

THÈSE

présentée à

L'ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DES MINES DE PARIS

par

Stéphane GAUBERT

pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE L'ÉCOLE DES MINES DE PARIS

Spécialité:

MATHÉMATIQUES ET AUTOMATIQUE

Sujet de la thèse:

**THÉORIE DES SYSTÈMES LINÉAIRES
DANS LES DIOÏDES**

soutenue le 1^{er} Juillet 1992 devant le jury composé de:

MM. **Michel MINOUX**

Président et Rapporteur

Michel FLIESS

Michel VIOT

Rapporteurs

Guy COHEN

Geert Jan OLSDER

Jean-Pierre QUADRAT

Examineurs

Théorie des systèmes linéaires dans les dioïdes

Résumé

On étudie les systèmes linéaires sur certaines structures de *dioïdes* (demi-anneaux dont l'addition est idempotente).

On étudie tout d'abord les systèmes d'équations linéaires dans certains dioïdes, pour lesquels on retrouve l'analogie de la théorie de Cramer à condition de se placer dans un dioïde *symétrisé*. On adapte les algorithmes itératifs usuels (Jacobi, Gauss-Seidel). On obtient des résultats de dualité. On étend par ailleurs aux matrices réductibles la théorie spectrale $(\max, +)$.

On étudie ensuite les systèmes dynamiques linéaires dans ces algèbres (représentation par des opérateurs à noyaux ou opérateurs de convolution, rôle de la transformée de Fenchel). On obtient à l'aide de résultats de symétrisation une borne inférieure pour la dimension minimale de réalisation.

L'on donne ensuite des algorithmes de calcul dans un dioïde de séries rationnelles propre à représenter les graphes d'événements temporisés. On présente MAX, le programme de calcul formel écrit en MAPLE dans lequel on a implémenté ces algorithmes (fonction de transfert, calcul du taux de production). On considère enfin l'optimisation des ressources. Ce problème conduit à une énumération algébrique de contraintes modulo certaines congruences. Une seconde approche formule ces contraintes en termes de sous-vecteur propre.

Mots clés Dioïdes, Systèmes Linéaires, Systèmes à événements discrets, Graphes d'événements temporisés, Symétrisation

Theory of linear systems over dioids

Abstract

We develop a system theory for linear systems over certain dioid structures (semirings with idempotent addition).

We study general systems of linear equations in certain dioids. The introduction of a new notion of *symmetrization* results in the linear closure of these algebras: the generic system of n linear equations with n unknowns admits a unique solution in the symmetrized dioid, given by Cramer's formulae. We adapt the Jacobi and Gauss-Seidel algorithms to this context. We also give some duality results. The spectral theory of irreducible $(\max, +)$ matrices is extended to the reducible case.

Later, we consider the associated linear system theory (representation by kernels and convolutions in dioid, use of the Fenchel transform). We obtain a lower bound for minimal realizations in terms of minors.

We develop some algorithms for an algebra of rational series devoted to timed event graphs. We present MAX, the program written in MAPLE which implements these algorithms (transfer series, periodic throughput). Finally, we show that the resource optimization problem reduces to an algebraic enumeration of constraints modulo some simplification rules. These constraints also reduce to a sub-eigenvector problem.

Key words Dioids, Linear Systems, Discrete Event Systems, Timed Event Graphs, Symmetrization.

THÈSE

présentée à

L'ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DES MINES DE PARIS

par

Stéphane GAUBERT

pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE L'ÉCOLE DES MINES DE PARIS

Spécialité:

MATHÉMATIQUES ET AUTOMATIQUE

Sujet de la thèse:

**THÉORIE DES SYSTÈMES LINÉAIRES
DANS LES DIOÏDES**

soutenue le 1^{er} Juillet 1992 devant le jury composé de:

MM. Michel MINOUX

Président et Rapporteur

Michel FLIESS

Michel VIOT

Rapporteurs

Guy COHEN

Geert Jan OLSDER

Jean-Pierre QUADRAT

Examineurs

Je voudrais remercier

J.P. Quadrat pour m'avoir accueilli à l'INRIA, dirigé, conseillé, encouragé, fait partager sa culture, confirmé dans mes inclinations mathématiques et révélé cette difficile vérité: un plus un égale un.

