Calcul du champ électromagnétique en présence d'un objet parfaitement conducteur

Projet Eléments Finis - MA 201
Abdelaaziz.Ezziani@inria.fr

Décembre 2005

Mots clés : Équations de Maxwell, champ électromagnétique, formulation variationnelle, éléments finis, différences finies, condensation de masse.

1 Problème continu

Un champ électromagnétique dans un domaine Ω de $\mathbb{R}^3$ est décrit par les champs :

$$\left| \begin{array}{ll} \vec{E}(x,t) & \text{: champ électrique} \\ \vec{H}(x,t) & \text{: champ magnétique} \end{array} \right. \tag{1}$$

Ces champs de vecteurs sont reliés aux densités :

$$\left| \begin{array}{ll} \rho(x,t) & \text{: densité de charge électrique} \\ \vec{j}(x,t) & \text{: densité de courant} \end{array} \right. \tag{2}$$

qui vérifient la loi de conservation de la charge :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0 \tag{3}$$

On suppose que le milieu de propagation est constitué d'un matériau diélectrique. Les variations en espace et en temps de ces diverses quantités sont alors régies par les équations de Maxwell suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu \dfrac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \text{ rot } \vec{E} = 0 \\ \varepsilon \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \text{ rot } \vec{H} + \vec{j} = 0 \end{array} \right. \tag{4}$$

où

$$\left\{ \begin{array}{ll} \bullet\ \varepsilon(x) & \text{est la permittivité diélectrique du milieu} \\ \bullet\ \mu(x) & \text{est la perméabilité magnétique du milieu} \end{array} \right.$$

Pour des raisons énergétiques, les quantités $\varepsilon(x)$ et $\mu(x)$ sont des quantités strictement positives. La dépendance en x de ces coefficients caractérise une éventuelle hétérogénéité du milieu de propagation. Lorsque ε et μ sont constants, on dit que le milieu est homogène. Le vide est un milieu homogène particulier. Dans ce cas on a :

$$\left\{ \begin{array}{lll} \varepsilon(x) & = \varepsilon_0 & = (36\pi 10^9)^{-1} \\ \mu(x) & = \mu_0 & = 4\pi.10^{-7} \end{array} \right. \tag{5}$$

La vitesse de propagation c_0 des ondes dans le vide est donnée par :

$$\varepsilon_0 \, \mu_0 \, c_0^2 = 1 \tag{6}$$

ce qui donne numériquement la valeur bien connue pour la vitesse de la lumière :

$$c_0 = 3.10^8 m/s \tag{7}$$

Pour déterminer de façon unique la solution $(\vec{E},\vec{H})$, on doit se donner :

$$\begin{cases} -\text{des conditions initiales en } t = 0 \\ -\text{des conditions aux limites sur } \Gamma = \partial\Omega \end{cases}$$

Q 1.1 *a) On s'intéresse à un problème de propagation de nature "cylindrique", c'est à dire :*

- *le domaine de propagation Ω est de la forme : $\Omega = \mathcal{O} \times \mathbf{R}, \quad \mathcal{O} \subset \mathbf{R}^2$*
- *les coefficients sont indépendants de la coordonnée x_3 : $\varepsilon = \varepsilon(x_1,x_2)$, $\mu = \mu(x_1,x_2)$*
- *les sources sont indépendantes de x_3 : $\vec{E}_0 = \vec{E}_0(x_1,x_2)$, $\vec{H}_0 = \vec{H}_0(x_1,x_2)$, $\vec{j} = \vec{j}(x_1,x_2,t)$*

En admettant que sous ces hypothèses, les solutions $(\vec{E},\vec{H})$ de (4) sont indépendantes de x_3, montrer que le système (4) se découple en deux sous-systèmes d'équations posées dans $\Omega \times \mathbf{R}$.

Un système (TE) (Transverse Electrique) en (E_1,E_2,H_3)

$$\begin{cases} \varepsilon \dfrac{\partial E_1}{\partial t} - \dfrac{\partial H_3}{\partial x_2} + j_1 = 0 \\ \varepsilon \dfrac{\partial E_2}{\partial t} + \dfrac{\partial H_3}{\partial x_1} + j_2 = 0 \\ \mu \dfrac{\partial H_3}{\partial t} + \dfrac{\partial E_2}{\partial x_1} - \dfrac{\partial E_1}{\partial x_2} = 0 \end{cases} \tag{8}$$

Un système (TM) (Transverse Magnétique) en (H_1,H_2,E_3)

$$\begin{cases} \mu \dfrac{\partial H_1}{\partial t} + \dfrac{\partial E_3}{\partial x_2} = 0 \\ \mu \dfrac{\partial H_2}{\partial t} - \dfrac{\partial E_3}{\partial x_1} = 0 \\ \varepsilon \dfrac{\partial E_3}{\partial t} - \left(\dfrac{\partial H_2}{\partial x_1} - \dfrac{\partial H_1}{\partial x_2} \right) = 0 \end{cases} \tag{9}$$

