Résumé de Travaux

pour obtenir

L'Habilitation à Diriger des Recherches
de l'Université Pierre et Marie Curie

Spécialité : Mathématiques Appliquées

Optimisation de formes et quelques applications à la médecine

François Jouve
Centre de Mathématiques Appliquées, UMR 7641
École Polytechnique - 91128 Palaiseau - France
Francois.Jouve@Polytechnique.fr

Travaux présentés le 10 décembre 2004 devant le jury composé de

Grégoire Allaire	École Polytechnique
Vincent Giovangigli	École Polytechnique
Antoine Henrot	Université Henri Poincaré, Nancy
Patrick Le Tallec	École Polytechnique
Olivier Pironneau	Université Pierre et Marie Curie, Paris

au vu des rapports de

Martin Bendsoe	Technical University of Denmark
Antoine Henrot	Université Henri Poincaré, Nancy
Fadil Santosa	University of Minnesota

Remerciements

Cette habilitation a bénéficié d'une longue gestation. Elle m'a permis de croiser la route de tant de personnes qu'il m'est impossible de citer tout le monde ici. Que les absents pardonnent mes omissions involontaires.

Le CMAP m'a accueilli en 1989. J'en suis reconnaissant en tout premier lieu à Jean-Claude Nédélec qui, en insufflant cette ambiance si particulière, faite de décontraction et d'émulation, a tant fait pour rendre attirant ce lieu à l'architecture effrayante, cerné d'uniformes, si éloigné du boulevard périphérique.

J'avais commencé à m'intéresser à des problèmes liés à l'optimisation de formes avec Éric Bonnetier, ami de 20 ans, qui nous y avait rejoint de retour des Amériques. Mais c'est ma rencontre avec Grégoire Allaire qui fut déterminante pour la suite. La durée de notre collaboration, dont les fruits constituent une bonne part de ce document, est la preuve de relations qui vont au delà du professionnel. Au cours de cette période, j'ai travaillé avec plaisir sur ces problèmes avec Gilles Francfort, que je remercie pour l'acuité de ses conseils, tant scientifiques que vestimentaires, Zacharia Belhachmi, Sylvie Aubry, Hervé Maillot (bon vent !), Anca-Maria Toader et Frédéric de Gournay.

Dans une autre vie, j'ai été initié aux joies des algorithmes génétiques par Marc Schoenauer. Il m'a donné l'occasion de collaborer avec Hatem Hamda, Leila Kallel, Couro Kane, Bertrand Lamy, Evelyne Lutton, Habibou Maitournam et Michèle Sebag, et je l'en remercie.

Enfin, parallèlement, j'ai eu la chance de pouvoir poursuivre, pendant presque deux décennies, des activités liées à l'ophtalmologie. Je dois chaleureusement en remercier Khalil Hanna pour son inventivité et sa persévérance, même dans les moments les plus difficiles.

Martin Bendsoe, Antoine Henrot et Fadil Santosa ont rapporté avec célérité et bienveillance sur ce travail. Je les en remercie vivement, avec une mention toute particulière pour Antoine qui me fait l'honneur de participer au jury, tout comme Patrick Le Tallec et Olivier Pironneau alors que, comme souvent, je les ai sollicités à la toute dernière minute.

Vincent Giovangigli est le dernier des trois directeurs qui se sont succédés (épuisés ?) à la tête du CMAP depuis que je le fréquente. Je le remercie pour sa participation au jury.

Et puis il faut dire un mot sur celles et ceux qui forment l'âme du CMAP : le secrétariat évidemment, toujours là pour palier mes inconséquences administratives, les acteurs dramatiques, les danseuses, les karatékas, les féministes, les fanas de la grimpette, les joggers de midi, les valeureux de l'éphémère équipe de foot, mes voisin(es) de bureaux successifs, ceux avec qui je travaillerai un jour, et bien sûr les nombreux participants à la perpétuelle joute oratoire de la salle café que le monde entier nous envie.

En nommer certains serait faire injure aux autres mais les cumulards des catégories ci-dessus se reconnaîtront sans peine. Ils ont toute mon amitié.

Certes il va maintenant leur manquer un sujet récurrent de comique de répétition (alors cette h... ?). Mais je dois avouer que ces incitations répétées m'ont permis de produire ce document, non seulement largement avant l'âge moyen d'apparition de la cataracte, mais avant même de subir les premières manifestations de la presbytie.

Enfin, il m'est impossible de ne pas remercier Sandrine, Cléo et Elsa, qui, chacune à mesure de son âge, m'ont supporté à tous les sens du terme au cours de ce travail.

Summary

Most of our research since 1992 is summarized in this document. The main subject of this work is optimal design of elastic structures, with emphasis on the numerical methods. Our contribution in this field is divided into three chapters, related to three distinct classes of numerical methods.

Shape optimization problems are known to be ill-posed. Three different behaviors are possible to face this situation and do numerical computations :

• modify the problem to make it well-posed, *i.e.* enlarge the space of admissible shapes and allow generalized designs, so that the minimizing sequences converge ;

• narrow the space of admissible shapes, for example in adding regularity constraints, to obtain the existence of optimal shapes ;

• ignore all these difficult mathematical troubles and tackle the problem with brute force.

Each of the three class of numerical methods involved in this document are characterized by one of these attitudes. All of them are "topology optimization methods" since solutions are searched without any kind of restriction on the topology. We will see that some of them are more naturally topological than others.

In Chapter 2, the homogenization method is presented. The relaxation of the compliance optimization problem is established and a very efficient numerical algorithm is proposed, that uses optimal and explicit composite materials. The method is then applied to other objective functions : the relaxed problem is obtained for the multiple-loads case, but optimal composites are not explicit ; the relaxation of the eigenfrequencies maximization problem, leads, through a saddle-point result, to a min-max problem, more tricky to handle. Optimal composites are again known explicitly if the first eigenvalue alone is to be optimized ; then, more general cost-functions are introduced, that depend on the displacement field. The relaxation can still be written but it is useless to make numerical computations. A numerical method, that uses a partial relaxation and sequential laminates, is proposed ; last, objective-functions that depend on the stress tensor are considered. In the same spirit, a partial relaxation is established, that takes into account the stress amplification factor – caused by the microstructures – and allows the problem to be treated numerically.

Chapter 3 summarizes our recent work on shape optimization by the level set method. Level set representation, on fixed meshed, is used to characterize the shapes. Classical domain differentiation gives the proper velocity to move the shape's boundaries and make the optimization. It allows to benefit from the versatility of the classical boundary variation methods, in terms of usable physical models for example, and to avoid some numerical troubles of these methods.

In Chapter 4, some shape optimization is made using evolutionary algorithms. They are member of the third category of algorithms quoted above. Adapted and compact representations for the shapes appear to be a good way to make these kind of algorithms usable in the shape optimization field.

Chapter 5 is a description of a technological application in ophthalmology. This study has led to the conception and the commercialization of a new intra-ocular lens for cataract surgery, that preserves the accommodation capabilities of the patient. This part is more detailed than the others because most of the results have not yet been published, for commercial confidentiality reasons.

Chapter 6 is a very small description of all the software activity that is behind all this. It is shortened on one page, but it is not the least part of our work, in term time spent.

Chapter 7 gathers everything that did not fit with the topic chosen.

The bibliography is large and eclectic. It includes references that are certainly not used to be together on the same page.

Most of the numerical simulation presented to illustrate this document are different from those published in the papers that are summarized.

Table des matières

1 Introduction **1**
1.1 Articles présentés dans ce document . . . 3
1.2 Autres publications . . . 4

2 Optimisation de formes par la méthode d'homogénéisation **7**
2.1 La méthode d'homogénéisation pour la compliance . . . 8
2.1.1 Relaxation du problème d'optimisation de formes . . . 8
2.1.2 Algorithme numérique . . . 12
2.1.3 Quelques simulations numériques . . . 14
2.1.4 Instabilités en damier . . . 17
2.1.5 Cas multi-chargements . . . 17
2.2 Maximisation des premières fréquences propres . . . 19
2.3 Autres fonctions-coût dépendant du déplacement. Relaxation partielle et optimisation de mécanismes compliants . . . 22
2.4 Fonction-coût dépendant du tenseur des contraintes . . . 26

3 Optimisation de formes par la méthode des lignes de niveau **29**
3.1 Dérivée de forme . . . 30
3.2 Paramétrisation des formes par une courbe de niveaux . . . 33
3.3 Algorithme d'optimisation . . . 33
3.4 Gradient topologique et méthode de level set . . . 37

4 Optimisation de formes par algorithmes évolutionnaires **41**
4.1 Identification d'inclusions mécaniques par algorithmes évolutionnaires . . . 41
4.2 Identification de modèles rhéologiques par programmation génétique . . . 43
4.3 Optimisation topologique par algorithmes évolutionnaires . . . 44

5 Quelques applications en ophtalmologie. Implants intraoculaires accommodatifs **47**
5.1 Description schématique du mécanisme de l'accommodation et de la presbytie 48
5.2 L'opération de cataracte . . . 51
5.3 Accommodation et pseudo-accommodation . . . 53
5.4 Critères de conception . . . 56
5.5 Un premier implant accommodatif . . . 57
5.6 Simulation directe du comportement de l'implant à deux composants . . . 58
5.7 Le 1CU . . . 64
5.8 Un nouveau design amélioré . . . 65

6 Activité logicielle **69**

7 Tout le reste... **71**

Bibliographie **73**

1 Introduction

Ce document résume une partie de nos travaux de recherche postérieurs à 1992. L'axe principal en est l'optimisation de structures élastiques, avec un intérêt tout particulier pour les méthodes numériques qui sont associées à ce type de problèmes.

Notre contribution dans ce domaine est subdivisée en trois chapitres regroupant les résultats liés à trois classes de méthodes numériques bien distinctes.

Les problèmes d'optimisation de formes sont des problèmes inverses connus pour être mal posés. Face cette constatation, trois attitudes sont possibles si l'on désire faire des calculs numériques dans ce domaine :

• modifier le problème pour le rendre bien posé, c'est-à-dire élargir l'espace des formes admissibles pour autoriser des solutions généralisées, permettant ainsi aux suites de formes quasi-optimales de converger ;

• restreindre l'espace des formes admissibles, en rajoutant par exemple des contraintes de régularité pour obtenir l'existence de formes optimales ;

• ignorer superbement tous ces problèmes et aborder les calculs numériques frontalement.

Les trois classes de méthodes numériques en question dans ce résumé sont caractéristiques de ces trois approches. Elles ont toutes en commun d'être des méthodes topologiques, c'est-à-dire de rechercher des solutions sans contraintes *a priori* sur la topologie. Même si certaines le sont plus naturellement que d'autres, comme nous le verrons.

Dans le chapitre 2 nous décrivons les résultats obtenus dans le cadre de la méthode d'homogénéisation. La relaxation par homogénéisation du problème de minimisation de la compliance est établie et un algorithme d'optimisation topologique très performant, utilisant des composites optimaux et explicites, est donné. La méthode est ensuite étendue à d'autres fonctions-coût : la relaxation est obtenue pour le cas multi-chargements, mais les composites optimaux ne sont alors plus connus explicitement ; on cherche ensuite à maximiser les premières fréquences propres. La relaxation, établie grâce à un théorème de point-selle, aboutit à un problème de min-max moins agréable à traiter. Mais les composites optimaux restent explicites si l'on optimise la plus petite des valeurs propres ; on introduit ensuite des fonctions-coût plus générales, dépendant du champ de déplacement. La relaxation du problème d'optimisation de formes est toujours possible mais elle est inutilisable en pratique pour faire des calculs. Nous proposons une méthode numérique utilisant une relaxation partielle du problème grâce à des matériaux composites particuliers de la classe des laminés séquentiels ; enfin des fonctions-coût dépendant du champ de contraintes sont envisagées. Dans le même esprit, une relaxation partielle est obtenue, permettant de traiter le problème numériquement, en tenant compte du facteur d'amplification des contraintes dû aux microstructures.

