QUELQUES PROBLÈMES D'ACTUALITÉ SUR LES ALGÈBRES TROPICALES

STÉPHANE GAUBERT* ET JEAN-JACQUES LOISEAU†

27 Mai, 1997

Le but de ces pages est de signaler informellement trois familles de problèmes ouverts ou en chantier typiques de l'activité du groupe de travail "Algèbres Tropicales ... et applications aux systèmes à événements discrets et à la commande optimale". Il s'agit d'un coup de projecteur très partial (on a privilégié les problèmes qui intéressent le plus l'Automatique, au détriment de la théorie des langages, des EDP de Hamilton-Jacobi, et des asymptotiques). Le lecteur intéressé par une panorama plus complet pourra se reporter à la présentation du GdT publiée dans ces actes, ou au serveur `http://amadeus.inria.fr/TROPICAL/`

1 EN GUISE D'INTRODUCTION: LE SEMIANNEAU $(\max, +)$ ET LE SEMIANNEAU TROPICAL

Le semianneau $(\max, +)$, parfois appelé "algèbre $(\max, +)$", et noté $\mathbb{R}_{\max}$, est l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, muni des lois $\max$ et $+$. Traditionnellement, on note $\oplus$ au lieu de $\max$ ($2 \oplus 3 = 3$), et $\otimes$ au lieu de $+$ ($1 \otimes 1 = 2$). L'élement zéro c'est-à-dire le neutre pour la loi $\oplus$, sera noté ε (ici $\varepsilon = -\infty$). L'unité, c'est-à-dire le neutre pour la loi $\otimes$, sera notée e (ici $e = 0$). Les axiomes de structure des *semianneaux* sont ici satisfaits: $\oplus$ est associative, commutative, a un zéro, $\otimes$ est associative, a une unité, distribue par rapport à $\oplus$, et zéro est absorbant (autrement dit, un semianneau est presque un anneau, sauf que l'addition n'est pas forcément une loi de groupe). Le semianneau (max,+) est très particulier: il est *commutatif* ($a \otimes b = b \otimes a$), *idempotent* ($a \oplus a = a$), et les éléments ont un inverse, hormis zéro (on nomme *semicorps* les semianneaux qui satisfont cette propriété). Les semianneau idempotents sont parfois appelés *dioïdes*.[1]

L'usage des nouveaux symboles $\oplus$ et $\otimes$ à la place des notations familières $\max$ et $+$ n'est pas une perversion destinée à perdre le lecteur. Cela relève au contraire d'un principe de paresse, qui consiste à observer que la plupart des constructions de l'algèbre classique peuvent s'adapter au cas (max,+) (du moment que le signe moins ou la structure de groupe additif ne sont pas utilisés). Ainsi, on peut réquisitionner sans effort toutes les habitudes et les notations bien ancrées dans l'éducation

*INRIA, Domaine de Voluceau, 78153 Le Chesnay Cédex. `Stephane.Gaubert@inria.fr`

†IRCyN, UMR CNRS 6597, BP 92101, 44321 Nantes Cedex 03. `loiseau@lan.ec-nantes.fr`

[1] Le terme est du à Kuntzmann et a été popularisé par Gondran et Minoux: il signifiait alors seulement semianneau. Le terme semianneau étant maintenant standard, on croît pouvoir recommander l'usage de [1], qui est d'appeler dioïde un semianneau idempotent.