G. Cohen pour avoir co-piloté et fait progresser cette thèse, n'ayant été avare ni de temps, ni d'idées, ni de rigueur.

M. Viot pour avoir encouragé ce travail, en avoir suggéré certains développements et pour avoir rapporté.

M. Minoux et M. Fliess pour l'intérêt qu'ils ont manifesté pour ce travail en acceptant de rapporter.

G.J. Olsder qui s'est intéressé à ces recherches depuis le début et me fait l'honneur d'être membre du Jury.

M. Akian et R. Nikoukhah pour les nombreuses idées et discussions mathématiques.

M. Plus pour la dynamique de groupe.

S. Steer et Basile pour leur aide.

Les chercheurs du Bâtiment 12 pour le soutien scientifique et moral, particulièrement A. Sulem, J. Clairambault, C. Klimann, F. Delebecque, Y. Sorel, C. Lavarenne, P.A. Bliman, G. Launay, C. Lemaréchal, ainsi que M. Verneuille.

Table des Matières

A	Résultats algébriques	19
0	Preliminaires	21
1	Demi-anneaux et dioïdes	21
2	Dioïdes et structures ordonnées	24
2.1	L'ordre naturel d'un dioïde	24
2.2	Inf-dioïdes	27
2.3	Continuité	27
3	Moduloïdes	28
3.1	Généralités	28
3.2	Familles génératrices minimales	30
4	Equations implicites linéaires dans les dioïdes complets	30
4.1	Généralités	30
4.2	Equations implicites matricielles et interprétation combinatoire	32
5	Résiduation	34
5.1	Applications résiduables	34
5.2	Dioïdes additivement résidués	37
5.3	Dioïdes multiplicativement résidués	39
5.4	Résiduation matricielle	41
5.5	Caractérisation des familles génératrices minimales	42
6	Matrices inversibles dans les demi-anneaux positifs	45
6.1	Preliminaires	45
6.2	Matrices inversibles	46
7	Inversibilité d'applications linéaires	47
7.1	Prolongement d'applications linéaires	47
7.2	Applications linéaires injectives	48
I	Symétrisation	51
1	Structure de demi-anneau symétrisé	51

1.1	Demi-anneau symétrisé libre	52
1.2	La relation d'équilibre	53
1.3	Relation d'équilibre dans un demi-anneau symétrisé libre	54
1.4	Valeur absolue dans les demi-anneaux symétrisés libres	54
2	Quelques identités algébriques et combinatoires	54
2.1	Déterminants	55
2.2	Applications	58
II	Dioïde symétrisé	61
1	Motivations	61
1.1	Premier exemple	61
1.2	Construction élémentaire du dioïde symétrisé de \mathbb{R}_{\max}	62
2	Le symétrisé d'un demi-anneau	64
2.1	Symétrisation régulière	64
2.2	Symétrisation régulière minimale	65
2.3	Dioïde des fractions d'un dioïde commutatif	68
3	Dioïdes symétrisés	70
3.1	Solutions de l'équilibre élémentaire $x \nabla a$	70
3.2	Symétrisé du dioïde de Boole	71
3.3	Le dioïde symétrisé de \mathbb{R}_{\max}	71
3.4	Autres dioïdes symétrisés	77
3.5	Domaine de transitivité de la relation d'équilibre	79
3.6	Eléments substituables	81
3.7	Elimination	84
III	Systèmes d'équilibres linéaires	85
1	Dualité	86
1.1	Orthogonalité dans \mathbb{S}_{\max}^n	86
1.2	Dualité $\mathbb{R}_{\max}^n \leftrightarrow \mathbb{S}_{\max}^n$	89
2	Solutions générales d'équilibres linéaires	93
2.1	Systèmes homogènes	93
2.2	Solutions des équilibres non homogènes	95
3	Systèmes de Cramer	96
3.1	Solution de Cramer	96
3.2	Systèmes de Cramer dans \mathbb{S}_{\max}	96
3.3	Application aux systèmes d'équations linéaires à coefficients dans \mathbb{R}_{\max}	98
3.4	Commentaires	100

