Conditions d'optimalité du second-ordre pour les problèmes de commande optimale avec contraintes sur l'état

Application au tir

J. Frédéric Bonnans   Audrey Hermant

CMAP Ecole Polytechnique et INRIA

Journée des Doctorants du CMAP
7 mars 2007

Outline

1. Présentation du problème et motivations
2. Quelques définitions
3. Résultats
4. Perspectives

Le problème de commande optimale

- Un système dynamique commandé : état $y(t) \in \mathbb{R}^n$, commande $u(t) \in \mathbb{R}^m$.

$$\dot{y}(t) = f(u(t), y(t)) \qquad \text{a.e. on } [0, T], \qquad y(0) = y^0. \quad (1)$$

Le problème de commande optimale

- Un système dynamique commandé : état $y(t) \in \mathbb{R}^n$, commande $u(t) \in \mathbb{R}^m$.

$$\dot{y}(t) = f(u(t), y(t)) \qquad \text{a.e. on } [0, T], \qquad y(0) = y^0. \quad (1)$$

- Une fonction coût, à minimiser

$$\mathcal{J}(u, y) = \int_0^T \ell(u(t), y(t))\mathrm{d}t + \phi(y(T))$$

Le problème de commande optimale

- Un système dynamique commandé : état $y(t) \in \mathbb{R}^n$, commande $u(t) \in \mathbb{R}^m$.

$$\dot{y}(t) = f(u(t), y(t)) \qquad \text{a.e. on } [0, T], \qquad y(0) = y^0. \quad (1)$$

- Une fonction coût, à minimiser

$$\mathcal{J}(u, y) = \int_0^T \ell(u(t), y(t))\mathrm{d}t + \phi(y(T))$$

- Des contraintes, ici des contraintes pures sur l'état

$$g_i(y(t)) \leq 0 \quad \forall\, t \in [0, T], \quad i = 1, \ldots, r. \qquad (2)$$

Le problème de commande optimale

- Un système dynamique commandé : état $y(t) \in \mathbb{R}^n$, commande $u(t) \in \mathbb{R}^m$.

$$\dot{y}(t) = f(u(t), y(t)) \qquad \text{a.e. on } [0, T], \qquad y(0) = y^0. \quad (1)$$

- Une fonction coût, à minimiser

$$\mathcal{J}(u, y) = \int_0^T \ell(u(t), y(t))\mathrm{d}t + \phi(y(T))$$

- Des contraintes, ici des contraintes pures sur l'état

$$g_i(y(t)) \leq 0 \quad \forall\, t \in [0, T], \quad i = 1, \ldots, r. \qquad (2)$$

$$\boxed{(\mathcal{P}) \qquad \min_{u,y \in \mathcal{U} \times \mathcal{Y}} \mathcal{J}(u, y) \quad \text{s.c.} \quad (1) - (2)}$$

avec $\mathcal{U} := L^\infty(0, T; \mathbb{R}^m)$ et $\mathcal{Y} := W^{1,\infty}(0, T; \mathbb{R}^n)$.

Résolution de $(\mathcal{P})$: deux approches

- Résolution de la condition d'optimalité du premier ordre (CN1) $\hookrightarrow$ minimum local.
  - Discrétisation totale (PNL, points intérieurs...).
  - Algorithme de tir.
- Résolution de l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) associée $\Rightarrow$ minima globaux.

Remarques :

- HJB : limitation en dimension.
- Dans certains cas (ex : trajectoires aéro-spatiales), seules les méthodes de tir peuvent permettre d'obtenir la précision souhaitée.

Condition d'optimalité du premier ordre (CN1)

Soit H le hamiltonien, $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n*} \to \mathbb{R}$,

$$H(u, y, p) \ := \ \ell(u, y) + pf(u, y).$$

Théorème (Principe du Minimum de Pontryagin (60's))

Si (u, y) est solution de $(\mathcal{P})$ + condition de qualification des contraintes, alors il existe $p \in BV(0, T; \mathbb{R}^{n*})$ et $\mathrm{d}\eta \in \mathcal{M}(0, T; \mathbb{R}^{r*})$ tels que:

$$\begin{aligned}
\dot{y} &= f(u, y), \qquad y(0) = y^0 \\
-\mathrm{d}p &= H_y(u, y, p)\mathrm{d}t + \mathrm{d}\eta g_y(y), \qquad p(T) = \phi_y(y(T)) \\
u(t) &\in \operatorname*{argmin}_{w \in \mathbb{R}^m} H(w, y(t), p(t)) \quad p.p. \\
0 &\geq g(y(t)), \quad \mathrm{d}\eta \geq 0, \quad \int_0^T g(y(t))\mathrm{d}\eta(t) = 0.
\end{aligned}$$

