Travaux Anciens

July 30, 2009

Kamel Hamdache
Centre de Mathématiques Appliquées. UMR CNRS 7641
Ecole Polytechnique Palaiseau
Email : kamel.hamdache@polytechnique.edu

1 Matériaux non linéaires et Electromagnétisme

1.1 Matériaux ferromagnétiques

J'ai abordé un nouveau thème de recherche sur la dynamique de l'aimantation dans un matériau ferromagnétique. Le modèle mathématique utilisé est donné par les équations de Landau-Lifshitz-Gilbert satisfaites par le vecteur aimantation M du matériau couplées aux équations de Maxwell satisfaites par le champ éléctromagnetique (E, H). L'induction magnétique B est donnée par $B = \mu(H + \chi(\Omega)M)$ où l'aimantation M est la polarisation magnétique. On a l'équation de LLG

$$\begin{cases} \partial_t M - \alpha M \times \partial_t M = -(1+\alpha^2) M \times \mathcal{H}(M) \\ \\ M(0) = M_0, \ \partial_n M = 0 \text{ sur } \Gamma \end{cases} \tag{1.1}$$

où $\mathcal{H}(M)$ est l'excitation magnétiques dues aux differentes énergies considérées dans le matériau Ω^ϵ. On a $\mathcal{H}(M) = A\Delta M + \phi'(M) + H$ où $A\Delta M$ est du à l'énergie d'échange , $\phi'(M)$ est du à l'énergie d'anisotropie de volume. D autres termes apparaissent également mais au niveau de la condition aux limites. Cette condition aux limites est appelée soit la condition de Rado-Weertman pour tenir compte de l'énergie de surface soit la loi de Hoffmann pour tenir compte des couplages intercouches lorsque l'on considère un empilement de matériaux ferromagnétiques séparés par des couches non magnétiques (matériaux GMR). La loi de Rado-Weertman s'écrit comme suit

$$M \times (\partial_n M + \chi(\Gamma_1) K_s (M - M.nn)) = 0 \tag{1.2}$$

où n est la normale éxtérieure à Γ et K_s est le coefficient d'anisotropie de surface et Γ_1 est la portion du bord où cette energie de surface s'excerce. Pour les le problème du couplage de deux matériaux ferromagnétiques $\Omega_1^\epsilon = \Omega_T \times (\epsilon, 1)$ et $\Omega_2^\epsilon = \Omega_T \times (-1, -\epsilon)$ séparés par un espaceur non magnétique (dans lequel $M = 0$) $\Omega_0^\epsilon \times (-\epsilon, \epsilon)$ la condition de couplage intercouches s'exprime au travers de la loi de Hoffman

$$M(\pm\epsilon) \times (\mp A \partial_{x_3} M(\pm\epsilon) + I(M(\pm\epsilon) - M(\mp\epsilon)) = 0 \text{ sur } \Gamma^\pm = x_3 = \pm\epsilon \tag{1.3}$$

où I est le coefficient de couplage.

En collaboration avec H. Ammari et L. Halpern j'ai d'abord étudié la réduction $3D$-$2D$ d'un matériaux mince plat. L'effet de la réduction est un terme de type champ démagnétiasant pénalisant le champ démagnétisant H dans la direction x_3 de l'épaisseur du matériau. J'ai ensuite proposé comme sujet de thèse à Mouhcine Tilioua l'étude de la réduction $3D$-$2D$ de matériaux minces plats et la réduction $3D$-$1D$ de matériaux élancés (cylindres de section petite) avec énergie de surface sur une partie du bord (condition aux limites de Rado-Weertman). D'autre part nous avons étudié la réduction de matériaux ferromagnétiques contenant un espaceur non magnétique (loi de couplage de Hoffman) dans deux cas cités: le premier cas correspond à un l'espaceur non magnétique mince et le second au cas où les deux matériaux ferromagnétiques sont minces. On trouve dans le cadre de ces réductions differents phénomènes nouveaux notamment une équation de la magnétostatique, dans le cas d'un espaceur mince, avec des conditions de transmission de couplage, du type contact, entre les deux couches ferromagnétiques. J'ai également proposé à Djamila Hamroun enseignante à l'université USTHB d'Alger, dans le cadre de sa thèse de doctorat d'état, l'étude de matériaux en couche avec une condition de couplage de type biquadratique. La grande difficulté réside dans le caractère non linéaire de la condition de Neumann intervenant aux interfaces

$$M^{\pm} \times (\mp A(\partial_{x_3} M)^{\pm} + K_{bq}(|M^{\mp}|^2 M^{\pm} - (M^{+} \cdot M^{-})M^{\mp})) = 0 \; pour \; x_3 = \pm\varepsilon \tag{1.4}$$

