est obtenu par clôture rationnelle de l'ensemble des singletons dans le dioïde $(\mathcal{P}(\mathbb{Z}^2),\cup,+)$). On peut donc appliquer certains résultats classiques [32]. Rappelons qu'une partie linéaire de $\mathbb{Z}^k$ est un ensemble de la forme:

$$a+V^*$$

où a est un point et V une partie finie de $\mathbb{Z}^k$. Une union finie de parties linéaires, $\cup_i(a_i+V_i^*)$, est dite semi-linéaire. Par application immédiate des propriétés 0,4.1.6, on obtient des formules donnant les sommes, produits, étoiles d'expressions de type (3.2.a), ce qui au passage prouve que l'ensemble des parties semi-linéaires coïncide avec l'ensemble des rationnels. En revenant au dioïde $\mathcal{M}_{\mathrm{ax}}^{\mathrm{in}}[[\gamma,\delta]]$, on obtient immédiatement qu'une série s est rationnelle ssi elle s'écrit sous la forme:

$$s=\bigoplus_i a_i V_i^* \ , \tag{3.2.a}$$

où les a_i (resp. V_i) sont des monômes (resp. polynômes) causaux.

Cette représentation est cependant insuffisante pour notre propos. Un rationnel s admet en effet des représentations différentes, et la détermination de l'égalité de deux de ces représentations requiert en général la résolution d'équations linéaires diophantiennes dont le nombre d'inconnues est de l'ordre du nombre maximal de monômes des V_i: par exemple, décider si le point $b\in\mathbb{Z}^k$ appartient à $a_iV_i^*$ avec $V_i=\{u_1,\ldots,u_r\}$ revient à trouver $x\in\mathbb{N}^r$ tel que $b=a_i+\sum_{l=1}^k x_l u_l$. De même, le calcul de l'inf de telles expressions, de leurs différences et quotients résidués, ainsi que la détermination du dateur ou du compteur (et donc du sens physique) associé à la série s donnée par (3.2.a) n'est pas clair.

Il est cependant un cas où l'on a une représentation plus simple que (3.2.a). Nous allons considérer d'abord les parties rationnelles de $\mathbb{N}$, et nous donnerons un résultat de *périodicité* pour les parties rationnelles de $\mathbb{N}$ (que nous n'avons pas trouvé sous cette forme dans la littérature, mais qui est conséquence immédiate de résultats classiques). Nous montrerons ensuite comment ce résultat s'étend naturellement au dioïde $\mathcal{M}_{\mathrm{ax}}^{\mathrm{in}}[[\gamma,\delta]]$.

3.3 Analogie avec les parties rationnelles de $\mathbb{N}$

3.3.1 Définition *La partie $X \subset \mathbb{N}$ est dite* ultimement périodique *(ou plus simplement périodique) s'il existe un entier n, deux parties finies P et Q telles que* (i) *le plus petit élément de Q majore strictement P,* (ii) *Q soit de diamètre au plus $n-1$, et*

$$X = P \cup (Q + \{n\}^*) = P \cup Q \cup (Q+n) \cup (Q+2n) \cup (Q+3n) \dots \quad . \tag{3.3.a}$$

Les conditions (i) et (ii) ne sont là que pour que cette union soit disjointe et puisse s'interpréter géométriquement: nous laissons au lecteur le soin de vérifier que l'on définit le même ensemble de parties en supprimant les conditions (i) et (ii). L'interprétation de (3.3.a) est claire: soit $K = \min Q$, la partie tronquée $X \cap [K, +\infty[$ est formée de l'ensemble de points Q répété avec les translations successives $n, 2n, 3n, \dots$ L'entier n mérite le nom de période.

3.3.2 Exemple La partie $X = \{0, 4, 5, 8, 9, 12, 13, 16, 17, \dots\}$ est périodique de période $n = 4$. Prendre $P = \{0\}$ et $Q = \{4, 5\}$.

On a alors le résultat élémentaire suivant:

3.3.3 Théorème *Une partie de $\mathbb{N}$ est rationnelle ssi elle est périodique.*

Esquisse de preuve Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des parties périodiques, et $\mathcal{S}$ l'ensemble des singletons. L'ensemble des parties rationnelles est égal à $\mathcal{S}^*$. Comme trivialement (o): $\mathcal{S} \subset \mathcal{P} \subset \mathcal{S}^*$, il suffit pour montrer 3.3.3 de vérifier que l'ensemble des séries périodiques est rationnellement clos: on aura alors en prenant l'étoile de (o): $\mathcal{S}^* \subset \mathcal{P}^* = \mathcal{P} \subset (\mathcal{S}^*)^* = \mathcal{S}^*$. Plutôt que de donner une preuve précise de ce fait (le lecteur pourra se reporter aux deux sections suivantes où l'on généralise ce résultat), nous préférons ici expliquer pourquoi l'union et la somme vectorielle de certaines parties périodiques simples sont périodiques.

3.3.4 Lemme *Soient $a, b \in \mathbb{N}$. Ecrivons* $\mathrm{ppcm}(a,b) = ka = k'b$*. On a*

$$\{a\}^* \cup \{b\}^* = \{0, a, 2a, \dots, (k-1)a, b, 2b, \dots, (k'-1)b\} + \{\mathrm{ppcm}(a,b)\}^* \quad .$$

Preuve trivial. ∎

3.3.5 Lemme *Il existe $K \in \mathbb{N}$ et P majorée par $K-1$ telle que*

$$\{a\}^* + \{b\}^* = P \cup (K + \{\mathrm{pgcd}(a,b)\}^*) \quad .$$

Ce lemme est équivalent au fait élémentaire suivant sur les équations linéaires diophantiennes, qui résulte immédiatement du théorème de Bezout.

3.3.6 Lemme *Soient a et b deux entiers positifs. Il existe un entier K tel que pour tout $c \geq K$ et multiple de* $\mathrm{pgcd}(a,b)$*, l'équation*

$$ax + by = c \tag{3.3.b}$$

admette une solution $(x, y) \in \mathbb{N}^2$.

Il résulte de 3.3.3 qu'une partie périodique de $\mathbb{N}$ s'écrit à l'aide de l'étoile d'un seul singleton. De manière analogue, nous définissons les séries périodiques dans $\mathcal{M}_{\mathrm{ax}}^{\mathrm{in}}[[\gamma, \delta]]$.

3.3.7 Définition (Série périodique) *La série* $s \in \mathcal{M}_{\mathrm{ax}}^{\mathrm{in}}[[\gamma,\delta]]$ *est* périodique *ssi il existe deux polynômes causaux* p *et* q *ainsi qu'un monôme causal* r*, tels que:*

$$s = p \oplus qr^* \enspace .$$

Le résultat principal sur les séries rationnelles de $\mathcal{M}_{\mathrm{ax}}^{\mathrm{in}}[[\gamma,\delta]]$ est le suivant.

3.3.8 Théorème *(Cohen, Moller, Quadrat et Viot [23]) Dans* $\mathcal{M}_{\mathrm{ax}}^{\mathrm{in}}[[\gamma,\delta]]$*, une série est rationnelle ssi elle est périodique.*

De manière analogue à 3.3.3, il suffit de vérifier que l'ensemble des séries périodiques est rationnellement clos. Nous renvoyons à [23] pour la preuve originale de ce résultat. Nous donnons ici une preuve analogue, mais plus précise quant à la caractérisation des périodicités. Nous donnerons d'abord les règles de calculs sur certaines séries rationnelles simples, faisant en particulier le lien avec certaines équations diophantiennes linéaires. Nous renvoyons par ailleurs à l'annexe B où l'on donne quelques raffinements de ces algorithmes, ceux-là mêmes que nous avons implémenté en MAPLE.

4 Règles de calcul sur les éléments simples

4.0.1 Définition (Elément simple) *Nous appellerons élément simple une série de la forme* mr^* *où* m *et* r *sont des monômes causaux.*

L'élément simple général s'écrira donc:

$$s = \gamma^n \delta^t \, (\gamma^\nu \delta^\tau)^* \enspace ,$$

où $n, t, \nu, \tau \in \mathbb{N}$. Si $\tau = 0$, on a $r^* = (\gamma^\nu)^* = e$, $mr^* = \gamma^n\delta^t$ et l'élément simple mr^* sera dit dégénéré de *type monomial*. Si $\nu = 0$ et $\tau > 0$, on a $mr^* = \gamma^n\delta^*$ et l'élément simple sera dit dégénéré de *type infini*.

4.1 Somme de deux éléments simples

4.1.1 Définition (Pente) *On appelle* pente *du monôme* $m = \gamma^n\delta^t \in \mathcal{M}_{\mathrm{ax}}^{\mathrm{in}}[[\gamma,\delta]]$ *ou du point* $(n,t) \in \mathbb{N}^2$*, notée* $\sigma(m)$ *ou* $\sigma(n,t)$ *le quotient* $\frac{n}{t}$ *(conventionnellement égal à* $+\infty$ *si* $t = 0$*).*

On définit la loi suivante sur $\mathbb{N}^2$:

$$(\nu,\tau)\sqcup(\nu',\tau') = \begin{cases} (\nu,\tau) & \text{si } \sigma(\nu,\tau) < \sigma(\nu',\tau') \\ (\nu',\tau') & \text{si } \sigma(\nu,\tau) > \sigma(\nu',\tau') \\ (\mathrm{ppcm}(\nu,\nu'), \mathrm{ppcm}(\tau,\tau')) & \text{si } \sigma(\nu,\tau) = \sigma(\nu',\tau') \end{cases}$$

La loi $\sqcup$ (lire "sup") est clairement associative, commutative, et idempotente. Comme $(n,t) \mapsto \gamma^n\delta^t$ est une bijection de $\mathbb{N}^2$ sur l'ensemble des monômes causaux, on s'autorisera la notation suivante:

$$\gamma^\nu\delta^\tau \sqcup \gamma^{\nu'}\delta^{\tau'} = \gamma^N\delta^T \quad \text{où} \quad (N,T) = (\nu,\tau)\sqcup(\nu',\tau') \enspace . \tag{4.1.a}$$

D'abord, une remarque élémentaire:

4.1.2 Propriété *On a* $\sigma((\nu,\tau)\sqcup(\nu',\tau')) = \min(\sigma(\nu,\tau), \sigma(\nu',\tau'))$.

Preuve C'est évident si les pentes sont distinctes. Dans le cas où $\sigma(\nu,\tau)=\sigma(\nu',\tau')$, c'est une propriété d'homogénéité du ppcm. On a en effet en posant $\mathrm{ppcm}(\nu,\nu')=k\nu=k'\nu'$ et $\lambda=(\sigma(\nu,\tau))^{-1}$: $k\tau=\lambda k\nu=\lambda k'\nu'=k'\tau'$. Comme k et k' sont premiers entre eux, on a $k\tau=\mathrm{ppcm}(\tau,\tau')=\lambda\mathrm{ppcm}(\nu,\nu')$, d'où

$$\sigma(\mathrm{ppcm}(\nu,\nu'),\mathrm{ppcm}(\tau,\tau'))=\lambda^{-1}=\sigma(\nu,\tau)=\sigma(\nu',\tau') \ . \tag{4.1.b}$$

■

4.1.3 Théorème *Soient mr^* et $m'r'^*$ deux éléments simples. On a:*

$$mr^*\oplus m'r'^*=p\oplus q(r\sqcup r')^* \ , \tag{4.1.c}$$

où p et q sont des polynômes causaux.