$\mathbb{R}_{\max}$	$(\mathbb{R}\cup\{-\infty\},\max,+)$	semianneau $(\max,+)$	semicorps idempotent
$\overline{\mathbb{R}}_{\max}$	$(\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\},\max,+)$	semianneau $(\max,+)$ complété	$-\infty+(+\infty)=-\infty$, car $\varepsilon\otimes a=\varepsilon$
$\mathbb{R}_{\max,\times}$	$(\mathbb{R}^+,\max,\times)$	semianneau $(\max,\times)$	isomorphe à $\mathbb{R}_{\max}$ $(x\mapsto\log x)$
$\mathbb{R}_{\min}$	$(\mathbb{R}\cup\{+\infty\},\min,+)$	semianneau $(\min,+)$	isomorphe à $\mathbb{R}_{\max}$ $(x\mapsto -x)$
$\mathbb{N}_{\min}$	$(\mathbb{N}\cup\{+\infty\},\min,+)$	semianneau tropical	semianneau éponyme du GdT fameux en théorie des langages
$\mathbb{R}_{\max,\min}$	$(\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\},\max,\min)$	algèbre goulot, ou floue	n'est pas un semicorps.
$\mathbb{B}$	$(\{\text{false},\text{true}\},\text{or},\text{and})$	semianneau de Boole	isomorphe à $(\{\varepsilon,e\},\oplus,\otimes)$, pour n'importe lesquel des semianneaux ci-dessus
$\mathbb{R}_h$	$(\mathbb{R}\cup\{-\infty\},\oplus_h,+)$ $a\oplus_h b=h\log(e^{a/h}+e^{b/h})$	semianneaux "de Maslov"	déformation isomorphe de $(\mathbb{R}^+,+,\times)$ $\lim_{h\to 0^+}\mathbb{R}_h=\mathbb{R}_0=\mathbb{R}_{\max}$

Table 1: La famille des semianneaux $(\max,+)$ et tropicaux

mathématique. Nous écrirons par exemple:

$$\begin{gathered}ab=a\otimes b,\quad a^n=a\otimes\cdots\otimes a\ \ (n \text{ fois}),\qquad 2^3=6\ ,\qquad\qquad \sqrt{3}=1.5\ ,\\ \begin{bmatrix}2&0\\4&\varepsilon\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10\\103\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\otimes 10\oplus 0\otimes 103\\4\otimes 10\oplus\varepsilon\otimes 103\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}103\\14\end{bmatrix},\\ (3\oplus x)^2=(3\oplus x)(3\oplus x)=6\oplus 3x\oplus x^2=6\oplus x^2\ \ (=\max(6;2\times x))\ .\end{gathered}$$

Nous concluons cette section introductive en listant certains fameux semianneaux apparentés au semianneau (max,+), dont le semianneau tropical, cf. Table 1.

2 Quels modèles algébriques pour les systèmes à événements discrets ?

Il est bien connu que certains systèmes à événements discrets (les graphes d'événements) se modélisent par des systèmes dynamiques sur le semianneau $(\max,+)$, Considérons par exemple un système comprenant n tâches répétitives (on peut penser à des assemblages dans un atelier, à des rendez-vous dans un réseau), et supposons que la k-ième occurrence de la tâche i (tir de la transition i) doive attendre τ_{ij} unités de temps la $(k-\nu_{ij})$-ème exécution de chaque tache j. Alors, clairement, les dates au plus tôt d'occurrence des k-ième tâches sont données par la récurrence

$$x_i(k)=\max_j\,[\tau_{ij}+x_j(k-\nu_{ij})]\ \ , \tag{1}$$

qui n'est autre qu'un système linéaire stationnaire sur le semianneau $(\max,+)$. On pourrait écrire en termes matriciels

$$x(k)=\bigoplus_{\nu\in\mathsf{F}}A_\nu x(k-\nu)\ \ , \tag{2}$$

où F est un ensemble fini, et $\{A_\nu\}_{\nu\in\mathsf{F}}$ une famille de matrices que l'on écrira aisément.

Cependant, pour arriver au système linéaire stationnaire (1), il faut faire des hypothèses de structure fortes, à savoir que les préconditions d'une tâche sont fixées a priori et invariantes en temps. En termes d'atelier, cela signifie à peu près exactement qu'un ordonnancement périodique a été défini. Grace à l'algèbre $(\max, +)$, on sait à peu près tout dire sur cette classe de systèmes, mais elle est bien restreinte (dans la majorité des applications SED, trouver un bon ordonnancement fait partie du problème). Ces dernières années, deux extensions de cette modélisation classique sont apparues, qui commencent à lèver ces restrictions, l'une par des automates à multiplicités ou séries rationnelles sur le semianneau $(\max, +)$, l'autre par des systèmes dynamiques multilinéaires. Chacune de ces extensions donne un lot de problèmes ouverts, on en esquissera certains.