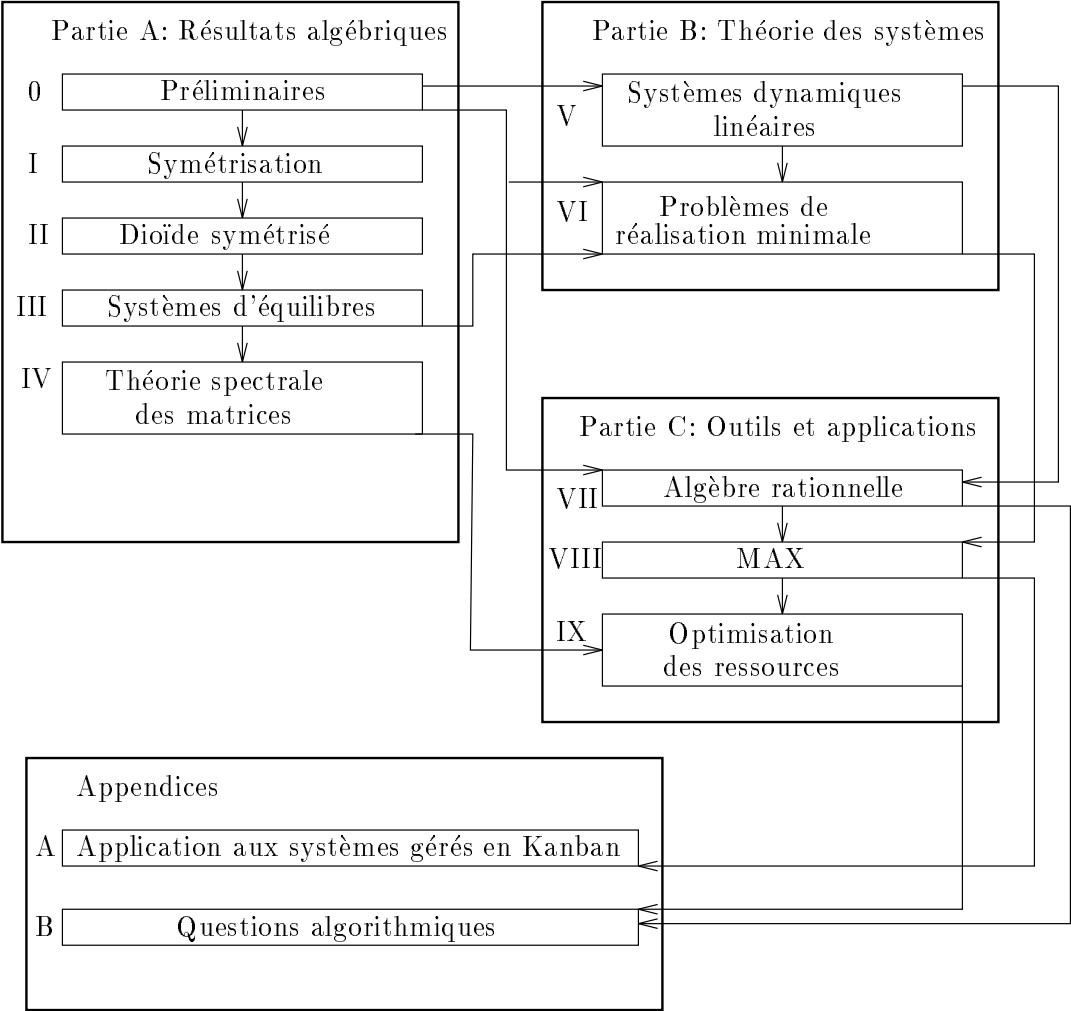
4	Conditions de compatibilité de systèmes rectangulaires	104
4.1	Rang mineur	104
4.2	Conditions supplémentaires de compatibilité	104
5	Existence de solutions signées d'équilibres linéaires	108
6	Algorithme de Jacobi	108
6.1	Existence de la suite $\{x^p\}$	109
6.2	Stationnarité de la suite $\{x^p\}$	110
6.3	Etoiles et cofacteurs	111
7	Algorithme de Gauss-Seidel	112
8	Preuve directe du Théorème 5.0.1	113
8.1	Préliminaires	113
8.2	Lemme fondamental	114
8.3	Seconde preuve	115
9	Systèmes homogènes carrés	118
9.1	Cas de nullité du déterminant	118
9.2	Cas d'équilibre d'une permutation de poids maximal	118
9.3	Cas d'opposition des signes de deux permutations	119
10	Rangs dans \mathbb{S}_{\max}	121
IV	Résultats supplémentaires de théorie spectrale des matrices	125
1	Préliminaires	125
1.1	Graphe associé à une matrice	125
1.2	Classes	126
1.3	Rappels de théorie spectrale des matrices irréductibles	128
2	Théorie spectrale des matrices réductibles	131
2.1	Préliminaires	131
2.2	Etude du spectre	132
2.3	Vecteurs propres des matrices réductibles	134
3	Lien avec le rayon spectral usuel	137
3.1	Rayon spectral usuel et (\max, \times)	137
3.2	Applications	140
B	Théorie des Systèmes	141
V	Systèmes dynamiques linéaires sur un dioïde	143
1	Exemples	143

