Optimisation de structures par la méthode des lignes de niveau

Grégoire Allaire — Frédéric de Gournay — François Jouve

Centre de Mathématiques Appliquées (UMR 7641)
École Polytechnique, 91128 Palaiseau

Gregoire.Allaire@polytechnique.fr,
Frederic.de-Gournay@polytechnique.org
Francois.Jouve@polytechnique.fr

RÉSUMÉ. *Nous proposons une méthode numérique d'optimisation de structures basée sur la combinaison des techniques classiques de dérivation par rapport au domaine et de courbe de niveau pour la propagation de fronts. La dérivée de forme est utilisée comme vitesse de transport dans une équation d'Hamilton-Jacobi pour modifier la forme. Cet algorithme de level set est peu coûteux en temps de calcul car il capture la forme sur un maillage Eulérien fixe. Il prend facilement en compte certaines variations de topologie. Il est couplé avec la méthode du gradient topologique afin de permettre la création de nouveaux trous et tenter d'éviter sa convergence vers des minima locaux.*

ABSTRACT. *In the context of structural optimization we propose a numerical method based on a combination of the classical shape derivative and of the level set method for front propagation. The shape derivative is used as an advection velocity in a Hamilton-Jacobi equation for changing the shape. This level set method is a low-cost shape capturing algorithm working on a fixed Eulerian mesh. It can easily handle some kind of topology changes. To help the method get out from local minima, it is coupled with the topological gradient method, that allows the creation of new holes in the structure.*

MOTS-CLÉS : *optimisation de formes, optimisation topologique, dérivée de forme, courbes de niveau.*

KEYWORDS: *shape optimization, topology optimization, shape derivative, level set.*

1. Introduction

Les méthodes classiques de variation de frontière ont été beaucoup étudiées (voir par exemple [9], [12], [15], [18]). Elles présentent l'avantage de pouvoir traiter une grande variété de modèles mécaniques ainsi que de fonctions-coût. Mais elles ont deux inconvénients majeurs : leur coût, dû à la nécessité de remailler et leur tendance à trouver des minima locaux et des solutions fortement dépendantes de la forme de départ.

Nous proposons de revisiter les techniques d'optimisation de formes classiques en éliminant un de leurs inconvénient : les formes sont capturées sur un maillage fixe et représentées par la courbe de niveau d'un champ scalaire, comme dans la méthode introduite par Osher et Sethian ([11], [13]) pour le suivi de frontières libres. On conserve ainsi tous les avantages des méthodes de variation de domaine, tout en évitant de nombreux problèmes d'implémentation et d'instabilités numériques dus au remaillage. La vitesse du front de propagation est calculée en utilisant la dérivée de forme de l'optimisation de frontière classique.

Cette méthode est très souple. Elle ne pose pas de problème particulier en 3d. L'implémentation d'une nouvelle fonction-coût est facile et elle permet d'utiliser des modèles physiques et des conditions aux limites complexes.

Nous proposons d'atténuer le fait que la méthode n'est pas "topologique" au sens strict – même si elle autorise très naturellement des variations de topologie – en la couplant à la méthode du gradient topologique (cf. [7], [8], [16], [17]). L'idée est d'enrichir périodiquement l'espace de recherche des formes optimales au cours de l'algorithme en autorisant la création de trous à l'intérieur du domaine. Le gradient topologique est utilisé comme critère de nucléation pour l'initiation d'éventuels nouveaux trous.