Le chapitre 3 résume nos travaux plus récents en matière d'optimisation de formes par la méthode des courbes de niveaux. Cette méthode utilise, pour les formes, une représentation de type level set sur des maillages fixes, et les techniques classiques de dérivation par rapport au domaine pour faire évoluer les formes et effectuer l'optimisation. Elle permet de profiter de la grande souplesse des méthodes traditionnelles de variation de frontière, du point de vue des modèles physiques utilisables par exemple, tout en évitant certains de leurs inconvénients numériques.

Dans le chapitre 4 nous donnons quelques résultats, liés à l'optimisation de formes, obtenus par algorithmes évolutionnaires. Ils appartiennent à la troisième catégorie d'algorithmes dans la classification ci-dessus. Nous montrons que des représentations adaptées au problème améliorent grandement l'efficacité de ces algorithmes.

Nous présentons ensuite au chapitre 5 une application concrète en ophtalmologie. Elle a mené à la conception et à la commercialisation d'un implant intraoculaire pour l'opération de cataracte permettant au patient d'accommoder. Cette partie est relativement plus développée que les autres car les résultats qui y sont donnés n'ont, pour l'essentiel, pas été publiés par ailleurs, pour des raisons de confidentialité commerciale.

Nous décrivons très rapidement au chapitre 6 l'activité logicielle qui résulte de tout ceci. Si cette description est réduite à la portion congrue dans le cadre de cet exercice de mise en perspective, cette partie n'est pas la plus négligeable de notre production si l'on s'avise de compter le temps qui y a été passé.

Dans le chapitre 7 nous évoquons enfin en quelques mots nos autres travaux de recherche, qui ne seront pas commentés avec plus de détails. Certains n'ont pas fait l'objet de publication pour des raisons diverses, d'autres ne s'inséraient pas bien dans le fil directeur ébauché ci-dessus.

Ce document se termine par une bibliographie extensive, qui mêle des références ayant sans doute rarement l'occasion de se trouver côte à côte.

Outre le chapitre 5 qui présente des résultats inédits, nous proposons au détour de certains chapitres des résultats numériques en général différents de ceux qui se trouvent dans les articles qui y sont résumés.

1.1 Articles présentés dans ce document

[FJ04a] Jouve F., Hanna K., Shape optimization of an accommodative intra-ocular lens, à paraître dans *C. R. Acad. Sci. Paris, Mécanique*, (2004).

[FJ04b] Allaire G., De Gournay F., Jouve F., Toader A.M., Structural optimization using topological and shape sensitivity via a level set method, à paraître dans *Control and cybernetics* (2004).

[FJ04c] Allaire G., Jouve F., A level set method for vibration and multiple loads structural optimization, à paraître dans *Comp. Meth. in App. Mech. and Engrg. Special issue on "Structural and Design Optimization"* (2004).

[FJ04d] Allaire G., Jouve F., Maillot H., Topology optimization for minimum stress with the homogenization method, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, **28**, 87-98 (2004).

[FJ04e] Allaire G., Jouve F., Toader A.M., Structural optimization using sensitivity analysis and a level set method, *J. Comp. Phys.*, **194/1**, 363-393 (2004).

[FJ02a] Allaire G., Jouve F., Toader A.M., A level set method for shape optimization, *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I*, **334** no.12, 1125-1130 (2002).

[FJ02b] Allaire G., Jouve F., Optimal design of micro-mechanisms by the homogenization method, *Europ. J. of Finite Elements*, **11**, 405-416 (2002).

[FJ02c] Hamda H., Jouve F., Lutton E., Schoenauer M., Sebag M., Compact unstructured representations for Evolutionary Design, *Applied Intelligence*, **16**, 139-155 (2002).

[FJ01a] Allaire G., Aubry S., Jouve F., Eigenfrequency optimization in optimal design, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, **190**, 3565-3579 (2001).

[FJ00a] Allaire G., Aubry S., Jouve F., Shape optimization with general objective functions using partial relaxation, *"Topology Optimization of Structures and Composite Continua"*, G.I.N. Rozvany and N. Olhoff eds., Kluwer Acad. Pub., 239-249 (2000).

[FJ99a] Jouve F., Hanna K., Computer simulations of refractive surgery and accommodation mechanisms, *Proc. of IUTAM Symposium "Synthesis in bio solid mechanics", Copenhague, Mai 98*, P. Pedersen and M. Bendsoe eds., Kluwer Acad. Pub., 277-284 (1999).

[FJ98a] Bonnetier E., Jouve F., Checkerboard instabilities in topological shape optimization algorithms, *Proceedings of the Conference on Inverse Problems, Control and Shape Optimization (PICOF'98)*, Carthage (1998).

[FJ97a] Allaire G., Bonnetier E., Francfort G., Jouve F., Shape optimization by the homogenization method, *Nüm. Math.*, **76**, 27-68 (1997).

[FJ96a] Schoenauer M., Kallel L., Jouve F., Mechanical inclusions identification by evolutionary computation, *Europ. J. of Finite Elements*, **5**, 619-648 (1996).

[FJ96b] Allaire G., Belhachmi Z., Jouve F., The homogenization method for topology and shape optimization. Single and multiple loads case, *Europ. J. of Finite Elements*, **5**, 649-672 (1996).

[FJ96c] Schoenauer M., Sebag M., Jouve F., Lamy B., Maitournam H., Evolutionary Identification of Macro-Mechanical Models, in P.J. Angeline and K.E. Kinnear Jr Eds., Advances in Genetic Programming II, MIT Press, Cambridge, MA, 467-488 (1996).

[FJ95a] Kane C., Jouve F., Schoenauer M., Structural topology optimization in linear and nonlinear elasticity using genetic algorithms, 21th *ASME Design Automation Conference*, Boston, (1995).

1.2 Autres publications

Livre :

[FJ93] Jouve F., *Modélisation mathématique de l'œil en élasticité non-linéaire*, "Recherches en Mathématiques Appliquées" (RMA 26), Masson, Paris (1993).

Articles et proceedings :

[FJ05a] Bonnetier E., Brassel M., Chambolle A., Jouve F., A variationnal approach to stress-induced instabilities in heteroepitaxial growth, *11th international conference on fracture*, Turin (2005).

[FJ03a] Allaire G., Jouve F., Toader A.M., Structural optimization by the level set method, *International Series of Numerical Mathematics*, **147**, 1-15, Birkhaüser, Basel (2003).

[FJ03b] Allaire G., Jouve F., Toader A.M., Optimisation de formes par la méthode des lignes de niveaux, 35eme *Congrès national d'Analyse Numérique*, La Grande Motte, ESAIM Proceedings (2003).

[FJ02d] Allaire G., Jouve F., Toader A.M., A Level Set Method for Shape Optimization, *Proceedings of the Conference on Inverse Problems, Control and Shape Optimization (PICOF'02)*, Tunis (2002).

[FJ02e] Bonnetier E., Chambolle A., Jouve F., Equilibrium shape of hetero-epitaxial thin films, *Proceedings of the Conference on Inverse Problems, Control and Shape Optimization (PICOF'02)*, Tunis (2002).

[FJ02f] Hamda H., Jouve F., Lutton E., Schoenauer M., Sebag M., Représentations non structurées en optimisation topologique de formes par algorithmes évolutionnaires, 32eme *Congrès national d'Analyse Numérique*, Port d'Albret 2000, ESAIM Proceedings, **11**, 153-179 (2002).

[FJ01b] Allaire G., Jouve F., Conception de micromécanismes par optimisation topologique, *Congrès français de mécanique*, Nancy (2001).

[FJ01c] Allaire G., Jouve F., Optimisation de structures par homogénéisation pour des fonctions-coût générales. Application à l'optimisation de mécanismes, *Actes du 5ème colloque national en calcul des structures, CSMA ed.*, Teknea, 853-860 (2001).

[FJ99b] Allaire G., Jouve F., Structural optimization by the homogenization method, *Proceedings of IUTAM Symposium "Variations of domains and free-boundary problems in solid mechanics"*, P. Argoul et al. eds., Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 293-300 (1999).

[FJ98b] Allaire G., Aubry S., Jouve F., Optimisation topologique de fréquences propres, 30eme *Congrès national d'Analyse Numérique*, Arles, 147-148 (1998).

[FJ98c] Jouve F., Schoenauer M., Identification de défauts élastiques, une approche évolutionnaire, 30eme *Congrès national d'Analyse Numérique*, Arles, 149-150 (1998).

[FJ97b] Allaire G., Jouve F., Optimisation topologique de structures élastiques. *Actes du* 3eme *colloque national en calcul des structures*, B. Peseux et al. eds., Presses Académiques de l'Ouest, Nantes, 49-58, (1997).

[FJ97c] Allaire G., Aubry S., Jouve F., Simulation numérique de l'endommagement à l'aide du modèle Francfort-Marigo, 29eme *Congrès national d'Analyse Numérique*, Larnas, Mai 97, ESAIM Proceedings, **3**, 1-9 (1998).

[FJ96d] Schoenauer M., Jouve F., Kallel L., Identification of Mechanical Inclusions, *in D. Dasgupta and Z. Michalewicz (ed.) : "Evolutionary Computation in Engineering"*, Springer Verlag, 477-494 (1996).

[FJ96e] Allaire G., Bonnetier E., Francfort G., Jouve F., A topological approach to shape optimization, *Applied Stochastics and Optimization, O. Mahrenholtz et al. eds., ICIAM 95 special issue of ZAMM, Z. Angew. Math. Mech.*, **76** S3, 255-258 (1996).

[FJ92a] Hanna K., Jouve F., Waring G., Ciarlet P., Computer Simulation of arcuate Keratotomy for Astigmatism, *Refractive and Corneal Surgery*, **8**, 152-163 (1992).

[FJ92b] Godfroy F., Jacquemin P., Tissier P.Y., Jouve F., Three Dimensionnal Simulation of Unsteady Inviscid Flows Using a Second Order Finite Volume Method. Application to Flows Inside Solid Propellant Motors, 10th *Int. Conf. on Computing Methods in Applied Sciences and Engineering*, INRIA, Paris, 797-809 (1992).

[FJ91a] Hanna K., Jouve F., Ciarlet P., Preliminary Computer Simulation of Radial Keratotomy, *in "Refractive Keratotomy for Myopia and Astigmatism"*, G. Waring M.D. (ed.), Mosby Year Book, St Louis, MO, 1031-1058 (1991).

[FJ91b] Hanna K., Jouve F., Ciarlet P., Computer Simulation of arcuate Keratotomy for Astigmatism. *in "Refractive Keratotomy for Myopia and Astigmatism"*, G. Waring M.D. (ed.), Mosby Year Book, St Louis, MO, 1249-1280 (1991).

[FJ91c] Hanna K., Jouve F., Kaiss A., Letallec P., Viscoelastic model for the human cornea, 2nd *Symposium on High Performance Computing*, Montpellier, North-Holland, 631-640 (1991).

[FJ91d] Hanna K., Jouve F., Kaiss A., Letallec P., Viscoelastic model for the human cornea, *Les annales maghrébines de l'ingénieur*, Tunis, **2**, 552-558 (1991).

[FJ91e] Hanna K., Jouve F., Computer Simulation of Radial Keratotomy, 50th *anniversary of the "Centro de ophtalmologia Barraquer", Symposium on novel advances in cataract and corneal refractive surgery*, Barcelona, (1991).

[FJ91f] Jouve F., Hanna K., Modélisation de l'œil humain en élasticité non-linéaire et application à la chirurgie réfractive, *First European Conference on Mathematics applied to Biology and Medicine*, Grenoble, (1991).

[FJ90a] Hanna K., Jouve F., Waring G., Finite Element Computational Models of Corneal Surgery, *third Int. Congress on Laser Surgery of the Cornea*, Atlanta, (1990).

