Automatique/*Automation*

L'algèbre (max, +) et sa symétrisation ou l'algèbre des équilibres

Max Plus (1)

Résumé – L'algèbre (max, +) est un outil utile en Recherche Opérationnelle – la recherche d'un chemin de longueur maximale dans un graphe par exemple – et en Automatique – l'étude des systèmes à événements discrets. Nous symétrisons ici cette structure de façon à obtenir des conditions nécessaires et suffisantes d'existence et d'unicité d'une solution d'un système linéaire dans cette algèbre.

(max, +) algebra and its symmetrization or the algebra of balances

Abstract – *The* (max, +) *algebra is a useful tool in Operations Research – the research of the path of maximum length in a graph for example – and in Automatic Control – the study of discrete event systems. The symmetrization of this structure leads to a necessary and sufficient condition for the existence and uniqueness of a solution to any linear system in this algebra.*

Abridged English Version – 1.1. (max, +) ALGEBRA. – We consider the set $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ endowed with the two operations "max" and "+" denoted respectively by $\oplus$ and $\otimes$. For example $x \otimes y \oplus z$ stands for $\max(x+y, z)$; the sign $\otimes$ is often omitted.

$\oplus$ is commutative, associative, has a null element denoted ε equal to $-\infty$, idempotent $(a \oplus a = a)$, but $a \neq \varepsilon$ does not have an inverse.

$\otimes$ is distributive with respect to $\oplus$

$$a \otimes (b \oplus c) = a + \max(b, c) = \max(a+b, a+c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c),$$

and defines a group on $\mathbb{R}$ with the identity element 0 denoted by e, and ε is absorbing, *i.e.* $\varepsilon \otimes a = \varepsilon$.

We call this structure $\mathbb{R}_{\max}$.

1.2. LINEAR CLOSURE OF $\mathbb{R}_{\max}$. – The equation $x \oplus b = \varepsilon$ does not have a solution for $b \neq \varepsilon$. The following remark shows that it is not possible to obtain a symmetrization of $\mathbb{R}_{\max}$ in the classical sense.

Fundamental remark. – Every idempotent group $\mathcal{A}$ with null element ε is reduced to this element.

Indeed, given $a \in \mathcal{A}$, b its additive inverse, we have $\varepsilon = a \oplus b$ and thus

$$a = a \oplus \varepsilon = a \oplus (a \oplus b) = (a \oplus a) \oplus b = a \oplus b = \varepsilon.$$

A construction analogous to the one used to obtain $\mathbb{Z}$ from $\mathbb{N}$ exists for $\mathbb{R}_{\max}$ yielding a structure which is linearly closed, *i.e.* every non-degenerate linear equation has a unique solution. For that let us consider the equivalence relation on $\mathbb{R}^2_{\max}$:

$$(x', x'')\,\mathcal{R}\,(y', y'') \Leftrightarrow \begin{cases} x' \oplus y'' = y' \oplus x'' & \text{for } x' \neq x'' \text{ and } y' \neq y'', \\ x' = y' = x'' = y'' & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$\mathbb{R}^2_{\max}/\mathcal{R}$ has three kinds of equivalence classes:

$$x' = \overline{(x', x'')},\ x' > x'' \text{ of canonical representative } (x', \varepsilon), \text{ called } \textit{positive},$$

$$\ominus x'' = \overline{(x', x'')},\ x' < x'' \text{ of canonical representative } (\varepsilon, x''), \text{ called } \textit{negative},$$

$$x'^{\bullet} = \overline{(x', x')} \text{ called } \textit{balanced}.$$

Note présentée par Alain Bensoussan.

0764-4450/90/03110443 $ 2.00

We denote also by ε the class of $(-\infty, -\infty)$. The set of positive classes (resp. negative) (resp. balanced without ε) are denoted $\mathbb{R}^{\oplus}_*$, $[\mathbb{R}^{\ominus}_*]$, $[\mathbb{R}^{\bullet}_*]$; "$*$" is dropped when we add the element ε to the set: $\mathbb{R}^{\oplus}=\mathbb{R}^{\oplus}_* \cup \{\varepsilon\}$.

