THÈSE

présentée à

L'ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DES MINES DE PARIS

par

Stéphane GAUBERT

pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE L'ÉCOLE DES MINES DE PARIS

Spécialité:

MATHÉMATIQUES ET AUTOMATIQUE

Sujet de la thèse:

THÉORIE DES SYSTÈMES LINÉAIRES DANS LES DIOÏDES

soutenue le 1$^{\text{er}}$ Juillet 1992 devant le jury composé de:

MM.	**Michel MINOUX**	Président et Rapporteur
	Michel FLIESS **Michel VIOT**	Rapporteurs
	Guy COHEN **Geert Jan OLSDER** **Jean-Pierre QUADRAT**	Examinateurs

Théorie des systèmes linéaires dans les dioïdes
Résumé

On étudie les systèmes linéaires sur certaines structures de *dioïdes* (demi-anneaux dont l'addition est idempotente).

On étudie tout d'abord les systèmes d'équations linéaires dans certains dioïdes, pour lesquels on retrouve l'analogue de la théorie de Cramer à condition de se placer dans un dioïde *symétrisé*. On adapte les algorithmes itératifs usuels (Jacobi, Gauss-Seidel). On obtient des résultats de dualité. On étend par ailleurs aux matrices réductibles la théorie spectrale $(\max, +)$.

On étudie ensuite les systèmes dynamiques linéaires dans ces algèbres (représentation par des opérateurs à noyaux ou opérateurs de convolution, rôle de la transformée de Fenchel). On obtient à l'aide de résultats de symétrisation une borne inférieure pour la dimension minimale de réalisation.

L'on donne ensuite des algorithmes de calcul dans un dioïde de séries rationnelles propre à représenter les graphes d'événements temporisés. On présente MAX, le programme de calcul formel écrit en MAPLE dans lequel on a implémenté ces algorithmes (fonction de transfert, calcul du taux de production). On considère enfin l'optimisation des ressources. Ce problème conduit à une énumération algébrique de contraintes modulo certaines congruences. Une seconde approche formule ces contraintes en termes de sous-vecteur propre.

Mots clés Dioïdes, Systèmes Linéaires, Systèmes à événements discrets, Graphes d'événements temporisés, Symétrisation

Theory of linear systems over dioids
Abstract

We develop a system theory for linear systems over certain dioid structures (semirings with idempotent addition).

We study general systems of linear equations in certain dioids. The introduction of a new notion of *symmetrization* results in the linear closure of these algebras: the generic system of n linear equations with n unknowns admits a unique solution in the symmetrized dioid, given by Cramer's formulae. We adapt the Jacobi and Gauss-Seidel algorithms to this context. We also give some duality results. The spectral theory of irreducible $(\max, +)$ matrices is extended to the reducible case.

Later, we consider the associated linear system theory (representation by kernels and convolutions in dioid, use of the Fenchel transform). We obtain a lower bound for minimal realizations in terms of minors.

We develop some algorithms for an algebra of rational series devoted to timed event graphs. We present MAX, the program written in MAPLE which implements these algorithms (transfer series, periodic throughput). Finally, we show that the resource optimization problem reduces to an algebraic enumeration of constraints modulo some simplification rules. These constraints also reduce to a sub-eigenvector problem.

Key words Dioids, Linear Systems, Discrete Event Systems, Timed Event Graphs, Symmetrization.

THÈSE

présentée à

L'ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DES MINES DE PARIS

par

Stéphane GAUBERT

pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE L'ÉCOLE DES MINES DE PARIS

Spécialité:

MATHÉMATIQUES ET AUTOMATIQUE

Sujet de la thèse:

THÉORIE DES SYSTÈMES LINÉAIRES DANS LES DIOÏDES

soutenue le 1er Juillet 1992 devant le jury composé de:

MM.	**Michel MINOUX**	Président et Rapporteur
	Michel FLIESS **Michel VIOT**	Rapporteurs
	Guy COHEN **Geert Jan OLSDER** **Jean-Pierre QUADRAT**	Examinateurs

Je voudrais remercier

J.P. Quadrat pour m'avoir accueilli à l'INRIA, dirigé, conseillé, encouragé, fait partager sa culture, confirmé dans mes inclinations mathématiques et révélé cette difficile vérité: un plus un égale un.