[FJ89a] Hanna K., Jouve F., Waring G., Preliminary Computer Simulation of the effects of Radial Keratotomy, *Archives of Ophtalmology*, **107**, 911-918 (1989).

[FJ89b] Hanna K., Jouve F., Waring G., Preliminary Computer Simulation of the effects of Radial Keratotomy, *Key Ophtalmology*, **4**, 26-27 (1989).

[FJ89c] Hanna K., Jouve F., Waring G., Ciarlet P., Computer Simulation of Arcuate and Radial Incisions involving the corneo-scleral limbus, *Eye*, **3**, 227-239 (1989).

[FJ88a] Hanna K., Jouve F., Bercovier M., Waring G., Computer Simulation of Lamellar Keratectomy and Myopic Keratomeleusis, *J. of Refractive Surgery*, **4**, num. 6, 222-231 (1988).

[FJ88b] Jouve F., Bercovier M., Hanna K., Toward computer aided surgery : Refractive surgery simulations, *Computational Mechanics 88, Theory and Applications*, Springer-Verlag, 61.vi.1-4 (1988).

[FJ86a] Bercovier M., Hanna K., Jouve F., An analysis of Refractive Surgery by the Finite Elements Method, *Computational Mechanics 86, Theory and applications*, Springer-Verlag, 143-148 (1986).

Rapports de contrats industriel :

[Cont04a] Jouve F., Aspheric IOLs, *HumanOptics report*, (Jul. 04).

[Cont03b] Jouve F., Non accommodative IOLs, *HumanOptics report*, (Jul. 03).

[Cont03a] Jouve F., Accommodative IOLs, *HumanOptics report*, (Feb. 03).

[Cont02b] Jouve F., Non accommodative IOLs, *HumanOptics report*, (Dec. 02).

[Cont02a] Jouve F., Intra-ocular rings, *HumanOptics report*, (May 02).

[Cont01a] Jouve F., Mounaix P., Pesme D., Traitement de l'U235 dans les codes de propagation dans le cadre de la séparation isotopique par laser, *Rapport CEA*, (Déc. 01).

[Cont94a] Béreux F., Jouve F., Étude des instabilités de combustion dans les moteurs à poudre, *Contrat SNPE*, (Sep. 94).

[Cont93b] Béreux F., Jouve F., Étude des instabilités de combustion dans les moteurs à poudre : comparaison de deux modèles d'écoulement diphasique. *Contrat SNPE*, (Sep. 93).

[Cont93a] Jouve F., Étude de fluides parfaits compressibles pour le calcul des propulseurs à poudre – Un schéma implicite pour les équations de Navier-Stokes, *Contrat SNPE*, (Juin 93).

[Cont91a] Jouve F., Étude de fluides parfaits compressibles pour le calcul des propulseurs à poudre, *Contrat SNPE*, (Déc. 91).

[Cont90b] Islah Y., Jouve F., Lefloch P., Étude de fluides parfaits compressibles pour le calcul des propulseurs à poudre – Méthode implicite, *Contrat SNPE*, (Déc. 90).

[Cont90a] Islah Y., Jouve F., Lefloch P., Étude de fluides parfaits compressibles pour le calcul des propulseurs à poudre – Méthode implicite, *Contrat SNPE*, (Fév. 90).

[Cont89a] Dupuy J.M., Jouve F., Lefloch P., Étude de fluides parfaits compressibles pour le calcul des propulseurs à poudre – Méthode d'ordre 2, *Contrat SNPE*, (Fév. 89).

Vulgarisation :

1. Jouve F., (titre non encore fixé pour un article sur les implants accommodatifs dans la rubrique W^{xyz}), *La Recherche* (à paraître).
2. Jouve F., Chirurgie par ordinateur, *Pour la Science*, 152, (juin 90), 24-26.

2 Optimisation de formes par la méthode d'homogénéisation

Dans ce chapitre nous présentons les grandes lignes de la méthode d'optimisation de formes par homogénéisation.

On considère un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N = 2, 3)$ soumis à des forces surfaciques f assez régulières (par exemple $f \in H^{-1/2}(\partial\Omega)^N$). On suppose les forces extérieures équilibrées, *i.e.*

$$\int_{\partial\Omega} f ds = 0.$$

Une partie du domaine est remplie d'un matériau isotrope linéairement élastique A de coefficients de Lamé λ et μ

$$A = \lambda I_2 \otimes I_2 + 2\mu I_4,$$

et son complémentaire est vide. Lorsque nous le préciserons il pourra être rempli d'un matériau B, supposé "plus mou" que A (*i.e.* $\mu_B < \mu$ et $\lambda_B + 2\mu_B/N < \lambda + 2\mu/N$).

Soit χ la fonction caractéristique associée à la partie Ω_χ de Ω occupée par le matériau élastique. Si Ω_χ est un ouvert assez régulier contenant la partie de $\partial\Omega$ où f est non-nulle, alors le problème d'élasticité linéarisée sur Ω_χ est bien posé. Autrement dit si

$$e(u) = \frac{1}{2}\left(\nabla u + \nabla^t u\right) \text{ et } \sigma = Ae(u)$$

alors

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\text{div}\,\sigma & = & 0 & \text{dans } \Omega_\chi, \\ \sigma \cdot n & = & f & \text{sur } \partial\Omega_\chi \cap \partial\Omega \\ \sigma \cdot n & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega_\chi \setminus \partial\Omega \end{array} \right. , \tag{1}$$

admet une unique solution $\sigma \in L^2(\Omega_\chi; \mathbb{R}_s^{N^2})$ et un champ de déplacement associé $u \in H^1(\Omega_\chi)^N$, unique à un déplacement rigide près.

Nous cherchons à optimiser un critère – par exemple de rigidité – sur l'ensemble des formes possibles, avec éventuellement une contrainte sur le poids total de la structure, mais sans condition supplémentaire sur la topologie ou sur la régularité de la forme. Nous considérons successivement dans ce chapitre un critère de rigidité global (la compliance, ou une somme de compliances pour plusieurs chargements successifs), puis un critère sur les fréquences propres, et enfin deux familles de fonctions-coût dépendant du déplacement u ou du champ de contraintes σ.

2.1 La méthode d'homogénéisation pour la compliance

Cette partie résume les résultats obtenus dans [FJ96b], [FJ97a] et [FJ98a] en collaboration avec Grégoire Allaire, Zakaria Belhachmi, Éric Bonnetier et Gilles Francfort. Nous la décrivons avec plus de détails que les suivantes car elle est à la base des développements ultérieurs pour d'autres fonctions-objectif.

2.1.1 Relaxation du problème d'optimisation de formes

Le tenseur des contraintes σ solution de (1) peut être prolongé par 0 en un élément de $L^2(\Omega; \mathbb{R}_s^{N^2})$ qui minimise l'énergie complémentaire

$$c(\chi) := \int_\Omega A^{-1}\sigma \cdot \sigma dx = \min_{\tau \in \Sigma(\chi)} \int_\Omega A^{-1}\tau \cdot \tau dx \tag{2}$$

où l'ensemble $\Sigma(\chi)$ des contraintes statiquement admissibles est défini par

$$\Sigma(\chi) = \left\{ \tau \in L^2(\Omega; \mathbb{R}_s^{N^2}) \mid \operatorname{div} \tau = 0 \text{ dans } \Omega,\ \tau \cdot n = f \text{ sur } \partial\Omega,\ \tau(x) = 0 \text{ p.p. } \chi(x) = 0 \right\}. \tag{3}$$

La quantité $c(\chi)$ définie par (2) est appelée la compliance. Elle s'écrit aussi

$$c(\chi) = \int_{\partial\Omega} f \cdot u dx, \tag{4}$$

Lorsque $\chi(x)$ est une fonction caractéristique quelconque, l'existence de u et σ n'est pas assurée mais on peut définir une compliance généralisée par

$$c(\chi) := \inf_{\tau \in \Sigma(\chi)} \int_\Omega A^{-1}\tau \cdot \tau dx. \tag{5}$$

Pour un volume de matériau élastique donné $0 < \Theta \leq |\Omega|$, nous cherchons à trouver la structure la plus rigide possible lorsqu'elle est soumise aux forces f. Le choix du critère de rigidité n'est pas indifférent. Nous utilisons ici un critère énergétique qui donne une mesure globale de la rigidité. Nous examinerons plus loin d'autres choix qui permettent de contrôler plus localement la structure. Le problème revient donc à trouver une forme qui atteigne le minimum de

$$I := \inf \left\{ c(\chi) \ \mid \ \chi \in L^\infty(\Omega; \{0,1\}),\ \int_\Omega \chi(x) dx = \Theta \right\}. \tag{6}$$

Afin d'éviter des complications supplémentaires dues à la minimisation sous contrainte de volume, on introduit un multiplicateur de Lagrange $\ell > 0$ et on considère le problème suivant, qui revient à chercher un compromis entre le poids et la rigidité de la pièce :

$$I(\ell) := \inf_{\chi \in L^\infty(\Omega;\{0,1\})} \left\{ c(\chi) + \ell \int_\Omega \chi(x) dx \right\}. \tag{7}$$

Ce problème peut se réécrire

$$I(\ell) = \inf_{\tau \in \Sigma(\Omega)} \int_\Omega f_\ell(\tau) dx, \tag{8}$$

avec

$$\Sigma(\Omega) := \left\{ \tau \in L^2(\Omega; \mathbb{R}_s^{N^2}) \ \mid \ \text{div}\, \tau = 0 \text{ dans } \Omega, \ \ \tau \cdot n = f \text{ sur } \partial\Omega \right\}, \tag{9}$$

et

$$f_\ell(\tau) := \begin{cases} 0 & \text{si } \tau = 0 \\ A^{-1}\tau \cdot \tau + \ell & \text{si } \tau \neq 0. \end{cases} \tag{10}$$

En l'absence de contraintes supplémentaires sur les formes admissibles – par exemple des contraintes de régularité du bord – ce problème est connu pour n'avoir pas toujours de solution. La raison physique de ce phénomène est qu'il est souvent plus avantageux, pour améliorer la performance d'une structure donnée, de creuser un grand nombre de petits trous plutôt qu'un gros trou de même volume. Mathématiquement on retrouve ce phénomène en constatant que les suites minimisantes de (7) ne convergent pas forcément vers une fonction caractéristique.

Pour contourner ce problème, la solution consiste à élargir l'espace des formes admissibles afin d'autoriser les structures contenant des micro-perforations de taille arbitraire. Les travaux de Murat-Tartar [94] ont montré que le cadre adéquat pour ce genre de problème était la théorie de l'homogénéisation. Le processus en jeu est la relaxation de la fonction-coût.

Ici, une difficulté supplémentaire provient du fait que la fonction $f_\ell(\tau)$ manque non seulement de convexité – et la relaxation va revenir à la quasi-convexifier – mais aussi de continuité en 0. C'est la traduction de la présence de vide dans les trous. Nous passons alors par une étape consistant à remplir les trous d'un matériau "mou" et à faire tendre soigneusement ce matériau vers le vide.

Pour un petit paramètre η, on approche $f_\ell(\tau)$ par

$$f_\ell^\eta(\tau) := \min \left\{ A^{-1}\tau \cdot \tau + \ell, \eta^{-1}\tau \cdot \tau \right\}. \tag{11}$$

Le problème d'optimisation de forme (8) est remplacé par

$$I(\ell, \eta) = \inf_{\tau \in \Sigma(\Omega)} \int_\Omega f_\ell^\eta(\tau) dx. \tag{12}$$

La relaxation de ce problème a été établie dans [7] et [8]. Elle s'écrit

$$I(\ell, \eta) = I^*(\ell, \eta) := \min_{\tau \in \Sigma(\Omega)} \int_\Omega \min_{0 \leq \theta \leq 1} \left\{ \min_{A^* \in G_\theta^\eta} \left(A^{*-1}\tau \cdot \tau \right) + \ell\theta \right\} dx, \tag{13}$$

où G_θ^η désigne l'ensemble des lois de Hooke A^* effectives que l'on peut obtenir en mélangeant de façon arbitraire du matériau A et du matériau η en proportions respectives θ et $(1-\theta)$.

