

Error expansion for the discretisation of Backward Stochastic Differential Equations

Céline Labart

<http://www.cmap.polytechnique.fr/~labart>

Mercredi 7 mars 2007

Plan

- 1 Introduction aux EDSR
- 2 Relation entre EDSR et EDP quasilinéaires
- 3 Schémas de Discrétisation
- 4 Objectifs et Résultats

- 1 Introduction aux EDSR
- 2 Relation entre EDSR et EDP quasilinéaires
- 3 Schémas de Discrétisation
- 4 Objectifs et Résultats



Introduction aux EDSR

Mouvement Brownien et Processus de diffusion

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, W un mouvement brownien standard : processus défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ t.q.

- $W_0(\omega) = 0$, p.s.
- $t \mapsto W_t(\omega)$ est continue p.s.
- $\forall t_0 < t_1 < \dots < t_n$, $W_{t_1} - W_{t_0}, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ sont des variables aléatoires indépendantes,
- $\forall s, t$, t.q. $0 \leq s \leq t$, $W_t - W_s$ et W_{t-s} ont même loi ($\mathcal{N}(0, t-s)$).

Soit l'équation différentielle stochastique (EDS) :

$$dX_s = b(s, X_s)ds + \sigma(s, X_s)dW_s, 0 \leq s \leq T, X_0 = x. \quad (1)$$

Si b, σ sont des fonctions uniformément continues lipschitziennes en x , l'EDS (1) admet une unique solution X t.q.

$$X_s = 0 + \int_0^s b(u, X_u)du + \int_0^s \sigma(u, X_u)dW_u.$$

$(X_s, 0 \leq s \leq T)$ est appelé processus de diffusion.

Définition d'une EDSR

De manière générale, une EDSR (équation différentielle stochastique rétrograde) est une équation du type

$$-dY_t = f(\omega, t, Y_t, Z_t)dt - Z_t dW_t, \quad Y_T = \xi. \quad (2)$$

- La valeur terminale ξ est une variable aléatoire $\mathcal{F}_T = \sigma(W_s, s \leq T)$ -mesurable à valeurs dans \mathbb{R}^m .
- Le générateur $f : \Omega \times [0, T] \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m \times q} \rightarrow \mathbb{R}^m$ est une fonction mesurable.

Définition

Une *solution* est un couple (Y, Z) qui satisfait (2) et tel que $\{Y_t; t \in [0, T]\}$ est un processus continu adapté à valeurs dans \mathbb{R}^m et $\{Z_t; t \in [0, T]\}$ est un processus prévisible à valeurs dans $\mathbb{R}^{m \times q}$ et qui satisfait $\int_0^T |Z_s|^2 ds < \infty$, \mathbb{P} p.s.

Existence et unicité

- Supposons que ξ est \mathcal{F}_T -mesurable et $\mathbb{E}|\xi|^2 < \infty$,
- $f(\cdot, \cdot, 0, 0) \in \mathbb{L}^2(\Omega \times [0, T])$ est un processus prévisible. f est uniformément Lipschitzienne c-à-d $\exists C > 0$ t.q. $d\mathbb{P} \times dt$ p.s.
 $\forall (y_1, z_1), \forall (y_2, z_2)$

$$|f(\omega, t, y_1, z_1) - f(\omega, t, y_2, z_2)| \leq C(|y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|).$$

Alors, (f, ξ) sont des paramètres dits *standards*.

Théorème (Pardoux, Peng, 1990)

Etant donné des paramètres (f, ξ) standards, il existe un unique couple (Y, Z) (dans les bons espaces \mathbb{L}^2) qui satisfait (2).

Nous allons étudier une EDSR particulière : Soit $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d$,

$$\begin{aligned} dX_s &= b(s, X_s)ds + \sigma(s, X_s)dW_s, & t \leq s \leq T, \\ X_s &= x, & 0 \leq s \leq t. \end{aligned} \quad (3)$$

Nous notons $(X_s^{t,x}, 0 \leq s \leq T)$ la solution de (3). Considérons l'EDSR associée

$$-dY_s = f(s, X_s^{t,x}, Y_s, Z_s)ds - Z_s dW_s, \quad Y_T = \Phi(X_T^{t,x}). \quad (4)$$

Nous notons $(Y_s^{t,x}, Z_s^{t,x}), 0 \leq s \leq T$ la solution de (4). Le système (3)-(4) a pour solution $\{(X_s^{t,x}, Y_s^{t,x}, Z_s^{t,x}), 0 \leq s \leq T\}$.