G. Cohen pour avoir co-piloté et fait progresser cette thèse, n'ayant été avare ni de temps, ni d'idées, ni de rigueur.

M. Viot pour avoir encouragé ce travail, en avoir suggéré certains développements et pour avoir rapporté.

M. Minoux et M. Fliess pour l'intérêt qu'ils ont manifesté pour ce travail en acceptant de rapporter.

G.J. Olsder qui s'est intéressé à ces recherches depuis le début et me fait l'honneur d'être membre du Jury.

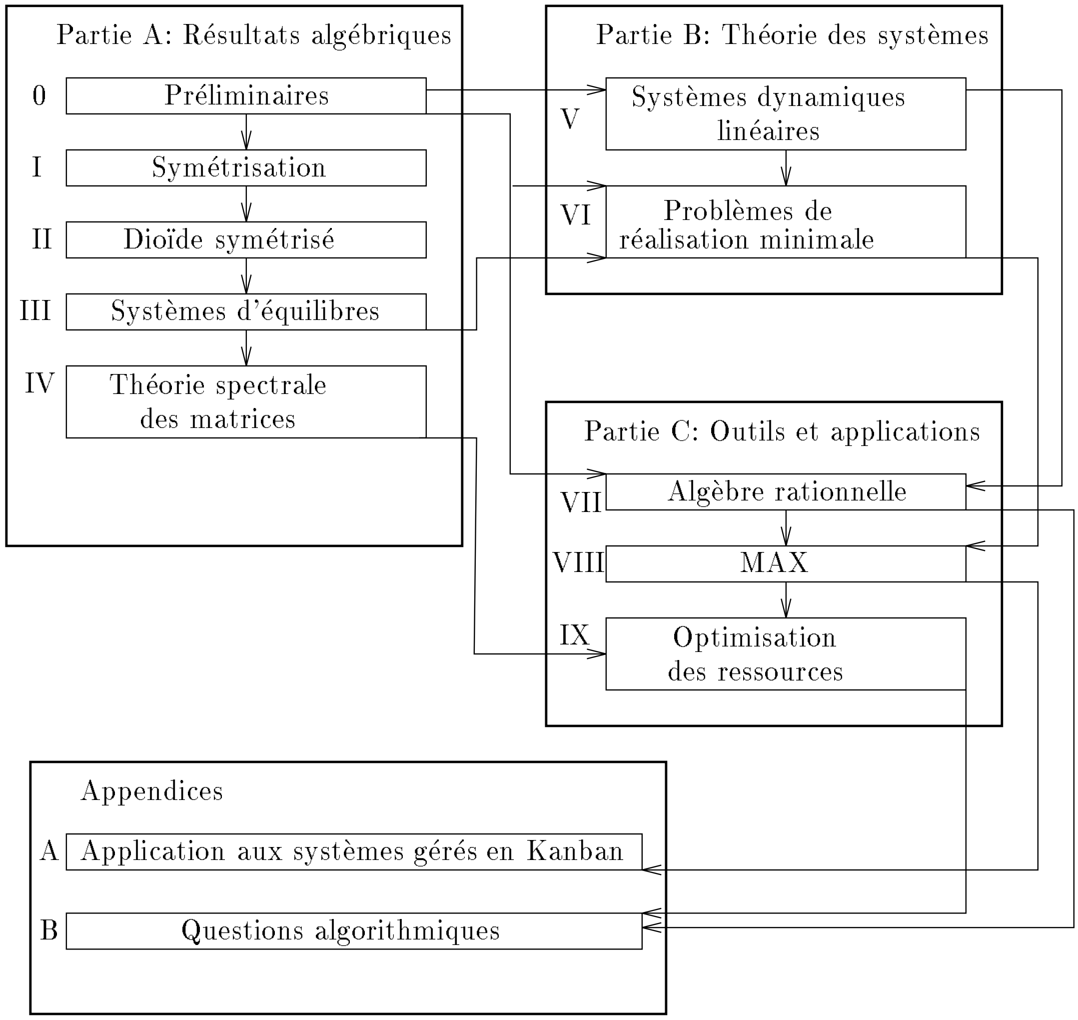
M. Akian et R. Nikoukhah pour les nombreuses idées et discussions mathématiques.