2. Dérivée de forme

On considère un problème d'optimisation de forme du type $\inf_{\Omega\in\left\{\Omega\subset D;|\Omega|\leq V\right\}} J(\Omega)$, où $D \subset \mathbb{R}^d$ est le domaine de travail représentant l'encombrement maximal des formes Ω que l'on cherche, et $J(\Omega)$ est la fonction-coût que l'on cherche à optimiser. Elle dépend de Ω à travers la solution d'un problème mécanique (*e.g.* élasticité linéaire) posé sur ce domaine. Si Ω est un ouvert régulier, nous considérons des domaines du type $\Omega_\theta = \big(\mathrm{Id} + \theta\big)(\Omega)$. La dérivée de forme $J(\Omega)$ en Ω est définie comme la dérivée de Fréchet dans $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ en 0 de l'application $\theta \to J\big((\mathrm{Id} + \theta)(\Omega)\big)$, *i.e.*

$$J\big((\mathrm{Id} + \theta)(\Omega)\big) = J(\Omega) + J'(\Omega)(\theta) + o(\theta) \quad \text{avec} \quad \lim_{\theta\to 0} \frac{\|o(\theta)\|}{\|\theta\|} = 0 \ ,$$

où $J'(\Omega)$ est une forme linéaire continue sur $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$.

Un résultat classique dit que la dérivée directionnelle $J'(\Omega)(\theta)$ dépend seulement de la trace $\theta \cdot n$ sur la frontière $\partial\Omega$.

En suivant la méthode de Murat et Simon [9][15], on peut calculer la dérivée de forme pour un grand nombre de fonctions-coût. Dans les applications on s'intéresse à la compliance, qui donne une mesure globale de la rigidité de la pièce, à des fonction-coût dépendant du champ de déplacement (pour la conception de mécanismes compliants) ou dépendant du tenseur des contraintes.

Ce calcul de dérivée de forme est à la base des méthodes dites "classiques" d'optimisation de structures.

3. Paramétrisation des formes par une courbe de niveaux

Nous paramétrons la frontière de Ω par la fonction courbe de niveaux définie sur D par

$$\begin{cases} \psi(x) = 0 & \Leftrightarrow x \in \partial\Omega \cap D, \\ \psi(x) < 0 & \Leftrightarrow x \in \Omega, \\ \psi(x) > 0 & \Leftrightarrow x \in \left(D \setminus \overline{\Omega}\right). \end{cases}$$

Les équations de l'élasticité pour le champ de déplacement u ainsi que pour l'adjoint p sont prolongées au domaine D tout entier par la méthode du matériau fictif qui consiste à remplir les trous $D \setminus \Omega$ d'un matériau mou, simulant le vide tout en évitant la singularité de l'opérateur d'élasticité.

Au cours de la procédure d'optimisation, la forme évolue suivant un pseudo-temps qui correspond à un pas de descente de la méthode de gradient. Si la forme évolue en temps avec la vitesse normale $-v(t,x)$, alors la courbe de niveau suit l'équation d'Hamilton-Jacobi :

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} - v|\nabla\psi| = 0. \qquad [1]$$

Cette équation d'Hamilton-Jacobi a un sens dans tout le domaine D et pas seulement sur la frontière $\partial\Omega$ dès lors que la vitesse v est connue partout, ce qui est le cas si on regarde les formules de dérivée de forme.

4. Algorithme d'optimisation

Nous proposons un algorithme itératif structuré de la façon suivante :

1) Initialisation de $\psi = \psi_0$ correspondant à une forme initiale Ω_0.

2) Itération jusqu'à convergence, pour $k \geq 0$:

a) calcul de l'état u_k et de l'état adjoint p_k pour le domaine Ω_k. Le calcul s'effectue sur D avec le maillage fixe grâce à la méthode du matériau fictif ;

b) déformation de Ω_k par résolution de l'équation d'Hamilton-Jacobi (1). La nouvelle forme Ω_{k+1} est caractérisée par la fonction courbe de niveaux ψ_{k+1} solution de (1) après un pas de temps Δt_k en partant de la condition initiale $\psi_k(x)$ avec la vitesse $-v_k$ calculée en fontion de u_k et de p_k. Le pas de temps Δt_k est choisi tel que $J(\Omega_{k+1}) \leq J(\Omega_k)$.

3) De temps en temps, comme il est habituel de le faire dans les algorithmes de level set pour des raisons de stabilité, la fonction ψ est réinitialisée en résolvant une autre équation d'Hamilton-Jacobi dont la solution stationnaire est la fonction distance signée à la courbe de niveau 0.