The equivalence relation $\mathscr{R}$ is compatible with:

– the vector addition on $\mathbb{R}^2_{\max}$,

– the multiplication $x \otimes y=(x'y' \oplus x''y'', x'y'' \oplus x''y')$ with identity element (e, ε),

– the operator $\ominus$ defined by $\ominus(x', x'')=(x'', x')$ [with the usual abuse of notation we write $a \ominus b$ instead of $a \oplus (\ominus b)$].

The quotient algebraic structure $\mathbb{R}^2_{\max}/\mathscr{R}$ is denoted by $\dot{\check{\mathbb{R}}}$; we also use $\check{\mathbb{R}}$ for $\mathbb{R}^{\oplus} \cup \mathbb{R}^{\ominus}$. For all a in $\check{\mathbb{R}}$, $a \ominus a$ belongs to $\mathbb{R}^{\bullet}$, but it is in general different from ε. Note that we have not really realized a symmetrization of $\mathbb{R}_{\max}$; we have realized the proposition: "*with each element we can associate another element such that the sum of the two is balanced*".

We have the following theorem showing the interest of the notions introduced above.

THEOREM. – $\forall a \in \check{\mathbb{R}}_*$, $\forall b \in \check{\mathbb{R}}$, $\exists x \in \check{\mathbb{R}}$ *unique, such that:* $ax \oplus b \in \mathbb{R}^{\bullet}$; *this solution is* $x=\ominus b/a$.

Coming back to $\mathbb{R}^2_{\max}$, this means – for a and b in a class of $\check{\mathbb{R}}$ – there exists a unique class which is solution of the equation:

$$a'x' \oplus a''x'' \oplus b'=a''x' \oplus a'x'' \oplus b''.$$

1.3. APPLICATION TO LINEAR SYSTEMS. – We define the determinant of a matrix A by the usual formula:

$$\det(A)=\sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}$$

where n is the size of A, σ a permutation of $\{1, 2, \ldots, n\}$, and $\operatorname{sgn}(\sigma)=e$ or $\ominus e$ depending on the parity of σ.

We are interested in linear systems $Ax=b$. We have:

THEOREM. – *Suppose* $A^{\sharp} b \in \check{\mathbb{R}}^n$ and $\det(A) \in \check{\mathbb{R}}_*$ *then there exists a unique solution* $x \in \check{\mathbb{R}}^n$ *to the linear system* $Ax \ominus b \in (\mathbb{R}^{\bullet})^n$ *given by the formula:*

$$x=A^{\sharp} b/\det(A).$$

This is the starting point for a theory of linear systems in $\dot{\check{\mathbb{R}}}$. The main difference with the classical linear theory is the condition $A^{\sharp} b \in \check{\mathbb{R}}^n$ which corresponds to the loss of uniqueness when it is not fulfilled.

Given a linear system in $\mathbb{R}_{\max}$, $Ax=b$, if we solve $Ax \ominus b \in (\mathbb{R}^{\bullet})^n$ in $\check{\mathbb{R}}^n$ and obtain a unique positive solution we have the solution to $Ax=b$ as well. Otherwise $Ax=b$ does not have a unique solution. In this latter case we can affirm the existence of a unique solution to another problem of the form $A'x' \oplus b=A''x'$, "symmetrical" to the original problem.

---

1. L'ALGÈBRE (max, +). – On considère l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ muni de deux opérations « max » et « + » notées respectivement $\oplus$ et $\otimes$. $x \otimes y \otimes z$ signifie $\max(x+y, z)$. Le signe $\otimes$ est souvent omis comme à l'accoutumée.

$\oplus$ est commutative, associative, admet un élément neutre noté ε égal à $-\infty$, idempotente $(a \oplus a=a)$, mais $a \neq \varepsilon$ n'admet pas de symétrique.