Preuve de 4.1.3. Nous laissons au lecteur les cas dégénérés $\nu=0$ ou $\tau=0$, qui sont triviaux.

1/ Cas $\sigma(r)=\sigma(r')$. Soient k et k' tels que $\mathrm{ppcm}(\nu,\nu')=k\nu=k'\nu'$. D'après (4.1.b), on a également $\mathrm{ppcm}(\tau,\tau')=k\tau=k'\tau'$, de sorte que:

$$r^*=(e\oplus r\oplus\ldots\oplus r^{k-1})(r\sqcup r')^* \ .$$

En écrivant une identité analogue pour r'^*, on obtient ainsi,

$$mr^*\oplus m'r'^*=[m(e\oplus r\oplus\ldots\oplus r^{k-1})\oplus m'(e\oplus r'\oplus\ldots\oplus {r'}^{k-1})](r\sqcup r')^* \ .$$

ce qui est de la forme (4.1.c).

2/ Cas $\sigma(r)<\sigma(r')$.

4.1.4 Lemme (de domination) *Supposons $\sigma(\nu,\tau)<\sigma(\nu',\tau')$, et $n,n',t,t'\in\mathbb{N}$. Il existe alors $K\in\mathbb{N}$ tel que*

$$\gamma^{n'}\delta^{t'}\gamma^{K\nu'}\delta^{K\tau'}(\gamma^{\nu'}\delta^{\tau'})^*\preceq\gamma^{n}\delta^{t}(\gamma^{\nu}\delta^{\tau})^* \ . \tag{4.1.d}$$

Preuve du Lemme 4.1.4. On a en développant $\gamma^{n'}\delta^{t'}\gamma^{K\nu'}\delta^{K\tau'}(\gamma^{\nu'}\delta^{\tau'})^*=\bigoplus_{x\geq K}\gamma^{n'+x\nu'}\delta^{t'+x\tau'}$, et de même $\gamma^{n}\delta^{t}(\gamma^{\nu}\delta^{\tau})^*=\bigoplus_{y\geq 0}\gamma^{n+y\nu}\delta^{t+y\tau}$. Compte tenu de (2.3.a) et (2.3.b), (4.1.d) est équivalente à l'assertion suivante:

$$\forall x\geq K,\quad \exists y\in\mathbb{N}\quad \begin{cases} n'+x\nu'\geq n+\nu y\\ t'+x\tau'\leq t+\tau y\end{cases} \tag{4.1.e}$$

Notons $[y]$ la partie entière de y. Comme $y\geq[y]\geq y-1$, la condition suivante entraîne (4.1.e).

$$\forall x\geq K,\quad \exists y\in\mathbb{R}^+\quad \begin{cases} n'+x\nu'\geq n+\nu y\\ t'+x\tau'\leq t+\tau(y-1)\end{cases} \tag{4.1.f}$$

En éliminant y entre ces deux inégalités, on trouve la condition de compatibilité de (4.1.f):

$$\tau(n'-n)+x(\tau\nu'-\nu\tau')\geq\nu(t'-t+\tau) \ . \tag{4.1.g}$$

Comme $\sigma(\nu,\tau)<\sigma(\nu',\tau')$, on a $(\tau\nu'-\nu\tau')>0$, et il est clair que (4.1.g) sera vérifié pour x assez grand. On pourra prendre $x\geq K$ avec

$$K=\max([\frac{\nu(t'-t+\tau)+\tau(n-n')}{(\tau\nu'-\nu\tau')}],0) \ .$$

Cela achève la preuve du Lemme 4.1.4. ■

4.1.5 Remarque On peut voir le calcul de la plus petite valeur de K vérifiant (4.1.d) comme une généralisation pour une sous-classe d'équations linéaires diophantiennes à deux inconnues de la notion de conducteur. Cela mérite une étude complète, que nous n'entreprendrons pas ici.

Nous revenons à la preuve de 4.1.3. Comme, si $\sigma(r) < \sigma(r')$, on a $r \sqcup r' = r$, on obtient par application immédiate du Lemme de domination:

$$mr^* \oplus m'r'^* = m'(e \oplus r' \oplus \ldots \oplus r'^{K-1}) \oplus m(r \sqcup r')^* \ ,$$

qui est bien de la forme (4.1.c). Le Théorème 4.1.3 est prouvé. ∎

4.1.6 Exemple On a

$$(\gamma\delta)^* \oplus \delta^2(\gamma^2\delta)^* = \delta^2 \oplus \gamma^2\delta^3 \oplus (\gamma^3\delta^3)^* \ .$$

$$(\gamma^2\delta^2)^* \oplus \gamma\delta(\gamma^3\delta^3)^* = (e \oplus \gamma^2\delta^2 \oplus \gamma^4\delta^4 \oplus \gamma\delta)(\gamma^6\delta^6)^* \ .$$

4.2 Produit de deux éléments simples

On introduit une seconde opération sur $\mathbb{N}^2$, $\sqcap$ (lire "inf") définie comme suit:

$$(\nu,\tau)\sqcap(\nu',\tau') = \begin{cases} (\nu,\tau) & \text{si } \sigma(\nu,\tau) < \sigma(\nu',\tau') \\ (\nu',\tau') & \text{si } \sigma(\nu,\tau) > \sigma(\nu',\tau') \\ (\mathrm{pgcd}(\nu,\nu'), \mathrm{pgcd}(\tau,\tau')) & \text{si } \sigma(\nu,\tau) = \sigma(\nu',\tau') \end{cases}$$

L'opération $\sqcap$ est associative et idempotente. On observe que $\mathbb{N}^2$ équipé de $\sqcup$ et de $\sqcap$ n'est pas un treillis (par exemple, la propriété d'absorption $r \sqcup (r \sqcap r') = r$ est en défaut, prendre $r = (1,1)$ et $r' = (1,2)$). Cependant, on a la propriété plus faible:

$$(r \sqcup r') \sqcup (r \sqcap r') = (r \sqcup r') \ . \tag{4.2.a}$$

Comme pour $\sqcup$, on s'autorisera la notation $\gamma^\nu\delta^\tau \sqcap \gamma^{\nu'}\delta^{\tau'}$ avec un sens évident.

4.2.1 Théorème *Soient mr^* et $m'r'^*$ deux éléments simples. On a:*

$$mr^* \otimes m'r'^* = p \oplus q(r \sqcap r')^* \ , \tag{4.2.b}$$

où p et q sont des polynômes causaux.

Preuve de 4.2.1. Ici encore, nous ne traitons pas les cas triviaux $\tau = 0$ ou $\nu = 0$. Quitte à multiplier p et q par mm', on pourra supposer $m = m' = e$.

1/ Cas $\sigma(s) < \sigma(s')$. Soit K comme dans le Lemme 4.1.4 tel que:

$$r'^K(r')^* \preceq r^* \ . \tag{4.2.c}$$

En multipliant cette identité par r^*, on obtient $r'^K(r')^*r^* \preceq r^*r^* = r^*$. Ainsi:

$$r^*r'^* = r^*(e \oplus r' \oplus \ldots \oplus r'^{K-1}) \oplus r^*r'^K(r')^* = r^*(e \oplus r' \oplus \ldots \oplus r'^{K-1}) \ , \tag{4.2.d}$$

qui, compte tenu de $r = r \sqcap r'$, est bien de la forme (4.2.b).

2/ Cas $\sigma(r) = \sigma(r')$. On a:

$$(\gamma^{\nu}\delta^{\tau})^*(\gamma^{\nu'}\delta^{\tau'})^* = \bigoplus_{i,j\geq 0} \gamma^{i\nu+j\nu'}\delta^{i\tau+j\tau'} \ . \tag{4.2.e}$$

Posons

$$S(\tau,\tau') = \tau\mathbb{N} + \tau'\mathbb{N} \ .$$

On prétend que

$$\{(i\nu + j\nu', i\tau + j\tau') \mid (i,j) \in \mathbb{N}^2\} = \{(\sigma(r)\theta, \theta) \mid \theta \in \tau\mathbb{N} + \tau'\mathbb{N}\} \ .$$

En effet, si $\theta = i\tau + j\tau'$, on a $\sigma(r)\theta = i\sigma(r)\tau + j\sigma(r')\tau' = i\nu + j\nu' \in \mathbb{N}$, ce qui montre l'égalité des deux ensembles. On est donc ramené à caractériser la partie rationnelle $S(\tau,\tau')$ de $\mathbb{N}$. Le naturel u appartient à $S(a,b)$ ssi l'equation linéaire diophantienne

$$ax + by = u \tag{4.2.f}$$

admet une solution sur les entiers positifs ou nuls. Cette équation linéaire diophantienne intervenait déjà en 3.3.6, où l'on a montré $S(\tau,\tau') = P \cup (K + \text{pgcd}(a,b)\mathbb{N})$, où P est une partie finie. Nous aurons besoin dans la suite d'un résultat un peu plus précis. On appelle usuellement *conducteur* (ou pour certains, indice de Frobenius-Schur, cf. [14]) de l'équation linéaire diophantienne (4.2.f) le plus petit entier K vérifiant 3.3.6. On le notera $\mathsf{cond}(a,b)$. On a le résultat, généralement attribué à Sylvester:

4.2.2 Lemme ([13]) *On a*

$$\mathsf{cond}(a,b) = \frac{(a - \text{pgcd}(a,b))(b - \text{pgcd}(a,b))}{\text{pgcd}(a,b)} \ . \tag{4.2.g}$$

4.2.3 Exemple On observe que l'on peut résoudre l'équation $2i + 3j = c$ en entiers positifs ou nuls pour les valeurs suivantes de c: 0,2,3,4,5,.... On a donc $\mathsf{cond}(2,3) = 2 = (2-1)\times(3-1)$, en conformité avec (4.2.g).