Des extensions à la méthodes ci-dessus ainsi que de nombreux détails d'implémentation, illustrés par des résultats numériques, sont décrits dans [4][5]. Nous donnons les dérivées de forme et des exemples de calculs numériques pour différentes fonctions-coût : la compliance ou une somme de compliances (multi-chargement), un écart aux moindres carrés par rapport à un déplacement cible, ou encore la plus petite des fréquences propres. Nous décrivons comment il est possible très facilement de prendre en compte des conditions aux limites de forces suiveuses (pression normale au bord ou bien force de direction constante appliquée sur le bord variable), des termes de périmètre ou des modèles physiques plus complexes que l'élasticité linéarisée.

5. Gradient topologique et méthode de level set

L'algorithme ci-dessus ne crée pas de nouveaux trous ni de nouvelles frontières si l'équation d'Hamilton-Jacobi (1) est résolue sous une stricte condition CFL car elle satisfait un principe du maximum. Toutefois, la méthode des courbes de niveaux est connue pour permettre le traitement aisé des changements de topologie, c'est-à-dire la création ou la suppression de trous. Ainsi notre algorithme est-il capable de supprimer des trous facilement si la structure initiale en comporte trop. Mais si l'initialisation n'est pas assez riche, ou si des structures fines ont été détruites par une étape intermédiaire de calcul, il lui sera impossible de recréer un trou au milieu du domaine. L'algorithme converge alors en général vers un minimum local. La solution pourrait être substantiellement amélioré par l'ajout d'un ou plusieurs trous judicieusement placés. Notons que cet inconvénient est surtout sensible en 2d. En effet, s'il est par exemple impossible par l'algorithme de level set de trouver une solution du même genre topologique qu'une coque sphérique en partant d'une boule (il faudrait creuser un trou à l'intérieur), on peut parfaitement obtenir, entre autres, une structure de même genre qu'un tore en faisant se rapprocher puis se toucher deux parois parallèles. On observe couramment ce phénomène lors de simulations numériques.

Nous utilisons la méthode du gradient topologique (cf. [7], [8], [16], [17]) pour définir un critère de nucléation permettant, à certaines étapes du calcul,

de déterminer où il serait avantageux, du point de vue de la décroissance de la fonction-objectif, de percer un trou de taille infinitésimale.

Si la fonction-objectif $J(\Omega)$ admet un développement du type

$$J(\Omega_\rho) = J(\Omega) + \rho^d D_T J(x_0) + o(\rho^d),$$

alors $D_T J(x_0)$ est appelée dérivée topologique au point x_0.

On peut calculer explicitement la dérivée topologique pour toutes les fonctions-coût que nous considérons en pratique. Nous utilisons cette quantité pour insérer une étape supplémentaire dans l'algorithme précédent :

1) Initialisation de $\psi = \psi_0$.

2) Itération jusqu'à convergence, pour $k \geq 0$:

a) calcul de l'état u_k et de l'état adjoint p_k pour le domaine Ω_k ;

b) déformation de Ω_k par résolution de l'équation d'Hamilton-Jacobi (1) ;

c) de temps en temps, suivant un paramètre donné par l'utilisateur, calcul du gradient topologique $D_T J$et création de trous là où il est minimal et négatif.