Enfin, avec M. Tilioua nous avons étudié le comportement des solutions des équations de LLG en fonction du paramètre d'amortissement α introduit de manière phénoménologique et qui assure la décroissance de l'énergie des solutions régulières. Lorsque $\alpha \to 0$, on déduit le modèle gyromagnétique initialement introduit pour modéliser les matériaux ferromagnétiques. Lorsque $\alpha \to \infty$ et en utisant une renormalisation de l'échelle du temps dans le modèle on obtiens l'équation d'amortissement de Landau-Lifshitz où seul le terme d'amortissement dans LLG intervient. Avec Djamila Hamroun et Mouhcine Tilioua nous sommes intéressés au problème du renversement de l'aimantation par injection de courant polarisé en spin dans un matériau F/nM/F (ferro/non magnétique/ferro). Nous avons étudié le modèle proposé par Zhang, Levy et Fert. De nombreux autres modèles sont proposés dans les récentes publications de physique et il n'y a pas unanimité sur la question. En particulier la définition et la description de l'interaction du spin avec l'aimantation n'est pas tout à fait claire. Le modle propos par A.fert et ses collaborateurs est un systme couplé entre l'aimantation locale satisfaisant les équations de LLG et une nouvelle équation satisfaite par l'accumulation de spin qui est de type Bloch-Torrey. Nous avons démontré que le système proposé est bien posé et admettait des solution globales sur tout intervalle de temps $[0, T]$ avec $T > 0$ fixé.

1.2 Matériaux ferroélectriques et piezoélectriques

La différence entre un matériau ferroélectrique et un matériau ferromagnétique est que dans le premier cas la polarisation est électrique et est représentée par le vecteur de polarisation $P \in \mathbb{R}^3$ alors que dans le second cas elle est magnétique et est représentée par le vecteur aimantation $M \in S^2$. Le point de départ de cette étude est le modèle proposé par Coofman, Greenberg et Mac Camy

$$
\begin{cases}
(\partial_t^2 + \lambda^2 \text{curl}^2\ )E + \theta E = -\partial_t^2 P + \ \text{ dans } \mathbb{R}^+ \times \Omega \\[2ex]
(\partial_t^2 + \lambda^2 \text{curl}^2\ )P + \partial_t\ aE = b(E - P\phi'(|P|^2)) \text{ dans } \mathbb{R}^+ \times \Omega \\[2ex]
E \times n = 0,\ \text{curl}\ P \times n = 0 \text{ sur } \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega \\[2ex]
E(0) = E_0,\ \partial_t E(0) = E_1,\ P(0) = P_0,\ \partial_t P(0) = P_1
\end{cases}
\tag{1.5}
$$

où le potentiel $\phi(s)$, pour $s \geq 0$ est convexe et de classe C^2 s'annulant en 0 et en un second point. Avec H. Ammari nous avons démontré l'existence globale de solutions et établi la régularité H^1 des solutions sur l'intervale de temps $[0, T]$ pour tout T fixé pour la condition aux limites $P \times n = 0$. Sous cette condition les champs de Maxwell ($P \in L^2$, curl$P \in L^2$ et div$P \in L^2$ satisfont $P \in H^1$. Avec Isabelle Ngningone, dans le cadre de sa thèse, nous avons étudié l'existence de solutions harmoniques en temps vérifiant le modèle

$$
\begin{cases}
(z_1(\omega) + \lambda^2 \text{curl}^2)E = \omega^2 P + i\omega F \text{ dans } \Omega \\[2ex]
(z_2(\omega) + \lambda^2 \text{curl}^2)P + b\ P\phi'(|P|^2)) = bE \text{ dans } \Omega \\[2ex]
E \times n = 0,\ \text{curl}\ P \times n = 0 \text{ sur } \partial\Omega
\end{cases}
\tag{1.6}
$$