On a la propriété d'homogénéité suivante:

4.2.4 Lemme *Si $a, a', b, b' \in \mathbb{N}$ sont tels que $a' = \lambda a, \quad b' = \lambda b$ alors*

$$\mathsf{cond}(\lambda a, \lambda b) = \lambda \mathsf{cond}(a,b) \ . \tag{4.2.h}$$

Preuve Si $n = ia + jb$ avec $i,j \in \mathbb{N}$, alors $\lambda n = ia' + jb' \in \mathbb{N}$, d'où $\mathsf{cond}(a',b') \leq \lambda\mathsf{cond}(a,b)$. De manière symétrique, $\mathsf{cond}(a,b) \leq \lambda^{-1}\mathsf{cond}(a',b')$, d'où l'égalité (4.2.h). ∎

On pourra donc écrire:

$$S(\tau,\tau') = S'(\tau,\tau') \ \cup (\mathsf{cond}(\tau,\tau') + \text{pgcd}(\tau,\tau')\mathbb{N}) \ , \tag{4.2.i}$$

où $S'(\tau,\tau')$ désigne le sous ensemble fini de $S(\tau,\tau')$ formé des entiers strictement plus petit que $\mathsf{cond}(\tau,\tau')$. Il résulte immédiatement de (4.2.e), 4.2.4 et de (4.2.i) que

$$r^*r'^* = \left(\bigoplus_{\theta\in S'(\tau,\tau')} \gamma^{\sigma(r)\theta}\delta^{\theta}\right) \oplus \gamma^{\mathsf{cond}(\nu,\nu')}\delta^{\mathsf{cond}(\tau,\tau')}(r\sqcap r')^* \ , \tag{4.2.j}$$

qui est bien de la forme (4.2.b). Cela achève la preuve du Théorème 4.2.1. ∎

4.2.5 Exemple On a $\mathsf{cond}(2,3) = 2$ d'où:

$$(\gamma^2\delta^6)^*(\gamma^3\delta^9)^* = e \oplus \gamma^2\delta^6(\gamma\delta^3)^* \ .$$

4.3 Une décomposition en éléments simples et ses conséquences

4.3.1 Théorème *Une série est rationnelle ssi elle s'écrit comme somme finie d'éléments simples.*

Preuve Soit $\mathcal{R}$ l'ensemble des sommes finies d'éléments simples. On copiant le début de la preuve du du Théorème 3.3.3, il suffit de montrer que $\mathcal{R}$ est rationnellement clos. Trivialement, $\mathcal{R}\oplus\mathcal{R} \subset \mathcal{R}$. L'inclusion $\mathcal{R} \otimes \mathcal{R} \subset \mathcal{R}$ résulte immédiatement de 4.2.1. Il reste à voir que si $s \in \mathcal{R}$, alors $s^* \in \mathcal{R}$. En observant que $(\bigoplus_i m_i r_i^*)^* = \bigotimes_i (m_i r_i)^*$, on peut se limiter au cas où $s = mr^*$ est un élément simple. On a alors par 0,4.1.6,(vii) $s^* = e \oplus m(m \oplus r)^* = e \oplus mm^*r^*$ qui d'après 4.2.1 appartient à $\mathcal{R}$. Le Théorème est démontré. ∎

4.3.2 Remarque Les questions d'unicité ou de canonicité des décompositions en éléments simples ne seront pas abordées ici. Notons par exemple qu'on a les deux décompositions distinctes d'une même série:

$$(\gamma\delta)^* = (\gamma^2\delta^2)^* \oplus \gamma\delta(\gamma^2\delta^2)^* \ .$$

4.3.3 Preuve du Théorème 3.3.8 D'après 4.3.1, une série rationnelle s'écrit comme une somme finie $\bigoplus_i m_i r_i^*$, qui d'après 4.1.3, se réduit à la forme $p \oplus q(\sqcup_i r_i)^*$, qui est bien une série périodique. Réciproquement, en décomposant p et q en somme de monômes, on ramène trivialement une écriture périodique à une décomposition en éléments simples. ∎

5 Algèbre des séries périodiques

On rappelle qu'une série $s \in \mathcal{M}_{\mathrm{ax}}^{\mathrm{in}}[[\gamma,\delta]]$ est *périodique* ou plus précisément (ν,τ)-*périodique* ssi elle s'écrit sous la forme

$$s = p \oplus q(\gamma^\nu\delta^\tau)^* \ , \tag{5.0.a}$$

où p et q sont des polynômes à exposants positifs ou nuls et $\nu, \tau \geq 0$. Nous laissons provisoirement de coté les cas dégénérés $\nu = 0$ ou $\tau = 0$, qui sont triviaux.

5.0.1 Proposition *La série s est (ν,τ)-périodique avec $\nu,\tau > 0$ ssi*

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & \mathsf{dat}\, s(n) = -\infty \text{ pour } n < 0 \\ \text{(ii)} & \exists N \in \mathbb{N} \quad (n \geq N \Rightarrow \mathsf{dat}\, s(n+\nu) = \tau + \mathsf{dat}\, s(n)) \ . \end{array} \tag{5.0.b}$$

5.0.2 Définition *Le dateur* $\mathsf{dat}\, s$ *sera dit (ν,τ)-périodique s'il vérifie la propriété (5.0.b).*

Cette notion est illustrée sur la Figure VII.5, où l'on a fait abstraction du caractère discret.

Preuve de la Proposition 5.0.1. Sens $\Leftarrow$: Si l'on a (5.0.b), on peut écrire d'après la Proposition 2.2.5:

$$s = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \gamma^n\delta^{\mathsf{dat}\, s(n)} = \bigoplus_{n\leq N-1} \gamma^n\delta^{\mathsf{dat}\, s(n)} \oplus \Big(\bigoplus_{N\leq n\leq N+\nu-1} \gamma^n\delta^{\mathsf{dat}\, s(n)}\Big)(\gamma^\nu\delta^\tau)^*$$

ce qui est bien de la forme (5.0.a).

Sens $\Rightarrow$. (a): cas où $p = \varepsilon$ et où $q = \gamma^k\delta^l$. On rappelle que $\mathsf{dat}\, s$ est donné par

$$\mathsf{dat}\, s(n) = \sup\{t \in \mathbb{Z} \mid \ \gamma^n\delta^t \preceq s\} \ . \tag{5.0.c}$$

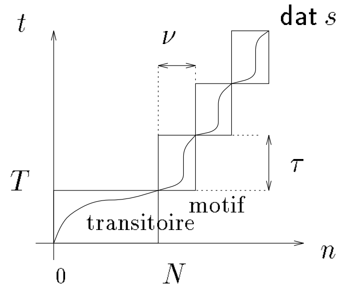


Figure VII.5: Un dateur périodique

On a $\gamma^n\delta^t \preceq \gamma^k\delta^l(\gamma^\nu\delta^\tau)^*$ ssi $\gamma^n\delta^t \preceq \gamma^{k+i\nu}\delta^{l+i\tau}$ pour un certain $i \in \mathbb{N}$, soit

$$\begin{array}{l} n \geq k + i\nu \\ t \leq l + i\tau \ . \end{array} \tag{5.0.d}$$

$\mathsf{dat}\, s(n)$ s'obtient en prenant le plus grand entier t dans (5.0.d), ce qui revient à maximiser i:

$$i = [\frac{n-k}{\nu}], \quad \mathsf{dat}\, s(n) = l + \tau[\frac{n-k}{\nu}] \tag{5.0.e}$$

pour $n - k \geq 0$ (on a noté $[x]$ la partie entière de x). Au vu de (5.0.e), il est clair que $\mathsf{dat}\, s$ vérifie la Proposition.
(b) Cas $p = \varepsilon$ et q polynôme. En décomposant $q = \bigoplus_i q_i$ comme somme finie de monômes, on a $\mathsf{dat}\, s = \max_i \mathsf{dat}\,(q_i(\gamma^\nu\delta^\tau)^*)$. Comme la propriété (5.0.b) est stable par passage au max, le résultat est acquis.
(c) Cas $p \neq \varepsilon$. On a $\mathsf{dat}\, s = \max(\mathsf{dat}\, p, \mathsf{dat}\,(q(\gamma^\nu\delta^\tau)^*))$. En raisonnant comme en (i), on voit que $\mathsf{dat}\, p$ est constant à partir d'un certain rang (alors que $\lim \mathsf{dat}\,(q(\gamma^\nu\delta^\tau)^*) = \infty$) et donc ne contribue pas ultimement à $\mathsf{dat}\, s$.
Enfin, on note que si $n < 0$, $\gamma^n\delta^t$ ne peut être dominé par les monômes à exposants positifs ou nuls de s, et donc d'après 2.2.5, $\mathsf{dat}\, s(n) = -\infty$ pour $n < 0$. ∎

On dira que le couple (ν, τ) est *une* période de la série s. La période n'est pas unique. Par exemple, on a les deux écriture de type (5.0.a):

$$s = (\gamma\delta)^* = \varepsilon \oplus e.(\gamma\delta)^* = \varepsilon \oplus (e \oplus \gamma\delta)(\gamma^2\delta^2)^* \ . \tag{5.0.f}$$

Cependant, il résulte de (5.0.b) que

$$\frac{\nu}{\tau} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\mathsf{dat}\, s(n)}$$

et donc que le rapport $\frac{\nu}{\tau}$ ne dépend pas de l'écriture (5.0.a). Cela motive les définitions suivantes.

5.0.3 Définition (Pente ultime, divisibilité, période ultime) *Soit s une série périodique.*

(i) *On appelle* pente ultime *de s, noté $\sigma_\infty(s)$, le quotient:*

$$\sigma_\infty(s) = \frac{\nu}{\tau} \ .$$

Si $s = \varepsilon$, on convient que $\sigma_\infty(s) = +\infty$. Si $\nu = \tau = 0$, on convient que $\sigma_\infty(s) = +\infty$.

(ii) *Soient* (ν, τ) *et* (ν', τ') *deux périodes d'une même série* s*. On dit que* (ν, τ) divise (ν', τ')*, ce que l'on note* $(\nu, \tau) \mid (\nu', \tau')$*, si*

$$\nu' = k\nu,\ \tau' = k\tau, \quad \text{avec } k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

(iii) *On notera* $\varpi_\infty(s)$ *(période ultime) la plus petite période de* s *pour la divisibilité.*

Par exemple, pour la série s donnée en (5.0.f), on a $\varpi_\infty(s) = (1, 1)$, $\sigma_\infty(s) = \frac{1}{1} = 1$. Si (ν, τ) divise (ν', τ') et (ν, τ) est période, alors (ν', τ') est également période, comme il résulte de

$$(\gamma^\nu \delta^\tau)^* = (e \oplus \gamma^\nu \delta^\tau \oplus \ldots \oplus \gamma^{(k-1)\nu} \delta^{(k-1)\tau})(\gamma^{k\nu} \delta^{k\tau})^* \ .$$

5.0.4 Cas dégénérés Si $\tau = 0$, on a $(\gamma^\nu \delta^\tau)^* = e$ et s est un polynôme. Comme déjà noté dans la preuve de 5.0.1, on a $\mathsf{dat}\, s(n) = cte$ à partir d'un certain rang, disons pour $n \geq N$, ce qui signifie qu'une infinité d'événements arrivent en un temps fini. Si $\nu = 0$ et $\tau > 0$, on a $(\gamma^\nu \delta^\tau)^* = \delta^*$. On montre en raisonnant comme en 5.0.1 que $\mathsf{dat}\, s(n) = +\infty$ à partir d'un certain rang. Il s'agit alors d'un système bloqué.