1.1	Un système continu et son analogue discret	143
1.2	Equations dynamiques	144
1.3	Analogie discret	145
1.4	Mélangeur	145
1.5	Exemple de système $(\max, +)$ linéaire	145
2	Systèmes linéaires	146
2.1	Systèmes élémentaires $(\min, +)$ linéaires	148
2.2	Systèmes élémentaires $(\max, +)$ linéaires	149
3	Représentation des systèmes linéaires	150
3.1	Systèmes linéaires sur $\mathcal{D}^{\mathbb{R}}$	150
3.2	Système linéaires continus sur des bons ensembles de signaux	153
3.3	Application aux fonctions croissantes	154
3.4	Systèmes vectoriels sur les bons ensembles de signaux	156
4	Fonction de transfert des systèmes $(\min, +)$ linéaires stationnaires	158
4.1	Transformation de Fenchel	158
4.2	Résumé	161
VI	Quelques remarques sur la réalisation minimale	163
1	Séries $(\max, +)$ rationnelles	163
1.1	Réalisabilité, rationalité, périodicité	163
1.2	Réalisation faible	167
2	Critères de minimalité	173
2.1	Critère de rang mineur	173
2.2	Un contre exemple	174
2.3	Critère classique	175
C	Outils et applications	177
VII	Algèbre rationnelle des graphes d'événements temporisés	179
1	Un exemple de graphe d'événements temporisé	179
1.1	Représentation par des systèmes linéaires récurrents	180
1.2	Approche opératorielle	182
2	Etude de l'algèbre des opérateurs γ et δ	183
2.1	Le dioïde $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\gamma, \delta]]$	183
2.2	Preuve du théorème 2.1.1	184
2.3	Calcul dans le dioïde $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[\gamma, \delta]$	186

3	Séries rationnelles	188
3.1	Généralités	188
3.2	Représentation des rationnels	188
3.3	Analogie avec les parties rationnelles de \mathbf{N}	189
4	Règles de calcul sur les éléments simples	190
4.1	Somme de deux éléments simples	190
4.2	Produit de deux éléments simples	192
4.3	Une décomposition en éléments simples et ses conséquences	194
5	Algèbre des séries périodiques	194
5.1	Caractéristiques de la somme de séries périodiques	196
5.2	Produit de séries périodiques générales	196
5.3	Etoile de polynômes et problème diophantien de Frobenius	197
5.4	Pentes et étoiles dans $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\gamma, \delta]]$	198
6	Algèbre rationnelle des matrices	199
6.1	Pente des matrices rationnelles	199
6.2	Preuve du Théorème 6.1.3	201
6.3	Cyclicité des matrices à coefficients dans $\mathcal{P}(\mathbf{N})$	203
6.4	Cyclicité des matrices rationnelles dans $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\gamma, \delta]]$	204
6.5	Preuve du Théorème 6.4.5	206
6.6	Application au calcul du taux de production d'un système autonome	209
VIII	MAX: un outil de calcul rationnel dans les dioïdes	211
1	Syntaxe générale	212
2	Opérations sur les constantes	213
2.1	Le dioïde $\overline{\mathbb{R}}_{\text{max}}$	213
2.2	Opérations matricielles dans $\overline{\mathbb{R}}_{\text{max}}$	213
3	Calcul rationnel dans $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\gamma, \delta]]$	215
3.1	Polynômes	215
3.2	Séries périodiques	217
3.3	Validation de MAX	219
4	Exemple: calcul du transfert d'un atelier flexible de type flowshop	220
IX	Calcul formel du taux de production et optimisation des ressources	223
1	Les problèmes d'optimisation des ressources	224
1.1	Exemple	224
1.2	Premier problème	224
1.3	Second problème	225

