OPTIMISATION DE PORTEFEUILLE ET TEMPS D'ARRÊT OPTIMAL

M'RAD Mohamed

ÉCOLE POLYTECHNIQUE — CMAP

March 7, 2007

Outline

1. **Notations**
2. **Un Problème Classique**
   - Objectif.
   - Optimisation de portefeuille.
   - Résolution.
3. **Un problème plus Général.**
   - Formulation Mathématique.
   - Résolution.
4. **Prix d'indifférence et nouvelles perspectives.**

Notations

Les actifs risqués suivent la dynamique:

$$dP_t^i = P_t^i [b_t^i dt + \sum_{i=1}^{d} \sigma_t^{i,j} dW_t^j]$$

L'actif sans risque est tq:

$$dP_t^0 = P_t^0 r_t^0 dt$$

Le processus de la richesse évolue suivant la dynamique:

$$dX_t^{x,\pi} = r_t X_t^{x,\pi} dt + \pi_t^* \sigma_t (dW_t + \eta_t dt)$$

$$X_0^{x,\pi} = x$$

Objectif

L'objectif est de résoudre:

$$V(x) = \sup_{\pi \in \mathcal{A}} E(U(X_T^{x,\pi})) \qquad (1)$$

On définit le processus

$$H_t^{r,\eta} = e^{-\int_0^t (r_s + \frac{1}{2}\eta_s^2)ds - \int_0^t \eta_s * dW_s}, \; H_{t,s}^{r,\eta} = \frac{H_s^{r,\eta}}{H_t^{r,\eta}}$$

On vérifie que $(X_t^{x,\pi} H_t^{r,\eta})_t$ est une martingale. Par suite (1) est équivalent au problème avec multiplicateur de Lagrange.

$$\sup_{\pi \in \mathcal{A}} [E(U(X_T^{x,\pi})) - \lambda(E(X_T^{x,\pi} H_T^{r,\eta}) - x)] \quad (2)$$

Résolution

La solution s'écrit alors:

$$\begin{aligned} V(x) &= E(U(X_T^{x,*})) \\ X_T^{x,*} &= I(\lambda(x,T)H_T^{r,\eta}) \end{aligned}$$

Avec λ l'unique réel solution de:

$$E(H_T^{r,\eta} I(\lambda(x,T)H_T^{r,\eta})) = x$$

Questions:

- Si T est un temps d'arrêt, peut-on appliquer le résultat précédent?
- Et si le gestionnaire de portefeuille choisit lui même son horizon ?

Une gestion de type américain, i.e. une gestion dont le but n'est plus de maximiser le flux à une maturité fixée mais celui à des temps variables. Le problème s'écrit alors

$$\mathbf{V(x) = sup_{t \leq \tau \leq T} sup_{\pi \in \mathcal{A}(x)} E(U(X_{\tau}^{x,\pi}))} \qquad (3)$$

Résolution:

Transformée de Legendre-Fenchel:

$$\mathcal{U}(y) = \max_{x>0}(U(x) - xy) = U(I(y)) - yI(y)$$

$$\mathcal{U}'(y) = -I(y)$$

$$U(x) = \min_{y>0}(\mathcal{U}(y) + xy)$$

Approche par Dualité à τ fixé:

- $\star$ $J(x, \pi, \tau) = E(U(X^{x,\pi}_{\tau(x,\pi)}))$
- $\star$ $\mathcal{X}_\tau(\lambda) = E(H^{r,\eta}_\tau I(\lambda H^{r,\eta}_\tau))$ (4)
- $\star$ $V_\tau(x) = \sup_{\pi \in \mathcal{A}(x)} J(x, \pi, \tau)$
- $\star$ $J(x, \pi, \tau) \leq E(\mathcal{U}(\lambda H^{r,\eta}_\tau)) + \lambda x$ (5)

Avec égalité si et seulement si $X^{x,\pi}_\tau = I(\lambda H^{r,\eta}_\tau)$.

- Sous les conditions de stricte monotonie et stricte convexité de la fonction d'utilité, il est facile de voir que:
  $\lambda \mapsto \mathcal{X}_\tau(\lambda)$, est continue strictement décroissante de $(0, \infty)$ dans lui même, elle admet donc un inverse strictement décroissant qu'on notera $\mathcal{Y}_\tau(x)$.