On vérifiera que chacun de ces systèmes est équivalent à une équation d'ondes scalaire, en H_3 pour le système (TE) et en E_3 pour le système (TM) (écrire ces équations).

b) On suppose que le bord du domaine est constitué d'un conducteur parfait, la condition aux limites de conducteur parfait est alors

$$\vec{E} \wedge n|_\Gamma = 0 \tag{10}$$

Montrer que les deux systèmes précédents sont complètement découplés et reviennent à résoudre une équation des ondes sur E_3 avec condition de Dirichlet, et une équation des ondes sur H_3 avec condition de Neumann.

Nous allons nous intéresser à un problème de propagation de nature "cylindrique" (cf question 1.1). On a vu que le problème se ramenait à la résolution de deux équations d'ondes bidimensionnelles posées sur E_3 (pour le système (TM)) et sur H_3 (pour le système (TE)). On suppose que la propagation a lieu dans le vide, et que le domaine est un domaine extérieur $\mathcal{O}_e = \mathcal{O}_i^c$, où $\mathcal{O}_i$ est un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$. On va se contenter ici de résoudre le problème correspondant à une polarisation (TE), c'est à dire une équation des ondes avec conditions aux limites de Neumann, qui consiste à trouver H ($H = H_3$) tel que

$$\text{(11)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 H}{\partial t^2} - c_0^2\, \Delta H = f & \text{dans } \mathcal{O}_e \\ \dfrac{\partial H}{\partial n} = g & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

Le domaine d'intérêt étant infini, on introduit une frontière artificielle Γ_a sur laquelle on impose des conditions aux limites dites absorbantes, c'est à dire des conditions qui laissent passer les ondes . Idéalement, on aimerait en effet que les ondes se comportent comme si elles ne voyaient pas la frontière. En pratique, on ne dispose pas de telles conditions, et on observe une réflexion des ondes sur la frontière. On note $\mathcal{O}$ le nouveau domaine de calcul (borné)(cf figure 1). Finalement, on cherche H tel que

$$\text{(12)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 H}{\partial t^2} - c_0^2\, \Delta H = f & \text{dans } \mathcal{O} \\ \dfrac{\partial H}{\partial n} = g & \text{sur } \Gamma \\ \dfrac{\partial H}{\partial n} + \dfrac{1}{c_0}\dfrac{\partial H}{\partial t} = 0 & \text{sur } \Gamma_a \end{cases}$$

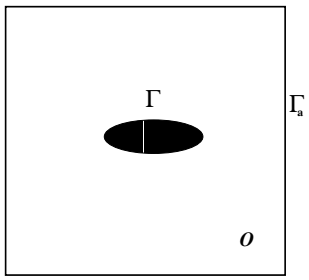

FIG. 1 – *Domaine de calcul*

Q 1.2 *Ecrire la formulation variationnelle du problème (12).*
On définit l'énergie de l'onde par

$$\text{(13)} \qquad \mathcal{E}(t) = \frac{1}{2}\left\|\frac{\partial H}{\partial t}\right\|^2 + \frac{1}{2}\|\nabla H\|^2$$

Q 1.3 - Question Optionnelle *: Montrer qu'en l'absence de source ($f = g = 0$), l'énergie décroît au cours du temps.*

2 Approximation

2.1 Semi-discrétisation en espace

On approche ce problème à l'aide d'éléments finis P^1. On introduit une triangulation du domaine $\mathcal{O} = \cup_{l=1}^{Nel} T_l$, $l = 1,..,Nel$, où Nel désigne le nombre de triangles (voir figure 2). On note $M_{i=1..Ns}$ les noeuds du maillages (sommets des éléments), Ns étant le nombre total de sommets. Soit V_h le sous-espace de dimension finie de H^1 défini par

$$V_h = \left\{ v \in C^0(\bar{\Omega}), v_{/T} \in P^1(T), \forall T \right\}$$

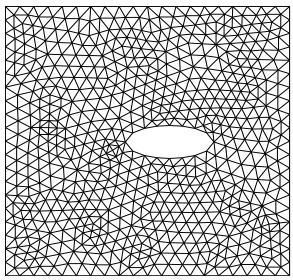

FIG. 2 – *Maillage irrégulier avec obstacle*

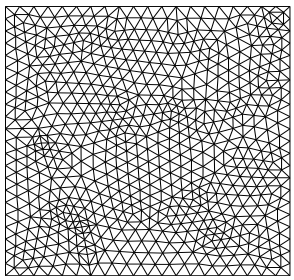

FIG. 3 – *Maillage irrégulier sans obstacle*

On note$(w_J)_{J=1,Ns}$ une base de V_h, définie par :

$$w_J(M_I) = \delta_{IJ} \quad 1 \leq I,J \leq Ns$$

Dans toute la suite, on notera $Nel =$ nombre d'élements ; $Ns =$ nombre de sommets total ; $NsGa =$ nombre de sommets sur Γ_a ; $NsG =$ nombre de sommets sur Γ ; $Ni =$ nombre de sommets intérieurs et $\mathcal{N} =$ l'ensemble des noeuds de Γ, $\mathcal{A} =$ l'ensemble des noeuds de Γ^a, et $\mathcal{I} =$ l'ensemble des noeuds intérieurs.