3 Empilements de Pièces, ressources partagées et Automates $(\max, +)$

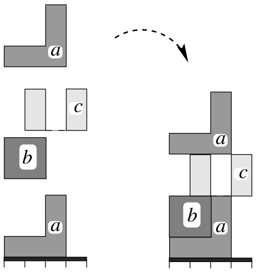
Un "jeu de Tetris" ou système à ressources partagées peut être formalisé de la manière suivante. On se donne un ensemble de *positions* (en abscisse) ou de *ressources* $\mathcal{R}$ (e.g. $\mathcal{R} = \{1, \ldots, n\}$). Nous appellerons *pièce* (ou *tâche*) a un bloc rigide éventuellement non connecté, représenté géométriquement par un ensemble de positions (ressources) occupées $R(a) \subset \mathcal{R}$, un contour bas (dates de début d'exécution sur les ressources) $\ell(a) : R(a) \to \mathbb{R}$, un contour haut (dates de libération des ressources) $h(a) : R(a) \to \mathbb{R}$, avec bien-sûr: $\forall a \in R(a)$, $h(a) \geq \ell(a)$. Une pièce sera représenté par la région du plan $\mathcal{R} \times \mathbb{R}$: $P_a = \{(r, y) \in R(a) \times \mathbb{R} \mid \ell(a)_r \leq y \leq h(a)_r\}$, ce que l'on interprétera comme suit: la tâche a requiert l'ensemble des ressources (machines, processeurs, main d'œuvre) $R(a)$, et chaque ressource $r \in R(a)$ est employée de l'instant $\ell(a)_r$ à l'instant $h(a)_r$. Une pièce P_a peut être translatée verticalement d'une constante λ, ce qui donne la nouvelle région $\ell'(a) = \lambda + \ell(a),\ h'(a) = \lambda + h(a)$. Physiquement, cela correspond à exécuter la tâche λ unités de temps plus tard (ou $-\lambda$ unités de temps plus tôt si $\lambda < 0$). Un *sol* ou une *condition initiale* est un vecteur ligne $g \in \mathbb{R}^{\mathcal{R}}$: la ressource r devient disponible initialement à l'instant g_r. Si nous laissons tomber les k pièces $a_1 \ldots a_k$, dans cette ordre, sur le sol g (on laisse tomber les pièces selon les lois de la gravité, en interdisant les translations horizontales et les rotations, exactement comme dans le vrai jeu de Tetris si l'on s'abstient de toucher aux manettes, voir la figure 1), nous obtenons un *tas de pièces*. Le contour haut $x(w)$ du tas $w = a_1 \ldots a_k$ est le vecteur ligne dans $\mathbb{R}^{\mathcal{R}}$, dont la composante r est égale à la hauteur de crête du tas au droit de la ressource r, i.e. à la date de libération de la ressource r à l'issue de l'exécution de la suite de tâches w. La *hauteur* du tas est par définition $y(w) = \max_{r \in \mathcal{R}} x(w)_r$. Physiquement, $y(w)$ donne ce que la littérature de l'ordonnancement appelle le *makespan*, c'est-à-dire le temps d'exécution de la suite de tâches, ou de manière équivalente, la date de libération de la dernière ressource occupée. On établit aisément la récurrence suivante qui détermine complètement la dynamique au plus tôt du système (_ dénote le tas vide):

$$x(\_) = g,\ \forall r \in R(a),\ x(wa)_r = \max_{s \in R(a)} [h(a)_r - \ell(a)_s + x(w)_s]\ ,\ \forall r \notin R(a),\ x(wa)_r = x(w)_r\,. \tag{3}$$

En termes algébriques, à chaque pièce a prise dans un ensemble de pièces $\mathcal{T}$, on associe la matrice $M(a) \in (\mathbb{R}_{\max})^{\mathcal{R} \times \mathcal{R}}$, $M(a)_{r,s} = h(a)_s - \ell(a)_r$ si $r, s \in R(a)$, et $M(a)_{r,r} = e$ pour les coefficients diagonaux hors $R(a)$ (les autres coefficients valent ε).