5.1 Caractéristiques de la somme de séries périodiques

5.1.1 Théorème *La somme de deux séries périodiques est périodique. En outre*

$$\varpi_\infty(s \oplus s') \mid \varpi_\infty(s) \sqcup \varpi_\infty(s') \ . \tag{5.1.a}$$

(et égalité si les pentes ultimes de s *et* s' *sont différentes).*

Preuve Si $\sigma_\infty(s) < \sigma_\infty(s')$, la fonction $\mathsf{dat}\, s$ est ultimement au dessus de $\mathsf{dat}\, s'$, d'où il résulte que $\max(\mathsf{dat}\, s, \mathsf{dat}\, s') = \mathsf{dat}\,(s \oplus s')$ est de période exactement égale à la période de s, soit $\varpi_\infty(s) = \varpi_\infty(s) \sqcup \varpi_\infty(s')$. Si $\sigma_\infty(s) = \sigma_\infty(s')$, $\varpi_\infty(s)$ et $\varpi_\infty(s')$ divisent $\varpi_\infty(s) \sqcup \varpi_\infty(s')$, et donc $\mathsf{dat}\, s$ et $\mathsf{dat}\, s'$ sont deux dateurs $\varpi_\infty(s) \sqcup \varpi_\infty(s')$-périodiques. L'ensemble des dateurs $\varpi_\infty(s) \sqcup \varpi_\infty(s')$-périodiques étant stable par borne sup, $\max(\mathsf{dat}\, s, \mathsf{dat}\, s')$ admet la période (peut être non minimale) $\varpi_\infty(s) \sqcup \varpi_\infty(s')$. ∎

On a le corollaire immédiat:

5.1.2 Corollaire *On a* $\sigma_\infty(s \oplus s') = \min(\sigma_\infty(s), \sigma_\infty(s'))$.

5.2 Produit de séries périodiques générales

5.2.1 Théorème *Le produit de deux séries périodiques est périodique. En outre*

$$\varpi_\infty(ss') \mid \varpi_\infty(s) \sqcup \varpi_\infty(s') \ .$$

5.2.2 Corollaire *Soient* s *et* s' *deux séries périodiques non nulles. On a*

$$\sigma_\infty(ss') = \min(\sigma_\infty(s), \sigma_\infty(s')) \ .$$

Preuve du Théorème 5.2.1. Soit $s = p \oplus qr^*$, $s' = p' \oplus q'r'^*$. On a $ss' = pp' \oplus pq'r'^* \oplus p'qr^* \oplus qq'r^*r'^*$. Via 4.2.1, on a $qq'r^*r'^* = p'' \oplus q''(r \sqcap r')^*$. Le Théorème 5.1.1 et la formule (4.2.a) montrent que ss' admet la période $r \sqcup r' \sqcup (r \sqcap r') = (r \sqcup r')$. ∎

Moyennant les algorithmes 2.4.5 et 4.2.1 de l'annexe B, la preuve ci-dessus permet de calculer ss'.

5.2.3 Exemple Soient

$$s = e \oplus \gamma\delta^8 \oplus \gamma^9\delta^9 \left(\gamma^3\delta^3\right)^*, \quad s' = e \oplus \gamma^2\delta^{10} \oplus \gamma^{11}\delta^{11} \left(\gamma^4\delta^4\right)^*$$

On a

$$ss' = e \oplus \gamma\delta^8 \oplus \gamma^2\delta^{10} \oplus \gamma^3\delta^{18} \oplus \gamma^{11}\delta^{19} \left(e \oplus \gamma^3\delta^3 \oplus \gamma^5\delta^4 \oplus \gamma^6\delta^6 \oplus \gamma^9\delta^9\right) \left(\gamma^{12}\delta^{12}\right)^* \quad .$$

Dans ce cas, on obtient effectivement le ppcm comme période du produit.

5.3 Etoile de polynômes et problème diophantien de Frobenius

On appellera *pente* du monôme causal $\gamma^n\delta^t$ le rapport $\frac{n}{t}$ (convention $\frac{n}{0} = +\infty$). Nous traitons ici le cas d'un polynôme dont tous les monômes ont la même pente. Soit $p = \gamma^\nu\delta^\tau \oplus \gamma^{\nu'}\delta^{\tau'}$. Le résultat suivant est une conséquence immédiate de (4.2.e) et 4.2.2.

5.3.1 Théorème *La plus simple représentation périodique de p^* est donnée par:*

$$p^* = (\bigoplus_{i\nu + j\nu' \leq \mathsf{cond}(\nu,\nu')-1} \gamma^{i\nu+j\nu'}\delta^{i\tau+j\tau'}) \oplus \gamma^{\mathsf{cond}(\nu,\nu')}\delta^{\mathsf{cond}(\tau,\tau')}(\gamma^{\mathrm{pgcd}(\nu,\nu')}\delta^{\mathrm{pgcd}(\tau,\tau')})^* \quad . \tag{5.3.a}$$

5.3.2 Généralisation à une somme de l monômes de même pente.
Soit le produit $p = \gamma^{\nu_1}\delta^{\tau_1} \oplus \ldots \oplus \gamma^{\nu_l}\delta^{\tau_l}$ somme de l monômes de même pente. On a par un argument analogue à 4.2.1, 2/ que que $p^* = \bigoplus_{c\in C} \gamma^{\sigma(p)c}\delta^c$ où C est l'ensemble des entiers c positifs ou nuls tels que l'équation diophantienne linéaire suivante:

$$\tau_1 x_1 + \tau_2 x_2 + \cdots + \tau_l x_l = c \qquad \text{avec } x \in \mathbb{N}^l \tag{5.3.b}$$

admette une solution. On montre sans difficulté, ce qui généralise 4.2.2, qu'il existe un K tel que pour tout $c \geq K$ multiple de $\mathrm{pgcd}(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_l)$, l'équation (5.3.b) admette une solution. Cependant, la plus petite valeur de K, appelée encore conducteur de l'équation (5.3.b) n'est en général pas exactement connue (on appelle parfois “problème diophantien de Frobenius” la recherche de $\mathsf{cond}(\tau_i)$). Brauer (cf. [13]) donne pour $l > 2$ et $\nu_1 < \nu_2 < \cdots < \nu_l$ premiers entre eux la borne supérieure suivante:

$$\mathsf{cond}(\nu_i) \leq (\nu_1 - 1)(\nu_l - 1) \quad . \tag{5.3.c}$$

Voir aussi Vitek[96] pour des références plus récentes. On a donc un moyen d'obtenir directement une représentation périodique de p^* par une formule analogue à (5.3.a).

De ces développements, nous retiendrons ceci:

5.3.3 Proposition *Soit $p = \bigoplus_{i=1}^k \gamma^{\nu_i}\delta^{\tau_i}$ une somme de monômes de même pente. On a*

$$\varpi_\infty(p^*) = (\mathrm{pgcd}(\nu_i), \mathrm{pgcd}(\tau_i)) \quad .$$

5.3.4 Exemple Soit $a = \gamma^6\delta^6 \oplus \gamma^{10}\delta^{10} \oplus \gamma^{15}\delta^{15}$. Comme 6,10,15 sont premiers entre eux, la période de a^* est $(1,1)$. On obtient après calculs $\mathsf{cond}(6,10,15) = 30$ et $a^* = e \oplus \gamma^6\delta^6 \oplus \gamma^{10}\delta^{10} \oplus \gamma^{12}\delta^{12} \oplus \gamma^{16}\delta^{16} \oplus \gamma^{18}\delta^{18} \oplus \gamma^{20}\delta^{20} \oplus \gamma^{22}\delta^{22} \oplus \gamma^{24}\delta^{24} \oplus \gamma^{26}\delta^{26} \oplus \gamma^{28}\delta^{28} \oplus \gamma^{30}\delta^{30}(\gamma\delta)^*$.

5.3.5 Exemple Sur la planète Mars, il y a deux mathématiciens qui collaborent de la manière suivante: le premier produit trois conjectures simultanées tous les trois ans à partir de l'année zéro. Le second travaille exclusivement sur les conjectures du premier, met deux ans pour élucider une conjecture, et peut travailler sur au plus deux conjectures en même temps. Le théorème 5.3.1 affirme qu'à partir de l' année 4, une conjecture sera élucidée tous les ans (considérer la série de transfert $(\gamma^3\delta^3)^*\delta^2(\gamma^2\delta^2)^* = \delta^2(\gamma^2\delta^2 \oplus \gamma^3\delta^3)^*$).

5.4 Pentes et étoiles dans $\mathcal{M}_{\mathrm{ax}}^{\mathrm{in}}[[\gamma,\delta]]$

Pour une série périodique générale, on se ramène par application de 0,4.1.6 aux opérations déjà étudiées:

$$(p \oplus qr^*)^* = p^*(e \oplus q(q \oplus r)^*) \ . \tag{5.4.a}$$

Nous caractérisons maintenant la pente ultime de l'étoile de la série $s = p \oplus qr^*$. Nous faisons pour cela appel à la notion de *pente minimale* d'une série booléienne, qui jouera un rôle important dans la suite (en particulier pour l'optimisation des ressources).

5.4.1 Définition (Pente minimale) *Soit une série* $s = \bigoplus_i \gamma^{n_i}\delta^{t_i} \in \mathbb{B}[[\gamma,\delta]]$. *On définit la* pente minimale *de* s, $\sigma(s)$, *comme suit:*

$$\sigma(s) = \inf_{n_i \geq 0, t_i > 0} \frac{n_i}{t_i} \ . \tag{5.4.b}$$

5.4.2 Exemple Soit $a = \gamma^{-1}\delta^{-3} \oplus \gamma \oplus \gamma^2\delta \oplus \gamma^7\delta^2$. On a $\sigma(a) = \min(2, \frac{7}{2}) = 2$.

5.4.3 Propriétés *On a:*

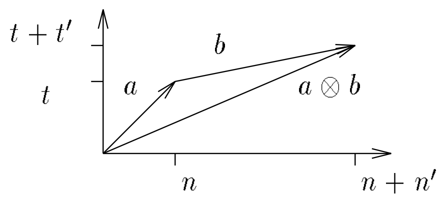
(i) *Pour toute famille* $\{a_i\}_{i\in I}$ *de séries:* $\sigma(\bigoplus_{i\in I} a_i) = \inf \sigma(a_i)$ *(I éventuellement infinie)*

(ii) *Pour toutes séries* a *et* b *causales,* $\sigma(a \otimes b) \geq \min(\sigma(a), \sigma(b))$ *(avec égalité ssi* $\sigma(a) = \sigma(b)$ *ou* $a = e$ *ou* $b = e$*).*

Preuve (i) est immédiate. (ii) résulte de

$$n, n', t, t' \geq 0, \quad \frac{n+n'}{t+t'} \geq \min(\frac{n}{t}, \frac{n'}{t'})$$

(avec la convention $\frac{n}{0} = +\infty$), ce qui s'illustre par le petit dessin suivant:



En effet, les monômes du produit $a \otimes b$, où $a = \bigoplus_i \gamma^{n_i}\delta^{t_i}$ et $b = \bigoplus_j \gamma^{n'_j}\delta^{t'_j}$ sont de la forme $\gamma^{n_i+n'_j}\delta^{t_i+t'_j}$. ■

On vérifie aisément que la pente minimale $\sigma(s)$ ne dépend que de la classe d'équivalence de s dans $\mathcal{M}_{\mathrm{ax}}^{\mathrm{in}}[[\gamma,\delta]]$. Les propriétés 5.4.3 passent donc au quotient.

5.4.4 Propriétés *On a pour toute série rationnelle* a*:*

(i) $\sigma_\infty(a) \geq \sigma(a)$,

(ii) $\sigma_\infty(a^*) = \sigma(a)$.