Q 2.1 *Ecrire la formulation variationnelle approchée. Montrer que le problème semi-discrétisé s'écrit sous forme matricielle :*

$$\frac{d^2}{dt^2} M_h U_h + \frac{d}{dt} B_h^a U_h + K_h U_h = F_h + G_h \tag{14}$$

(préciser les matrices).

Q 2.2 a) *Montrer qu'en approchant les intégrales définissant M_h à l'aide de la formule de quadrature suivante :*

$$\int_T f(M) dM \approx \frac{mes(T)}{3}(f_1 + f_2 + f_3), \tag{15}$$

où $(f_i)_{i=1,3}$ designe les valeurs aux sommets du triangle, la matrice approchée ainsi obtenue M^{ap} est diagonale.

b) *De même, montrer qu'en utilisant la formule de quadrature analogue sur une arête, on peut rendre diagonale la matrice de bord* B_h^a

$$\int_A f(M)dM \approx \frac{mes(A)}{2}(f_1 + f_2), \tag{16}$$

On peut montrer que cette approximation ne détériore pas l'ordre de la méthode. La méthode qui en résulte est appelée P_1 *avec condensation de masse.*

Pour le calcul du second membre, on suppose que f et g sont assez régulière et on les approche par leurs interpolées (voir poly), on vérifiera que dans ce cas on a $F_h = M_h[f]$ et $G_h = M_\Gamma[g]$, où $[f] = (f(M_i))_{i=1,Ns}$ et $[g] = (g(M_i))_{i\in\mathcal{N}}$ et M_Γ est la matrice de masse de bord (analogue à B_h^a). Là encore, on utilisera les matrices condensées.

Remarque sur la construction des matrices de bord : si vous utilisez le mailleur EMC2, il vous donne en sortie :

- Ns,Nel
- pour tout sommet i, ses coordonnées $x(i)$,$y(i)$, une référence (pour repérer les points des différents frontières) (par exemple, ref(i) = 1 si i est sur Γ^a, ref(i) = 2 si i est sur Γ, ref(i) = 0 sinon).
- pour tout élément l, le tableau de passage local- global ($lg(l,1)$,$lg(l,2)$,$lg(l,3)$), une référence des éléments (ici, il n'y aura qu'un seul sous domaine, donc qu'une seule ref).

Pour calculer les matrices de bord, on doit repérer les arêtes du bord. On propose de construire le tableau suivant : $lga(naga,\alpha)$, qui au αème noeud ($\alpha = 1$ ou 2) de l'arête numéro $naga$ fait correspondre son numéro global ($1 \leq naga \leq NBGA$ avec $NBGA =$ le nombre total d'arêtes). En fait, on construira un tableau correspondant à Γ^a et un tableau correspondant à Γ. On suppose que la référence associée aux noeuds de Γ^a est 1. On propose l'algorithme suivant :

Initialisation : naga=0
for $L = 1,Nel$ **do**
  lire ($lg(L,\alpha)$) pour ($\alpha = 1$ à 3)
  Recherche des éléments qui ont une arête sur Γ^a
  $i = lg(L,1)$,$j = lg(L,2)$,$k = lg(L,3)$
  if ref(i)=1 et ref(j)=1 **then**
    naga=naga+1
    lga(naga,1)=i
    lga(naga,2)=j
  end if
  Même chose pour (i,k)
  Même chose pour (j,k)
end for
Nombre total d'arêtes NBGA=naga

Q 2.3 *Ecrire un algorithme de calcul de la matrice* B_h^a *(même chose pour* M_Γ*).*

2.2 Discrétisation totale

Q 2.4 *En utilisant une approximation par différences finies centrée de la dérivée seconde en temps, montrer que la discrétisation totale du schéma. Montrer que le schéma s'écrit sous la forme*

$$\frac{H^{n+1}-2H^n+H^{n-1}}{\Delta t^2}+\widetilde{B}^a\frac{H^{n+1}-H^{n-1}}{2\Delta t}+\widetilde{K}H^n=[f^n]+\widetilde{M}_\Gamma[g^n] \tag{17}$$

(préciser les matrices $\widetilde{.}$), en déduire l'algorithme permettant de calculer la solution à chaque instant.