On peut alors affirmer que le jeu de Tetris est $(\max, +)$ linéaire. Précisément (voir [13, 20, 4]): *Le contour supérieur $x(w)$ et la hauteur $y(w)$ du tas de pièces $w = a_1 \ldots a_k$, posé sur un sol g sont donnés par les produits de matrices $(\max, +)$:*

$$x(w) = gM(a_1) \ldots M(a_k), \qquad y(w) = x(w)e_{\mathcal{R}}, \tag{4}$$



$R(c) = \{2, 4\}$, $\ell(c) = [\cdot, 0, \cdot, 0]$, $h(c) = [\cdot, 2, \cdot, 2]$
$R(b) = \{1, 2\}$, $\ell(b) = [0, 0, \cdot, \cdot]$, $h(b) = [2, 2, \cdot, \cdot]$
$R(a) = \{1, 2, 3\}$, $\ell(a) = [0, 0, 0, \cdot]$, $h(a) = [1, 1, 3, \cdot]$

Figure 1: Un jeu de Tetris à trois types de pièces et quatre ressources

(e_X dénote le vecteur colonne indicé par X, valant identiquement e).

Autrement dit, la série génératrice $\bigoplus_{w\in\mathcal{T}^*} y(w)w \in \mathbb{R}_{\max}\langle\langle\Sigma\rangle\rangle$ est *reconnue* par un automate à multiplicité sur le semianneau $(\max, +)$, ou si l'on préfère, d'après le théorème de Kleene-Schützenberger, c'est une série rationnelle.

Le lecteur aura deviné que ces modèles d'empilements sont génériques des systèmes à ressource partagées (on peut montrer qu'ils représentent précisément les réseaux de Petri safe temporisés).

On peut donc dire que pour passer des systèmes à ordonnancement fixé (les systèmes dynamiques de la forme (1)) aux systèmes de la forme (4), il y a le même saut de difficulté que du commutatif au non commutatif. En effet, les systèmes de la forme (1) se trivialisent via la théorie de Perron-Frobenius $(\max, +)$ (il s'agit essentiellement de calculer le comportement asymptotique des puissances d'une matrice: A, A^2, A^3, ce qui se ramène a un problème de valeur propre $(\max, +)$), alors que les modèles à ordonnancement variable (4) reviennent à étudier des semigroupes de matrices à plusieurs générateurs.

4 Comment calculer l'exposant de Lyapunov des tas de pièces ?

Soit $\|X\| = \sup_{ij} X_{ij}$. Étant donné un ensemble fini de matrices Σ, on peut définir les quantités suivantes:

$$\ell_{\max} = \limsup_{n\to\infty} \sup_{A_1\ldots A_n\in\Sigma} \|A_1\ldots A_n\|^{\frac{1}{n}} \tag{5}$$

$$\ell_{\min} = \liminf_{n\to\infty} \inf_{A_1\ldots A_n\in\Sigma} \|A_1\ldots A_n\|^{\frac{1}{n}} \tag{6}$$

$$\ell_{\mathbb{E}} = \lim_{n\to\infty} \text{p.s.}\ \|A_1\ldots A_n\|^{\frac{1}{n}}\ . \tag{7}$$

Dans le dernier cas, $A_1, A_2, \ldots$ est une suite de matrices aléatoires prises dans Σ (disons i.i.d. pour fixer les idées). Pour des empilements de pièces, la première quantité mesure le taux de croissance quand on essaye de faire croître le tas au maximum, la seconde mesure le taux de croissance minimal (quand on essaie de minimiser la hauteur du tas comme dans le vrai jeu de Tetris ou dans les problèmes d'ordonnancement), la dernier le taux de croissance moyen, quand on laisse les pièces s'empiler aux hasard. Les analogues de ces quantités sont bien connues et relativement incalculables en algèbre habituelle (on prend alors pour $\|\cdot\|$ une norme quelconque). L'analogue de $\ell_{\max}$ est appelé "rayon spectral conjoint de Σ". On parle aussi parfois de rayon spectral supérieur pour $\ell_{\max}$, ce qui permet d'appeler $\ell_{\min}$ rayon spectral inférieur. À notre connaissance, on ne sait pas décider si l'analogue de $\ell_{\max}$ est strictement plus petit que 1 dans l'algèbre usuelle (la "conjecture de finitude" de Lagarias et Wang [16], qui suppose que le taux de croissance $\ell_{\max}$ est atteint par un semigroupe à un générteur, entraînerait la décidabilité de ce problème). La dernière quantité, $\ell_{\mathbb{E}}$ est appelée "exposant de Lyapunov". Son existence résulte par exemple du théorème ergodique sous-additif de Kingman [9, 1] (remarquer que $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$).