On effectue le passage à la limite monotone $\eta \searrow 0$ et on peut énoncer le résultat suivant :

Théorème 1 *La formulation en contraintes (8), (9), (10) du problème de design optimal admet la formulation relaxée*

$$I(\ell) = I^*(\ell) := \min_{\tau \in \Sigma(\Omega)} \int_\Omega \min_{0 \le \theta \le 1} \left\{ \min_{A^* \in G_\theta} \left(A^{*-1}\tau \cdot \tau \right) + \ell\theta \right\} dx, \tag{14}$$

où G_θ désigne l'ensemble des lois de Hooke A^* effectives que l'on peut obtenir en mélangeant de façon arbitraire du matériau A et du vide en proportions respectives θ et $(1-\theta)$.

Autrement dit, pour toute valeur donnée du multiplicateur de Lagrange $\ell \ge 0$,

1. *il existe au moins une solution dans $\Sigma(\Omega)$ du problème relaxé (14) et*

$$I(\ell) := \inf_{\tau \in \Sigma(\Omega)} \int_\Omega f_\ell(\tau) dx = I^*(\ell), \tag{15}$$

2. *à une sous-suite près, toute suite minimisante de (8) converge faiblement dans $L^2(\Omega; \mathbb{R}_s^{N^2})$ vers un minimiseur de (14),*
3. *pour tout minimiseur τ de (14), il existe une suite minimisante de (8) qui converge faiblement vers τ dans $L^2(\Omega; \mathbb{R}_s^{N^2})$.*

En explicitant les conditions d'optimalité en θ dans (14), on remarque que, pour une valeur donnée de ℓ, un champ de contraintes optimal τ permet de définir de façon unique une densité optimale θ_ℓ. Mais il n'y a pas unicité des formes optimales. On peut énoncer le résultat d'existence suivant :

Proposition 2 *Pour toute valeur donnée du multiplicateur de Lagrange $\ell \ge 0$, il existe au moins une forme optimale généralisée caractérisée par une distribution de densité θ_ℓ.*

De plus, pour toute suite minimisante $(\chi_n) \subset L^\infty(\Omega; \{0,1\})$ de (8), il existe une sous-suite qui converge dans $L^\infty(\Omega; [0,1])$ faible-$*$ vers une certaine distribution de densité θ_ℓ qui est une forme optimale généralisée.

L'ensemble G_θ introduit ci-dessus, appelé aussi G-fermeture, ne peut pas être décrit complètement pour l'élasticité, alors que c'est le cas par exemple pour la conduction [94][120]. Cependant, la théorie des bornes optimales (cf. [7][8][12][65]) nous permet de calculer le minimum de l'énergie complémentaire sur cet ensemble qui intervient dans l'intégrant de (14).

Ce minimum est atteint pour une classe particulière de matériaux composites qui font partie des rares constructions de microstructures permettant le calcul explicite des coefficients homogénéisés. Il s'agit des matériaux construits par empilements de couches successives appelés laminés séquentiels (cf. [55]).

Proposition 3 *Pour $\tau \in \mathbb{R}_s^{N^2}$ et $\theta \in [0,1]$ donnés, on a*

$$\min_{A^* \in G_\theta} \left(A^{*-1}\tau \cdot \tau \right) = \min_{A^* \in L_\theta} \left(A^{*-1}\tau \cdot \tau \right) \tag{16}$$

où L_θ désigne l'ensemble des lois de Hooke effectives obtenues par un processus de laminations séquentielles de rang fini de matériau A et de vide en proportions respectives θ et $(1-\theta)$.

De plus, en dimension N, le minimum est atteint pour un laminé de rang au plus N dont les directions de lamination (e_i) sont les directions principales du tenseur τ. Le tenseur A^* optimal a pour expression

$$A^{*-1} = A^{-1} + \frac{1-\theta}{\theta} \left(\sum_{i=1}^{N} m_i f_A^c(e_i) \right)^{-1}, \tag{17}$$

où $f_A^c(e_i)$ est un tenseur d'ordre 4, fonction de la direction de lamination e_i, défini pour toute matrice symétrique ξ par

$$f_A^c(e_i)\xi \cdot \xi = A\xi \cdot \xi - \frac{1}{\mu}|A\xi e_i|^2 + \frac{\mu+\lambda}{\mu(2\mu+\lambda)}((A\xi)e_i \cdot e_i)^2. \tag{18}$$

Les proportions de lamination $(m_i)_{1\le i\le N}$ caractérisant ce composite vérifient $\sum_1^N m_i = 1$ et $0 \le m_i \le 1$. Leurs expressions sont données par des formules explicites en dimension 2 et 3.

Le calcul explicite des laminés optimaux s'effectue en deux temps : on montre d'abord que les directions de lamination coïncident avec les directions principales du tenseur des contraintes τ, ce qui simplifie l'expression du tenseur homogénéisé, puis on établit les formules pour les proportions de lamination du laminé optimal.

La minimisation en A^* étant effectuée à θ fixé, on voit que la minimisation en θ dans (14) se fait facilement en réécrivant $\left(A^{*-1}\tau \cdot \tau \right)$ grâce aux expressions (17) et (18). On obtient une valeur unique de θ, optimale en chaque point du domaine.

Ces résultats sont à la base de l'algorithme numérique, de type "directions alternées", que nous décrivons maintenant.

2.1.2 Algorithme numérique

L'idée de base est de considérer le problème relaxé (14) comme un problème de minimisation en (τ, θ, A^*) que l'on traite en minimisant alternativement par rapport à τ et par rapport aux variables de forme (θ, A^*). La relaxation a permis d'élargir l'espace des formes admissibles pour rendre le problème bien posé. Une forme généralisée est caractérisée, en chaque point x du domaine Ω, par une densité de matière $\theta(x)$ et une microstructure associée de loi de Hooke effective $A^*(x)$. Les résultats ci-dessus permettent de calculer, en chaque point, pour une valeur donnée du champ de contrainte τ, des valeurs optimales de (θ, A^*), et cette optimisation est explicite. Ce passage par les matériaux composites pourrait sembler un pur artifice mathématique pour prouver un théorème d'existence. Pourtant l'algorithme ci-dessous est remarquablement efficace pour faire de l'optimisation topologique de structures. Il reprend les avantages de l'algorithme pionnier en la matière de Bendsoe et Kikuchi [21], c'est-à-dire la capture d'une forme sur un maillage fixe grâce à la répartition d'une densité de matière plutôt qu'en représentant son bord. Il a en plus la particularité de permettre la minimisation explicite des paramètres de forme par des composites optimaux.

L'algorithme que nous proposons se déroule de la manière suivante :

1. le domaine Ω est discrétisé par des éléments finis quadrangulaires. Les déplacements sont approchés par des fonctions $Q1$ et les paramètres de forme sont constants par éléments ;
2. on considère un choix initial de paramètres de design, par exemple $\theta(x) \equiv 1$ et $A(x)^* \equiv A$;
3. on itère jusqu'à convergence :
   (a) les paramètres de forme étant fixés, on résoud un problème d'élasticité linéaire et on calcule le champ de contraintes τ correspondant ;
   (b) on modifie les paramètres de design en déterminant la structure localement optimale pour les valeurs du champ de contraintes. Grâce à la Proposition 3, cette étape est explicite.

A chaque itération, la valeur de la fonctionnelle diminue. La convergence de l'algorithme est donc garantie. Elle s'effectue en général en moins d'une centaine d'itérations. Le coût de calcul est presque entièrement dû à l'étape (a) puisque l'étape (b) est explicite. Bien qu'il n'y ait pas de résultat d'unicité de la solution, on n'observe pas numériquement de dépendance de la solution par rapport à l'initialisation de l'algorithme (cf. Figure 3). Il n'y a pas non plus de dépendance par rapport au maillage (Figure 4, mais c'était attendu puisque la méthode a été en partie conçue pour cela.

On obtient une forme optimale généralisée comportant souvent de larges plages de matériau composite où $0 < \theta < 1$. Afin de retrouver des solutions classiques, on effectue, après convergence de l'algorithme ci-dessus, quelques itérations supplémentaires en pénalisant

les matériaux composites et en forçant (doucement) θ à prendre les valeurs 0 ou 1. Concrètement, cela revient à calculer la valeur optimale de θ en chaque point du domaine (donc dans chaque maille pour le problème discret) et à la remplacer par une valeur modifiée, plus proche de 0 ou 1. Dans la pratique, cette procédure purement numérique converge très bien vers des solutions quasi-optimales dont la performance est proche de celle de la solution généralisée de départ. Un examen attentif des résultats numériques montre que les structures macroscopiques qui apparaissent au cours de la procédure de pénalisation, comme des réseaux de barres en 2d, sont le reflet des microstructures présentes dans la solution composite. Cette constatation permet de faire les remarques suivantes :

• les méthodes à un paramètre de densité, comme la méthode dite "convexifiée" – qui utilise la convexification du problème (8) – ou les diverses méthodes de "matériau fictif" ou encore la méthode SIMP, ne comportant pas de microstructure locale, ne peuvent pas atteindre des solutions aussi riches que celles fournies par la méthode d'homogénéisation. Nos expériences numériques le confirment ;

• les solutions pénalisées dépendent fortement de la finesse du maillage sur lequel s'effectue le calcul, contrairement aux solutions composites (Figure 3) ;

• en général, seule la solution pénalisée est intéressante d'un point de vue pratique. Pourtant l'étape de calcul du problème relaxé est nécessaire pour assurer la bonne qualité de la solution pénalisée. Pénaliser les composites dès le début du calcul aboutit à des solutions très pauvres et peu performantes.

2.1.3 Quelques simulations numériques

Le lecteur intéressé pourra consulter le site `www.cmap.polytechnique.fr/~optopo` qui contient de nombreux exemples de simulations obtenues par la méthode d'homogénéisation et la méthode des courbes de niveau. Elles sont pour la plupart différentes de celles présentées ici et dans les articles joints à ce document. Nous proposons ici quelques exemples illustrant certaines bonnes propriétés de la méthode d'homogénéisation.

La Figure 1 présente un exemple d'une solution composite optimale pour le problème du cantilever et de la structure classique quasi-optimale obtenue par pénalisation des composites en partant de cette solution généralisée. L'historique de convergence de la Figure 2 montre que l'algorithme converge en moins de 100 itérations, les toutes premières itération améliorant dramatiquement la performance de la structure, initialisée par une distribution uniforme de matériau. L'énergie associée à la solution pénalisée est peu différente de celle de la solution composite.

Les Figures 3 et 4 montrent l'insensibilité apparente de l'algorithme respectivement à l'initialisation choisie et à la finesse de la discrétisation. Les Figures 5 et 6 illustrent le caractère topologique de la méthode, en 2d et en 3d.

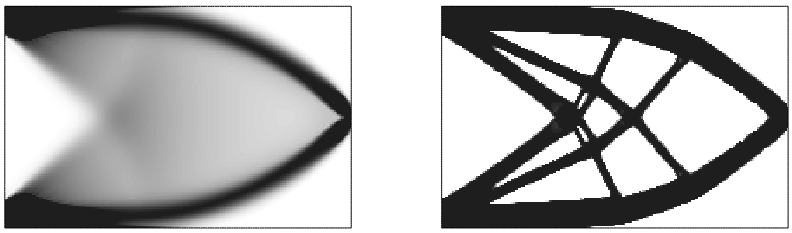

FIG. 1 – Solution optimale pour le problème du cantilever obtenue en partant d'une distribution uniforme de matériau. A gauche : solution généralisée comportant de larges plages de composites ; à droite : solution pénalisée.