Algorihme de tir (cas non contraint)

- Supposons $(\mathcal{H}_1)$: hamiltonien fortement convexe p.r.à. u

$$\exists \alpha > 0, \quad H_{uu}(w, y(t), p(t)) \geq \alpha, \quad \forall t \in [0, T], \ \forall w \in \mathbb{R}^m.$$

  Alors u minimise $H(\cdot, y(t), p(t)) \ \Leftrightarrow \ u(t) = \Upsilon(y(t), p(t))$.

- La (CN1) se réécrit :

$$\begin{array}{rcll} \dot{y} & = & f(\Upsilon(y,p),y), & y(0) = y^0 \\ -\dot{p} & = & H_y(\Upsilon(y,p),y,p), & p(T) = \phi_y(y(T)) \end{array}$$

- Problème aux deux-bouts : algorithme de tir. Chercher un zéro de la fonction de tir $p^0 \to p(T) - \phi_y(y(T))$ avec

$$\begin{array}{rcll} \dot{y} & = & f(\Upsilon(y,p),y), & y(0) = y^0 \\ -\dot{p} & = & H_y(\Upsilon(y,p),y,p), & p(0) = p^0. \end{array}$$

Motivations

- Algorithme de tir : Difficulté (théorique) de la prise en compte de contraintes sur l'état.

  Nombreuses applications traitées dans la littérature : Oberle, Pesch, Maurer, Trélat...

Motivations

- Algorithme de tir : Difficulté (théorique) de la prise en compte de contraintes sur l'état.

  Nombreuses applications traitées dans la littérature : Oberle, Pesch, Maurer, Trélat...

- Plus généralement, étude des conditions du second-ordre. La condition suffisante est utile pour :
  - vérifier qu'une solution de la (CN1) est un minimum local
  - étudier la convergence des algorithmes
  - étudier la stabilité et sensibilité des solutions aux perturbations.

  La condition nécessaire permet de s'assurer que la condition suffisante est la plus faible possible (no-gap).

Motivations

- Algorithme de tir : Difficulté (théorique) de la prise en compte de contraintes sur l'état.

  Nombreuses applications traitées dans la littérature : Oberle, Pesch, Maurer, Trélat...

- Plus généralement, étude des conditions du second-ordre. La condition suffisante est utile pour :
  - vérifier qu'une solution de la (CN1) est un minimum local
  - étudier la convergence des algorithmes
  - étudier la stabilité et sensibilité des solutions aux perturbations.

  La condition nécessaire permet de s'assurer que la condition suffisante est la plus faible possible (no-gap).

  En commande optimale : conditions no-gap connues pour les *contraintes mixtes* sur la commande et l'état (Osmolovskii). Pour les contraintes sur l'état, seules des conditions suffisantes sont connues (Malanowski et al).

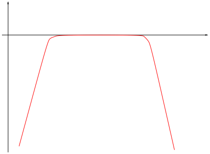
Structure d'une trajectoire

- Ensemble de contact : temps auxquels la $i$ème contrainte $g_i(y(t)) \leq 0$ est active

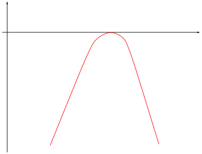
$$I_i := \{t \in [0, T] \ : \ g_i(y(t)) = 0\}.$$

- Points de jonction de g_i : $\mathcal{T}_i = \partial I_i$.

$(\mathcal{H}_2)$ $\mathcal{T}_i$ est fini $\forall i$ (i.e. nombre fini d'arc frontière et de points de contact isolés), $i \neq j \Rightarrow \mathcal{T}_i \cap \mathcal{T}_j = \emptyset$, et $g_i(y(T)) < 0$, $\forall i$.



arc frontière $[\tau^i_{en}, \tau^i_{ex}]$



point de contact isolé $\{\tau^i_{to}\}$

- Structure := nombre et ordre des arcs frontière et points de contact isolés (p.c.i.) des différentes contraintes.