En algèbre (max,+) au moins deux de ces quantités sont plus simples. Le taux de croissance dans le pire des cas, $\ell_{\max}$, se calcule en temps polynomial, le taux de croissance $\ell_{\min}$ peut se calculer dans certains cas lorsque les coefficients des matrices sont entiers, en utilisant des formes normales dans les monoïdes de trace, mais c'est très cher. Quant à l'exposant de Lyapunov $\ell_{\mathbb{E}}$, il peut s'écrire de manière peut-être plus parlante (e.g. si on tire les matrices avec la loi uniforme):

$$\ell_{\mathbb{E}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n|\Sigma|^n} \sum_{A_1,\ldots,A_n\in\Sigma} \|A_1 \ldots A_n\|$$

On ne sait pas calculer $\ell_{\mathbb{E}}$, en général. Les seuls cas où l'on sait faire sont à base de chaînes de Markov induites (les états sont les images dans l'espace projectif des vecteurs xM, ou x est un vecteur initial fixé éventuellement bien choisi, et M parcoure l'ensemble des matrices du semigroupe engendré par Σ). En général, la dite chaîne de Markov est assez "régulière" mais infinie, et on ne sait pas calculer explicitement sa mesure invariante. Même dans le cas de l'anneau de N pièces de hauteur 1, $a_1, \ldots, a_N$, $\mathcal{R} = \{1, \ldots, N\}$, $R(a_i) = \{i, i+1\}$, avec $N + 1 = 1$, c'est un problème ouvert à trois étoiles de calculer $\ell_{\mathbb{E}}$, pour tout $N \geq 5$. Voir [1], le papier Gaujal et Jean-Marie dans [15], ainsi que [4] pour les résultats existants sur ces exposants de Lyapunov.

5 Systèmes dynamiques $(\min, +, \times)$ implicites; où les réseaux de Petri revisités par l'Automaticien

Une autre point de vue, introduit indépendemment par plusieurs groupes [2, 7, 17] depuis quelques années, consiste à voir un réseau de Petri temporisé comme un système dynamique mixant les lois $(\min, +, \times)$. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des places, $\mathcal{Q}$ l'ensemble des transitions, M les multiplicités

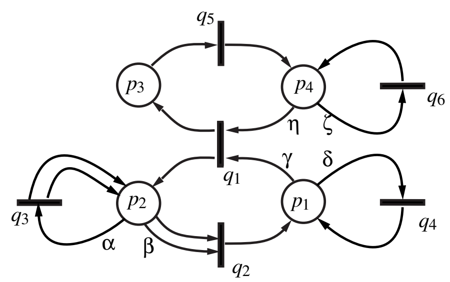


Figure 2: Un réseau de Petri temporisé

des arcs, m le marquage initial, τ les temps de séjour. À chaque place $p \in \mathcal{P}$ on associe un compteur $Z_p : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, $Z_p(t)$ est le numéro du dernier jeton entré jusqu'à l'instant t, en incluant les jetons du marquage initial; de même, pour chaque transition $q \in \mathcal{Q}$, $Z_q(t)$ note le numéro du dernier tir de

q arrivé jusqu'à l'instant t. Ces fonctions sont croissantes, par définition. On a les bilans suivants (on note x^{in} et x^{out} les ensembles des prédecesseurs et successeurs d'un nœud x, respectivement):

$$Z_p(t) = m_p + \sum_{q \in p^{\text{in}}} M_{pq} Z_q(t) \tag{8a}$$

$$\sum_{q' \in p^{\text{out}}} M_{q'p} Z_{q'}(t) \leq Z_p(t - \tau_p) \ . \tag{8b}$$

Par exemple, pour le réseau de Petri de la Figure 2, $Z_{q_3}(t) + 2Z_{q_2}(t) \leq Z_{p_2}(t - \tau_{p_2})$ traduit le fait qu'un jeton en p_2 peut contribuer au tir d'une transition q_3, et qu'il en faut deux pour tirer q_2. Le caractère implicite de (8a), (8b) traduit l'existence de conflits structurels: on doit décider à quelle transition aval on alloue un jeton.