2	Polynômes multivariables et ressources	225
2.1	Le dioïde $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\gamma_i, \delta]]$	225
2.2	Représentation géométrique	226
2.3	Ressources et polynômes	227
3	Enumération des contraintes	229
3.1	Chemins élémentaires	229
3.2	Congruences polyédriques en dimension 2	234
3.3	Congruences polyédriques en dimension quelconque	239
3.4	Exemple	240
3.5	Autre exemple	241
3.6	Calcul modulo une congruence polyédrique	241
3.7	Complexité en dimension 2	241
4	Quelques raffinements	242
4.1	Agrégation	242
4.2	Taux de production d'un flowshop à 2 types de pièces et n étages identiques .	243
4.3	Complexité	245
5	Application	246
5.1	Implémentation courante	246
5.2	Un exemple réel	249
6	Formulation en termes de vecteurs propres	254
6.1	Equivalence à la recherche d'un sous-vecteur propre	254
6.2	Lien avec l'algorithme de Proth et Xie	255
A	Etude d'une ligne de production déterministe gérée en "Kanban"	257
1	Modèle algébrique	257
1.1	Modélisation des cellules kanban	257
1.2	Transfert d'une ligne kanban	258
1.3	Equations générale du transfert	259
1.4	Réponse à la demande d'une cellule Kanban	260
1.5	Cas à p cellules	261
2	Exemples	261
2.1	Un exemple de calcul de transfert	261
2.2	Un exemple d'optimisation des kanbans	262
2.3	Annexe: les routines <code>kanban2bidiag</code> et <code>invertbidiag</code>	263

B	Questions algorithmiques	265
1	Calcul dans des dioïdes de polynômes quotientés	265
1.1	Représentant canonique d'un polynôme	265
1.2	Un résultat général de représentant minimal	266
1.3	Représentant minimal des séries formelles dans $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\gamma, \delta]]$	270
1.4	Somme modulo une bonne congruence	271
1.5	Dioïde quotienté par une bonne congruence	272
1.6	Quelques raffinements dans $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[\gamma, \delta]$	275
1.7	Extension des degrés à $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\gamma, \delta]]$	277
2	Algorithmes relatifs aux séries périodiques	278
2.1	Séries causales	279
2.2	Représentations périodiques	279
2.3	Représentation périodique minimale	282
2.4	Somme de séries périodiques	284
2.5	Autres opérations sur les séries périodiques	287
2.6	Etoiles de polynômes	288
2.7	Quelques raffinements possibles	290
3	Calcul de la cyclicité	291
3.1	Détermination du multigraphe critique	291
3.2	Calcul de la cyclicité d'un graphe valué par des naturels	292



Introduction

L'objet de cette thèse est l'étude des systèmes linéaires dans les dioïdes. Par “systèmes linéaires”, on entend d'une part les systèmes d'équations linéaires qui s'écrivent sous la forme $Ax \oplus b = Cx \oplus d$ dans certains demi-anneaux dont l'addition est idempotente (dioïdes), et d'autre part, au sens de la “Théorie des Systèmes”, les applications $u \mapsto \mathcal{S}(u)$ qui vérifient le principe de linéarité

$$\mathcal{S}(u \oplus v) = \mathcal{S}(u) \oplus \mathcal{S}(v), \quad \mathcal{S}(\lambda u) = \lambda \mathcal{S}(u) ,$$

dans des dioïdes convenables. Cela s'applique en particulier aux graphes d'événements temporisés, pour lesquels nous référons le lecteur à [23]. Plus généralement, on verra que cette linéarité sur une structure idempotente est propre à représenter certains phénomènes de saturation et de synchronisation.