Nous supposons que les coefficients b, σ et f sont lipschitziens. Cela nous assure l'existence et l'unicité d'une solution dans les espaces \mathbb{L}^2 appropriés.

- 1 Introduction aux EDSR
- 2 Relation entre EDSR et EDP quasilineaires**
- 3 Schémas de Discrétisation
- 4 Objectifs et Résultats



Relation entre EDSR et EDP quasilineaires

Liens entre EDSR et EDP

$\forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d$ et $t \leq s \leq T$:

$$\text{EDP : } (\partial_t + \mathcal{L}_{(t,x)})u(t, x) + f(t, x, u, \nabla u \sigma(t, x)) = 0, \quad u(T, x) = \Phi(x)$$

$$\text{avec } \mathcal{L}_{(t,x)} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} [\sigma \sigma^*]_{ij}(t, x) \partial_{x_i x_j}^2 + \sum_i b_i(t, x) \partial_{x_i};$$

$$\text{EDSR : } \begin{cases} X_s = x + \int_t^s b(r, X_r) dr + \int_t^s \sigma(r, X_r) dW_r, \\ Y_s = \Phi(X_T^{t,x}) + \int_s^T f(r, X_r^{t,x}, Y_r, Z_r) dr - \int_s^T Z_r dW_r. \end{cases}$$

Proposition (Pardoux, Peng (1992) ; El Karoui, Peng and Quenez (1997))

\exists une solution *régulière* à l'EDP $u \implies \exists$ une solution à l'EDSR :

$$Y_s^{t,x} = u(s, X_s^{t,x}) \quad \text{et} \quad Z_s^{t,x} = \nabla u(s, X_s^{t,x}) \sigma(s, X_s^{t,x}).$$

Liens entre EDSR et EDP

$\forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d$ et $t \leq s \leq T$:

$$\text{EDP : } (\partial_t + \mathcal{L}_{(t,x)})u(t, x) + f(t, x, u, \nabla u \sigma(t, x)) = 0, u(T, x) = \Phi(x)$$

$$\text{avec } \mathcal{L}_{(t,x)} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} [\sigma \sigma^*]_{ij}(t, x) \partial_{x_i x_j}^2 + \sum_i b_i(t, x) \partial_{x_i};$$

$$\text{EDSR : } \begin{cases} X_s = x + \int_t^s b(r, X_r) dr + \int_t^s \sigma(r, X_r) dW_r, \\ Y_s = \Phi(X_T^{t,x}) + \int_s^T f(r, X_r^{t,x}, Y_r, Z_r) dr - \int_s^T Z_r dW_r. \end{cases}$$

Réciproquement, on a

Proposition (Pardoux, Peng (1992))

Supposons les fonctions $b, \sigma, f, \Phi \in \mathcal{C}^3$ à dérivées bornées. Alors, $u(t, x) := Y_t^{t,x}$ appartient à $\mathcal{C}^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ et résoud l'EDP.

- 1 Introduction aux EDSR
- 2 Relation entre EDSR et EDP quasilinéaires
- 3 Schémas de Discrétisation**
- 4 Objectifs et Résultats

Schémas de Discrétisation

Discrétisation du processus de diffusion

$$dX_s = b(s, X_s)ds + \sigma(s, X_s)dW_s, 0 \leq s \leq T,$$
$$X_0 = x.$$

Nous voulons simuler l'évolution de X en fonction du temps. Soit X^N son approximation en temps sur la grille $(t_k = kh)_{0 \leq k \leq N}$ et $h = \frac{T}{N}$.

On pose $\Delta W_k = W_{t_{k+1}} - W_{t_k}$.