$\otimes$ est distributive par rapport à $\oplus$

$$a \otimes (b \oplus c)=a+\max(b, c)=\max(a+b, a+c)=(a \otimes b) \oplus (a \otimes c),$$

définit une loi de groupe sur $\mathbb{R}$ d'élément neutre 0 noté e, et ε est absorbant $\varepsilon \otimes a = \varepsilon$.

On appelle $\mathbb{R}_{\max}$ cette structure.

Dans cette algèbre, on sait résoudre l'équation linéaire vectorielle :

$$x = \mathrm{A}\, x \oplus b,$$

où x et b appartiennent à $\mathbb{R}^n_{\max}$ et A est une matrice (n, n) à coefficients dans $\mathbb{R}_{\max}$ ([3], [6], [9]). On ne sait pas résoudre en général les équations :

$$\mathrm{A}'\, x \oplus b' = \mathrm{A}''\, x \oplus b''.$$

Dans [1] et [3] on donne cependant la plus grande sous-solution à l'équation :

$$\mathrm{A}\, x = b.$$

Le propos de cette Note est de donner une réponse claire à ce genre de problèmes, essentiels pour l'étude postérieure des systèmes dynamiques dans $\mathbb{R}_{\max}$. Pour cela, on est amené à introduire une *nouvelle structure algébrique et à résoudre les systèmes d'équations linéaires dans cette nouvelle structure*.

Le renouveau d'intérêt pour cette algèbre $\mathbb{R}_{\max}$ provient de sa parfaite adéquation à l'évaluation de performance de systèmes parallèles synchronisés, plus précisément les graphes d'événements temporisés [2].

2. Fermeture linéaire de $\mathbb{R}_{\max}$. — L'équation $x \oplus b = \varepsilon$ n'a pas de solution pour $b \neq \varepsilon$. D'autre part la remarque suivante montre qu'il n'est pas possible de symétriser $\mathbb{R}_{\max}$ au sens habituel.

Remarque fondamentale. — Tout groupe idempotent $\mathscr{A}$ d'élément neutre ε est réduit à cet élément.

Démonstration. — Soit $a \in \mathscr{A}$, b son symétrique, on a $\varepsilon = a \oplus b$ et donc

$$a = a \oplus \varepsilon = a \oplus (a \oplus b) = (a \oplus a) \oplus b = a \oplus b = \varepsilon.$$

Une construction analogue à la symétrisation qui permet de passer de $\mathbb{N}$ à $\mathbb{Z}$ confère au nouvel ensemble obtenu une structure linéairement close c'est-à-dire telle que toute équation non dégénérée admette une solution unique.

Pour cela on considère sur $\mathbb{R}^2_{\max}$ la relation d'équivalence :

$$(x', x'')\,\mathscr{R}\,(y', y'') \Leftrightarrow \begin{cases} x' \oplus y'' = y' \oplus x'' & \text{sur } x' \neq x'' \text{ et } y' \neq y'', \\ x' = y' = x'' = y'' & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

$\mathbb{R}^2_{\max}/\mathscr{R}$ possède alors trois types de classes d'équivalence :

$$x' = \overline{(x', x'')},\ x' > x'' \text{ de représentant canonique } (x', \varepsilon), \text{ dite } \textit{positive},$$
$$\ominus x'' = \overline{(x', x'')},\ x' < x'' \text{ de représentant canonique } (\varepsilon, x''), \text{ dite } \textit{négative},$$
$$x^{\bullet} = \overline{(x', x')} \text{ dite } \textit{équilibrée}.$$

On note encore ε la classe de $(-\infty, -\infty)$.

L'ensemble des classes positives [resp. négatives] [resp. équilibrées amputées de ε] seront notées $\mathbb{R}^{\oplus}_{*}$, [$\mathbb{R}^{\ominus}_{*}$], [$\mathbb{R}^{\bullet}_{*}$] (on élèvera l'étoile, par exemple $\mathbb{R}^{\oplus}$, lorsqu'on rajoute à l'ensemble correspondant l'élément ε).