Ordre de la contrainte sur l'état

- L'ordre de la contrainte g_i noté q_i est le plus petit nombre de dérivations de $t \to g_i(y(t))$ pour faire apparaître une dépendence explicite en u.
- Plus précisément, les dérivées temporelles de g_i satisfont :

$$\begin{aligned} g_i^{(j)}(u,y) &= g_{i,y}^{(j-1)}(y)f(u,y) = g_i^{(j)}(y), \qquad j = 1,\dots,q_i - 1 \\ g_i^{(q_i)}(u,y) &= g_{i,y}^{(q_i-1)}(y)f(u,y), \qquad g_{i,u}^{(q_i)} \neq 0. \end{aligned}$$

- Exemple : $\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{y}_1 &=& y_2 \\ &\vdots& \\ \dot{y}_{q-1} &=& y_q \\ \dot{y}_q &=& u \end{array} \right. \qquad y_1(t) \leq 0.$

$(\mathcal{H}_3)$ Les gradients des "contraintes actives" $\nabla_u g_i^{(q_i)}(u,y)$ sont *linéairement indépendants* le long de la trajectoire.

Régularité de la solution et des multiplicateurs

Arc : intervalle (τ_1, τ_2) tel que $\mathcal{I}(t) := \{i : g_i(y(t)) = 0\}$ est constant.

Proposition

Soit (u, y) une solution de la (CN1), satisfaisant $(\mathcal{H}_1)$-$(\mathcal{H}_3)$. Si les données sont su samment régulières, alors :

- *Sur l'intérieur d'un arc, u, y, η, p sont C^∞.*
- *A un point de jonction $\tau \in \mathcal{T}_i$*
  - *Si $q_i = 1$, u est continu et $[\eta(\tau)] = 0$.*
  - *Si $q_i \geq 2$ est pair : $u, \dots, u^{(q_i-2)}$ sont continus*
  - *Si $q_i \geq 3$ est impair : $u, \dots, u^{(q_i-2)}$ sont continus, et si τ est un point d'entrée/sortie, alors $u^{(q_i-1)}$ est continu et $[\eta(\tau)] = 0$.*

Etend les résultats obtenus Jacobson, Lele et Speyer (71) dans le cas *scalaire* $(m = r = 1)$ et par Maurer (79).

$(\mathcal{H}_0)$ Données régulières, f Lipschitz, et $g_i(y_0) < 0$, $\forall i = 1, \dots, r$.

Définition

Un point de contact isolé $\tau \in \mathcal{T}_i$ est essentiel, si $[\eta_i(\tau)] > 0$.

L'ensemble des p.c.i. essentiels est noté $\mathcal{T}_i^{ess}$.

$(\mathcal{H}_4)$
- Pour tout point d'entrée/sortie $\tau \in \mathcal{T}_i$,
  - Si q_i pair, $g_i^{(2q_i-1)}$ est discontinu en τ
  - Si q_i impair, $g_i^{(2q_i)}$ est discontinu en τ
- Pour tout p.c.i. essentiel $\tau \in \mathcal{T}_i^{ess}$,

$$g^{(2)}(u(\tau), y(\tau)) \; < \; 0.$$

$(\mathcal{H}_5)$ Stricte complémentarité : $\mathrm{supp}(\mathrm{d}\eta_i) = I_i$.

- Formulation abstraite : pour $u \in \mathcal{U}$, soit y_u la solution (unique) de $\dot{y} = f(u, y)$, $y(0) = y^0$, et soient $J(u) := \mathcal{J}(u, y_u)$, $G(u) := g(y_u)$, $K := C_-([0, T]; \mathbb{R}^r)$.

$$(\mathcal{P}) \qquad \min_{u \in \mathcal{U}} J(u), \qquad G(u) \in K.$$

- Lagrangien

$$L(u, \eta) = J(u) + \langle \eta, G(u) \rangle.$$

- Soit $v \in \mathcal{V} := L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$. Soit z_v l'état linéarisé, unique solution dans H^1 de

$$\dot{z}_v = f_u(u, y_u)v + f_y(u, y_u)z_v, \qquad z_v(0) = 0.$$

- Cône critique

$$C_2(u) := \{v \in \mathcal{V} \ : \ DJ(u)v \leq 0, \ DG(u)v \in T_K(G(u))\}.$$

Condition nécessaire ou suffisante du second-ordre

Théorème

• *Soit* (u, y) *une solution locale de* $(\mathcal{P})$ *satisfaisant* $(\mathcal{H}_0)$-$(\mathcal{H}_5)$ *avec ses (uniques) multiplicateurs* (p, η). *Alors,* $\forall v \in C_2(u)$,

$$D^2_{uu}L(u,\eta)(v,v) - \sum_{i=1}^{r} \sum_{\tau \in \mathcal{T}_i^{ess}} [\eta_i(\tau)] \frac{(g^{(1)}_{i,y}(y(\tau)) z_v(\tau))^2}{g_i^{(2)}(u(\tau), y(\tau))} \geq 0.$$