Dans un fonctionnement au plus tôt, au moins une inégalité de type (8b) est saturée (i.e. au moins une place est indisponible) en amont de chaque transition. On a donc:

$$\min_{p \in q^{\text{in}}} (Z_p(t) - \sum_{q' \in p^{\text{out}}} Z_{q'}(t) M_{q'p}) = 0 \ . \tag{8c}$$

Le problème posé est: *peut-on dire quelque chose des systèmes dynamiques* $(\min, +, \times)$ *implicites de la forme* (8a) & (8c)*, ne serait-ce que dans le cas fluide (en relaxant la contrainte d'intégrité sur les compteurs)*?

On peut par exemple rendre explicite ce système, en forçant des routages stationnaires: on notera alors ρ_{qp} la proportion de fluide routé vers q par la place p, avec $\sum_{q \in p^{\text{out}}} \rho_{qp} = 1$. En posant

$$\mu_{pq} \stackrel{\text{déf}}{=} M_{pq}, \ \ \mu_{qp} \stackrel{\text{déf}}{=} M_{qp}^{-1}, \ \mu'_{qp} \stackrel{\text{déf}}{=} \mu_{qp} \rho_{qp}$$

on replace (8a) et (8c) par

$$Z_q(t) = \min_{p \in q^{\text{in}}} \Big[\mu'_{qp} \big(m_p + \sum_{q' \in p^{\text{in}}} \mu_{pq'} Z_{q'}(t - \tau_p) \big) \Big] \tag{9}$$

où l'on reconnait une équation de la programmation dynamique, pour un processus de décision semi-Markovien, avec coût additif actualisé général. On peut alors calculer l'asymptotique de Z par des algorithmes d'ailleurs non triviaux (itération sur les politiques, dans le cas de minimisation de la croissance, on doit s'attendre à une asymptotique de la forme $Z_q(t) = at^k \rho^t + \dots$). Ce genre de méthode se généralise t-il au cas implicite ? En partie certainement : il existe déja des CNS de vivacité, pour les RdP à choix libres [2].

6 Vers une approche géometrique des systèmes dynamiques linéaires sur le semianneau $(\max, +)$

La solution du système

$$x(k) = Ax(k-1) \oplus Bu(k) \ , y(k) = Cx(k) \ ,$$

où $x(-1) = -\infty$, est comme d'habitude

$$y(k) = \bigoplus_{l=0}^{k} CA^{k-l}Bu(l) \ .$$

Dans un atelier, $y(k)$ s'interprète comme la date d'obtention de la k-ième pièce (on suppose, afin d'alléger la notation, que le système est monovariable). Les problèmes suivants sont typiques:

suivi de trajectoire	trouver u tel que $y(k) \leq \eta(k)$, pour $k = 0, 1, \ldots$
atteignabilité en horizon k	trouver u tel que $x(k) \leq \xi$

Le premier problème consiste à suivre un carnet de commandes ($\eta(k)$ est la date de livraison souhaité de la k-ième pièce). Le second probème consiste à garantir l'état de l'atelier en horizon k (ξ est le vecteur des dates de disponibilité des "ressources" internes, machines, palettes, personnel, etc.) Ces deux problèmes sont de la forme $Fu \leq v$, ou F est un opérateur linéaire. E.g., dans le deuxième cas, $Fu = \mathcal{C}_k u_k$, où $\mathcal{C}_k = [B, AB, \ldots, A^k B]$ et $u_k = [u(k), \ldots, u(0)]^T$. Il n'est pas en général possible de résoudre exactement $Fu = v$ pour toute valeur de v, car génériquement, un opérateur linéaire $(\max, +)$ n'est pas surjectif (ni injectif, d'ailleurs). Cependant, il est bien facile de voir que $Fu \leq v$ a toujours une solution maximale, $F\backslash v$, donnée en termes matriciels par