On constate que la relation d'équivalence $\mathscr{R}$ est compatible avec :

— l'addition vectorielle de $\mathbb{R}^2_{\max}$,

— la multiplication $x \otimes y = (x' y' \oplus x'' y'', x' y'' \oplus x'' y')$ d'élément neutre (e, ε),

— l'opérateur $\ominus$ défini par $\ominus (x', x'') = (x'', x')$ (on fera les mêmes abus de notation qu'en algèbre classique en notant $a \ominus b$ l'expression $a \oplus (\ominus b)$ etc.).

La structure algébrique quotient sera notée $\dot{\check{\mathbb{R}}}$. On utilisera aussi $\check{\mathbb{R}}$ pour $\mathbb{R}^{\oplus} \cup \mathbb{R}^{\ominus}$. On constate alors que $\mathbb{R}_{\max}$ et $\mathbb{R}^{\oplus}$ [resp. $\mathbb{R}^{\bullet}$] sont isomorphes. On verra les éléments de $\mathbb{R}^{\bullet}$ comme des éléments singuliers. Tout élément en dehors de ces éléments singuliers est inversible.

Pour tout a appartenant à $\check{\mathbb{R}}$, $a \ominus a$ appartient à $\mathbb{R}^{\bullet}$, mais est en général $\neq \varepsilon$. On n'a donc pas réalisé une symétrisation de $\mathbb{R}_{\max}$. On a réalisé la proposition : « *à chaque élément on peut associer un autre élément tel que la somme des deux soit équilibrée* ».

On note Δ pour « $\in \mathbb{R}^{\bullet}$ » (resp. $\not\Delta$ pour « $\in \check{\mathbb{R}}_{*}$ »), resp. $\not\Delta_f$ pour $\in \check{\mathbb{R}}$) que l'on lit équilibré (resp. déséquilibré), [resp. déséquilibré fort (l'adjectif fort ne prendra son sens que dans le cas vectoriel au paragraphe suivant)]. Ces équilibres jouent le rôle des équations habituellement. On a en particulier :

$$a\Delta \text{ et } b\Delta \;\Rightarrow\; a \oplus b\Delta \text{ et } a \ominus b\Delta \text{ et } a \otimes b\Delta$$
$$a\Delta \text{ et } c\not\Delta \;\Rightarrow\; a \otimes c\Delta \text{ et } a/c\Delta$$

La relation entre a et b : « $a \ominus b$ réalise un équilibre » n'est pas transitive. Les propriétés suivantes en tiendront lieu.

Théorème 2.1 (fondamental des équilibres). — 1. $a \ominus b\Delta$, a et $b\not\Delta \Rightarrow a = b$,
2. $a \ominus b\Delta$ et $b \ominus c\Delta$ et $b\not\Delta \Rightarrow a \ominus c\Delta$,
3. $a \ominus b\Delta$, $cb \ominus d\Delta$, $b\not\Delta \Rightarrow ca \ominus d\Delta$.

On s'intéresse maintenant à réaliser des équilibres au moyen de variables appartenant à $\check{\mathbb{R}}$ c'est-à-dire chercher $x\not\Delta_f$ tel que $g(x)\Delta$. Cela correspond à la résolution des équations dans la terminologie habituelle. On a alors le théorème suivant qui fait tout l'intérêt de l'introduction de ces notions.

Théorème 2.2. — *$\forall a\not\Delta$, $\forall b\not\Delta_f$, $\exists x\not\Delta_f$ unique : $ax \oplus b\Delta$, cette solution vaut $x = \ominus b/a$.*

Remarque 1. — En revenant aux couples, cela signifie qu'il y a une classe unique de $\check{\mathbb{R}}$ pour des données appartenant à une classe de $\check{\mathbb{R}}$, solution de l'équation :

$$a' x' \oplus a'' x'' \oplus b' = a'' x' \oplus a' x'' \oplus b''.$$

La démonstration est immédiate en simplifiant l'équation. Elle se ramène à une discussion selon les signes des représentants.