On définit X^N par $X_0^N = x$ et

$$X_{t_{k+1}}^N = X_{t_k}^N + b(t_k, X_{t_k}^N) * h + \sigma(t_k, X_{t_k}^N)(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}).$$

On définit X^N pour $t \in [t_k, t_{k+1}]$

$$X_t^N = X_{t_k}^N + b(t_k, X_{t_k}^N)(t - t_k) + \sigma(t_k, X_{t_k}^N)(W_t - W_{t_k}). \quad (5)$$

Ce schéma est le **Schéma d' Euler**.

Comment X^N converge t'il vers X ?

Schéma d'Euler

Supposons σ, b des fonctions continues et Lipschitziennes. Alors

$$\forall p \geq 1, [\mathbb{E}(\sup_{t \leq T} |X_t^N - X_t|^p)]^{\frac{1}{p}} \leq K(T, x)N^{-1/2}.$$

Théorème (Bally, Talay (1996))

Soit $\sigma, b \in C_b^\infty$, σ uniformément elliptique, g mesurable bornée. Alors

$$\mathbb{E}[g(X_T^N) - g(X_T)] = \frac{C_1}{N} + o\left(\frac{1}{N^2}\right).$$

Schéma de discrétisation du couple (Y, Z) .

L'EDSR

$$-dY_s = f(s, X_s^{t,x}, Y_s, Z_s)ds - Z_s dW_s, \quad Y_T = \Phi(X_T^{t,x}).$$

est approchée par (Y^N, Z^N) définie de manière rétrograde $Y_{t_N}^N = \Phi(X_{t_N}^N)$ et

$$Y_{t_k}^N - Y_{t_{k+1}}^N = f(t_k, X_{t_k}^N, Y_{t_{k+1}}^N, Z_{t_k}^N) * h - Z_{t_k}^N (W_{t_{k+1}} - W_{t_k}). \quad (6)$$

En prenant l'espérance sachant \mathcal{F}_{t_k} , on a $\mathbb{E}_{t_k}[Z_{t_k}^N (W_{t_{k+1}} - W_{t_k})] = 0$ et donc

$$Y_{t_k}^N = \mathbb{E}_{t_k}(Y_{t_{k+1}}^N) + h\mathbb{E}_{t_k}f(t_k, X_{t_k}^N, Y_{t_{k+1}}^N, Z_{t_k}^N), \quad (7)$$

Pour Z , on multiplie (6) par $W_{t_{k+1}} - W_{t_k} = \Delta W_k$

$$hZ_{t_k}^N = \mathbb{E}_{t_k}(Y_{t_{k+1}}^N \Delta W_k^*). \quad (8)$$

Exemple : si $f = 0$, on $Y_t = \mathbb{E}[\Phi(X_T)|\mathcal{F}_t]$ et $Y_{t_k}^N = \mathbb{E}_{t_k}(Y_{t_{k+1}}^N) = \mathbb{E}_{t_k}(\Phi(X_{t_N}^N))$.

Schéma de discrétisation du couple (Y, Z) .

L'EDSR

$$-dY_s = f(s, X_s^{t,x}, Y_s, Z_s)ds - Z_s dW_s, \quad Y_T = \Phi(X_T^{t,x}).$$

est approchée par (Y^N, Z^N) définie de manière rétrograde $Y_{t_N}^N = \Phi(X_{t_N}^N)$ et

$$Y_{t_k}^N - Y_{t_{k+1}}^N = f(t_k, X_{t_k}^N, Y_{t_{k+1}}^N, Z_{t_k}^N) * h - Z_{t_k}^N (W_{t_{k+1}} - W_{t_k}). \quad (6)$$

En prenant l'espérance sachant \mathcal{F}_{t_k} , on a $\mathbb{E}_{t_k}[Z_{t_k}^N (W_{t_{k+1}} - W_{t_k})] = 0$ et donc

$$Y_{t_k}^N = \mathbb{E}_{t_k}(Y_{t_{k+1}}^N) + h\mathbb{E}_{t_k}f(t_k, X_{t_k}^N, Y_{t_{k+1}}^N, Z_{t_k}^N), \quad (7)$$

Pour Z , on multiplie (6) par $W_{t_{k+1}} - W_{t_k} = \Delta W_k$

$$hZ_{t_k}^N = \mathbb{E}_{t_k}(Y_{t_{k+1}}^N \Delta W_k^*). \quad (8)$$

Exemple : si $f = 0$, on $Y_t = \mathbb{E}[\Phi(X_T)|\mathcal{F}_t]$ et $Y_{t_k}^N = \mathbb{E}_{t_k}(Y_{t_{k+1}}^N) = \mathbb{E}_{t_k}(\Phi(X_{t_N}^N))$.