Preuve (i): Résulte de

$$a = \bigoplus_{t\in\mathbb{N}} \gamma^{\mathsf{compt}\, a(t)}\delta^t$$

où la fonction compteur $\mathsf{compt}\, a$ associée à a est équivalente à $\sigma_\infty(a)t$.
(ii): via (i), on a $\sigma_\infty(a^*) \geq \sigma(a^*) \geq \sigma(a)$ (par 5.4.3,(ii) et (i) appliquées à $\bigoplus_i a^i$). On supposera $\sigma(a)$ fini. Soit alors m un monôme de a tel que $\sigma(m) \leq \sigma(a) + \epsilon$ (ϵ petit). On a $\sigma_\infty(a^*) \leq \sigma_\infty(m^*) = \sigma(m) \leq \sigma(a) + \epsilon$ d'où le résultat. ■

5.4.5 Remarque La propriété 5.4.4, (ii) pouvait tout aussi bien se prouver à l'aide de la formule (5.4.a) et des propriétés 5.1.2, 5.2.2. La preuve ci-dessus est cependant plus générale. On pourrait en effet relaxer l'hypothèse de rationalité dans 5.4.4 en définissant:

$$\sigma_\infty(a) = \liminf_{t\to\infty} \frac{n}{\mathsf{dat}\, s(n)}$$

pour une série causale non rationnelle.

De même que l'on a caractérisé plus haut $\sigma_\infty(a^*)$, nous caractérisons ici la période de a^*. Etant donné un polynôme $p = \bigoplus_{i=1}^n m_i$ s'écrivant comme somme de n monômes, on notera

$$\sqcap p = m_1 \sqcap \ldots \sqcap m_n \ . \tag{5.4.c}$$

On observe que si le monôme m_i n'appartient pas à l'écriture canonique de p, il est de pente inférieure à celle de p, et donc que la définition 5.4.c ne dépend pas du choix des m_i.

5.4.6 Proposition *Soit $s = p \oplus qr^*$. On a*

$$\varpi_\infty(s^*) \mid (\sqcap p) \sqcup (\sqcap(q \oplus r)) \ . \tag{5.4.d}$$

Preuve Résulte de la formule (5.4.a) et des propriétés 5.3.3,5.2.1. ∎

5.4.7 Exemple La borne à droite de (5.4.d) est atteinte par exemple pour la série suivante:

$$s = \gamma^3\delta^3 \oplus \gamma^5\delta^4(\gamma\delta)^* ,$$

$$s^* = e \oplus \gamma^3\delta^3\left(e \oplus \gamma^2\delta\right)\left(\gamma^3\delta^3\right)^* \quad , \qquad \varpi_\infty(s^*) = \gamma^3\delta^3 \ .$$

6 Algèbre rationnelle des matrices

6.1 Pente des matrices rationnelles

Le calcul des matrices de transfert fait intervenir le calcul des étoiles de matrices à coefficients rationnels ou polynômiaux. Nous caractérisons ici la pente des coefficients de l'étoile d'une matrice A à coefficients rationnels. Dans ce qui suit, nous noterons $\oplus$ le min des pentes. L'application σ_∞ qui à une série associe sa pente ultime est ainsi croissante de $(\mathcal{M}_{\mathrm{ax}}^{\mathrm{in}}[[\gamma,\delta]], \preceq)$ dans $(\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}, \preceq)$. Nous commençons par une remarque simple:

6.1.1 Lemme *$\sigma_\infty(A^*_{ij})$ ne dépend que de la composante fortement connexe de i et de la composante fortement connexe de j dans le graphe associé à A.*

Preuve Soient i et i' dans la même composante connexe, i.e. $A^+_{ii'} \neq \varepsilon$ et $A^+_{i'i} \neq \varepsilon$. On a en prenant la composante (ij) de $A^* \succeq A^+A^*$,

$$A^*_{ij} \succeq A^+_{ii'}A^*_{i'j}$$

et par 5.2.2,

$$\sigma_\infty(A^*_{ij}) \succeq \sigma_\infty(A^*_{i'j}) \ .$$

Par symétrie, on a l'égalité. On montrerait de même que $\sigma_\infty(A^*_{ij}) = \sigma_\infty(A^*_{ij'})$ si j et j' appartiennent à la même composante connexe. ∎

Soient $C_1, \ldots, C_k$ les k composantes connexes du graphe de A. Il résulte de ce qui précéde que $\sigma_\infty(A^*_{ij})$ est constant pour $(i,j) \in C_r \times C_s$. Si A est irréductible, il y a une seule composante connexe, et donc tous les coefficients de A^* ont la même pente ultime.

6.1.2 Notation ($\mathcal{P}_{ij}$, $\mathcal{C}_{ij}$, circuits entre j et i)
Nous noterons $\mathcal{P}_{ij}$ l'ensemble des chemins élémentaires de j à i (ou des circuits élémentaires si $i = j$). Nous dirons que le circuit élémentaire c est *entre* j et i s'il rencontre un chemin p de j à i (peut être non élémentaire). Nous noterons $\mathcal{C}_{ij}$ l'ensemble ces circuits élémentaires entre j et i. $\mathcal{P}_{ij}$ et $\mathcal{C}_{ij}$ sont évidemment finis. On a illustré cette définition sur la Figure VII.6.

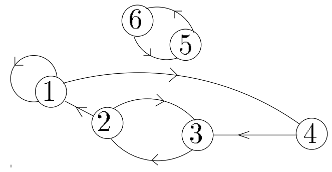


Figure VII.6: $\mathcal{P}_{14} = \{a_{12}a_{23}a_{34}\}$, $\mathcal{C}_{14} = \{a_{11}, a_{23}a_{32}, a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}\}$

Rappelons que le poids $w_A(p)$ (ou plus simplement $w(p)$) du chemin $p = (i_1, \dots, i_k)$ est défini par $w_A(p) = A_{i_1 i_2} \dots A_{i_{k-1} i_k}$. Si p est de poids non nul, il résulte de 5.2.2 que

$$\sigma_\infty(w(p)) = \sigma_\infty(A_{i_1 i_2}) \oplus \dots \oplus \sigma_\infty(A_{i_{k-1} i_k}) \ .$$

On caractérise alors simplement les pentes ultimes des coefficients de A^*_{ij}.

6.1.3 Théorème (pente ultime des matrices rationnelles) *On a*

$$\forall i, j, \quad \sigma_\infty(A^*_{ij}) = \bigoplus_{c \in \mathcal{C}_{ij}} \sigma(w(c)) \ \oplus \ \bigoplus_{p \in \mathcal{P}_{ij}} \sigma_\infty(w(p)) \ . \tag{6.1.a}$$

Le premier terme de la somme exprime que la pente minimale (cf. 5.4.1) des circuits intervient. C'est une généralisation au cas matriciel de la formule scalaire $\sigma_\infty(a^*) = \sigma(a)$ (cf. 5.4.4).

6.1.4 Corollaire *Si la matrice A est à coefficients polynômiaux, on a*

$$\sigma_\infty(A^*_{ij}) = \bigoplus_{c \in \mathcal{C}_{ij}} \sigma(w(c)) \ . \tag{6.1.b}$$

Preuve de 6.1.4. On a en effet $\sigma_\infty(A_{ij}) = +\infty$ et donc $\sigma_\infty(w(p)) = +\infty$ pour tout chemin $p \in \mathcal{P}_{ij}$: le second terme de (6.1.a) disparaît. ■

6.1.5 Remarque Si A est irréductible, la sommation (6.1.b) est prise sur l'ensemble des circuits élémentaires du graphe. $\sigma_\infty(A^*_{ij})$ ne dépend alors pas de (ij), en conformité avec 6.1.1.

6.1.6 Corollaire *Soient C_r une composante irréductible et $i, j \in C_r$. On a*

$$\sigma_\infty(A^*_{ij}) = \sigma_\infty((A_{[C_r|C_r]})^*) \ .$$

Preuve $\mathcal{C}_{ij}$ est alors égal à l'ensemble des circuits élémentaires de C_r. En outre, un chemin $p \in \mathcal{P}_{ij}$ reste dans la composante connexe C_r. Ainsi, on peut pour calculer (6.1.a) se restreindre au bloc irréductible $A_{[C_r|C_r]}$. ■

Nous illustrons d'abord le Théorème 6.1.3 sur quelques exemples.

6.1.7 Exemple

$$A = \begin{bmatrix} \varepsilon & \gamma^3 & \varepsilon & \varepsilon \\ \delta & \varepsilon & e & e \\ \varepsilon & \varepsilon & \gamma\delta^2 & \gamma \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \gamma\delta \end{bmatrix}$$

$$A^* = \begin{bmatrix} (\gamma^3\delta)^* & \gamma^3(\gamma^3\delta)^* & \gamma^3(\gamma\delta^2)^* & \gamma^3 \oplus \gamma^4\delta \oplus \gamma^5\delta^2(\gamma\delta^2)^* \\ \delta(\gamma^3\delta)^* & (\gamma^3\delta)^* & (\gamma\delta^2)^* & e \oplus \gamma\delta \oplus \gamma^2\delta^2(\gamma\delta^2)^* \\ \varepsilon & \varepsilon & (\gamma\delta^2)^* & \gamma(\gamma\delta^2)^* \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & (\gamma\delta)^* \end{bmatrix}$$

On a trois composantes connexes $C_1 = \{1,2\}, C_2 = \{3\}, C_3 = \{4\}$. On a représenté sur la Figure VII.7 le graphe associé à A:

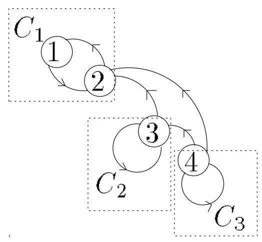


Figure VII.7:

Le circuit de pente minimale (i.e. la boucle $3 \to 3$) est *entre* C_3 et C_1 (car par exemple $A_{34} \neq \varepsilon$ et $A_{23} \neq \varepsilon$), et donc la pente est constante sur le bloc $C_1 \times C_3$, égale à $\sigma(\gamma\delta^2) = \frac{1}{2}$. De même pour le bloc $C_2 \times C_1$.

6.1.8 Exemple Pour la matrice à coefficients rationnels

$$A = \begin{bmatrix} \gamma\delta^4 & (\gamma^2\delta^{12})^* & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \gamma\delta^6 \\ \varepsilon & \gamma\delta^5 & \varepsilon \end{bmatrix}$$

on trouve

$$A^* = \begin{bmatrix} (\gamma\delta^4)^* & (e \oplus \gamma\delta^4)(\gamma^2\delta^{12})^* & \gamma\delta^6(e \oplus \gamma\delta^4)(\gamma^2\delta^{12})^* \\ \varepsilon & (\gamma^2\delta^{11})^* & \gamma\delta^6(\gamma^2\delta^{11})^* \\ \varepsilon & \gamma\delta^5(\gamma^2\delta^{11})^* & (\gamma^2\delta^{11})^* \end{bmatrix} \tag{6.1.c}$$

On a d'autre part $\mathcal{P}_{13} = \{a_{13}, a_{12}a_{23}\}$, d'où $\sigma_\infty(w(a_{13} \oplus a_{12}a_{23})) = +\infty \oplus \frac{2}{12} = \frac{2}{12}$. Ainsi, la contribution des chemins domine (i.e. $\succ$) celle des circuits $\sigma(w(a_{11} \oplus a_{23}a_{32})) = \frac{1}{4} \oplus \frac{2}{11} = \frac{2}{11}$. On a donc $\sigma_\infty(A^*_{13}) = \frac{2}{12}$ en conformité avec le résultat du calcul (6.1.c).