Proposition

$$
\begin{aligned}
V_\tau(x) &= \inf_{\lambda>0}[\mathcal{J}(\lambda,\tau)+\lambda x] \\
&= \mathcal{J}(\mathcal{Y}(x),\tau)+\mathcal{Y}(x)x \\
V(x) &= \sup_{\tau\leq T} V_\tau(x) \\
&= \sup_{\tau\leq T}\inf_{\lambda>0}[\mathcal{J}(\lambda,\tau)+\lambda x] \\
&= \sup_{\tau\leq T}\mathcal{J}(\mathcal{Y}(x),\tau)+\mathcal{Y}_\tau(x)x
\end{aligned}
$$

Avec la notation

$$\mathcal{J}(\lambda,\tau) = E(\mathcal{U}(\lambda H_\tau^{r,\eta}))$$

On définit l'ensemble de finançiabilité:

$$\mathcal{G} = \cup_{\lambda>0}\mathcal{G}_\lambda$$

$$\mathcal{G}_\lambda = \{\mathcal{X}_{\tau^*}(\lambda), \tau^* \textbf{est optimal dans (4)}\}$$

$\forall$x $\in \mathcal{G}$, x représente une richesse qui permet de financer un portefeuille $\mathbf{X}^{*,\mathbf{x}}_{\tau^*}$.

Theorem

$\forall$**x** $\in \mathcal{G}$, *la valeur de* **V(x)** *est atteignable et on a:*

$$\mathbf{V(x)} = \inf_{\lambda>0}\mathcal{V}(\lambda) \qquad (6)$$

Inversement $\forall$**x** $\in (\mathbf{0}, \infty)$, *vérifiant (10) alors* **x** $\in \mathcal{G}$

Avec $\mathcal{V}(\lambda) = \sup_{\tau\leq\mathbf{T}}\mathcal{J}(\lambda,\tau)$

Definition

On suppose maintenant, que l'agent doit livrer à l'instant $\mathbf{T}$ un "contingent claim", càd il doit payer à cette date une somme $\mathbf{Y_T}$, sa richesse est alors décrite par: $\mathbf{X_T^{x,\pi} - Y_T}$, et sa fonction objective s'écrit alors:

$$\mathbf{V(x,Y) = \sup_{\pi \in \mathcal{A}} E(U(X_T^{x,\pi} - Y_T))} \quad (7)$$

Il est facile de voir que $\mathbf{V(x,Y) \leq V(x,0) = V(x)}$.

Definition

Pour un agent de richesse initiale x, on définit le prix d'indifférence, comme la plus petite somme qu'il investira en plus dans son portefeuille, pour réaliser la même utilité, càd:

$$\mathbf{p(x, Y) = \inf\{y \geq 0, V(x + y, Y) \geq V(x, 0)}$$

Questions:

- Peut-on définir un prix d'indifférence dans le second problème (avec des temps d'arrêts)?
- Si non, peut-on définir une nouvelle règle de pricing?
- Quelle dynamique suivra ce prix?

La réponse à la première question, et qui consistera à comparer les deux fonctions suivantes:

$$V(x+p, Y) = \sup_{\tau \leq T} \sup_{\pi \in \mathcal{A}(x+p)} E(U(X_\tau^{x+p,\pi} - Y_\tau))$$

$$V(x, 0) = \sup_{\tau \leq T} \sup_{\pi \in \mathcal{A}(x)} E(U(X_\tau^{x,\pi}))$$

est $+/-$ négative, à cause du signe de la variable $X_\tau^{x,\pi} - Y_\tau$ qui peut prendre des valeurs négatives, alors que la plus part des fonctions d'utilités sont définies sur R_+, sauf si on se permet de hedger uniquement la partie négative de cette variable.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Idée

l'idée est de regarder le quotient $\frac{X_T^{x,\pi}}{Y_T}$ au lieu de $X_T^{x,\pi} - Y_T$, ce qui nous permet de garder un signe constant.

Remarques & Questions

- *Peut-on utiliser la technique précédente?*
- *Si l'ensemble des portefeuilles admissibles est linéaire, et si* Y *est un portefeuille, càd* $Y = X^{y,\pi^Y}$ *alors* $X_T^{x,\pi} - Y_T = X_T^{x,\pi} - X_T^{y,\pi^Y} = X_T^{x-y,\pi-\pi^Y}$
- *Dans le premier cas, d'après la remarque précédente on est toujours sur le même marché, donc il n'est pas question de changer d'utilité.*

Remarques & Questions

1. *Si on considère* $\frac{X_T^{x,\pi}}{Y_T}$ *alors on quelque sorte ça correspond à un changement de numéraire, on n' est plus sur le même marché. Doit-on changer d'utilité?*
2. *Quelle est la dimension d'une utilité? Exemples:*
   - *utilité puissance* $U(x) = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}$
   - *utilité exponentielle* $U(x) = 1 - \frac{1}{\gamma} e^{-\gamma x}$

Réponse à la première question

On se donne une fonction d'utilité U et on regarde le Pb:

$$V(x, Y) = \sup_{\tau \leq T} \sup_{\pi \in \mathcal{A}(x)} E\left(U\left(\frac{X_\tau^{x,\pi}}{Y_\tau}\right)\right)$$