- 1 Introduction aux EDSR
- 2 Relation entre EDSR et EDP quasilinéaires
- 3 Schémas de Discrétisation
- 4 Objectifs et Résultats



Objectifs et Résultats

Objectifs

Nous voulons étudier $(Y^N - Y, Z^N - Z)$

- au sens fort \mathbb{L}_q $q \geq 1$,

$$\max_{k \leq N} \mathbb{E} |Y_{t_k}^N - Y_{t_k}|^q, \mathbb{E} \left(\sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} |Z_{t_k}^N - Z_t|^2 dt \right)^{\frac{q}{2}}$$

- en loi, pour donner un développement de l'erreur

$$Y^N - Y, Z^N - Z$$

Question

Quelle est l'influence de l'erreur $X^N - X$ sur l'erreur $Y^N - Y, Z^N - Z$?
Autrement dit quelle erreur obtiendrait-on sur Y, Z si on simulait parfaitement X ?

Précédents résultats sur la convergence de la discrétisation des EDSR

Théorème (J. Zhang(2004), Bouchard, Touzi (2004))

Soient σ, b, f, Φ des fonctions Lipschitziennes continues. Alors

$$\max_{k \leq N} \|Y_{t_k}^N - Y_{t_k}\|_{\mathbb{L}_2} \leq CN^{-1/2}.$$

Théorème (D. Chevance(1997))

Si f ne dépend pas de z et si les coefficients sont réguliers, on a

$$|Y_0^N - Y_0| \leq CN^{-1}.$$

Notre contribution

- Extension des résultats de D. Chevance au cas où f dépend aussi de z .
- La différence $|Z_0^N - Z_0|$ est aussi d'ordre N^{-1} .
- Plus généralement, $\forall t_k$, l'erreur s'écrit

$$|Y_{t_k}^N - Y_{t_k} - \alpha_k \cdot (X_{t_k}^N - X_{t_k})| \leq CN^{-1} \vee |X_{t_k}^N - X_{t_k}|^2,$$

(où α_k est un vecteur aléatoire explicite et borné).

- un développement analogue est valable pour Z .

Puisque $|X_{t_k}^N - X_{t_k}|^2$ est d'ordre N^{-1} dans \mathbb{L}^p , l'erreur sur Y est principalement dûe à $X_{t_k}^N - X_{t_k}$. Alors, les résultats de J. Zhang et de D. Chevance sont une conséquence de ce résultat car $X_0^N = X_0$.

Convergence \mathbb{L}_p

Hypothèse 1

Les fonctions b, σ, f et Φ sont bornées en x , et uniformément Lipschitziennes continues par rapport à (x, y, z) et continues Hölder de paramètre $\frac{1}{2}$ par rapport à t . De plus, Φ est de classe $C_b^{2+\alpha}$ pour $\alpha \in]0, 1[$. La matrice $a = \sigma\sigma^*$ est uniformément elliptique.

Théorème 1

Sous l' Hypothèse 1, on définit l'erreur pour $q > 0$

$$e_q(N) = \left[\max_{0 \leq k \leq N} \mathbb{E} |Y_{t_k} - Y_{t_k}^N|^q + \mathbb{E} \left(\sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} |Z_t^N - Z_t|^2 dt \right)^{\frac{q}{2}} \right]^{\frac{1}{q}} \text{ où}$$

Y^N et Z^N sont définies par (7) et (8). Alors $|e_q(N)| \leq K(T, x) \frac{1}{\sqrt{N}}$.

Développement de l'erreur $Y^N - Y$

Hypothèse 2

Supposons que l'Hypothèse 1 soit vérifiée et supposons que les fonctions b, σ appartiennent à $C_b^{\frac{3}{2}, 3}$. On suppose aussi que f appartienne à $C_b^{\frac{3}{2}, 3, 3, 3}$ et que Φ appartienne à $C_b^{3+\alpha}$ pour $\alpha \in]0, 1[$.