Cette thèse est organisée en trois parties. Nous donnons d'abord des résultats algébriques relatifs aux systèmes d'équations linéaires. La deuxième partie est consacrée à la théorie des systèmes dynamiques linéaires dans les dioïdes. La troisième partie, plus appliquée, traite l'algèbre effective de certains dioïdes de séries rationnelles utiles pour l'étude de ces systèmes. On étudie aussi le problème d'optimisation des ressources.

Un chapitre de préliminaires résume les résultats utiles de théorie des dioïdes. Il contient une grande part de résultats déjà connus. Les résultats des chapitres suivants (éventuellement obtenus en collaboration avec Monsieur Max Plus) sont originaux, à certaines exceptions près qui sont signalées.

- Le premier chapitre introduit la notion de demi-anneau symétrisé et de symétrisation d'un demi-anneau (plongement dans un demi-anneau symétrisé). On étudie les propriétés élémentaires de ces demi-anneaux symétrisés et on établit certaines identités utiles pour la suite. Le fait essentiel est l'introduction d'une relation dite d'équilibre, qui permet de remplacer les équations dans un demi-anneau par des équilibres dans un demi-anneau symétrisé. La difficulté principale est d'ordre psychologique: la relation d'équilibre n'est pas transitive. On pourra éventuellement lire la motivation du chapitre II avant le chapitre I ou en parallèle avec celui ci.
- Le chapitre II met en évidence une notion de symétrisation canonique d'un demi-anneau. On commence par construire à la main le dioïde symétrisé du dioïde $(\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \max, +)$ (noté \mathbb{R}_{\max} dans ce qui suit). L'on donne ensuite une construction plus générale: étant donné un demi-anneau \mathcal{D} , on appelle symétrisation régulière une symétrisation \mathcal{S} telle que la résolution des systèmes d'équations linéaires dans \mathcal{D} soit obtenue à partir de celle des systèmes d'équilibres linéaires dans \mathcal{S} . On montre sous certaines conditions l'existence d'une “plus petite” symétrisation régulière. La fin de ce chapitre est technique, et caractérise cette symétrisation en termes d'opérations résiduées. Dans la suite, on travaillera essentiellement

sur le dioïde symétrisé de \mathbb{R}_{\max} , de sorte que ces caractérisations techniques peuvent être passées.

- Le chapitre III étudie les systèmes d'équilibres linéaires, essentiellement dans le dioïde symétrisé de \mathbb{R}_{\max} . On étudie les questions d'orthogonalité et l'on donne des résultats analogues, dans une certaine mesure, à la théorie de Cramer. On généralise un résultat de Gondran et Minoux relatif aux systèmes linéaires homogènes carrés.
- Le chapitre IV étudie la théorie spectrale des matrices réductibles. Il s'agit de voir comment les résultats de type Perron-Frobenius obtenus par Cohen, Dubois, Quadrat et Viot se généralisent au cas non irréductible. On montre à cette occasion deux lemmes relatifs aux sous et sur vecteurs propres, qui resserviront pour l'optimisation des ressources. On retrouve comme sous produit de ces lemmes deux inégalités dues à Friedland relatives au rayon spectral (usuel) des matrices à coefficients positifs ou nuls.
- Avec le chapitre V commence la partie propre à l'Automatique. On établit l'analogie dans les dioïdes de la théorie classique des systèmes dynamiques linéaires (différentiels ou récurrents). On met en évidence une notion de réponse impulsionnelle. On caractérise les systèmes stationnaires et causaux de manière naturelle. On montre enfin qu'une transformée de type Fenchel joue le rôle de la transformée de Laplace classique.
- Le chapitre VI applique la notion de rang mineur mise en évidence dans l'étude des systèmes linéaires au problème de réalisation minimale. On obtient de la sorte une borne inférieure de la dimension de réalisation minimale, et l'on donne un contre exemple où, comme l'on peut s'y attendre, cette borne est peu précise.
- Le chapitre VII initie la partie relative aux outils de calcul et aux applications. On se préoccupe de l'algèbre effective d'un dioïde de séries rationnelles utile pour l'étude des graphes d'événements temporisés. Cohen, Moller, Quadrat et Viot ont montré que ces séries rationnelles admettaient des représentations périodiques. On étudie l'algèbre de ces représentations, y compris d'un point de vue algorithmique. On montre en particulier comment les périodes sont transformées par les opérations rationnelles. On peut voir cette étude, et en particulier les questions de périodicité des matrices rationnelles, comme l'équivalent en termes de séries formelles des résultats de cyclicité de type Perron-Frobenius obtenus pour des matrices à coefficients dans \mathbb{R}_{\max} par Cohen, Dubois, Quadrat et Viot. On voit en particulier réapparaître le problème diophantien de Frobenius.
- Le chapitre VIII décrit le programme MAX, écrit en MAPLE, qui implémente l'algèbre de ces séries périodiques.
- Le chapitre IX est relatif au problème d'optimisation des ressources. On vise à calculer formellement le taux de production d'un système, le nombre de certaines ressources (machines, palettes, processeurs) étant inconnu. On montre comment ce problème peut être traité à l'aide d'algorithmes classiques d'énumération des circuits. On montre que certaines congruences permettent de simplifier les calculs intermédiaires. On donne une application à un atelier flexible traité antérieurement par Cohen, Dubois, Quadrat et Viot. On conclut en généralisant un algorithme donné par Proth et Xie dans un cas particulier. On montre fort simplement que le problème d'optimisation d'un critère linéaire sous une contrainte de taux de production se réduit dans tous les cas à un problème de programmation linéaire. La preuve est fondée sur la notion de sous-vecteur propre étudiée au chapitre V.