6.2 Preuve du Théorème 6.1.3

La preuve repose sur une formule combinatoire exprimant l'ensemble des chemins commutatifs (cf. 0,4.2.7) en fonction des circuits et chemins élémentaires. Nous nous plaçons pour cela dans le dioïde $\mathbb{B}[[a_{ij}]]$ et considérons la matrice générique $A = (a_{ij})$.

6.2.1 Notation (ensemble accessible de circuits, $\mathcal{A}(p)$)
Soit C un ensemble de circuits élémentaires. Nous dirons que C est accessible depuis le chemin p si $\{p\} \cup C$ est un sous graphe connexe. Nous noterons $\mathcal{A}(p)$ l'ensemble des C accessibles depuis p.

6.2.2 Exemple Pour le graphe de l'exemple VII.6 pour $p = a_{34}$, on a

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(p) = \{&\{a_{23}a_{32}\}, \{a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}\}, \{a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}, a_{23}a_{32}\}, && (6.2.a)\\ &\{a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}, a_{11}\}, \{a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}, a_{11}, a_{23}a_{32}\}\} \ . && (6.2.b)\end{aligned}$$

6.2.3 Lemme *Dans* $\mathbb{B}[[a_{ij}]]$, *on a pour la matrice générique* $A = (a_{ij})$:

$$A^*_{ij} = \bigoplus_{p \in \mathcal{P}_{ij}} p \otimes \left(e \oplus \bigoplus_{C \in \mathcal{A}(p)} \bigotimes_{c \in C} c^+ \right) \ . \tag{6.2.c}$$

Preuve du lemme. Désignons par B le second membre de (6.2.c). Nous montrons par récurrence sur k la propriété suivante: ($\mathcal{H}_k$) pour tout chemin p de j à i (peut être non élémentaire) , pour tout ensemble de k circuits $C = \{c_1, \ldots, c_k\} \in \mathcal{A}(p)$ et pour tous $n_1, \ldots, n_k \geq 1$, $pc_1^{n_1} \ldots c_k^{n_k}$ est un chemin commutatif (cf. 0,4.2.7) de j à i. Si $k = 1$, il résulte de l'hypothèse de connexité que c_1 rencontre p, disons au sommet r. En écrivant $p = p_{ir}p_{rj}$, où p_{rj} est un chemin de j à r et p_{ir} de r à i, on a le chemin $pc_1^{n_1} = p_{ir}c_1^{n_1}p_{rj}$. Supposons $k \geq 2$, l'un au moins des circuits $c_1, \ldots, c_k$ rencontre p, disons c_1. D'après le cas $k = 1$, $p' = pc_1^{n_1}$ est un chemin de j à i. En outre, $\{c_2, \ldots, c_k\} \in \mathcal{A}(p')$ et l'on peut appliquer l'hypothèse de récurrence, ce qui montre la propriété $\mathcal{H}_k$. Ainsi, chacun des termes de B est un chemin de j à i, et donc $B \preceq A^*_{ij}$. Inversement, un monôme de A^*_{ij} se factorise comme produit d'un chemin élémentaire et de puissances de circuits élémentaires (cf. 0,4.2.7) pour lesquels la propriété d'accessibilité est évidemment vérifiée, soit $pc_1^{n_1} \ldots c_k^{n_1} \preceq pc_1^+ \ldots c_k^+ \preceq B$. On a donc $A^*_{ij} \preceq B$, ce qui achève la preuve du Lemme 6.2.3. ∎

Le Théorème 6.1.3 résulte immédiatement de ce Lemme. On a, en revenant à $\mathcal{M}^{\mathrm{in}}_{\mathrm{ax}}[[\gamma, \delta]]$ et en prenant la pente ultime de (6.2.c):

$$\sigma_\infty(A^*_{ij}) = \bigoplus_{p \in \mathcal{P}_{ij}} \sigma_\infty(w(p)) \oplus \bigoplus_{C \in \mathcal{A}(p)} \bigoplus_{c \in C} \sigma(w(c)) \ .$$

En remarquant que $c \in C$ avec $C \in \mathcal{A}(p)$ ssi $c \in \mathcal{C}_{ij}$, on obtient (6.1.a). ∎

6.2.4 Exemple On illustre ce lemme en calculant $(A^*)_{11}$ pour la matrice générique en dimension 2. Il y a un seul chemin élémentaire de 1 à 1. C'est le chemin trivial $p = e$. On a

$$\mathcal{A}(p) = \{\{a_{11}\}, \{a_{12}a_{21}\}, \{a_{11}, a_{12}a_{21}\}, \{a_{12}a_{21}, a_{22}\}, \{a_{11}, a_{12}a_{21}, a_{22}\}\} \ .$$

La Formule (6.2.c) affirme que

$$(A^*)_{11} = e \oplus a_{11}^+ \oplus (a_{12}a_{21})^+ \oplus a_{11}^+(a_{12}a_{21})^+ \oplus (a_{12}a_{21})^+a_{22}^+ \oplus a_{11}^+(a_{12}a_{21})^+a_{22}^+ \ . \tag{6.2.d}$$

En regroupant les termes successifs deux par deux, il vient:

$$\begin{aligned}(A^*)_{11} &= a_{11}^* \oplus a_{11}^*(a_{12}a_{21})^+ \oplus a_{11}^*(a_{12}a_{21})^+a_{22}^+ \\ &= a_{11}^*(e \oplus (a_{12}a_{21})^+a_{22}^*) \ . \end{aligned} \tag{6.2.e}$$

Par ailleurs, en inversant les rôles de 2 et 1 dans la Formule (4.2.b) du Chapitre 0, on obtient

$$(A_{11})^* = (a_{11} \oplus a_{12}a_{22}^*a_{21})^* \ . \tag{6.2.f}$$

En utilisant les propriétés 0,4.1.6,(vii) et (viii), il vient

$$(A_{11})^* = a_{11}^*(e \oplus a_{12}a_{22}(a_{12}a_{12})^* a_{22}^*)$$

ce qui n'est autre que la Formule (6.2.e) obtenue par application du lemme. On comprend mieux l'intérêt de la Formule (6.2.d) sur cette exemple. Elle permet d'exprimer de manière finie un ensemble de chemins en fonction uniquement des chemins et circuits élémentaires, et ce, avec un seul niveau d'étoile, à la différence de (6.2.f) obtenue par application de l'algorithme de Gauss.

6.3 Cyclicité des matrices à coefficients dans $\mathcal{P}(\mathbb{N})$

On a caractérisé ci-dessus la pente ultime de l'étoile d'une matrice A rationnelle dans $\mathcal{M}_{\mathrm{ax}}^{\mathrm{in}}[[\gamma,\delta]]$. On étudie maintenant la période ϖ_∞ de A_{ij}^*. On a déjà noté que les résultats de périodicité valables dans le dioïde $\mathcal{M}_{\mathrm{ax}}^{\mathrm{in}}[[\gamma,\delta]]$ étaient des généralisations de résultats relatifs aux parties rationnelles de $\mathbb{N}$. Pour cette raison, nous donnons d'abord un résultat pour des matrices à coefficients dans $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et nous l'étendrons ensuite à $\mathcal{M}_{\mathrm{ax}}^{\mathrm{in}}[[\gamma,\delta]]$.

On considère ici une matrice carrée A dont les coefficients sont des parties finies de $\mathbb{N}$. Le coefficient A_{ij}^* est une partie rationnelle de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, qui s'écrit en conséquence (cf. 3.3.3):

$$A_{ij}^* = P_{ij} \cup (Q_{ij} + \{\nu_{ij}\}^*) \ ,$$

P_{ij} et Q_{ij} étant des parties finies de $\mathbb{N}$. On appellera *période* de cet ensemble la plus petite valeur de ν_{ij} dans une telle écriture. On la notera $\varpi_\infty(A_{ij}^*)$ par analogie avec $\mathcal{M}_{\mathrm{ax}}^{\mathrm{in}}[[\gamma,\delta]]$. Le problème du calcul de cette période se formule simplement en termes de graphe.

6.3.1 Notation (multigraphe associé à une matrice de parties de $\mathbb{N}$) Soit $A \in (\mathcal{P}(\mathbb{N}))^{n\times n}$. On définit le multigraphe associé à A, $\mathsf{MG}(A)$, comme le multigraphe formé de n sommets et d'un arc de j à i pour chaque élément $m \in A_{ij}$, cet arc étant valué par m. Cette définition est illustrée sur la Figure VII.8.

$$A = \begin{bmatrix} \{2,4\} & \{3\} \\ \{2,3\} & \emptyset \end{bmatrix}$$

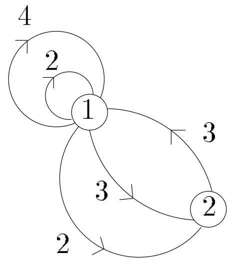


Figure VII.8: Une matrice et son multigraphe

Le coefficient A_{ij}^* s'interprète comme l'ensemble des poids de chemins de j à i dans le multigraphe $\mathsf{MG}(A)$. Le calcul de $\varpi_\infty(A_{ij}^*)$ est donc équivalent au problème suivant: "trouver le plus petit ν tel que pour n assez grand, l'existence d'un chemin de j à i de poids n dans $\mathsf{MG}(A)$ entraîne l'existence d'un chemin de j à i de poids $n+\nu$".

6.3.2 Notation (Cyclicités) On définit la *cyclicité* d'une composante fortement connexe C_k de $\mathsf{MG}(A)$ comme le pgcd des poids des circuits élémentaires de cette composante. On appellera *cyclicité* du multigraphe le ppcm des cyclicités des composantes fortement connexes, et on la notera $c(A)$. Etant donné un chemin élémentaire p, on définit $c(p)$, cyclicité de p, comme le pgcd des cyclicités des composantes fortement connexes traversée.

6.3.3 Théorème *La période de A^*_{ii} est égale à la cyclicité de la composante fortement connexe associée. La période de A^*_{ij} divise le* ppcm *des cyclicités des chemins élémentaires de j à i.*

On pourra retenir le corollaire simple suivant, qui en résulte immédiatement.