Remarque 2. — Dans les constructions usuelles, on peut ramener les équations $a = b$ à $a - b = 0$, ici non, mais celà est inutile pour faire la clôture linéaire d'un ensemble.

Remarque 3. — On peut poser une équation linéaire à données plus générales dans $\dot{\check{\mathbb{R}}}$. On peut alors chercher une solution dans $\check{\mathbb{R}}$ ou dans $\dot{\check{\mathbb{R}}}$. On vérifie alors que lorsque l'une des données est dans $\mathbb{R}^{\bullet}$ on perd l'unicité. Bien qu'un calcul utile puisse être mené pour gérer ces non-unicités, par souci de simplicité nous ne le ferons pas ici.

3. Application aux systèmes linéaires. — Les notions d'équilibre s'étendent au cas vectoriel composante par composante :

— Δ signifie : toutes les composantes sont équilibrées,

— $\not\Delta$ signifie : il existe une composante déséquilibrée,

— $\not\Delta_f$ signifie : toutes les composantes $\in \check{\mathbb{R}}$.

On définit le déterminant d'une matrice A par la formule habituelle :

$$\det(\mathrm{A}) = \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}$$

où n désigne l'ordre de la matrice, σ une permutation de $\{1, 2, \ldots, n\}$, $\operatorname{sgn}(\sigma) = e$ ou $\ominus e$ selon la parité de σ.

THÉORÈME 3.1. — $\det(A)\,\Delta \Leftrightarrow \exists\, x\, \not\Delta_f,\ x \neq \varepsilon$ *tel que* $A\,x\,\Delta$.

Démonstration. — Gondran-Minoux [5] dans $\mathbb{R}_{\max}$, Gaubert [4] dans $\check{\mathbb{R}}$.

On trouvera des discussions sur diverses notions de rang dans ces algèbres dans Wagneur [10].

On s'intéresse maintenant aux systèmes linéaires $A\,x = b$.

THÉORÈME 3.2

$$AA^\sharp \ominus \det(A)\,I\,\Delta, \qquad A^\sharp A \ominus \det(A)\,I\,\Delta, \qquad \operatorname{diag}(A^\sharp A) = \operatorname{diag}(AA^\sharp) = \det(A)\,I$$

où l'on a noté $A^\sharp$ *la transposée de la matrice des cofacteurs de* A.

Démonstration. — Adapter les résultats de Reutenauer-Straubing [8] ou la démonstration habituelle.

THÉORÈME 3.3 (« de Cramer »). — *Sous l'hypothèse,* $A^\sharp b\, \not\Delta_f$, $\det(A)\, \not\Delta$, *il existe une solution unique* $x\, \not\Delta_f$ *au système linéaire* $A\,x \ominus b\,\Delta$ *donnée par la formule*

$$x = A^\sharp b / \det(A).$$

Démonstration. — Olsder-Roos [7] dans des cas particuliers de $\mathbb{R}_{\max}$, Gaubert [4] dans le cas général.

Remarque 4. — On peut à partir de là faire la théorie des systèmes linéaires. Une différence avec la théorie habituelle est l'hypothèse $A^\sharp b\, \not\Delta_f$ qui correspond à la perte d'unicité déjà observée, dans l'équation scalaire, lorsque $b \in \mathbb{R}^\bullet$.

Remarque 5. — Étant donné un système linéaire dans $\mathbb{R}_{\max}$ du type $A\,x = b$, la résolution de $A\,x \ominus b\Delta$ dans $\check{\mathbb{R}}$ puis la constatation du caractère unique et positif de la solution nous donne l'existence et l'unicité d'une solution au problème initial, la constatation de l'unicité et du caractère négatif d'une composante nous prouve la non-existence. Dans ce dernier cas on peut de plus affirmer l'existence d'une solution unique à un autre problème du type $A'\,x' \oplus b = A''\,x'$, « symétrique » du proposé.