- Une première annexe applique ces outils à l'étude des lignes de production déterministes gérées en "Kanban".
- Une seconde annexe précise les questions algorithmiques techniques liées aux polynômes et aux séries périodiques traités dans les Chapitres VII et IX. Cette annexe donne une idée fidèle des algorithmes implémentés dans MAX.

Notations

$\#I$	cardinal d'un ensemble I
$\mathfrak{S}(I)$	groupe des permutations de I
\mathfrak{S}_n	groupe des permutations de $\{1, \dots, n\}$
$\text{sgn}(\sigma)$	signature d'une permutation σ
$\text{cof}_{ij} A$	cofacteur d'indice (i, j) de A
A^{adj}	transposée de la matrice des cofacteurs de A
$f \restriction_I$	f restreinte à l'ensemble de départ I
Id	application ou matrice identité
$\dot{+}$	somme directe de matrices ($A \dot{+} B = \begin{bmatrix} A & \varepsilon \\ \varepsilon & B \end{bmatrix}$)
$\text{GL}(E)$	groupe linéaire d'un demi-module E
$\text{vect}\langle f_i \rangle$	demi-module engendré par une famille de vecteurs $\{f_i\}$
$w_M(p)$	pois du chemin p dans le graphe valué par la matrice M
\asymp	équivalence logarithmique
$\rho(A)$	rayon spectral de la matrice A (usuel ou dans les dioïdes suivant le contexte)
$\rho_{\max, \times}(A)$	rayon spectral de la matrice A dans le dioïde $\mathbb{R}_{\max, \times}^+$
\mathbb{R}_{\max}	dioïde des réels, munis du max et du $+$.
\mathbb{B}	dioïde des booléens, i.e. $\mathbb{B} = \{\varepsilon, e\}$
\mathbb{R}_{\min}	dioïde des réels, munis du min et du $+$.
$\mathbb{R}_{\max, \times}^+$	dioïde des réels positifs ou nuls, munis du max et du produit usuel.
\mathbb{N}_{ppcm}	dioïde des naturels, muni du ppcm et du produit
$\mathcal{S}_{\mathcal{D}}$	demi-anneau symétrisé de \mathcal{D}
$\mathcal{S}_{\mathcal{D}}^{\oplus}$	ensemble des éléments positifs de $\mathcal{S}_{\mathcal{D}}$
$\mathcal{S}_{\mathcal{D}}^{\oplus\ominus}$	ensemble des éléments signés de \mathcal{S}
\mathcal{S}^{\vee}	ensemble des éléments substituables d'un demi-anneau symétrisé \mathcal{S} .
\mathbb{S}_{\max}	dioïde symétrisé de \mathbb{R}_{\max}
$\mathbb{S}_{\max, \times}$	dioïde symétrisé de $\mathbb{R}_{\max, \times}^+$
Φ	$\Phi(a) = \{x \in \mathcal{S} \mid x \nabla a\}$
Ψ	$\Psi(a) = \{(p, q) \in \mathcal{S}^2 \mid p \nabla qx\}$
\preceq	ordre naturel d'un dioïde ($a \preceq b \Leftrightarrow a \oplus b = b$)
\boxminus	moins résidué: $a \boxminus b = \min\{x \mid x \oplus b \succeq a\}$
\backslash	quotient à gauche: $a \backslash b = \max\{x \mid ax \preceq b\}$
$/$	quotient à droite