Nous avons démontré l'existence de solutions pour toute frequence $\omega > 0$, établi l'unicité des solutions pour des frequences $\omega > \omega_*$ et obtenu la régularité H^1 des solutio pour $\omega > \omega_{**} > \omega_*$ sous la condition aux limites $P \times n = 0$. La démonstration repose sur l'étude des équations de compatibilité du système

$$
\begin{cases}
z_1(\omega)\text{div}E - \omega^2 \text{div}P = i\omega \text{div}F \\[2ex]
z_1(\omega)\text{div}P - b\text{div}E = -b\phi'(|P|^2)\text{div}P + 2b(\phi^{(2)}(|P|^2)P_k P_l)\partial_k P_l.
\end{cases}
\tag{1.7}
$$

Pour un cylindre infiniment long de section $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, l'approximation T.E et T.M conduit au système d'équation de Helmholtz couplées

$$
\begin{cases}
(z_1(\omega) + \Delta)e = \omega^2 p + i\omega f \text{ dans } \Omega \\[2ex]
(z_2(\omega) + \Delta)p + b\ p\phi'(|p|^2)) = be \text{ dans } \Omega \\[2ex]
e = 0,\ \partial_n p = 0 \text{ sur } \partial\Omega.
\end{cases}
\tag{1.8}
$$

Une étude complète de ce problème a été faite et nous avons obtenu l'existence de solutions. Nous avons établi le comportement limite à basses fréquences ($\omega \to 0$) des solutions. L'unicité des solutions est démontrée uniquement pour des fréquences telles que $\omega > \omega_*$.

Dans un travail de collaboration avec Naima Aissa enseignante à l'université USTHB d'Alger, nous avons considéré le problème de la réduction $3D$-$2D$ d'un matériau ferroélectrique mince quand l'épaisseur tend vers 0. Nous avons obtenu le problème limite dans le cas de potentiels ϕ linéaires. Le cas général se heurte à la question de la compacité des solutions (E^ν, P^ν). L'analyse de la propagation des oscillations en utilisant les mesures de Young associées aux solutions ne permet pas d'aboutir. Naima Aissa s'est intéréssée ensuite à la régularité jusqu'au bord des champs de Maxwell dans le cas d'ouverts de frontière Lipchitzienne et avec l'hypothèse $P \times n \in L^2(\partial\Omega)$. Nous sommes intéréssé ensuite à un nouveau modèle où l'on suppose que la polarisation électrique est à divergence nulle. On obtient, dans le casde solutions harmoniques en temps un système couplé d'un équation de Maxwell et d'une équation de type Stokes.

Avec Djamila Hamroun de l'université d'Alger, nous avons considéré le modèle de matériaux piezo-éléctriques proposé par F. Davì

$$\begin{cases} \partial_t n - \partial_x^2 n + kn = -\partial_x u, \text{ dans } \mathbb{R}^+ \times (0,1) \\ \partial_t^2 u - \partial_x((1+n)\partial_x u) = 0, \text{ dans } \mathbb{R}^+ \times (0,1) \\ n(0) = n_0, \ u(0) = u_0, \ \partial_t u(0) = u_1 \text{ dans } (0,1) \\ n = 0, \ \partial_x u = 0 \text{ en } x = 0 \text{ et } 1, \text{ dans } \mathbb{R}^+. \end{cases} \tag{1.9}$$

où n est le nombre de dipôles électriques dans $(0,1)$ et u est le déplacement. Nous avons considéré le problème de Cauchy. Ce sytème a la particularité de n'avoir, à notre connaissance, aucun invariant évident. Nous avons établi un théorème d'existence locale en temps de la solution du problème en procédant comme suit. L'énergie élastique satisfaite par u contient un terme de dissipation du type $\int \partial_t n |\partial_x|^2 dx$. Nous avons recherché les conditions pour lesquelles on a $\partial_t n \leq 0$ et $n \geq 0$ ce qui garantit la décroissance de l'énergie. Ces conditions sont satisfaites si à l'instant initial les données sont telles que $n_0 \geq F_0$, $\partial_x^2 n_0 - \partial_x u_0 \leq -F_0$ où $F_0 > 0$ est une constante. Face à ces difficultés nous avons introduit un nouveau modèle en imposant au champ polarisé P la contarinte d'incompressibilité d$ivP = 0$. Cela conduit dans le casdre de solutions harmonique en temps à un système formé d'une équation de Helmhotz pour le champ électrique et une équation du type Stokes (non linéaire) pour le champ de polarisation. Nous avons établi l'exitence et la régularité des solutions.