$$(F\backslash v)_i = \inf_j(-F_{ji} + v) \ .$$

(il s'agit d'un cas particulier de *résiduation* [3, 1]). On peut ainsi calculer la solution au plus tard satisfaisant le carnet de commande, où l'état atteignable maximal en dessous de ξ. En outre, on sait tester l'atteignabilité exacte de ξ en temps k: il suffit de voir que $\mathcal{C}_k(\mathcal{C}_k\backslash\xi) = \xi$. Développer un approche "géométrique", ou une approche "semimodules aux différences" en $(\max, +)$ est un sujet chaud. Nous listerons seulement quelques obstructions, que l'on espère provisoires, dans cette direction.

1. Une chaîne croissante de semimodules sur le semianneau $(\max, +)$ de stationnarise pas nécessairement ([10, Th. 16.4]). Autrement dit, l'espace accessible $\mathrm{im}\,\mathcal{C}_k$ peut croître infinement avec l'horizon k.

2. Plusieurs notions de rang existent. Le *rang faible* d'un semimodule est le cardinal d'une famille génératrice minimale, qui d'après un théorème de Moller et Wagneur (voir [21]), est bien défini pour les sous-semimodules finiment engendrés de $\mathbb{R}^n_{\max}$. Le rang faible de l'espace des lignes et le rang faible de l'espace des colonnes d'une matrice diffèrent en général. Le *rang de Schein* d'une matrice A est la plus petite dimension r d'une factorisation $A = CB$, B ayant r lignes. Il minore le rang par ligne et par colonne. Let *déterminant positif* d'une matrice A, $\det^+ A$, est la somme des poids des permutations paires, le *déterminant négatif* $\det^- A$ est la somme des poids des permutations impaires (on a $\det A = \det^+ A - \det^- A$ dans l'algèbre usuelle). Le rang mineur d'une matrice A est la taille de la plus grande sous-matrice carrée A' de A telle que $\det^- A' \neq \det^+ A'$. Le rang mineur minore le rang de Schein, qu'on ne sait pas calculer efficacement. Une matrice carrée à un *permanent fort* s'il existe une seule permutation de poids maximal. Le *rang fort* d'une matrice est la plus grande taille d'une sous-matrice carrée de permanent fort. Bien sûr, le rang fort minore le rang mineur.

3. L'image d'une matrice A de rang fort k contient une boule de dimension k (le rang fort est la bonne notion géométrique). Pour le calcul du rang fort, voir [5].
4. La bonne définition du noyau d'une application linéaire C est $\ker C = \{(x,y) \mid \ Cx = Cy\}$.
5. Un sous-semimodule de la forme im $B \subset \mathbb{R}^n_{\max}$ n'est pas nécessairement l'image d'un projecteur linéaire, ou de manière équivalente, n'admet pas nécessairement de facteur direct (i.e. $\operatorname{im} B \simeq \mathbb{R}^n_{\max} / \ker C$). C'est le cas ssi B admet un g-inverse (une matrice X telle que $B = BXB$), ce que l'on sait vérifier en résiduant [8].
6. Le problème de la réalisation minimale consiste comme d'habitude, étant donnée une suite h_k donnée effectivement (e.g. $h_k = CA^kB$), à trouver un triplet C', A', B' de dimension minimale, tel que $h_k = C'(A')^kB'$, pour tout k. Dans le cas des corps, on sait bien [11] que la dimension minimale de réalisation est égale au rang de la matrice de Hankel $\mathcal{H} = (h_{i+j})$. Dans n'importe quel semianneau [12], le rang mineur de la matrice de Hankel minore la dimension minimale de toute réalisation (le rang de Schein aussi, mais on ne sait pas le calculer). Le rang faible de la matrice de Hankel majore la dimension minimale de réalisation. Une approche de type algèbre syntaxiques [19] reste à écrire.
7. On ne sait pas décider en temps raisonnable si deux sous-semimodules finiment engendrés de semimodules libres sont isomorphes. C'est équivalent [8] à décider si deux matrices A et B sont dans la même $\mathcal{D}$-classe de Green, i.e. s'il existe une matrice C et des matrices X, Y, U, V telles que $A = XC, C = YA, C = BU, B = CV$.
8. L'ensemble des solutions d'un système linéaire $Ax = Bx$ forme un semimodule finiment engendré [6]. Le seul algorithme connu pour en calculer une base est en temps double exponentiel (une version améliorée semble avoir un comportement moyen simple exponentiel, voir [14, § 3.5]). Les cas spéciaux $x = Ax \oplus b$, $Ax = \lambda x$, $Ax = b$ sont très bien compris [1].