• *Soit* (u, y) *une solution de la (CN1) satisfaisant* $(\mathcal{H}_1)$. *Si*

$$D^2_{uu}L(u,\eta)(v,v) - \sum_{i=1}^{r} \sum_{\tau \in \mathcal{T}_i^{ess}} [\eta_i(\tau)] \frac{(g^{(1)}_{i,y}(y(\tau)) z_v(\tau))^2}{g_i^{(2)}(u(\tau), y(\tau))} > 0,$$

$\forall v \in C_2(u) \setminus \{0\}$, *alors* (u, y) *est une solution locale de* $(\mathcal{P})$ *satisfaisant la condition de croissance quadratique.*

Condition nécessaire ou suffisante du second-ordre

Corollaire

Soit (u, y) une solution de la (CN1) satisfaisant $(\mathcal{H}_0)$-$(\mathcal{H}_5)$. Alors

$$D^2_{uu}L(u,\eta)(v,v) - \sum_{i=1}^{r} \sum_{\tau \in \mathcal{T}_i^{ess}} [\eta_i(\tau)] \frac{(g^{(1)}_{i,y}(y(\tau))z_v(\tau))^2}{g_i^{(2)}(u(\tau),y(\tau))} > 0,$$

$\forall v \in C_2(u) \setminus \{0\}$, ssi (u, y) *est une solution locale de* $(\mathcal{P})$ *satisfaisant la condition de croissance quadratique :*
il existe $\beta, r > 0$ *tels que :*

$$J(\tilde{u}) \geq J(u) + \beta \|\tilde{u} - u\|_2^2 \quad \forall \tilde{u} \in \mathcal{U} : G(\tilde{u}) \in K, \ \|\tilde{u} - u\|_\infty < r.$$

- CN2 : calcul du terme de courbure de Kawasaki 88, 90.
- CS2 : méthode de réduction (cf. programmation semi-infinie).

Réf (cas scalaire) : J.F. Bonnans, A.H., No-gap Second-order Optimality Conditions for Optimal Control Problems with a Single State Constraint and Control. To appear in Math. Program.

- Principe : introduire les instants de jonction comme inconnues de la fonction de tir (Bryson et al. 63).

Théorème

Soit (u, y) une solution locale de $(\mathcal{P})$ satisfaisant $(\mathcal{H}_0)$-$(\mathcal{H}_5)$. Alors l'algorithme de tir est bien posé au voisinage de (u, y) (i.e. Jacobien de la fonction de tir inversible), ssi :
(i) *Les contraintes d'ordre $q_i \geq 3$ n'ont pas d'arc frontière;*
(ii) *La condition su sante du second-ordre précédente est satisfaite, i.e. (u, y) satisfait la croissance quadratique.*

- Difficulté : une reformulation des conditions d'optimalité est nécessaire; l'algorithme ne prend en compte qu'une partie des conditions d'optimalité.

Réf (cas scalaire) : J.F. Bonnans, A.H., Well-posedness of the Shooting Algorithm to State Constrained Optimal Control Problem with a Single Constraint and Control. To appear in Siam J. Control Optim.

- Analyse de stabilité et sensibilité *sans l'hypothèse de complémentarité stricte* : structure des solutions non stable !
- Actuellement : résultats pour des points de contact isolés non essentiels satisfaisant $g^{(2)} < 0$.
- Application pour "automatiser" les méthodes d'homotopie lorsque la structure de la trajectoire n'est pas connue (résolution d'une suite de problèmes dépendant continûment d'un paramètre, cf Berkmann-Pesch 95).
  Travail avec P. Martinon.
- Cas d'un nombre infini de points de contact isolés ? (Cas "générique" pour les contraintes d'ordre $q_i \geq 3$...)