M. Plus pour la dynamique de groupe.

S. Steer et Basile pour leur aide.

Les chercheurs du Bâtiment 12 pour le soutien scientifique et moral, particulièrement A. Sulem, J. Clairambault, C. Klimann, F. Delebecque, Y. Sorel, C. Lavarenne, P.A. Bliman, G. Launay, C. Lemaréchal, ainsi que M. Verneuille.

Table des Matières


Partie A: Résultats algébriques
0 Préliminaires
I Symétrisation
II Dioïde symétrisé
III Systèmes d'équilibres
IV Théorie spectrale des matrices
Partie B: Théorie des systèmes
V Systèmes dynamiques linéaires
VI Problèmes de réalisation minimale
Partie C: Outils et applications
VII Algèbre rationnelle
VIII MAX
IX Optimisation des ressources
Appendices
A Application aux systèmes gérés en Kanban
B Questions algorithmiques

Introduction

L'objet de cette thèse est l'étude des systèmes linéaires dans les dioïdes. Par "systèmes linéaires", on entend d'une part les systèmes d'équations linéaires qui s'écrivent sous la forme $Ax \oplus b = Cx \oplus d$ dans certains demi-anneaux dont l'addition est idempotente (dioïdes), et d'autre part, au sens de la "Théorie des Systèmes", les applications $u \mapsto \mathcal{S}(u)$ qui vérifient le principe de linéarité

$$\mathcal{S}(u \oplus v) = \mathcal{S}(u) \oplus \mathcal{S}(v), \qquad \mathcal{S}(\lambda u) = \lambda \mathcal{S}(u) \ ,$$

dans des dioïdes convenables. Cela s'applique en particulier aux graphes d'événements temporisés, pour lesquels nous référons le lecteur à [23]. Plus généralement, on verra que cette linéarité sur une structure idempotente est propre à représenter certains phénomènes de saturation et de synchronisation.

Cette thèse est organisée en trois parties. Nous donnons d'abord des résultats algébriques relatifs aux systèmes d'équations linéaires. La deuxième partie est consacrée à la théorie des systèmes dynamiques linéaires dans les dioïdes. La troisième partie, plus appliquée, traite l'algèbre effective de certains dioïdes de séries rationnelles utiles pour l'étude de ces systèmes. On étudie aussi le problème d'optimisation des ressources.

Un chapitre de préliminaires résume les résultats utiles de théorie des dioïdes. Il contient une grande part de résultats déjà connus. Les résultats des chapitres suivants (éventuellement obtenus en collaboration avec Monsieur Max Plus) sont originaux, à certaines exceptions près qui sont signalées.

- Le premier chapitre introduit la notion de demi-anneau symétrisé et de symétrisation d'un demi-anneau (plongement dans un demi-anneau symétrisé). On étudie les propriétés élémentaires de ces demi-anneaux symétrisés et on établit certaines identités utiles pour la suite. Le fait essentiel est l'introduction d'une relation dite d'équilibre, qui permet de remplacer les équations dans un demi-anneau par des équilibres dans un demi-anneau symétrisé. La difficulté principale est d'ordre psychologique: la relation d'équilibre n'est pas transitive. On pourra éventuellement lire la motivation du chapitre II avant le chapitre I ou en parallèle avec celui ci.