6. Un exemple numérique

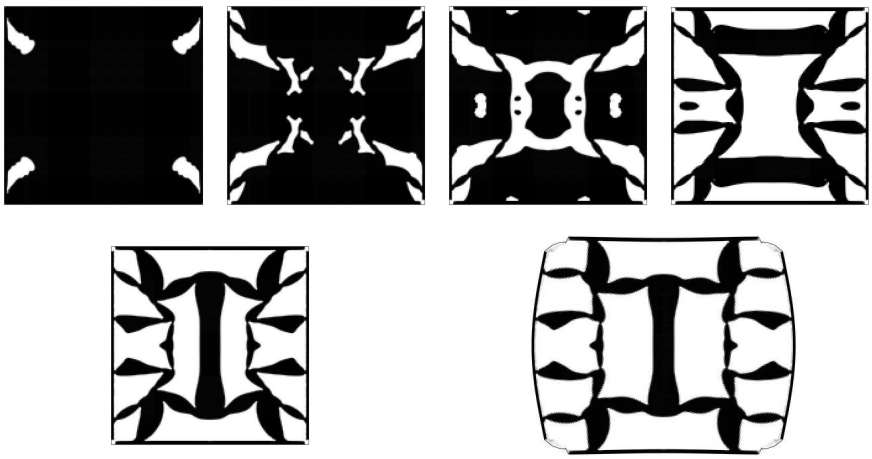

Figure 1 – Mécanisme ayant le comportement apparent d'un matériau élastique à coefficient de Poisson négatif. Les quatre figures du haut sont des configurations intermédiaires obtenues au cours du calcul, montrant l'apport du gradient topologique. En bas, la solution convergée et sa déformée lorsque les bords verticaux sont soumis à une traction.

7. Bibliographie

Allaire G., *Shape optimization by the homogenization method*, Springer Verlag, New York (2001).

Allaire G., Bonnetier E., Francfort G., Jouve F., Shape optimization by the homogenization method, *Nüm. Math.*, **76**, 27-68 (1997).

Allaire G., De Gournay F., Jouve F., Toader A.M., Structural optimization using topological and shape sensitivity via a level set method, à paraître dans *Control and cybernetics* (2005).

Allaire G., Jouve F., A level set method for vibration and multiple loads structural optimization, à paraître dans *Comp. Meth. in App. Mech. and Engrg. Special issue on "Structural and Design Optimization"* (2005).

Allaire G., Jouve F., Toader A.M., Structural optimization using sensitivity analysis and a level set method, *J. Comp. Phys.*, **194/1**, 363-393 (2004).

Allaire G., Jouve F., Toader A.M., A level set method for shape optimization, *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I*, **334** no.12, 1125-1130 (2002).

Céa J., Garreau S., Guillaume P., Masmoudi M., The shape and topological optimizations connection, IV WCCM, Part II (Buenos Aires, 1998), Comp. Meth. in App. Mech. Engrg., **188**, 713-726 (2000).

Garreau S., Guillaume P., Masmoudi M., The topological asymptotic for PDE systems : the elasticity case, *SIAM J. Control Optim.*, **39**, no. 6, 1756-1778 (2001).

Murat F., Simon S., Études de problèmes d'optimal design, *Lecture Notes in Computer Science 41, 54-62, Springer Verlag, Berlin* (1976).

Osher S., Santosa F., Level set methods for optimization problems involving geometry and constraints : frequencies of a two-density inhomogeneous drum, *J. Comp. Phys.*, **171**, 272-288 (2001).

Osher S., Sethian J.A., Front propagating with curvature dependent speed : algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations, *J. Comp. Phys.*, **78**, 12-49 (1988).

Pironneau O., *Optimal shape design for elliptic systems,* Springer-Verlag, New York (1984).

Sethian J.A., *Level set Methods and fast marching methods : evolving interfaces in computational geometry, fluid mechanics, computer vision and materials science,* Cambridge University Press (1999).

Sethian J., Wiegmann A., Structural boundary design via level set and immersed interface methods, *J. Comp. Phys.,* **163**, 489-528 (2000).

Simon J., Differentiation with respect to the domain in boundary value problems, *Num. Funct. Anal. Optimz.*, **2**, 649-687 (1980).

Sokołowski J., Żochowski A., On the topological derivative in shape optimization, *SIAM J. Control Optim.*, **37**, 1251-1272 (1999).

Sokołowski J., Żochowski A., Topological derivatives of shape functionals for elasticity systems, *Mech. Structures Mach.*, **29**, no. 3, 331-349 (2001).

Sokołowski J., Zolesio J.P., *Introduction to shape optimization : shape sensitivity analysis, Springer Series in Computational Mathematics,* Vol. 10, Springer, Berlin (1992).