Théorème 2

Sous l'Hypothèse 2, on a le développement suivant

$$Y_{t_k}^N - Y_{t_k} = \nabla_x u(t_k, X_{t_k})(X_{t_k}^N - X_{t_k}) + O_k\left(\frac{1}{N}\right) + O(|X_{t_k}^N - X_{t_k}|^2).$$

$O_k(\mathbf{h})$. $R = O_k(h^p)$ signifie $|R| \leq \lambda_k^N h^p$, où λ_k^N est \mathcal{F}_{t_k} -mesurable, $\sup_N \mathbb{E}(\sup_k |\lambda_k^N|^q) \leq K(T, x)$, pour $q \geq 1$.

Commentaires

Théorème 2

Sous l' Hypothèse 2, on a le développement suivant

$$Y_{t_k}^N - Y_{t_k} = \nabla_x u(t_k, X_{t_k})(X_{t_k}^N - X_{t_k}) + O_k\left(\frac{1}{N}\right) + O(|X_{t_k}^N - X_{t_k}|^2).$$

- $Y_0^N - Y_0 = O\left(\frac{1}{N}\right)$, puisque X_0^N et X_0 coïncident.
- Si il n'y a pas d'erreur de discrétisation sur X , $Y_{t_k}^N - Y_{t_k} = O_k\left(\frac{1}{N}\right)$.
- Si σ est indépendant de x : $\|X_{t_k}^N - X_{t_k}\|_{L^p} = O(N^{-1})$ et on obtient l'ordre N^{-1} pour Y .

Développement de l'erreur $Z^N - Z$

Hypothèse 3

Supposons que l'Hypothèse 1 soit vérifiée et que b, σ appartiennent à $C_b^{2,4}$.
On suppose aussi que f appartienne à $C_b^{2,4,4,4}$ et que Φ appartienne à $C_b^{4+\alpha}$
pour $\alpha \in]0, 1[$.

Théorème 3

Sous l' Hypothèse 3, nous avons le développement suivant

$$Z_{t_k}^N - Z_{t_k} = (\nabla_x [\nabla_x u \sigma]^*(t_k, X_{t_k})(X_{t_k}^N - X_{t_k}))^* + O_k \left(\frac{1}{N} \right) \\ + O(|X_{t_k}^N - X_{t_k}|^2).$$

Exemple Numérique

On étudie $dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t$, $\sigma = 0.2$, $\mu = 0.1$, $X_0 = 100$. Le driver $f(t, x, y, z) = -ry - \frac{\mu-r}{\sigma}z$, $r = 0.02$. La condition terminale $\Phi(x) = (x - K)_+$, $K = 100$, $T = 1$. On peut résoudre cette EDSR, la solution Y_t est le prix d'une option Call standard. Avec 1000 simulations Monte Carlo on obtient

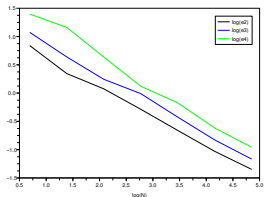


FIG. 1: Evolution de $e_2(N)$, $e_3(N)$, $e_4(N)$ par rapport à $\log(N)$

$$\text{où } e_q(N) = \left[\max_{0 \leq k \leq N} \mathbb{E} |Y_{t_k} - Y_{t_k}^N|^q \right]^{\frac{1}{q}}.$$

On utilise une méthode de régression linéaire, on obtient les paramètres a, b, std où $\log(e_p(N)) = a * \log(N) + b$, et std représente l'écart type des résidus. Le tableau suivant contient les valeurs de a, b, std pour $p = 2, 3, 4$. On constate que a est d'ordre $-\frac{1}{2}$.

	a	b	std
erreur L_2	- 0.5179119	1.14106	0.0384534
erreur L_3	- 0.5321072	1.4078415	0.0367535
erreur L_4	- 0.5891505	1.858531	0.0662573

TAB. 1: Coefficients de la régression linéaire de $\log(e_p(N))$, $p = 2, 3, 4$ par rapport à $\log(N)$.