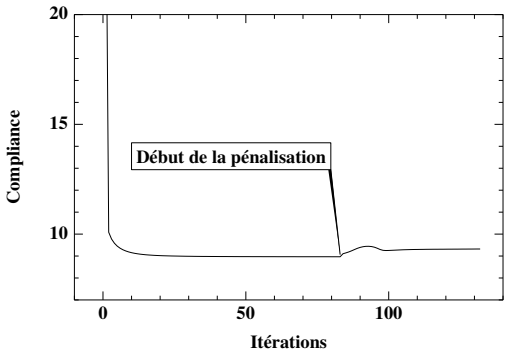

FIG. 2 – Historique de convergence de l'algorithme.

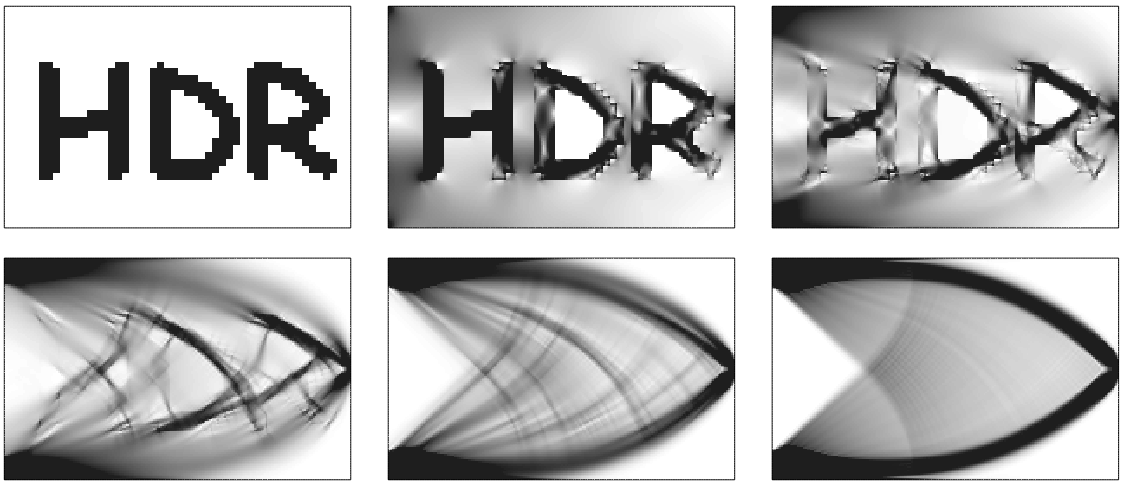

FIG. 3 – État de la solution composite à différentes étapes du calcul lorsque l'on démarre avec une initialisation absurde (en haut à gauche). On retrouve la solution de la Figure 1, au prix d'un nombre d'itérations un peu augmenté pour obtenir la convergence.

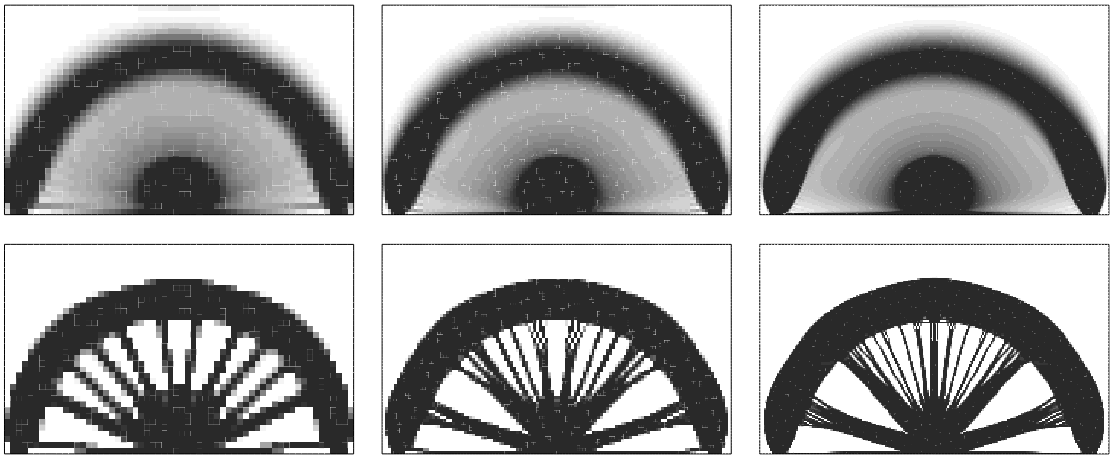

FIG. 4 – En haut : solutions composites pour le problème de l'arche (ou de la roue) pour trois finesses de maillage croissantes de gauche à droite. En bas : solutions pénalisées. Les solutions composites sont indépendantes du maillage, tandis que les solutions pénalisées font apparaître des détails d'autant plus fins que la maillage le permet.

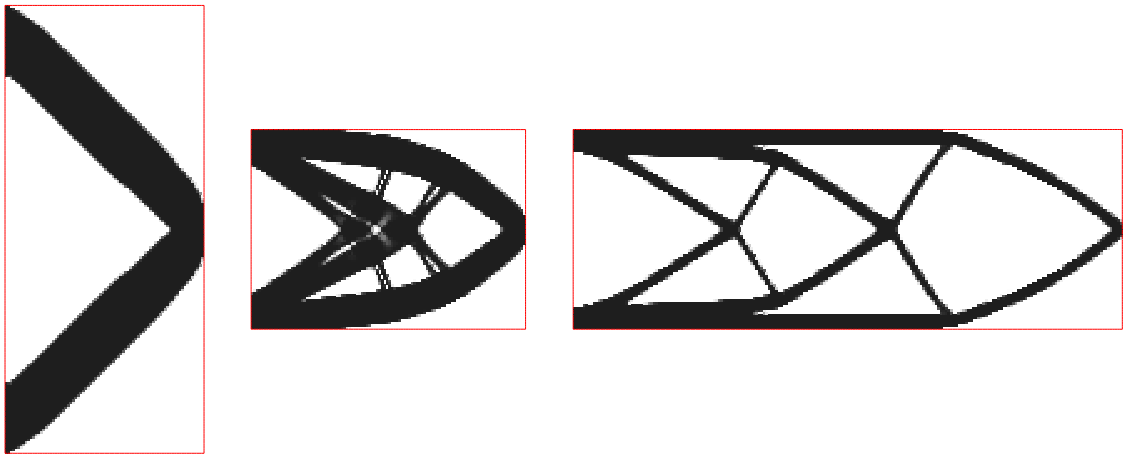

FIG. 5 – Différentes topologies de cantilevers optimaux pour différentes dimensions du domaine de calcul. La quantité de matériau est la même pour les trois structures.

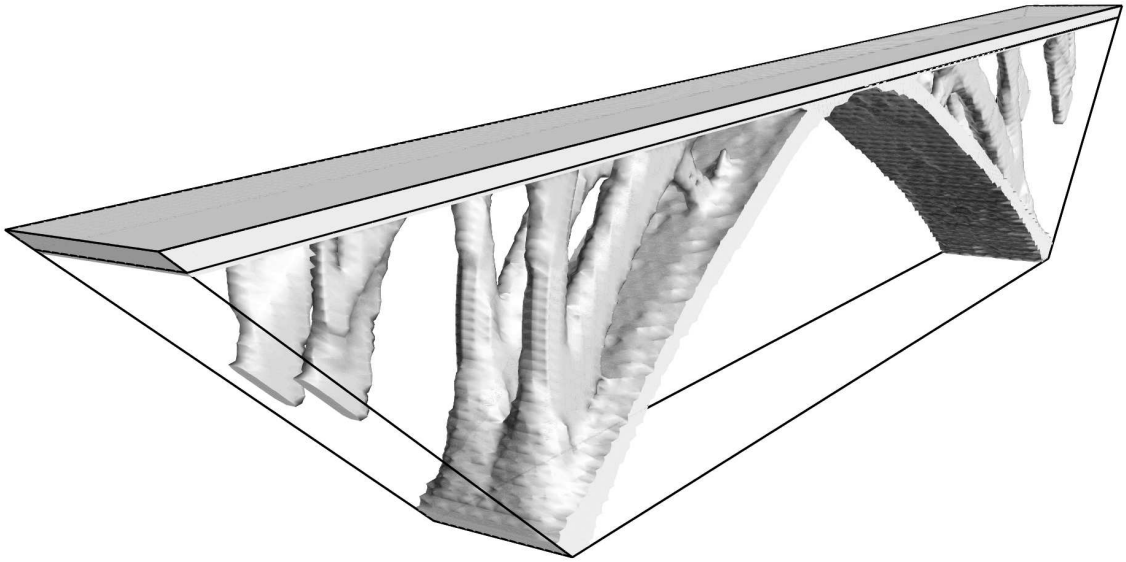

FIG. 6 – Pont optimal.

2.1.4 Instabilités en damier

Comme de nombreux auteurs, nous observons l'apparition d'instabilités en damiers sur le champ θ lors de calculs numériques bidimensionnels avec des éléments finis quadrangulaires sur lesquels le champ de déplacement est discrétisé avec une interpolation Q1 et les paramètres de forme (θ, A^*) sont constants par maille (Q0). Une discrétisation Q2/Q0 permet d'éviter totalement ce genre de problème, au prix d'un coup de calcul beaucoup plus important pour obtenir une finesse identique de description de la forme. Des procédures de filtrage, analogues à celles utilisées pour le problème de Stokes lorsque le problème discret ne satisfait pas la condition inf-sup de Babuška-Brezzi [25], sont très efficaces pour éliminer ces instabilités. Toutefois, la cause de leur apparition pour les problèmes d'optimisation de forme était incertaine. Dans [FJ98a] nous proposons une explication de ce phénomène, dans le cadre de l'optimisation de la compliance qui utilise des laminés de rang 2 optimaux, à travers un calcul explicite sur un bloc de 4 éléments. Nous montrons que pour des variables de forme constantes par morceaux, la discrétisation Q1 des déplacements amplifie une instabilité infinitésimale initiale tandis que la discrétisation Q2 l'amortit. La discrétisation Q1-bulle, qui est stable pour le problème de Stokes, est instable pour l'optimisation de formes.

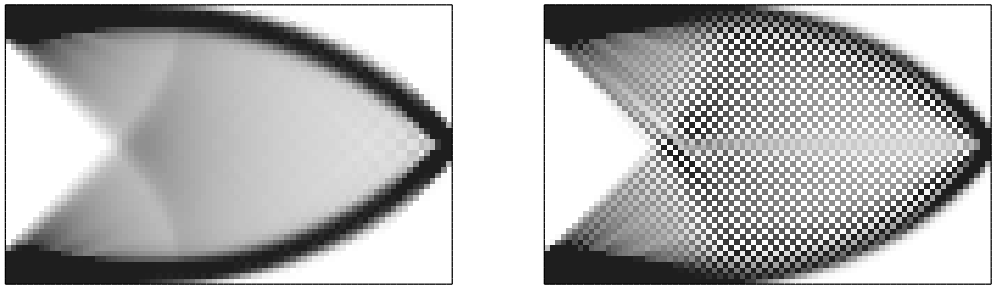

FIG. 7 – Exemple d'instabilités en damier sur le cantilever 2d. À gauche la solution avec filtrage approprié, à droite sans filtrage.

2.1.5 Cas multi-chargements

Une extension naturelle du problème de la compliance consiste à optimiser une structure soumise à plusieurs chargements successifs. Du point de vue des applications, ce problème est plus pertinent. Si les forces appliquées sont choisies avec soin, on peut ainsi approcher le cas très intéressant de l'optimisation robuste.

On considère p chargements distincts $(f_i)_{1\leq i\leq p}$ et les p problèmes d'élasticité associés analogues à (1).