RÉFÉRENCES (VOIR LA PRÉSENTATION DU GDT POUR PLUS DE DÉTAILS)

[1] F. Baccelli, G. Cohen, G.J. Olsder, and J.P. Quadrat. *Synchronization and Linearity*. Wiley, 1992.

[2] F. Baccelli, S. Foss, and B. Gaujal. Structural, temporal and stochastic properties of unbounded free-choice Petri nets. Rapport de Recherche 2411, INRIA, 1994.

[3] T.S. Blyth and M.F. Janowitz. *Residuation Theory*. Pergamon press, 1972.

[4] M. Brilman and J.M. Vincent. Synchronisation by resources sharing : a performance analysis. Technical report, MAI-IMAG, Grenoble, France, 1995.

[5] P. Butkovič. Strong regularity of matrices — a survey of results. *Discrete Applied Mathematics*, 48:45–68, 1994.

[6] P. Butkovič and G. Hegedüs. An elimination method for finding all solutions of the system of linear equations over an extremal algebra. *Ekonomicko-matematicky Obzor*, 20, 1984.

[7] G. Cohen, S. Gaubert, and J.P. Quadrat. Asymptotic throughput of continuous timed petri nets. In *Proceedings of the 34th Conference on Decision and Control*, New Orleans, Dec 1995.

[8] G. Cohen, S. Gaubert, and J.P. Quadrat. Linear projectors in the max-plus algebra. In *5th IEEE Mediterranean Conference on Control and Systems*, July 1997.

[9] J.E. Cohen. Subadditivity, generalized products of random matrices and operations research. *SIAM Review*, 30:69–86, 1988.

[10] R.A. Cuninghame-Green. *Minimax Algebra*. Number 166 in Lecture notes in Economics and Mathematical Systems. Springer, 1979.

[11] M. Fliess. Matrices de Hankel. *J. Math. Pures. Appl.*, 15:161–186, 1975.

[12] S. Gaubert, P. Butkovič, and R. Cuninghame-Green. Minimal (max,+) realization of convex sequences. *SIAM J. on Control and Opt.*, 1996. to appear.

[13] S. Gaubert and J. Mairesse. Task resource systems and (max,+) automata. In J. Gunawardena, editor, *Idempotency*. Cambridge University Press, 1995. to appear.

[14] S. Gaubert and M. Plus. Methods and applications of (max,+) linear algebra. In *STACS'97*, number 1200 in LNCS, Lübeck, March 1997. Springer.

[15] J. Gunawardena, editor. *Idempotency*. Publications of the Newton Institute. Cambridge University Press, to appear in 1997.

[16] J.C. Lagarias and Y. Wang. The finiteness conjecture for the generalized spectral radius of a set of matrices. *Linear Algebra and Appl.*, 214:17–42, 1995.

[17] L. Libeaut. *Sur l'utilisation des dioïdes pour la commande des systèmes à événements discrets*. Thèse de doctorat, Université de Nantes, Sept. 1996.

[18] J.M. Prou and E. Wagneur. Controllability in the max-algebra. In *5th IEEE Mediterranean Conference on Control and Systems*, July 1997.

[19] C. Reutenauer. Séries formelles et algèbres syntactiques. *J. Algebra*, 66:448–483, 1980.

[20] J.M. Vincent. Some ergodic results on stochastic iterative discrete events systems. *DEDS: Theory and Applications*, 7(2):209–233, 1997.

[21] E. Wagneur. Moduloids and pseudomodules. 1. dimension theory. *Discrete Math.*, 98:57–73, 1991.