- Le chapitre II met en évidence une notion de symétrisation canonique d'un demi-anneau. On commence par construire à la main le dioïde symétrisé du dioïde $(\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \max, +)$ (noté $\mathbb{R}_{\max}$ dans ce qui suit). L'on donne ensuite une construction plus générale: étant donné un demi-anneau $\mathcal{D}$, on appelle symétrisation régulière une symétrisation $\mathcal{S}$ telle que la résolution des systèmes d'équations linéaires dans $\mathcal{D}$ soit obtenue à partir de celle des systèmes d'équilibres linéaires dans $\mathcal{S}$. On montre sous certaines conditions l'existence d'une "plus petite" symétrisation régulière. La fin de ce chapitre est technique, et caractérise cette symétrisation en termes d'opérations résiduées. Dans la suite, on travaillera essentiellement sur le dioïde symétrisé de $\mathbb{R}_{\max}$, de sorte que ces caractérisations techniques peuvent être passées.

- Le chapitre III étudie les systèmes d'équilibres linéaires, essentiellement dans le dioïde symétrisé de $\mathbb{R}_{\max}$. On étudie les questions d'orthogonalité et l'on donne des résultats analogues, dans une certaine mesure, à la théorie de Cramer. On généralise un résultat de Gondran et Minoux relatif aux systèmes linéaires homogènes carrés.

- Le chapitre IV étudie la théorie spectrale des matrices réductibles. Il s'agit de voir comment les résultats de type Perron-Frobenius obtenus par Cohen, Dubois, Quadrat et Viot se généralisent au cas non irréductible. On montre à cette occasion deux lemmes relatifs aux sous et sur vecteurs propres, qui resserviront pour l'optimisation des ressources. On retrouve comme sous produit de ces lemmes deux inégalités dues à Friedland relatives au rayon spectral (usuel) des matrices à coefficients positifs ou nuls.

- Avec le chapitre V commence la partie propre à l'Automatique. On établit l'analogue dans les dioïdes de la théorie classique des systèmes dynamiques linéaires (différentiels ou récurrents). On met en évidence une notion de réponse impulsionnelle. On caractérise les systèmes stationnaires et causaux de manière naturelle. On montre enfin qu'une transformée de type Fenchel joue le rôle de la transformée de Laplace classique.

- Le chapitre VI applique la notion de rang mineur mise en évidence dans l'étude des systèmes linéaires au problème de réalisation minimale. On obtient de la sorte une borne inférieure de la dimension de réalisation minimale, et l'on donne un contre exemple où, comme l'on peut s'y attendre, cette borne est peu précise.

- Le chapitre VII initie la partie relative aux outils de calcul et aux applications. On se préoccupe de l'algèbre effective d'un dioïde de séries rationnelles utile pour l'étude des graphes d'événements temporisés. Cohen, Moller, Quadrat et Viot ont montré que ces séries rationnelles admettaient des représentations périodiques. On étudie l'algèbre de ces représentations, y compris d'un point de vue algorithmique. On montre en particulier comment les périodes sont transformées par les opérations rationnelles. On peut voir cette étude, et en particulier les questions de périodicité des matrices rationnelles, comme l'équivalent en termes de séries formelles des résultats de cyclicité de type Perron-Frobenius obtenus pour des matrices à coefficients dans $\mathbb{R}_{\max}$ par Cohen, Dubois, Quadrat et Viot. On voit en particulier réapparaître le problème diophantien de Frobenius.

- Le chapitre VIII décrit le programme MAX, écrit en MAPLE, qui implémente l'algèbre de ces séries périodiques.