4. EXEMPLE NUMÉRIQUE. — Considérons le système à résoudre

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ e & \ominus e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ \ominus e \end{bmatrix}$$

ce qui signifie que l'on cherche les deux vecteurs : $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix}$ tels que

$$(1) \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ e & \varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} \varepsilon \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ e & \varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} e \\ \varepsilon \end{bmatrix}$$

où l'on a noté e pour 0 (élément neutre de la multiplication $\otimes$) ou $\bar{0}$ classe de $(0, \varepsilon)$.

On trouve

$$\det(A) = 2 \otimes (\ominus e) \ominus e \otimes 1 = \ominus 2$$

$$A^\sharp = \begin{bmatrix} \ominus e & \ominus 1 \\ \ominus e & 2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{A^\sharp b}{\det(A)} = \begin{bmatrix} \ominus(-1) \\ e \end{bmatrix}$$

La solution est alors la classe de $x'' = (-1)$, $y' = e$, $x' = \varepsilon$, $y'' = \varepsilon$. On vérifie en effet que l'on obtient $\begin{bmatrix} 1 \\ e \end{bmatrix}$ à gauche et à droite de (1).

Bien que l'objet de cette Note soit l'introduction de cette nouvelle algèbre et non pas ses implications algorithmiques, signalons que le calcul du déterminant d'une matrice de $\mathbb{R}_{\max}$ se ramène à la résolution d'un problème d'affectation. Et donc les formules de Cramer ont la complexité de la résolution de n problèmes d'affectation. Enfin, on peut adapter l'algorithme de Gauss-Seidel à cette nouvelle situation. On a alors convergence en un nombre fini d'itérations.

On trouvera d'autres développements de l'algèbre $\mathbb{R}_{\max}$ ainsi que des applications dans ([3], [9], [2]) et leurs références.

(1) Nom collectif pour un groupe de travail sur l'algèbre (max, +) à l'I.N.R.I.A., Projet META2, Marianne Akian, Guy Cohen, Stéphane Gaubert, Ramine Nikoukhah, Jean-Pierre Quadrat.

Note remise le 25 avril 1990, acceptée le 21 juin 1990.

Références bibliographiques

[1] T. S. Blyth, Matrices over ordered algabraic structures, *Journal London Math. Soc.*, n° 39, 1964, p. 427-432.

[2] G. Cohen, P. Moller, J.-P. Quadrat et M. Viot, Algebraic tools for the performance evaluation of discrete event systems, *I.E.E.E. Proceedings*, Special issue on discrete event systems, 77, n° 1, janvier 1989.

[3] R. Cuninghame-Green, *Minimax Algebra*, Springer-Verlag, *Lecture Notes in Economics and Math. Systems*, n° 166, 1979.

[4] S. Gaubert, *Thèse*, E.N.S.M.P. (à paraître).

[5] M. Gondran et M. Minoux, L'indépendance linéaire dans les dioïdes, *E.D.F. Bulletin de la Dir. des Études et Rech.*, Série C, Math. et Inf., n° 1, 1978.

[6] M. Gondran et M. Minoux, *Graphes et Algorithmes*, Eyrolles, Paris, 1979.

[7] G. J. Olsder et C. Ross, Cramer and Cayley Hamilton Theorems in the Max Algebra, *Linear Algebra and its Applications*, n° 101, 1988, p. 87-108.

[8] C. Reutenauer et H. Straubing, Inversion of matrices over a commutative semi ring, *Journal of Algebra*, n° 88, 1984, p. 350-360.

[9] U. Zimmerman, *Linear and combinatorial optimization in ordered algebraic structures*, North Holland 1981.

[10] E. Wagneur, *Moduloïds and pseudomodules*, Rapport Interne HEC Montréal, mai 1989.

I.N.R.I.A., Domaine de Voluceau, Rocquencourt, 78153 *Le Chesnay Cedex.*