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\mathrm{div}\,\sigma_i & = & 0 & \text{dans } \Omega, \\ \sigma_i \cdot n & = & f_i & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right. . \tag{19}$$

On cherche à minimiser la somme des compliances associées à chacune des solutions (σ_i) de (19) sous une contrainte de volume total de la pièce. La formulation relaxée de ce problème appelé "multi-chargements" s'établit de manière identique à celle du problème mono-chargement. Son expression est analogue :

$$I^*(\ell) = \int_\Omega \min_{0\leq\theta\leq 1} \left\{ \min_{A^*\in G_\theta} \sum_{i=1}^{p} \left(A^{*-1}\tau_i \cdot \tau_i \right) + \ell\theta \right\} dx, \tag{20}$$

avec τ_i le champ de contraintes solution du problème $(19)_i$.

La différence fondamentale avec le cas mono-chargement provient du fait que l'on ne sait pas calculer explicitement les bornes optimales d'une somme d'énergies complémentaires. Un résultat théorique [56] nous dit que la borne est atteinte pour un matériau de la classe des laminés séquentiels avec un rang de lamination valant au plus 3 en 2d et 6 en 3d. On peut donc, comme dans le cas mono-chargement, remplacer dans (20) la minimisation sur G_θ par une minimisation sur L_θ (et même un sous-ensemble de L_θ), mais la caractérisation explicite de ces laminés optimaux n'est pas connue. La difficulté vient du fait que l'on ne sait pas déterminer les directions de lamination.

Nous modifions l'algorithme numérique précédent pour l'adapter au multi-chargement tout en gardant le même esprit : l'étape (a) consiste maintenant à calculer les p solutions distinctes des problèmes d'élasticité $(19)_i$ pour $1 \leq i \leq p$, et l'étape (b) est remplacée par une procédure numérique permettant de trouver une approximation du tenseur A^* optimal.

On cherche la loi de Hooke effective quasi-optimale dans la classe des matériaux laminés séquentiels. L'inspection de la formule de lamination (17)(18) indique que la somme des énergies complémentaires est convexe par rapport aux proportions $\{m_i\}$ mais pas par rapport aux directions de lamination $\{e_i\}$. Effrayés par la perspective de minimiser numériquement de nombreuses fois une fonction non-convexe (n'oublions pas que cette minimisation s'effectue une fois par maille et par itération), nous proposons de fixer au début du calcul le nombre q de laminations et leurs directions $\{e_i\}_{1\leq i\leq q}$ et d'effectuer numériquement la minimisation de la fonctionnelle sur la classe des laminés de rang q ayant $\{e_i\}$ pour directions de lamination. Cette minimisation convexe en $\{m_i\}$ se fait par une méthode classique de gradient projeté. En pratique, les directions de lamination sont choisies en nombre suffisant et aussi equiréparties que possible (c'est surtout un problème en 3d) pour "couvrir" à peu près uniformément toutes les directions du demi-espace.

Comme dans le cas mono-chargement, le calcul de θ optimal est facile une fois la minimisation sur L_θ faite.

2.2 Maximisation des premières fréquences propres

Cette partie résume les résultats publiés dans [FJ01a] en collaboration avec Grégoire Allaire et Sylvie Aubry.

Nous nous proposons de maximiser les premières fréquences propres, ou une somme pondérée de celles-ci, pour un domaine borné rempli de deux matériaux élastiques, avec une contrainte sur le volume du plus rigide des deux matériaux. Contrairement au problème de la compliance décrit précédemment, on considère ici deux matériaux non-dégénérés.

Les fréquences propres de vibration ω d'un domaine Ω rempli de deux matériaux linéairement élastiques de lois de Hooke A_1 et A_2 (supposées bien ordonnées au sens des formes quadratiques) et de masses volumiques ρ_1 et ρ_2 sont les racines carrées des valeurs propres du système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\text{div } A_\chi e(u) & = & \omega^2 \rho_\chi u & \text{dans } \Omega \\ A_\chi e(u) \cdot \vec{n} & = & 0 & \text{sur } \Gamma_N \\ u & = & 0 & \text{sur } \Gamma_D \end{array} \right. , \tag{21}$$

où χ désigne la fonction caractéristique du matériau le plus rigide,

$$A_\chi(x) := (1 - \chi(x))A_1 + \chi(x)A_2,$$

la loi de Hooke locale en chaque point et

$$\rho_\chi(x) := (1 - \chi(x))\rho_1 + \chi(x)\rho_2,$$

est la masse volumique au point x. Le problème (21) admet une famille dénombrable de valeurs propres positives $0 < \omega_1 \leq \ldots \leq \omega_k$ données par :

$$\omega_k^2 = \min_{\substack{u_1,\ldots,u_k \in \mathcal{H}, \\ \dim_{[u_1,\ldots,u_k]}=k}} \max_{u \in \text{span}[u_1,\ldots,u_k]} \frac{\displaystyle\int_\Omega A_\chi e(u) \cdot e(u) dx}{\displaystyle\int_\Omega \rho_\chi |u|^2 dx}, \tag{22}$$

où $\mathcal{H}$ désigne l'ensemble des champs de déplacement de $H^1(\Omega)$ nuls sur Γ_D.

Pour s'affranchir de la contrainte de volume sur l'un des deux matériaux, nous introduisons $\ell > 0$, un multiplicateur de Lagrange fixé. Si nous cherchons à maximiser la plus petite des fréquences propres, le problème s'écrit :

$$I = \sup_{\chi \in L^\infty(\Omega;\{0,1\})} \left\{ \omega_1^2(\chi) - \ell \int_\Omega \chi(x) dx \right\}. \tag{23}$$

Le problème (23) étant mal posé, nous en proposons une formulation relaxée, autorisant les matériaux composites dans l'espace des design admissibles. Ces composites sont obtenus par homogénéisation comme mélanges fins des deux matériaux initiaux. La formulation relaxée s'écrit :

$$I^* = \max_{\theta \in L^\infty(\Omega;[0,1])} \max_{A^* \in \mathcal{G}_\theta} \left\{ \omega_1^2(\theta, A^*) - \ell \int_\Omega \theta(x) dx \right\}, \tag{24}$$

où $\omega_1^2(\theta, A^*)$ est la première valeur propre de

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\text{div } A^* e(u_k) & = & (\omega_k)^2 \overline{\rho} u_k & \text{dans } \Omega, \\ A^* e(u_k) \cdot \vec{n} & = & 0 & \text{sur } \Gamma_N, \\ u_k & = & 0 & \text{sur } \Gamma_D, \end{array} \right. , \tag{25}$$

avec

$$\overline{\rho}(x) = (1 - \theta(x))\rho_1 + \theta(x)\rho_2.$$

et

$$\mathcal{G}_\theta := \{H\text{-limites de } A_{\chi_n} = (1 - \chi_n)A_1 + \chi_n A_2 \ \mid \ \chi_n \rightharpoonup \theta\}.$$

Grâce au caractère local de la G-fermeture (cf. [42][103]), on peut écrire

$$\mathcal{G}_\theta = \{A(x) \ \text{ mesurable } \ \mid \ A(x) \in G_{\theta(x)} \ \text{ p.p. dans } \Omega\}, \tag{26}$$

où G_θ désigne la G-fermeture déjà évoquée plus haut.

Dans le cas de la compliance, il avait été possible d'obtenir une description explicite de composites optimaux. Elle permettait l'exploitation de la formulation relaxée du problème pour en déduire un algorithme numérique. Ici, l'expression des fréquences propres comme un quotient de Rayleigh (21) donne une formulation relaxée (24) sous la forme d'un problème de min-max dans lequel le min et le max ne peuvent pas être échangés *a priori*.

Un théorème de point-selle dans l'esprit de [40] et [79], utilisant un résultat de [12], permet d'effectuer partiellement cet échange entre la minimisation sur les champs u et la maximisation sur les paramètres de forme (θ, A^*). Il permet également de réduire l'ensemble des composites admissibles $\mathcal{G}_\theta$, qui est inconnu, à l'ensemble des laminés séquentiels L_θ, qui lui est connu explicitement. La formulation relaxée (24) s'écrit alors de façon équivalente :

$$I^* = \max_{\theta \in L^\infty(\Omega;[0,1])} \left\{ \min_{u \in \mathcal{H}} \frac{\displaystyle\int_\Omega \left(\max_{A^* \in L_\theta} A^* e(u) \cdot e(u) \right) dx}{\displaystyle\int_\Omega \overline{\rho} |u|^2 dx} - \ell \int_\Omega \theta(x) dx \right\}. \tag{27}$$

On remarque que ce résultat reste partiel dans l'optique de la conception d'un algorithme numérique de type directions alternées, analogue à celui proposé pour la compliance. En effet la maximisation par rapport à θ reste désespérément à l'extérieur de la minimisation en u. Elle ne peut donc pas – théoriquement – s'effectuer localement en chaque point du domaine, comme c'était le cas dans l'autre algorithme. Dans les applications numériques, nous ferons malgré tout comme si cette inversion du $\min_u$ et du $\max_\theta$ était valide.

Cette petite entorse à la théorie permet d'écrire un algorithme numérique, très similaire à celui de l'optimisation de la compliance : l'étape (a) consiste à résoudre numériquement le problème aux valeurs propres (25) pour des paramètres de formes donnés ; l'étape (b)

d'optimisation des paramètres de forme s'effectue de façon explicite (si on maximise seulement la première fréquence propre). On peut reprendre les mêmes formules de laminés optimaux que pour la compliance en remarquant que si, pour un tenseur des déformations donné $e(u)$, la loi de Hooke A^* atteint la borne

$$\max_{A^* \in G_\theta} A^* e(u) \cdot e(u) \,, \tag{28}$$

alors A^* est aussi optimale pour

$$\min_{A^* \in G_\theta} A^{*-1} \sigma \cdot \sigma \,, \tag{29}$$

avec $\sigma = A^* e(u)$.

On peut donc, au prix de modifications minimes, traiter des problèmes d'optimisation de valeurs propres avec l'algorithme dédié à la compliance. Il suffit juste pour cela de remplacer l'étape (a) par le calcul de la première valeur propre pour des paramètres de forme (θ, A^*) fixés.

Cet algorithme fonctionne parfois très bien, convergeant parfaitement vers des solutions plausibles. Pour d'autres cas, il fonctionne correctement au début (au sens où la valeur propre croît à chaque itération), puis adopte brusquement un comportement erratique. Ce phénomène, bien qu'observé par quelques auteurs pour des algorithmes d'optimisation topologique de la même veine, n'a pas d'explication totalement convaincante. Il s'agit sans doute d'une manifestation de pollution spectrale : aux abords de la convergence apparaissent des modes parasites, dont le support est inclus dans les zones remplies de matériau "mou".

Pour éviter que ce phénomène n'empêche la convergence de l'algorithme, nous proposons d'utiliser la méthode du critère d'optimalité ci-dessus, tant que les choses fonctionnent et que la fonction-coût croît. Dès que la première valeur propre décroît, nous poursuivons le calcul par une méthode plus classique, de type gradient projeté, avec un pas de descente soigneusement choisi pour que la fonction-coût augmente d'une itération à la suivante : les composites optimaux étant des matériaux laminés de rang N avec des directions de lamination orthogonales, il est possible de dériver la première valeur propre par rapport aux paramètres qui décrivent un tel matériau laminé. En 2d, les paramètres indépendants sont la proportion globale θ, une proportion de lamination m (l'autre proportion vaut $(1-m)$) et une direction de lamination caractérisée par un angle α. Cette dérivation est valide si la première valeur propre reste simple. Évidemment, un tel algorithme de gradient entraîne la perte d'une partie des avantages de la méthode d'homogénéisation initiale. Avec lui il n'est plus exclu de "tomber" dans un maximum local, mais l'algorithme converge (ou au moins s'arrête) toujours sur une solution.

2.3 Autres fonctions-coût dépendant du déplacement. Relaxation partielle et optimisation de mécanismes compliants

Cette partie résume les résultats publiés dans [FJ00a] et [FJ02b] en collaboration avec Grégoire Allaire et Sylvie Aubry.