- Le chapitre IX est relatif au problème d'optimisation des ressources. On vise à calculer formellement le taux de production d'un système, le nombre de certaines ressources (machines, palettes, processeurs) étant inconnu. On montre comment ce problème peut être traité à l'aide d'algorithmes classiques d'énumération des circuits. On montre que certaines congruences permettent de simplifier les calculs intermédiaires. On donne une application à un atelier flexible traité antérieurement par Cohen, Dubois, Quadrat et Viot. On conclut en généralisant un algorithme donné par Proth et Xie dans un cas particulier. On montre fort simplement que le problème d'optimisation d'un critère linéaire sous une contrainte de taux de production se réduit dans tous les cas à un problème de programmation linéaire. La preuve est fondée sur la notion de sous-vecteur propre étudiée au chapitre V.

- Une première annexe applique ces outils à l'étude des lignes de production déterministes gérées en "Kanban".
- Une seconde annexe précise les questions algorithmiques techniques liées aux polynômes et aux séries périodiques traités dans les Chapitres VII et IX. Cette annexe donne une idée fidèle des algorithmes implémentés dans MAX.

Notations

$\#I$	cardinal d'un ensemble I
$\mathfrak{S}(I)$	groupe des permutations de I
$\mathfrak{S}_n$	groupe des permutations de $\{1,\dots,n\}$
$\mathsf{sgn}(\sigma)$	signature d'une permutation σ
$\mathrm{cof}_{ij}A$	cofacteur d'indice (i,j) de A
A^{adj}	transposée de la matrice des cofacteurs de A
$f\lceil_I$	f restreinte à l'ensemble de départ I
Id	application ou matrice identité
$\dot{+}$	somme directe de matrices ($A\dot{+}B=[\begin{smallmatrix}A&\varepsilon\\ \varepsilon&B\end{smallmatrix}]$)
$\mathsf{GL}(E)$	groupe linéaire d'un demi-module E
$\mathrm{vect}\langle f_i\rangle$	demi-module engendré par une famille de vecteurs $\{f_i\}$
$w_M(p)$	poids du chemin p dans le graphe valué par la matrice M
$\asymp$	équivalence logarithmique
$\rho(A)$	rayon spectral de la matrice A (usuel ou dans les dioïdes suivant le contexte)
$\rho_{\max,\times}(A)$	rayon spectral de la matrice A dans le dioïde $\mathbb{R}^+_{\max,\times}$
$\mathbb{R}_{\max}$	dioïde des réels, munis du max et du $+$.
$\mathbb{B}$	dioïde des booléiens, i.e. $\mathbb{B}=\{\varepsilon,e\}$
$\mathbb{R}_{\min}$	dioïde des réels, munis du min et du $+$.
$\mathbb{R}^+_{\max,\times}$	dioïde des réels positifs ou nuls, munis du max et du produit usuel.
$\mathbb{N}_{\mathrm{ppcm}}$	dioïde des naturels, muni du ppcm et du produit
$\mathcal{S}_{\mathcal{D}}$	demi-anneau symétrisé de $\mathcal{D}$
$\mathcal{S}^{\oplus}_{\mathcal{D}}$	ensemble des éléments positifs de $\mathcal{S}_{\mathcal{D}}$
$\mathcal{S}^{\oplus\ominus}_{\mathcal{D}}$	ensemble des éléments signés de $\mathcal{S}$
$\mathcal{S}^{\vee}$	ensemble des éléments substituables d'un demi-anneau symétrisé $\mathcal{S}$.
$\mathbb{S}_{\max}$	dioïde symétrisé de $\mathbb{R}_{\max}$
$\mathbb{S}_{\max,\times}$	dioïde symétrisé de $\mathbb{R}^+_{\max,\times}$
Φ	$\Phi(a)=\{x\in\mathcal{S}\mid\ x\,\nabla\,a\}$
Ψ	$\Psi(a)=\{(p,q)\in\mathcal{S}^2\mid\ p\,\nabla\,qx\}$
$\preceq$	ordre naturel d'un dioïde ($a\preceq b\Leftrightarrow a\oplus b=b$)
$\boxminus$	moins résidué: $a\boxminus b=\min\{x\mid\ x\oplus b\succeq a\}$
$\backslash$	quotient à gauche: $a\backslash b=\max\{x\mid\ ax\preceq b\}$
$/$	quotient à droite
$f^{\uparrow}$	résiduée de f: $f^{\uparrow}(y)=\max\{x\mid\ f(x)\preceq y\}$
$f^{\downarrow}$	résiduée duale de f
$\mathsf{Res}^{\uparrow}(E,F)$	ensemble des applications résiduables de E dans F
$\mathsf{Res}^{\downarrow}(E,F)$	ensemble des applications dualement résiduables de E dans F
a^*	étoile de Kleene ($a^*=\mathrm{Id}\oplus a\oplus a^2\oplus\dots$)
a^+	$a^+=aa^*=a\oplus a^2\oplus a^3\oplus\dots$
δ	opérateur de décalage sur les dates
γ	opérateur de décalage sur les numéros
$\mathbb{B}[[\gamma,\delta]]$	dioïde des séries formelles commutatives à coefficients booléiens d'indéterminées γ et δ
$\mathcal{M}^{\mathrm{in}}_{\mathrm{ax}}[[\gamma,\delta]]$	dioïde quotient de $\mathbb{B}[[\gamma,\delta]]$ vérifiant $\gamma^n\oplus\gamma^{n'}=\gamma^{\min(n,n')}$, $\delta^t\oplus\delta^{t'}=\delta^{\max(t,t')}$
σ	pente minimale: $\sigma(\bigoplus_i\gamma^{n_i}\delta^{t_i})=\inf_i\frac{n_i}{t_i}$
σ_∞	pente ultime: $\sigma_\infty(p\oplus q(\gamma^\nu\delta^\tau)^*)=\frac{\nu}{\tau}$ (p,q polynômes)