1.3 Matériaux chiraux

En collaboration avec Habib Ammari et Jean Claude Nédélec, j'ai abordé le problème des matériaux chiraux. Si la caractérisation de l'effet chiral est bien connue, le problème de savoir qu'elle est la propriété du matériau qui induit l'effet chiral est mal connue. Avec H. Ammari et J.C. Nédélec nous avons considéré un milieu à inclusions périodiquement réparties contenant des hélices de même orientation $\vec{u}$. L'objectif premier était d'homogénéiser les équations de Maxwell pour ce type de milieu avec des tailles caractéristiques précisées pour l'hélice de base. Nous avons modélisé le problème en prenant en compte les moments dipolaires électriques et magnétiques, induit par une hélice (approximation de Drude, Born et Fedorov) puis, nous avons remplacé chaque hélice par son effet induit. On trouve un système de Maxwell avec un terme de source singulier composé des masses de Dirac en chaque centre x_j de l'inclusion. Sous une hypothèse sur l'orientation des hélices par rapport au bord du domaine d'étude, nous avons établi l'existence des solutions et obtenu le problème homogénéisé contenant l'effet chiral. Cette hypothèse sur l'oriation des hélices est capitales pour la mise en oeuvre de la méthode.

1.4 Formation et croissance d'agrégats sur un substrat

Ce thème a fait l'objet de la thèse de Insaf Bouzoubaa, soutenue en 2000 (Bordeaux). Il s'agissait de comprendre le problème de la formation et la croissance d'agrégats par coagulation sur une surface. Le modèle mathématique est une équation de transport non linéaire avec un opérateur d'intéraction bilinéaire couplé à une équation différentielle. La variable est la taille des agrégats et l'équation differentielle est couplée à l'équation de transport par l'intermédiare de la fonction de recouvrement de la surface. la vitesse de propagation dépend de la solution de l'e.d.o. Nous avons établi l'existence globale de solutions et donné des propriétés qualitatives des solutions. En collaboration avec A.Noussair et I.Bouzoubaa nous avons étudié le problème d'un point de vue numérique. Nous avons proposé un shema numérique et fait des simulations.

1.5 SHG et optique non linéaire

Avec H.Ammari et G.Bao nous nous sommes intéréssés aux matériaux de l'optique non linéaire. Ce type de matériaux a la propriété de doubler la frequence de l'onde incidente. Cette propriété est appelée Second Harmonic Generation. Le modèle mathématique décrivant la SHG est donné, dans un ouvert Ω, par le sytème d'équations de Maxwell non linéaires

$$\begin{cases} (\mathrm{curl}^2 \ -\omega_1^2 \dfrac{\varepsilon_1}{c^2})E(\omega_1) = \dfrac{4\pi\omega_1^2}{c^2}\chi^{(2)}(\omega_1 = -\omega_2+\omega_1) : E(\omega_1)^*\ E(\omega_2) \\ (\mathrm{curl}^2 \ -\omega_2^2 \dfrac{\varepsilon_2}{c^2})E(\omega_2) = \dfrac{4\pi\omega_2^2}{c^2}\chi^{(2)}(\omega_2 = -\omega_1+\omega_2) : E(\omega_1)\ E(\omega_1) \end{cases} \tag{1.10}$$

Le facteur χ^2 est le tenseur de suceptibilité des effets non linéaires du second ordre. Le terme $\chi^{(2)}(\omega = \omega_p + \omega_q) : E(\omega_p)^*\ E(\omega_q)$ est le vecteur de composantes $\chi^{(2)}_{ijk}E^*_jE_k$. Lorsqu'une onde incidente de fréquence $\omega = \omega_1$ éclaire le milieu non linéaire Ω la réponse du milieu double la fréquence qui est donnée par $\omega_2 = \omega_1 + \omega_1$. Ainsi la génération des harmoniques concernent les deux champs $E(\omega_1)$ et $E(\omega_1 + \omega_1)$. C'est le processus par lequel l'énergie du champ $E(\omega_1)$ est transferée au champ $E(\omega_2)$ en doublant sa fréquence. Avec Ammari et Bao nous avons d'abord considéré le modèle 1-D de couche mince puis le modèle 2-D de couche mince en approximation TE qui s'écrit