Dans ce cas, la richesse optimale s'écrit :

$$X_\tau^{x,*} = Y_\tau I(\lambda(x, \tau) H_\tau^{r,\eta} Y_\tau)$$

On définit comme précédemment:

- $\star$ $J(x, Y, \pi, \tau) = E(U(\frac{X_\tau^{x,\pi}}{Y_\tau}))$
- $\star$ $\mathcal{X}_\tau(Y, \lambda) = E(H_\tau^{r,\eta} Y_\tau I(\lambda H_\tau^{r,\eta} Y_\tau))$ (8)
- $\star$ $V_\tau(x, Y) = \sup_{\pi \in \mathcal{A}(x)} J(x, Y, \pi, \tau)$
- $\star$ $J(x, Y, \pi, \tau) \leq E(\mathcal{U}(\lambda H_\tau^{r,\eta} Y_\tau)) + \lambda x$ (9)

Avec égalité si et seulement si $X_\tau^{x,*} = Y_\tau I(\lambda(x, \tau) H_\tau^{r,\eta} Y_\tau)$.

Proposition

$$
\begin{aligned}
V_\tau(x, Y) &= \inf_{\lambda>0}[\mathcal{J}(Y, \lambda, \tau) + \lambda x] \\
&= \mathcal{J}(\mathcal{Y}(x, Y), Y, \tau) + \mathcal{Y}(x, Y)x \\
V(x) &= \sup_{\tau \leq T} V_\tau(x, Y) \\
&= \sup_{\tau \leq T} \inf_{\lambda>0}[\mathcal{J}(Y, \lambda, \tau) + \lambda x] \\
&= \sup_{\tau \leq T} \mathcal{J}(\mathcal{Y}(x, Y), Y, \tau) + \mathcal{Y}_\tau(x, Y)x
\end{aligned}
$$

Avec la notation

$$\mathcal{J}(Y, \lambda, \tau) = E(\mathcal{U}(\lambda H_\tau^{r,\eta} Y_\tau))$$

$$\mathcal{G}^{\mathbf{Y}} = \cup_{\lambda>0}\mathcal{G}^{\mathbf{Y}}_{\lambda}$$

$$\mathcal{G}^{\mathbf{Y}}_{\lambda} = \{\mathcal{X}_{\tau^*}(\mathbf{Y},\lambda), \tau^* \textbf{est optimal dans (8)}\}$$

Theorem

$\forall \mathbf{x} \in \mathcal{G}^{\mathbf{Y}}$, *la valeur de* $\mathbf{V(x)}$ *est atteignable et on a:*

$$\mathbf{V(x)} = \ \mathbf{inf}_{\lambda>0}\mathcal{V}(\mathbf{Y},\lambda) \tag{10}$$

Inversement $\forall \mathbf{x} \in (\mathbf{0},\infty)$, *vérifiant (10) alors* $\mathbf{x} \in \mathcal{G}$

Avec

$$\mathcal{V}(\mathbf{Y},\lambda) = \mathbf{sup}_{\tau\leq \mathbf{T}}\mathcal{J}(\mathbf{Y},\lambda,\tau)$$

Pour répondre à la deuxième question, on n'a pas grand chose.
$\longrightarrow$ On est obligé de revenir à la première définition d'utilité .
$\longrightarrow$ Comment un agent définit son utilité, et qu'est ce qu'il espère de cette fonction?
$\longrightarrow$ Comment cette utilité décrit-elle son comportement et l'ensemble de ses croyances?
$\longrightarrow$ C'est quoi le rôle du risque? Risque absolu ou relatif?
$\longrightarrow$ C'est quoi la relation entre probabilité et utilité?

Quelques notions de base

- **Une fonction d'utilité est la valeur associée par un agent à un couple (gain,probabilité), elle décrit en général sa satisfaction au gain, ou encore la sensation de plaisir associée à la consommation d'un bien .**
- **L'utilité est une mesure de bien-être ou de la satisfaction obtenue par la consommation, ou du moins l'obtention, d'un bien ou d'un service. Elle est liée à la notion de besoin.**

Quelques notions de base

- **Aversion au risque absolu:**

$$ARa(x) = -\frac{U_{xx}(x)}{U_x(x)}$$

- **Aversion au risque relatif:**

$$AR(x) = -\frac{xU_{xx}(x)}{U_x(x)}$$

On se place dans le cas d'un agent de richesse initiale x et une fonction d'utilité U, l'équivalent de cette même richesse dans un nouveau marché de numéraire y est $\frac{x}{y}$. Supposons que son utilité est notée par U^Y dans ce nouveau marché, alors il existe K et C, deux fonctions (aléatoires) tq:

$$\forall x \in (0, \infty), U^Y(\frac{x}{y}) = \frac{K(y)}{y} U(x) + \frac{C(y)}{y}$$