Gestion de portefeuille dans un modèle avec taxes

GE Espinosa

Introduction

Cette étude s'intéresse à la gestion d'un portefeuille dans un modèle de marché financier avec taxes. Reprenant les idées introduites dans [1] *Modeling continuous-time financial markets with capital gains taxes* (par I. Ben Tahar, H.M. Soner et N. Touzi) dans le cadre d'un seul actif risqué suivant le modèle de Black-Scholes et d'une fonction d'utilité particulière (à savoir $\frac{x^p}{p}$, $p \in]0,1[$), on cherche à obtenir dans un cadre plus général un développement limité au premier ordre de la fonction valeur lorsque le taux d'intérêt et les taxes tendent vers 0.

Marché

Brièvement, on se donne un espace probabilisé $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ et un marché financier (complet) se composant d'un actif non risqué (un compte en banque), évoluant au taux d'intérêt $r > 0$ constant et n actifs risqués dont la dynamique est donnée par : $dP_t = diag(P_t)[b(P_t)dt + \sigma(P_t)dW_t]$ (horizon infini). On reprend le modèle de taxes et de coûts de transaction de [1], à savoir :

- coûts de transaction : $(1-\mu_i)P_t^i$ à la vente et $(1+\lambda_i)P_t^i$ à l'achat

- taxes : $\alpha(1-\mu_i)(P_t^i - B_t^i)$ où B_t^i est le prix de référence, défini comme moyenne des actifs i détenus en t, pondérés par le prix auquel ils ont été achetés (en plus de la quantité)

Par exemple, si l'agent possède, en t, x actifs i achetés (en t_1) au prix P_1 et y actifs i achetés (en t_2) au prix P_2, et aucun autre actif i, alors $B_t^i = \frac{xP_1 + yP_2}{x+y}$.

Portefeuille et stratégies

On suppose qu'un agent peut répartir son argent entre son compte en banque (X_t), différents actifs risqués (Y_t)$\in \mathbb{R}^n$ et sa consommation (C_t).
On pose $K_t^i = B_t^i \frac{Y_t^i}{P_t^i}$. Comparer B à P revient donc à comparer K à Y.
Puis on appelle Z_t la valeur liquidative du portefeuille (ie après vente des actifs risqués) :

$$Z_t = X_t + \sum_{i=1}^{n} (1-\mu_i)[(1-\alpha)Y_t^i + \alpha K_t^i]$$

Les transactions (absolues) de l'actif non risqué vers les actifs risqués sont notées L_t ($\in \mathbb{R}^n$) et M_t dans l'autre sens (en relatif). Ces processus sont supposés croissants et continus à droite. On impose également $\Delta M_t^i \leq 1$, $\forall i$, $\forall t \geq 0$, $\mathbb{P}$-p.s (on ne peut pas vendre les actifs risqués à découvert, ie être "short").

On se donne les dynamiques suivantes :

$$dY_t^i = Y_t^i \frac{dP_t^i}{P_t^i} + dL_t^i - Y_{t^-}^i dM_t^i$$

$$dK_t^i = dL_t^i - K_{t^-}^i dM_t^i$$

$$dX_t = (rX_t - C_t)dt + \sum_{i=1}^{n} [-(1+\lambda_i)dL_t^i + (1-\mu_i)\{(1-\alpha)Y_{t^-}^i + \alpha K_{t^-}^i\}dM_t^i]$$

$$dZ_t = (rZ_t - C_t)dt + \sum_{i=1}^{n} \{(1-\mu_i)[(1-\alpha)Y_t^i(\frac{dP_t^i}{P_t^i} - rdt) - r\alpha K_t^i dt] - (\lambda_i + \mu_i)dL_t^i\}$$

Les stratégies sont les triplets (C, L, M). Les stratégies admissibles sont celles telles que $Z_t \geq 0$, $Y_t^i \geq 0$ et $K_t^i \geq 0$, $\forall t$, $\mathbb{P}$-ps.

Si $(x, y, k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, on pose : $z = x + \sum_i (1-\mu_i)\{(1-\alpha)y^i + \alpha k^i\}$ (valeur de Z associée). On note S l'ensemble des triplets (de conditions initiales) (x, y, k) tels que $z, y^i, k^i > 0$, $\overline{S}$ la fermeture de S et $\partial^z S$ le sous-ensemble de $\overline{S}$ tq $z = 0$ (le portefeuille initial ne vaut rien).
Pour $s \in \overline{S}$, on note également $\mathfrak{A}(s)$ l'ensemble des stratégies admissibles ayant pour condition initiale s.

Contrôle optimal

On se donne enfin une fonction d'utilité $U : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, C^1, strictement croissante, strictement concave, telle que : $U(0) = 0$ et $\lim_{c\to+\infty} U(c) = +\infty$ et vérifiant les conditions de Inada :

$$\lim_{c\to 0} U'(c) = +\infty \text{ et } \lim_{c\to+\infty} U'(c) = 0$$

On définit alors : $J_\infty(s, \nu) = \mathbb{E}[\int_0^\infty e^{-\beta t} U(C_t)dt]$. Le but de l'agent est de maximiser cette fonction sur les stratégies admissibles d'où la fonction valeur :

$$V_\infty(s) = \sup_{\nu \in \mathfrak{A}(s)} J_\infty(s, \nu)$$