Nous nous intéressons maintenant à des fonctions-coût plus générales, dépendant du champ de déplacement u.

Si A et B sont deux lois de Hooke (nous prions le lecteur courageux parvenu jusqu'ici de nous excuser pour ces changements incessants de notations), et $\chi \in L^\infty(\Omega; \{0,1\})$ une fonction caractéristique, on pose $A_\chi = \chi A + (1-\chi)B$.
u_χ désigne l'unique solution dans $H_0^1(\Omega)^N$ de

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\text{div } (A_\chi e(u_\chi)) & = & f & \text{dans } \Omega, \\ u_\chi & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{array} \right. \tag{30}$$

On cherche à minimiser

$$\inf_{\chi \in L^\infty(\Omega;\{0,1\})} J(\chi), \tag{31}$$

où la fonction-coût J a l'expression suivante

$$J(\chi) = \int_\Omega \left[\chi(x) g_A(x, u_\chi(x)) + (1-\chi(x)) g_B(x, u_\chi(x))\right] dx + \ell \int_\Omega \chi(x) dx, \tag{32}$$

avec ℓ le multiplicateur de Lagrange positif habituel et g_A et g_B deux fonctions, suffisamment régulières, ayant des propriétés de croissance ad-hoc.

La formulation relaxée de ce problème s'écrit

$$\min_{(\theta, A^*) \in \mathcal{CD}} J^*(\theta, A^*), \tag{33}$$

où la fonction-objectif généralisée a pour expression

$$J^*(\theta, A^*) = \int_\Omega \left(\theta g_A(x,u) + (1-\theta) g_B(x,u) + \ell\theta\right) dx, \tag{34}$$

avec $u(x)$ l'unique solution dans $H_0^1(\Omega)^N$ du problème homogénéisé

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\text{div } (A^* e(u)) & = & f & \text{dans } \Omega, \\ u & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{array} \right. \tag{35}$$

et $\mathcal{CD}$ l'ensemble des design généralisés

$$\mathcal{CD} = \left\{ \theta \in L^\infty\left(\Omega; [0,1]\right),\ A^*(x) \in G_{\theta(x)}\ \forall x \in \Omega \right\}. \tag{36}$$

Ici G_θ désigne, comme dans le cas de l'optimisation des fréquences propres, l'ensemble des lois de Hooke homogénéisées obtenues en mélangeant A et B en proportions respectives θ et $(1-\theta)$.

Dans les deux cas particuliers de la compliance et des fréquences propres, il a été possible d'exploiter directement la formulation relaxée du problème pour en tirer une méthode numérique. La théorie des bornes optimales a permis de se passer de la description exhaustive de l'ensemble G_θ.

Ici, pour des fonctions-coût bien plus générales, la dure réalité s'impose et nous empêche de procéder de la même façon. L'utilisation de la fonctionnelle relaxée pour effectuer des calculs numériques a amplement prouvé son efficacité, tant du point de vue de la stabilité des solutions que de la performance des algorithmes en termes de coût de calcul. L'idée que nous défendons ici est de remplacer le problème relaxé, inaccessible pour l'instant au calcul, par un problème "peu différent" (ou espéré tel) qui permette de développer un algorithme. Nous proposons ce que nous appelons une "relaxation partielle" qui consiste à remplacer le problème (34) par

$$\inf_{(\theta,A^*)\in\mathcal{LD}^+} J^*(\theta, A^*), \tag{37}$$

où

$$\mathcal{LD}^+ = \left\{\theta \in L^\infty\left(\Omega;[0,1]\right),\ A^*(x) \in L^+_{\theta(x)}\ \forall x \in \Omega\right\}. \tag{38}$$

L^+_θ désigne ici l'ensemble des matériaux obtenus par laminations séquentielles de noyau A et de matrice B en proportions respectives θ et $(1-\theta)$.

Les éléments de L^+_θ sont caractérisés par un petit nombre de paramètres : la proportion globale $\theta \in [0,1]$, le nombre de laminations successives (rang de lamination) q, les directions de lamination $(e_i)_{1\le i\le q} \in (\mathbb{R}^N)^q$ et les proportions de lamination $(m_i)_{1\le i\le q} \in [0,1]^q$. Les lois de Hooke effectives des matériaux de L^+_θ peuvent se calculer explicitement en fonction de ces paramètres et des coefficients de A et B par des formules analogues à (17) et (18).

Alors que la formulation relaxée (33)(34) admet, par construction, une solution, il n'y a pas de résultat d'existence pour la relaxation partielle (37). On remplace donc le problème initial (31) mal posé par un autre problème mal posé. On espère que le fait d'élargir l'espace des design admissibles sera suffisant pour donner de bonnes propriétés aux algorithmes numériques. Dans les cas déjà développés de la compliance (mono et multi-chargements) et de l'optimisation de fréquences propres, la relaxation partielle est équivalente à la relaxation puisque les composites optimaux sont atteints par des éléments de L^+_θ.

Comme dans le cas multi-chargements, l'algorithme numérique que nous proposons pour résoudre le problème (37) utilise des laminés de rang q donné avec des directions de lamination fixées. L'algorithme est de type directions alternées, comme celui de la page 12. L'étape (b) est remplacée par une méthode de gradient projeté sur les paramètres de forme θ et $(m_i)_{1\le i\le q}$ avec un pas de descente t_k ajusté convenablement.

1. Initialisation des paramètres de forme $\theta_0, m_{i,0}$ (par exemple, des constantes satisfaisant les contraintes).
2. Itérations jusqu'à convergence, pour $k \ge 0$:

(a) Calcul de l'état u_k et de l'état adjoint p_k, solutions respectives du problème direct et du problème adjoint (39), à l'aide des précédents paramètres de forme $\theta_k, m_{i,k}$.

(b) Mise à jour des paramètres de forme :

$$\begin{array}{rcl} \theta_{k+1} & = & \max\left(0, \min\left(1, \theta_k - t_k \nabla_\theta J_k^*\right)\right), \\ m_{i,k+1} & = & \max\left(0, m_{i,k} - t_k \nabla_{m_i} J_k^* + \ell_k\right), \end{array}$$

Les gradients $\nabla_\theta J^*$ et $\nabla_{m_i} J^*$ de la fonction-coût J^* par rapport aux variables de forme dépendent de l'état adjoint p qui est solution de

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\text{div}\ (A^* e(p)) & = & \theta \dfrac{\partial g_A}{\partial u}(x,u) + (1-\theta)\dfrac{\partial g_B}{\partial u}(x,u) & \text{dans } \Omega \\ p & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{array} \right. \tag{39}$$

Cet algorithme converge vers une solution contenant de larges plages de matériaux composites. Une procédure numérique, intervenant après convergence de l'algorithme homogénéisé, permet de retrouver une solution classique "proche" de la solution généralisée.

Un exemple d'utilisation pratique de ce type de fonction-coût est donné par

$$J(\chi) = \left(\int_\Omega \chi(x) C(x) |u(x) - u_0(x)|^\alpha dx \right)^{\frac{1}{\alpha}} + \ell \int_\Omega \chi(x) dx, \tag{40}$$

où $1 \leq \alpha < 2N/(N-2)$, $C \in L^\infty(\Omega)$ et $u_0 \in H^1(\Omega)^N$ sont donnés.

On cherche ainsi à minimiser l'écart à un déplacement-cible donné u_0. Une des applications possibles d'une telle fonctionnelle est la conception de mécanismes fabriqués d'une seule pièce – sans articulations ni liaisons ou rotules d'aucune sorte – qui doivent uniquement tirer parti de leur forme pour accomplir une action sous l'effet d'un chargement extérieur. Les MEMS (Micro Electro-Mechanical System) sont des exemples de telles structures, sculptées sur quelques fractions de mm^2 de silicium. Les implants intraoculaires décrits au chapitre 5 rentrent aussi dans cette catégorie. Dans ce dernier cas, le choix de u_0 très grand dans une direction donnée revient à maximiser le déplacement u dans cette direction. La fonction C a essentiellement pour but de localiser les zones où la fonction-coût est intéressante. Typiquement, comme dans les exemples de la Figure 8, $C(x) = 1$ sur une petite portion du domaine où l'on désire contrôler le déplacement et $C(x) = 0$ ailleurs.

La fonction-coût relaxée de (40) a pour expression

$$J^*(\theta, A^*) = \left(\int_\Omega \theta(x) C(x) |u(x) - u_0(x)|^\alpha dx \right)^{\frac{1}{\alpha}} + \ell \int_\Omega \theta\, dx, \tag{41}$$

et l'état adjoint p est solution de

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\text{div}\ (A^* e(p)) & = & c_\alpha \theta(x) C(x) |u(x) - u_0(x)|^{\alpha-2} (u(x) - u_0(x)) & \text{dans } \Omega \\ p & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right., \tag{42}$$

avec $c_\alpha = \left(\int_\Omega \theta(x) C(x) |u(x) - u_0(x)|^\alpha dx \right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}$.

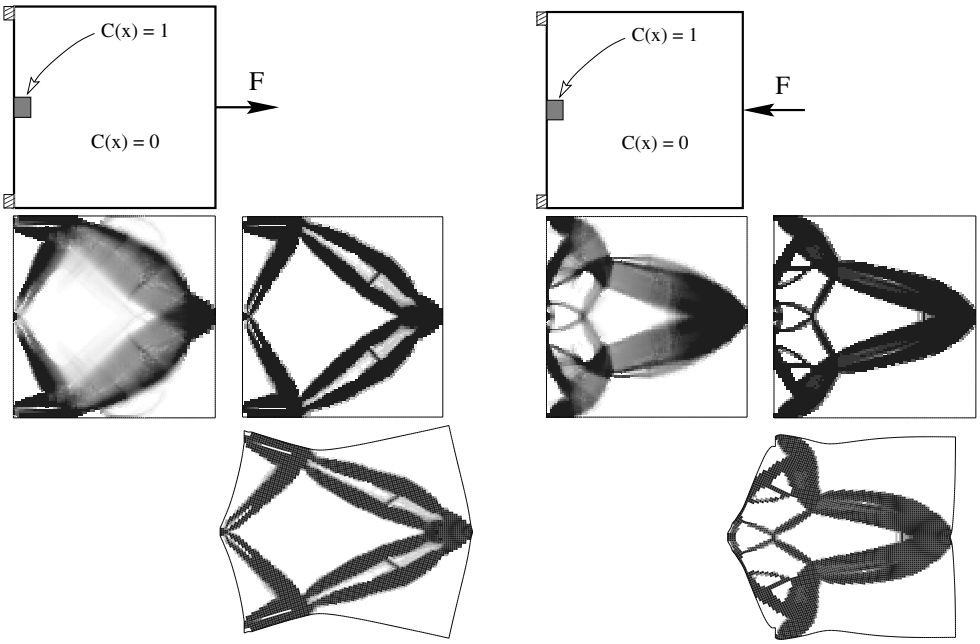

FIG. 8 – Exemples de mécanismes compliants : à gauche un inverseur de force ; à droite un amplificateur de déplacement. On présente pour chaque cas : en haut la définition du problème (forces, conditions aux limites) ; au milieu la solution composite et la solution pénalisée au repos ; en bas la solution pénalisée déformée.

2.4 Fonction-coût dépendant du tenseur des contraintes

Cette partie résume les résultats publiés dans [FJ04d] en collaboration avec Grégoire Allaire et Hervé Maillot.