$$\begin{cases} (\Delta_\alpha + \omega_1^2 k_1^2)u = \chi_1^\alpha u_1^* u_2 \text{ dans } \Omega \\ \\ (\Delta_\alpha + \omega_2^2 k_2^2)v = \chi_2^\alpha u_1 u_1 \text{ dans } \Omega \\ \\ (T^\alpha_{1,j} - \partial_n)u_1 = f_j \text{ sur } \Gamma_j,\ (T^\alpha_{2,j} - \partial_n)u_2 = \text{ sur } \Gamma_j \end{cases} \tag{1.11}$$

avec $\Omega =]0, 2\pi[\times]-1, 1[= \Omega_h^+ \cup \bar{\Omega}_h^0 \cup \Omega^-$ et Ω_h^0 represente la couche mince de taille h dans la direction x_2, l'indice α est lié à la quasi périodicité dans la direction x_1, Γ_j sont les bord $y_1 = 0$ et $y_1 = 1$. Nous avons établi le comportement limite de ce matériau quand $h \to 0$ et donné l'asymptotique de la solution. L'approximation TM du modèle conduit au système

$$\begin{cases} \mathrm{div}(\dfrac{1}{k_1^2}\mathrm{grad})u + u = f \text{ dans } \Omega \\ \\ (\Delta + \omega_1^2 k_1^2)v = \chi(\mathrm{grad}_\alpha u)\mathrm{grad}_\alpha u \text{ dans } \Omega \\ \\ u = 0,\ \partial_n v = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{1.12}$$

oú $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ contient un matériau non linéaire représenté par le domaine (mince) Ω_0^h qui est le support de χ.

2 Homogénéisation non locale et milieux poreux

En collaboration Youcef Amirat et Abdelhamid Ziani nous avons étudié à la suite d'une conférence de Luc Tartar sur l'homogénéisation d'une équation differentielle linéaire à coefficient oscillant le thème de l'homogénéisation à effet non local. L. Tartar avait montré que l'équation différentielle limite contenait un terme de mémoire. Avec Y. Amirat et A. Ziani, nous avons construit un modèle dégénéré d'écoulement en milieu poreux qui était décrit par un problème aux limites $1D - 1/2$ pour un opérateur d'ordre 2. L'homogénéisation du modèle induit à des termes non locaux. Nous avons ensuite étudié de nombreux problèmes dégénérés dans la direction transverse avec des effets dominants (transport, convection, diffusion etc..) et caractérisé à chaque fois le problème homogénéisé limite. Le point le plus important était d'interpréter le terme de mémoire ou de l'effet non local induit par homogénéisation. Nous avons introduit une formulation cinétique qui permet la caractérisation de ces effets.

3 Théorie cinétique des gaz

Mes travaux sur l'équation de Boltzmann et les modèles discrets de la théorie cinétique des gaz ont fait l'objet de ma thèse de Doctorat d'Etat soutenue en avril 1986 à Paris 6, sous la direction de Luc Tartar. Les résultats d'existence globale et de comportement asymptotique de solutions proches du régimes moléculaire libre ont été établis sous l'hypothèse de troncature angulaire. Les méthodes utilisées s'inspirent d'un résultat de Tartar pour des systèmes semilinéaires 1-D et d'un résultat d'existence globale de solutions de l'équation de Boltzmann établi par Illner et Shinbrot. Aprés ma thèse P.L Lions et R. Di Perna ont démontré un résultat d'existence globale de solutions pour le problème de Cauchy. J'ai généralisé leur résultat au cas du problème aux limites pour l'équation de Boltzmann avec une loi d'interaction gaz/surface la plus générale. J'ai proposé à Thierry Goudon un sujet de thèse sur des lois d'interaction non linéaires et sur l'équation de Boltzmann sans troncature angulaire. Mon autre élève Radja Alexandre a poursuivi des recherches sur l'équation de Boltzmann sans troncature angulaire.

J'ai abordé par la suite en collaboration avec Fatiha Alabau et Yue-Jun Peng le problème de la diode plane instationnaire à la suite des travaux de P.A Raviart et P. Degond dans le cas stationnaire. Par la suite j'ai considé un problème diphasique fluide/particules solides que j'ai appelé modèle cinétique de Vlasov-Stokes ou Vlasov-Navier/Stokes pour lequel j'ai établi l'existence globale de solutions du système et le comportement limite pour les grands temps des solutions.