$\sqcup$	$(n,t)\sqcup(n',t')=\begin{cases}(\mathrm{ppcm}(n,n'),\mathrm{ppcm}(t,t')) & \text{si } \sigma(n,t)=\sigma(n',t')\\ (n,t) & \text{si } \sigma(n,t)<\sigma(n',t')\end{cases}$
$\sqcap$	comme $\sqcup$ mais avec des pgcd.
$\mathrm{conv}(A)$	convexifié d'une partie A
$\mathrm{conv}\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$	dioïde des parties convexes de $\mathbb{R}^2$
$\mathrm{conv}\mathcal{P}_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^2)$	dioïde des parties convexes compactes de $\mathbb{R}^2$
$\mathcal{P}_{\text{finies}}(A)$	ensemble des parties finies d'un ensemble A
$\delta^\star_A$	fonction support d'une partie A ($\delta^\star_A(p)=\sup_{x\in A}\langle p,x\rangle$)
$\mathrm{int}A$	intérieur d'une partie A

Matrices extraites

Soit A une matrice $n\times p$, $I=(i_1,i_2,\ldots,i_k)$ un k-uplet d'éléments de $\{1,\ldots,n\}$, $J=(j_1,\ldots,j_r)$ un r-uplet d'éléments de $\{1,\ldots,p\}$. On note $A[I|J]$ la matrice formées des lignes $i_1,\ldots,i_k$ et des colonnes $j_1,\ldots,j_r$ de A. Dans le cas où $r=p$, on notera sans ambiguïté $A[I|$. Lorsque I et J sont des ensembles, $A[I|J]$ désigne la matrice formée par les lignes d'indice $i\in I$ et les colonnes $j\in J$ rangées par ordre croissant. On notera $A[I|J)$ la matrice formée des colonnes n'appartenant pas à J. Par exemple, soit

$$A=\begin{bmatrix}1&2\\7&0\\3&5\end{bmatrix}\ .$$

On a

$$A[2|12]=\begin{bmatrix}7&0\end{bmatrix},\ \ A[13|2)=\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}\ .$$