6.3.4 Corollaire *La période d'un coefficient de A^* divise la cyclicité $c(A)$.*

6.3.5 Exemple Dans l'exemple de la Figure VII.8, il y a une seule composante fortement connexe, et le pgcd des poids de circuits est égal à 1. La cyclicité $c(A)$ est donc égale à 1. On trouve en effet:

$$A^* = \begin{bmatrix} \{0,2\} \cup (\{4\} + \{1\}^*) & \{3,5\} \cup (\{7\} + \{1\}^*) \\ \{2\} + \{1\}^* & \{0\} \cup (\{5\} + \{1\}^*) \end{bmatrix}$$

Preuve du Théorème.
(i): Cas où $i = j$. Le poids d'un circuit passant par i est divisé par la cyclicité c de la composante fortement connexe associée à i, donc $A^*_{ii} \subset c\mathbb{N}$. Soient $c_1, \ldots, c_k$ k circuits tels que

$$\mathrm{pgcd}(w_A(c_1), \ldots, w_A(c_k)) = c \ . \tag{6.3.a}$$

D'après l'hypothèse d'irréductibilité, il existe un circuit p non nécessairement élémentaire passant par i rencontrant tous ces circuits. On note que pour $\alpha \in \mathbb{N}^k$, $pc_1^{\alpha_1} \ldots c_k^{\alpha_k}$ est encore un circuit passant par i. Il résulte du lemme diophantien 3.3.6, que pour K assez grand multiple de c, disons $K = kc$ avec $k \geq k_0$, il existe $\alpha \in \mathbb{N}^k$ tel que

$$K = w_A(pc_1^{\alpha_1} \ldots c_k^{\alpha_k}) = w_A(p) + \alpha_1 w_A(c_1) + \ldots + \alpha_k w_A(c_k) \ .$$

On a donc $c(k_0 + \mathbb{N}) \subset A^*_{ii} \subset c\mathbb{N}$, d'où il résulte que la (plus petite) période de A^*_{ii} est c.
(ii): Cas où $i \neq j$. Soit $\{p_1, \ldots, p_r\}$ l'ensemble des chemins élémentaires de j à i, de supports respectifs $S_1, \ldots, S_r$. On a:

$$A^*_{ij} = w(p_1) \bigotimes_{i \in S_1} A^*_{ii} \oplus \ldots \oplus w(p_r) \bigotimes_{i \in S_r} A^*_{ii}$$

(ce qui n'est autre que l'expression de la décomposition d'un chemin quelconque en un chemin élémentaire et un certain nombre de circuits). On montre en raisonnant comme en (i) que la période de $w(p_l) \bigotimes_{i \in S_l} A^*_{ii}$ est égale à $c(p_l)$. On conclut en observant que la période d'une somme divise le ppcm des périodes. ∎

6.4 Cyclicité des matrices rationnelles dans $\mathcal{M}^{\mathrm{in}}_{\mathrm{ax}}[[\gamma, \delta]]$

On rappelle tout d'abord le résultat de cyclicité suivant de type Perron-Frobenius pour les matrices à coefficients dans $\mathbb{R}_{\min}$:

6.4.1 Théorème *(Cohen, Dubois, Quadrat, Viot [17]) Soit $A \in (\mathbb{R}_{\min})^{n\times n}$ irréductible. Il existe $N \geq 0$ et $c \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ (cyclicité) tels que*

$$\forall n \geq N, \quad A^{n+c} = \rho(A)^c A^n \ .$$

La cyclicité est caractérisée de la manière suivante. On définit le graphe critique comme le graphe formé des sommets et arêtes appartenant à un circuit critique. En appelant cyclicité d'une composante connexe du graphe critique le pgcd des longueurs des circuits de cette composante, on caractérise la cyclicité de A comme le ppcm des cyclicités des composantes connexes du graphe critique. C'est ce genre de résultat qu'il s'agit de généraliser au dioïde $\mathcal{M}_{\mathrm{ax}}^{\mathrm{in}}[\gamma,\delta]$.

Nous donnons ici un résultat de périodicité analogue pour des matrices à coefficients polynômiaux dans $\mathcal{M}_{\mathrm{ax}}^{\mathrm{in}}[[\gamma,\delta]]$. On rappelle que la (plus petite) *période* $\varpi_\infty(s)$ d'une série rationnelle s est définie comme le plus petit monôme r (au sens de la divisibilité) tel que s admette la représentation périodique $s = p \oplus qr^*$ (cf. 2.3.4). Etant donné un polynôme $p = \bigoplus_{i=1}^n m_i$ (somme de n monômes), on pose

$$\sqcup p = m_1 \sqcup m_2 \sqcup \ldots \sqcup m_n, \qquad \sqcap p = m_1 \sqcap m_2 \sqcap \ldots \sqcap m_n \ .$$

On a noté en §5.4 que ces quantités ne dépendaient pas du choix des m_i.

6.4.2 Notation (Multigraphe dans $\mathcal{M}_{\mathrm{ax}}^{\mathrm{in}}[\gamma,\delta]$) Soit A une $n\times n$ matrice à coefficients dans $\mathcal{M}_{\mathrm{ax}}^{\mathrm{in}}[\gamma,\delta]$ et

$$A_{ij} = \bigoplus_{k=1}^{r} m_{ijk} \tag{6.4.a}$$

l'écriture canonique de A_{ij}. On définit le multigraphe associé à A, $\mathsf{MG}(A)$ comme le graphe formé de n sommets et d'un arc allant du sommet j au sommet i par monôme m_{ijk}, cet arc étant valué par m_{ijk}. Cette définition est illustrée sur la Figure VII.9.

$$A = \begin{bmatrix} e \oplus \gamma^3\delta^4 & \gamma \oplus \gamma^2\delta^2 \\ \gamma\delta^2 \oplus \gamma^{10}\delta^3 & \gamma\delta \end{bmatrix}$$

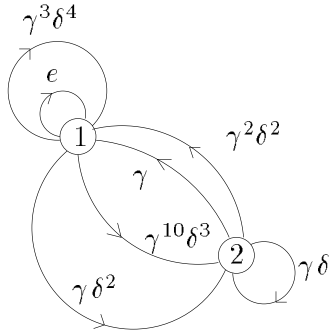


Figure VII.9: Multigraphe dans $\mathcal{M}_{\mathrm{ax}}^{\mathrm{in}}[\gamma,\delta]$

6.4.3 Notation (multigraphe critique) On suppose la matrice A irréductible. On pose alors $\sigma(A) = \sigma_\infty(A^*_{ij})$ qui ne dépend pas du couple i,j. On qualifiera de critique un circuit α de $\mathsf{MG}(A)$ tel que $\sigma(w(\alpha)) = \sigma(A)$. Le multigraphe critique est formé des arcs et des sommets appartenant à un circuit critique. Le monôme m_{ijk} sera qualifié de critique s'il value un arc critique. On notera A^c (matrice critique) la matrice obtenue en se restreignant aux monômes critiques dans la somme (6.4.a). On notera $A'_{ij} = A_{ij} \boxminus A^c_{ij}$ (matrice sous critique) la somme des monômes n'appartenant pas à A_{ij}. On a donc $A = A^c \oplus A'$. Pour la matrice A de la Figure VII.9, on a par (6.1.b) $\sigma_\infty(A) = \frac{3}{4}$. Les matrices critique et sous-critique sont données respectivement par

$$A^c = \begin{bmatrix} \gamma^3\delta^4 & \gamma^2\delta^2 \\ \gamma\delta^2 & \varepsilon \end{bmatrix}, A' = \begin{bmatrix} e & \gamma \\ \gamma^{10}\delta^3 & \gamma\delta \end{bmatrix} .$$

6.4.4 Notation (Cyclicités dans $\mathcal{M}_{\mathrm{ax}}^{\mathrm{in}}[\gamma,\delta]$) Soient $C_1, \ldots, C_r$ les composantes fortement connexes du graphe critique. On définit $c(C_l)$, cyclicité de la composante C_L comme l'$\sqcap$ des poids des circuits du multigraphe critique. On pose

$$c(A) = c(C_1) \sqcup \ldots \sqcup (C_r) .$$

On a alors le résultat de cyclicité suivant qui généralise le Théorème 6.3.3.

6.4.5 Théorème *Soit A une matrice irréductible à coefficients polynômiaux. La période de A^*_{ij} divise la cyclicité $c(A)$.*

Nous illustrons ce résultat sur quelques exemples avant de passer à la preuve.

6.4.6 Exemple Soit la matrice

$$A = \begin{bmatrix} \gamma^3\delta^3 & \gamma^2 \\ \delta^2 & \gamma^6\delta^6 \end{bmatrix}$$

Le graphe critique de A se confond avec le graphe de A, et a une seule composante connexe. En outre $c(A) = w(1) \sqcap w(2) \sqcap (w(1,2)) = \gamma^3\delta^3 \sqcap \gamma^6\delta^6 \sqcap \gamma^2\delta^2 = \gamma\delta$, soit une cyclicité de $(1,1)$. On trouve après calculs

$$A^* = \begin{bmatrix} e \oplus \gamma^2\delta^2(\gamma\delta)^* & \gamma^2 \oplus \gamma^4\delta^2(\gamma\delta)^* \\ \delta^2 \oplus \gamma^2\delta^4(\gamma\delta)^* & e \oplus \gamma^2\delta^2 \oplus \gamma^4\delta^4(\gamma\delta)^* \end{bmatrix} .$$

6.4.7 Exemple Soit la matrice

$$A = \begin{bmatrix} \gamma^4\delta^4 \oplus \gamma^6\delta^6 & \gamma^{10}\delta^2 & \gamma^7\delta \\ \gamma^5\delta^2 & \varepsilon & \gamma^3 \\ \gamma^8\delta & \delta^3 & \gamma^9\delta^9 \end{bmatrix}$$

Le graphe critique associé à A a deux composantes connexes: $C_1 = \{1\}$, $C_2 = \{2,3\}$. La première composante connexe a pour cyclicité $\gamma^2\delta^2 = \gamma^4\delta^4 \sqcap \gamma^6\delta^6$, la seconde $\gamma^3\delta^3$.

$$A^* = \begin{bmatrix} e \oplus \gamma^4\delta^4\left(\gamma^2\delta^2\right)^* & \gamma^7\delta^4 \oplus \gamma^{10}\delta^7 \oplus \gamma^{11}\delta^8 \oplus \gamma^{13}\delta^{10}(\gamma\delta)^* & \gamma^7\delta \oplus \gamma^{10}\delta^4 \oplus \gamma^{11}\delta^5 \oplus \gamma^{13}\delta^7(\gamma\delta)^* \\ \gamma^5\delta^2 \oplus \gamma^8\delta^5 \oplus \gamma^9\delta^6 \oplus \gamma^{11}\delta^8(\gamma\delta)^* & \left(\gamma^3\delta^3\right)^* & \gamma^3\left(\gamma^3\delta^3\right)^* \\ \gamma^5\delta^5 \oplus \gamma^8\delta^8 \oplus \gamma^9\delta^9 \oplus \gamma^{11}\delta^{11}(\gamma\delta)^* & \delta^3\left(\gamma^3\delta^3\right)^* & \left(\gamma^3\delta^3\right)^* \end{bmatrix}$$

6.5 Preuve du Théorème 6.4.5

On part de la décomposition critique/sous-critique décrite en 6.4.3:

$$A = A^c \oplus A' .$$

On a

$$A^* = ((A^c)^*A')^*(A^c)^* . \tag{6.5.a}$$

On va (i) donner une formule exprimant la période de A^* a partir de celle des composantes fortement connexes de A^c, (ii) montrer que les composantes fortement connexes de la matrice A^c vérifient le résultat de cyclicité.