3 Programmation, Simulations

Choix de la source

Pour simuler une source ponctuelle, située au point de coordonnées (x_s,y_s), on pourra par exemple considérer :

$$F(x,y,t)=f(r)h(t) \tag{18}$$

La fonction en espace, $f(r)$ est une fonction radiale: $f(r)=(1-\frac{r^2}{a^2})^3 1_{B_a}$, r désignant la distance du point courant au point source, $r=\sqrt{(x-x_s)^2+(y-y_s)^2}$, a un petit rayon autour du point source, $a=5\Delta x_{min}$ où on désigne par Δx_{min} la plus petite distance entre deux noeuds du maillage, et où 1_{B_a} est la fonction indicatrice de la boule de centre (x_s,y_s) et de rayon a.

La fonction en temps est une dérivée de Gaussienne (tronquée) $h(t)=\frac{d}{dt}G_{\omega_0}(t-t_0)1_{[0,2t_0]}$ où $G_{\omega_0}(t)=\exp-\frac{\omega_0^2}{4}t^2$.

Notations : on note ω_0 la pulsation de la source, $f_0=\frac{\omega_0}{2\pi}$ sa fréquence, $t_0=\frac{1}{f_0}$. La longueur d'onde de la source est alors

$$\lambda_0=\frac{2\pi c_0}{\omega_0}=\frac{c_0}{f_0} \tag{19}$$

On peut expliciter h :

$$h(t)=\begin{cases}-2(\pi f_0)^2(t-t_0)\exp\left(-\pi f_0(t-t_0)\right)^2 & t\in[0,2t_0]\\ 0 & ailleurs\end{cases} \tag{20}$$

On prendra des conditions initiales nulles et une condition de Neumann homogène

$$\begin{cases}u_0(x,y)=0\\ u_1(x,y)=0\\ g(x,t)=0 \quad \text{sur } \Gamma\end{cases} \tag{21}$$

Q 3.1 *Écrire un code numérique qui permet la résolution du problème de l'équations des ondes avec des conditions de Neumann et des conditions absorbantes. Utiliser ce code pour faire les simulations suivantes :*

Q 3.2 Exemple simplifié

a) *Résoudre le problème sans obstacle avec des conditions de Neumann homogènes sur le bord. Représenter la solution à plusieurs instants sur le domaine(on devrait observer des cercles).*

b) *Représenter l'évolution de la solution au cours du temps en certains points du domaine.*

c) *Faire varier les paramètres de discrétisation Δx et Δt et observer numériquement l'influence du paramètre $\alpha = \dfrac{c_0 \Delta t}{\Delta x}$. Observe-t'on des instabilités à partir d'un certain seuil de α ?*

d) *Observation de l'anisotropie numérique: observer la forme des fronts d'onde. Faire tendre le paramètre de discrétisation h vers 0 et vérifier que les fronts d'onde convergent vers des cercles.*

Q 3.3 Conditions absorbantes

Résoudre le problème sans obstacle avec des conditions absorbantes. Observer les effets de la condition absorbante, sur les fronts d'onde obtenus. Puis "reculer" la frontière absorbante (cf figure 4). Qu'observez-vous ? Essayer d'expliquer la détérioration de la condition absorbante au cours du temps.

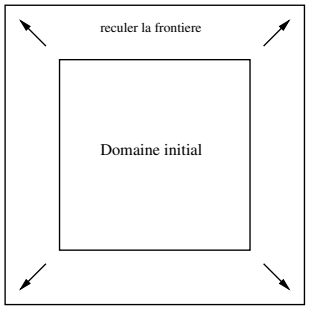

FIG. 4 – *Domaine avec frontière absorbante*

Q 3.4 Diffraction par un obstacle régulier

Résoudre le problème avec un obstacle régulier (par exemple un cercle) et des conditions absorbantes sur le bord extérieur du domaine. Représenter la solution à plusieurs instants sur le domaine. Observation de la diffraction des ondes par l'objet.

Q 3.5 Diffraction par un écran mince

Résoudre le problème avec un obstacle infiniment mince (par exemple un segment de droite) et des conditions absorbantes sur le bord extérieur du domaine. Représenter la solution à plusieurs instants sur le domaine. Observation de la diffraction des ondes par l'objet. Qu'observez-vous ?

Conseil : Dans tous les cas, la discrétisation en espace doit avoir suffisament de points par longueur d'onde (environ 10 pts). Pour un maillage donné, on détermine Δx_{min}, et on se fixe un nombre minimum de points par longueur d'onde $NPLO$, ce qui détermine une fréquence maximale pour la source

$$f_0 \leq \frac{c_0}{(NPLO - 1)\Delta x_{min}}.$$