f^{\uparrow}	résiduée de f : $f^{\uparrow}(y) = \max\{x \mid f(x) \preceq y\}$
f^{\downarrow}	résiduée duale de f
$\text{Res}^{\uparrow}(E, F)$	ensemble des applications résiduables de E dans F
$\text{Res}^{\downarrow}(E, F)$	ensemble des applications dualement résiduables de E dans F
a^*	étoile de Kleene ($a^* = \text{Id} \oplus a \oplus a^2 \oplus \dots$)
a^+	$a^+ = aa^* = a \oplus a^2 \oplus a^3 \oplus \dots$
δ	opérateur de décalage sur les dates
γ	opérateur de décalage sur les numéros
$\mathbb{B}[[\gamma, \delta]]$	dioïde des séries formelles commutatives à coefficients booléens d'indéterminées γ et δ
$\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\gamma, \delta]]$	dioïde quotient de $\mathbb{B}[[\gamma, \delta]]$ vérifiant $\gamma^n \oplus \gamma^{n'} = \gamma^{\min(n, n')}$, $\delta^t \oplus \delta^{t'} = \delta^{\max(t, t')}$
σ	pente minimale: $\sigma(\bigoplus_i \gamma^{n_i} \delta^{t_i}) = \inf_i \frac{n_i}{t_i}$
σ_{∞}	pente ultime: $\sigma_{\infty}(p \oplus q(\gamma^{\nu} \delta^{\tau})^*) = \frac{\nu}{\tau}$ (p, q polynômes)

\sqcup	$(n, t) \sqcup (n', t') = \begin{cases} (\text{ppcm}(n, n'), \text{ppcm}(t, t')) & \text{si } \sigma(n, t) = \sigma(n', t') \\ (n, t) & \text{si } \sigma(n, t) < \sigma(n', t') \end{cases}$
\sqcap	comme \sqcup mais avec des pgcd.
$\text{conv}(A)$	convexifié d'une partie A
$\text{conv}\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$	diöide des parties convexes de \mathbb{R}^2
$\text{conv}\mathcal{P}_c(\mathbb{R}^2)$	diöide des parties convexes compactes de \mathbb{R}^2
$\mathcal{P}_{\text{finies}}(A)$	ensemble des parties finies d'un ensemble A
δ_A^*	fonction support d'une partie A ($\delta_A^*(p) = \sup_{x \in A} \langle p, x \rangle$)
$\text{int}A$	intérieur d'une partie A

Matrices extraites

Soit A une matrice $n \times p$, $I = (i_1, i_2, \dots, i_k)$ un k -uplet d'éléments de $\{1, \dots, n\}$, $J = (j_1, \dots, j_r)$ un r -uplet d'éléments de $\{1, \dots, p\}$. On note $A[I|J]$ la matrice formées des lignes i_1, \dots, i_k et des colonnes j_1, \dots, j_r de A . Dans le cas où $r = p$, on notera sans ambiguïté $A[I]$. Lorsque I et J sont des ensembles, $A[I|J]$ désigne la matrice formée par les lignes d'indice $i \in I$ et les colonnes $j \in J$ rangées par ordre croissant. On notera $A[I|J)$ la matrice formée des colonnes n'appartenant pas à J . Par exemple, soit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

On a

$$A[2|12] = \begin{bmatrix} 7 & 0 \end{bmatrix}, \quad A[13|2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