Le point (i) repose sur la majoration suivante assez grossière de la période des coefficients de l'étoile d'une matrice rationnelle (et non plus polynomiale).

6.5.1 Proposition *Soit A une matrice dont les coefficients sont des séries périodiques:*

$$A_{ij} = p_{ij} \oplus q_{ij} r_{ij}^* \ .$$

On a, en introduisant la matrice B telle que $B_{ij} = p_{ij} \oplus q_{ij}$:

$$\varpi_\infty(A_{ij}^*) \mid (\sqcup_{c \in \mathcal{C}_{ij}} \sqcup w_B(c)) \sqcup (\sqcup_{(lm)\ \text{dans}\ p\ \text{avec}\ p \in \mathcal{P}_{ij}} r_{lm}) \ . \tag{6.5.b}$$

Le second $\sqcup$ est à prendre sur tous les arc (lm) faisant partie d'un chemin $p \in \mathcal{P}_{ij}$.
Preuve On montre que la période associée au terme

$$p \bigotimes_{c \in C} c^+$$

de la formule du Lemme 6.2.3 divise la borne ci-dessus. Pour fixer les idées, nous faisons la preuve dans le cas particulier ou $p = a_{12}$ et $C = \{a_{23}a_{32}\}$. Le lecteur généralisera facilement. On a

$$\begin{aligned} w_A(c) &= (p_{23} \oplus q_{23} r_{23}^*)(p_{32} \oplus q_{32} r_{32}^*) \\ &= p_{23}p_{32} \oplus q_{23}p_{32}r_{23}^* \oplus q_{32}p_{23}r_{32}^* \oplus q_{23}q_{32}r_{23}^*r_{32}^* \\ &= u \oplus v \oplus w \oplus t \end{aligned}$$

avec des notations évidentes. La période de $(w_A(c))^+$ est la même que celle de $(w_A(c))^*$, or $(w_A(c))^* = (u \oplus v \oplus w \oplus t)^* = u^*v^*w^*t^*$. D'après la Proposition 5.4.6, la période de w^* divise le $\sqcup$ de $\sqcup q_{32}p_{23}$ et de r_{32}. On voit de la sorte apparaître les circuits de la matrice $B = P \oplus Q$. Avec des considérations analogues pour u, v, t, et comme la période du produit divise le $\sqcup$ des périodes, on obtient le résultat. ∎

Les deux faits suivants résultent immédiatement de la définition de la matrice critique.

6.5.2 Lemme *La pente de tout circuit de la matrice sous critique est inférieure (i.e. $\prec$) à la pente critique $\sigma_\infty(A^*)$.*

6.5.3 Lemme *La matrice critique est bloc-diagonale. Les blocs correspondant aux composantes fortement connexes du graphe critique.*

6.5.4 Lemme *Pour tout circuit $\alpha = (i_1, \ldots, i_l, i_1)$ de la matrice critique et tout choix de monômes $m_{i_1 i_2 k_1}, \ldots, m_{i_l i_1 k_l}$ appartenant respectivement aux écritures canoniques de $A_{i_1 i_2}, \ldots, A_{i_l i_1}$, la pente $\sigma(m_{i_1 i_2} \ldots m_{i_l i_1})$ est égale à la pente critique $\sigma(A)$.*

Autrement dit, tout circuit du multigraphe critique est de pente critique.

Preuve L'idée est la même que dans [17], Lemme 4.7. Trivialement,

$$\sigma(m_{i_1 i_2} \ldots m_{i_l i_1}) \preceq \sigma(A_{i_1 i_2} \ldots A_{i_l i_1}) = \sigma(w_A(c)) \preceq \sigma(A) \ .$$

Supposons par l'absurde $\sigma(m_{i_1i_2}\dots m_{i_li_1})\prec\sigma(A)$. On peut compléter l'arc i_1i_2 en un circuit critique $\alpha_1=(i_1i_2)\cup p_{i_2i_1}$, où $p_{i_2i_1}$ est un chemin de i_2 à i_1. On procède de même pour les autres arcs du circuit. On a alors

$$\sigma(A)=\sigma(w(\alpha_1\dots\alpha_l))=\sigma((m_{i_1i_2}\dots m_{i_li_1})\otimes w(p_{i_2i_1}\dots p_{i_1i_l}))\ .$$

Si $\sigma(m_{i_1i_2}\dots m_{i_li_1})\prec\sigma(A)$, on a nécessairement $\sigma(w(p_{i_2i_1}\dots p_{i_1i_l}))\succ\sigma(A)$ (cf. 5.4.3,(ii)), soit un circuit de pente supérieure à la pente critique: absurde. ∎

6.5.5 Corollaire *Tous les monômes de l'écriture canonique de $(A^c)^*_{ii}$ sont de la forme $\gamma^{\sigma(A)t}\delta^t$, où t est un entier positif ou nul.*

Preuve Un tel monôme est égal au poids d'un circuit du multigraphe critique de A. La conclusion résulte de 6.5.4. ∎

Le Corollaire suivant achève le point (ii) de la preuve.

6.5.6 Corollaire *Si i et j appartiennent à la même composante connexe du graphe critique, La période de $(A^c)^*_{ij}$ est égale à la cyclicité de cette composante.*

Preuve Soit l'écriture canonique

$$(A^c)_{ij}=\bigoplus_{l\in L_{ij}}\gamma^{n_l}\delta^{t_l}\ .$$

On définit la matrice B à coefficients dans $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ par

$$B_{ij}=\{t_l\mid\ l\in L_{ij}\}\ .$$

On a d'après 6.5.5

$$(A^c)^*_{ii}=\bigoplus_{t\in B^*_{ii}}\gamma^{\sigma(A)t}\delta^t\ ,\tag{6.5.c}$$

d'où il résulte que la période de $(A^c)^*_{ij}$ est égale à $(\sigma(A)C,C)$, où C est la période de B^*_{ij} caractérisée par le Théorème 6.3.3. ∎

Pour conclure, nous reprenons la Formule 6.5.a. Par application du Corollaire 6.5.6, et compte tenu que la période de la somme divise le $\sqcup$ des périodes, la période de tous les coefficients de $(A^c)^*A'$ divise $c(A)$. On peut donc écrire

$$(A^c)^*A'=P\oplus Q(c(A))^*$$

où P et Q sont des matrices polynomiales. On observe que les circuits du multigraphe associé à la matrice $P\oplus Q$ sont de pente $\prec$ à $\sigma(A)$ (un tel circuit, associé à la matrice $(A^c)^*A'$, s'interprète en effet comme un circuit du multigraphe associé à A passant au moins une fois par un arc de A', et n'est donc pas critique). Le Lemme 6.5.1 montre que la période des coefficients de $((A^c)^*A')^*$ divise $c(A)$. En multipliant cette matrice par $(A^c)^*$ d'après la Formule (6.5.a), on obtient le Théorème. ∎

6.5.7 Remarque On pourrait penser au vu de l'exemple 6.4.7 que la période de A^*_{ij} est en fait égale au pgcd des périodes des composantes irréductibles du graphe critique reliées. Pour des matrices moins simples, ce phénomène disparaît. On a traité avec `MAX` la matrice suivante.

$$A=\begin{bmatrix}\gamma^6\delta^6 & \gamma^2 & \gamma & \gamma\\ \gamma & \gamma^{15}\delta^{15} & \gamma^3 & \gamma^2\\ \gamma^2\delta & \gamma\delta & \gamma^{10}\delta^{10} & \gamma\\ \gamma^5 & \gamma^3\delta^2 & \gamma\delta & \gamma^2\delta\end{bmatrix}$$

Les périodes de A^* sont données dans la matrice:

$$\begin{bmatrix} \gamma^6\delta^6 & \gamma\delta & \gamma\delta & \gamma^6\delta^6 \\ \gamma^3\delta^3 & \gamma^{15}\delta^{15} & \gamma\delta & \gamma^3\delta^3 \\ \gamma\delta & \gamma\delta & \gamma^{10}\delta^{10} & \gamma^{10}\delta^{10} \\ \gamma\delta & \gamma\delta & \gamma^{10}\delta^{10} & \gamma^{10}\delta^{10} \end{bmatrix}$$

6.6 Application au calcul du taux de production d'un système autonome

Nous appliquons maintenant ces résultats au calcul du taux de production d'un système en régime autonome. On a les deux représentations équivalentes:

Compteurs	$\mathcal{M}_{\mathrm{ax}}^{\mathrm{in}}[[\gamma,\delta]]$
$x(n+1) = Ax(n) \oplus Bu(n), \quad u(n) = \varepsilon$	$x \succeq A'x \oplus B'u, \quad u = \varepsilon$
$x(0) = x_0$	$x \succeq \xi$ où $\xi_i = \gamma^{(x_0)_i}\delta^0$
Solution au plus tôt:	
$x_n = A^n x_0$	$x = (A')^*\xi.$

Dans le premier cas, les matrices A et B sont à coefficients dans $\mathbb{R}_{\min}$. Dans le second cas, elles sont à coefficients dans $\mathcal{M}_{\mathrm{ax}}^{\mathrm{in}}[[\gamma,\delta]]$. Le lien entre ces deux représentations est donné par $A'_{ij} = \gamma\delta^{A_{ij}}$. La condition $u = \varepsilon$ traduit le caractère non contraignant de l'entrée. La condition $x_i \succeq \gamma^{(x_0)_i}\delta^0$ entraîne $\mathsf{compt}\, x_i(0) \leq (x_0)_i$, ce qui, en prenant la solution maximale, revient à la condition initiale $x(0) = x_0$ pour les compteurs. Les conditions $x \succeq \xi$ et $x \succeq A'x$ sont équivalentes à $x \succeq A'x \oplus \xi$. La plus petite solution représentant le régime autonome est donc $x = (A')^*\xi$, ce qui justifie la dernière ligne du tableau. Définissons le *taux de production* comme la plus petite pente ultime des composantes de x. On a alors comme conséquence de 6.1.4:

6.6.1 Corollaire *Le taux d'un production en régime autonome d'un système représenté par la matrice A' à coefficients polynômiaux est donné par*

$$\lambda = \sigma(\mathrm{tr}((A')^*)) = \min_c \sigma(w_{A'}(c)) \ .$$

En termes du multigraphe $\mathsf{MG}(A')$, en notant $w_{A'}^N(c)$ le nombre total de jetons du circuit c (égal à l'exposant en γ du poids du circuit) et $w_{A'}^T$ la somme des temporisations des places du circuit (égale à l'exposant en δ), on retrouve la formule bien connue:

$$\lambda = \min_c \frac{w_{A'}^N(c)}{w_{A'}^T} \tag{6.6.a}$$

Cette formule est à comparer à $\lambda = \rho(A)$ en représentation compteur, ce qui pour A irréductible résulte immédiatement de 6.4.1.

6.6.2 Exemple Pour le graphe d'événements traité initialement (§1), le min dans (6.6.a) est atteint pour le circuit $3 \mapsto 3$ de la matrice a (cf. (1.2.b)), soit un taux de production $\lambda = \frac{1}{2}$.