Dans cette dernière partie consacrée à la méthode d'homogénéisation, nous nous intéressons à des fonctions-coût dépendant du tenseur des contraintes ou du tenseur des déformations. De telles fonctionnelles sont importantes du point de vue des applications, le besoin se faisant souvent sentir de trouver une forme optimale qui minimise par exemple le maximum des contraintes sur tout le domaine. Pour des raisons tenant aux espaces dans lesquels convergent les quantités que nous allons considérer, nous devons nous restreindre à des fonctions-coût de la forme

$$J(\chi) = \int_\Omega j(x, \sigma_\chi) dx,$$

où σ_χ est solution de

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\text{div}\, \sigma_\chi & = & f & \text{dans } \Omega \\ u_\chi & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{array} \right. \tag{43}$$

et j est une fonction à croissance au plus quadratique de σ_χ. Ce type d'expression inclut par exemple les contraintes de Von Mises, très prisées des mécaniciens, mais ne permet pas de traiter le cas intéressant de la norme L^p des contraintes avec $p > 2$ et éventuellement $p = +\infty$. En revanche, il est toujours possible de localiser *a priori* la zone où est calculée la fonction-coût grâce à une fonction $k(x)$ régulière par morceaux. Dans la suite nous traitons le problème

$$\inf_{\chi \in L^\infty(\Omega;\{0,1\})} J(\chi), \tag{44}$$

avec la fonction-objectif

$$J(\chi) = \int_\Omega k(x) |\sigma_\chi|^2 dx. \tag{45}$$

Comme nous l'avons déjà fait à plusieurs reprises dans les pages précédentes, nous allons chercher à relaxer ce problème mal posé en utilisant des design généralisés et la théorie de l'homogénéisation. Toutefois, une difficulté supplémentaire intervient ici, liée à l'introduction de microstructures. Mécaniquement, il apparaît des concentrations de contraintes au niveau microscopique qui sont supérieures aux contraintes macroscopiques – qui sont des moyennes – calculées dans le matériau homogénéisé. Les contraintes à considérer dans le matériau homogénéisé doivent être corrigées par un facteur d'amplification des contraintes qui dépend de la microstructure. Mathématiquement, ce phénomène se traduit par le fait que les suites σ_ϵ de tenseurs des contraintes convergent faiblement vers le tenseur des contraintes homogénéisé σ lorsque la taille des microstructures ϵ tend vers 0, mais il n'y a pas de convergence forte.

La théorie de l'homogénéisation nous donne les convergences suivantes : soit χ_ϵ une suite minimisante de fonctions caractéristiques pour le problème (44). À une sous-suite

près on a

$$\begin{aligned}
\chi_\epsilon &\rightharpoonup \theta \text{ dans } L^\infty(\Omega;[0,1]) \text{ faible-}*, \\
A_\epsilon = \chi_\epsilon A + (1-\chi_\epsilon)B &\overset{\mathrm{H}}{\rightharpoonup} A^* \text{ au sens de l'homogénéisation}, \\
u_\epsilon &\rightharpoonup u \text{ dans } H_0^1(\Omega)^N \text{ faible }, \\
\sigma_\epsilon = A_\epsilon e(u_\epsilon) &\rightharpoonup \sigma \text{ dans } L^2(\Omega, \mathbb{R}^{N^2}) \text{ faible },
\end{aligned}$$

où u est le champ de déplacement solution du problème homogénéisé

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \sigma &=& A^* e(u) & \text{dans } \Omega, \\ -\mathrm{div}\, \sigma &=& f & \text{dans } \Omega, \\ u &=& 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{array} \right. \tag{46}$$

Ces convergences ne suffisent pas pour pouvoir passer à la limite dans la fonction-coût (45) et on a, en général,

$$\liminf_{\epsilon\to 0} \int_\Omega k(x)|\sigma_\epsilon|^2 dx \geq \int_\Omega k(x)|\sigma|^2 dx,$$

avec une inégalité stricte dans de nombreux cas. La convergence forte qui nous manque est obtenue en utilisant les tenseurs d'ordre 4 appelés correcteurs et notés W_ϵ. Ils sont tels que

$$\sigma_\epsilon - A_\epsilon W_\epsilon {A^*}^{-1} \sigma \to 0 \text{ fortement dans } L^1(\Omega, \mathbb{R}^{N^2}). \tag{47}$$

Malheureusement, cette convergence est toujours insuffisante pour permettre le passage à la limite dans (45). De plus, les correcteurs ne sont en général pas calculables pour des microstructures arbitraires. Une fois de plus, la restriction à la classe des laminés séquentiels des composites autorisés pour les design généralisés permet d'obtenir une relaxation partielle du problème avec une formulation utilisable en pratique. On invoque un résultat de Briane [26] pour assurer que, pour les matériaux laminés, la convergence (47) a lieu en fait dans $L^2(\Omega, \mathbb{R}^{N^2})$ (mais pas mieux, ce qui empêche de traiter le cas de la norme L^p des contraintes pour $p > 2$). Si on note $\mathcal{P}^2$ la limite faible de $(A_\epsilon W_\epsilon {A^*}^{-1})^2$ alors

$$\lim_{\epsilon\to 0} J(\chi_\epsilon) = \int_\Omega k(x)|\mathcal{P}\sigma|^2 dx, \tag{48}$$

avec l'estimation suivante au sens des formes quadratiques, qui justifie l'appellation de "facteur d'amplification des contraintes" pour le tenseur $\mathcal{P}$

$$\mathcal{P} \geq I_4. \tag{49}$$

De plus, pour les matériaux laminés séquentiels, les correcteurs W_ϵ sont calculables explicitement, quoiqu'au prix de manipulations algébriques assez compliquées.

Comme dans le cas des fonctions-coût dépendant de u, nous proposons une relaxation partielle basée sur des matériaux laminés de rang q, donné, avec des directions de lamination fixées. Ces matériaux sont définis en chaque point x du domaine par une proportion

$\theta(x) \in [0,1]$ et q proportions de lamination $(m_i(x))_{1\leq i\leq q}$ vérifiant $m_i \in [0,1]$ et $\sum_1^q m_i = 1$. La relaxation partielle de (44) que nous proposons s'écrit

$$\inf_{(\theta,m_i)} \left\{ J^*(\theta, m_i) = \int_\Omega k(x)|\mathcal{P}\sigma|^2 dx \right\}, \tag{50}$$

Grâce aux formules des correcteurs pour les matériaux laminés, on peut écrire les dérivées directionnelles de J^* par rapport aux paramètres de forme (θ, m_i) et en déduire un algorithme similaire à celui employé dans la partie 2.3.

Les résultats numériques de [FJ04d] sont à la fois encourageants et décevants. Encourageants car la méthode fonctionne et donne des résultats d'allure raisonnable. Mais décevants car nous n'avons pas réussi à exhiber un cas-test pour lequel la solution du problème d'optimisation des contraintes soit de nature radicalement différente de celle obtenue pour l'optimisation de la compliance. Cela valide *a posteriori* le choix d'un critère énergétique global comme mesure de la rigidité mais laisse une légère frustration après ce travail très technique d'analyse et d'implémentation de la méthode d'optimisation des contraintes.

3 Optimisation de formes par la méthode des lignes de niveau

Cette partie résume les résultats publiés dans [FJ04b], [FJ04c], [FJ04e] et [FJ02a] en collaboration avec Grégoire Allaire, Frédéric de Gournay et Anca-Maria Toader.

Les méthodes classiques de variation de frontière ont été beaucoup étudiées (voir par exemple [92], [102], [115], [118]). Elles présentent l'avantage de pouvoir traiter une grande variété de modèles mécaniques ainsi que de fonctions-coût. Mais elles ont deux inconvénients majeurs : leur coût, dû à la nécessité de remailler et leur tendance à trouver des minima locaux et des solutions fortement dépendantes de la forme de départ. La méthode d'homogénéisation que nous venons de décrire est une bonne façon d'éviter ces inconvénients, mais elle est limitée à l'élasticité linéarisée et à des fonctions-coût particulières.

Nous proposons de revisiter les techniques d'optimisation de formes classiques en éliminant un de leurs inconvénient : les formes sont capturées sur un maillage fixe et représentées par la courbe de niveau d'un champ scalaire, comme dans la méthode introduite par Osher et Sethian ([98], [111]) pour le suivi de frontières libres. On conserve ainsi tous les avantages des méthodes de variation de domaine, tout en évitant de nombreux problèmes d'implémentation et d'instabilités numériques dus au remaillage. La vitesse du front de propagation est calculée en utilisant la dérivée de forme de l'optimisation de frontière classique.

Cette méthode est très souple. Elle ne pose pas de problème particulier en 3d. L'implémentation d'une nouvelle fonction-coût est relativement facile et elle permet d'utiliser des modèles physiques et des conditions aux limites complexes. À titre d'illustration de cette affirmation, nous présentons dans [FJ04c] et [FJ04e] des calculs en élasticité linéaire et non-linéaire (pour une loi hyperélastique) ainsi que des simulations utilisant des forces suiveuses, appliquées sur le bord – variable – de la forme à optimiser. Toutes les fonctions-coût introduites au chapitre précédent sont utilisables dans ce cadre.

Nous nous concentrons sur l'optimisation de formes (*i.e.* matériau/vide) plutôt que sur l'optimisation de deux phases. Nous employons l'approche qui consiste à remplir les trous avec un matériau mou qui nous a déjà été utile pour optimisation topologique par homogénéisation. Nous calculons une dérivée de forme en utilisant un problème adjoint. Elle est ensuite utilisée comme une vitesse normale sur la frontière libre que l'on fait évoluer au cours du processus d'optimisation. Le transport s'effectue en résolvant une équation d'Hamilton-Jacobi pour la fonction level set. La mise en oeuvre d'une nouvelle fonction objectif est donc beaucoup plus simple par la méthode des courbes de niveaux que pour la méthode d'homogénéisation. En effet, seule la dérivée de forme et le problème adjoint sont nécessaires.

Enfin nous proposons d'atténuer le fait que la méthode n'est pas "topologique" au sens strict, même si elle autorise très naturellement des variations de topologie, en la couplant

à la méthode du gradient topologique (cf. [48], [32], [57], [116], [117]). L'idée est d'enrichir périodiquement l'espace de recherche des formes optimales au cours de l'algorithme en autorisant la création de trous à l'intérieur du domaine. Le gradient topologique est utilisé comme critère de nucléation pour l'initiation d'éventuels nouveaux trous.

Notons f les forces volumiques et g les forces surfaciques, A la loi de Hooke. Dans cette partie, le champ de déplacement u est solution du problème d'élasticité linéarisée

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\mathrm{div}\,(A\,e(u)) & = & f & \text{dans } \Omega \\ u & = & 0 & \text{sur } \Gamma_D \\ (A\,e(u))n & = & g & \text{sur } \Gamma_N. \end{array}\right. \tag{51}$$

Comme Ω varie au cours du processus d'optimisation, f et g doivent être définies pour toutes les configurations possibles de Ω. Nous introduisons donc un domaine de travail D (un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$) qui contient toutes les formes admissibles Ω.

Pour que (51) ait un sens, on prend $f \in L^2(D)^d$ et $g \in H^1(D)^d$ et on suppose $\Gamma_D \neq \emptyset$. Alors (51) a une unique solution dans $H^1(\Omega)^d$.

3.1 Dérivée de forme

Pour appliquer une méthode de gradient à un problème d'optimisation de forme du type

$$\inf_{\Omega \in \{\Omega \subset D \text{ t.q. } |\Omega| = V\}} J(\Omega), \tag{52}$$

rappelons la notion classique de dérivée de forme. Cette notion remonte à Hadamard et de nombreux auteurs ont contribué à son développement (cf. e.g. les ouvrages de référence [102], [118]). Nous suivons ici l'approche de Murat-Simon [92], [115]. Partant d'un domaine ouvert initial Ω supposé régulier, nous considérons des domaines du type

$$\Omega_\theta = (\,\mathrm{Id} + \theta)(\Omega),$$

avec $\theta \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$. Il est bien connu que pour θ assez petit, $(\,\mathrm{Id} + \theta)$ est un difféomorphisme dans $\mathbb{R}^d$.

Définition 4 *La dérivée de forme $J(\Omega)$ en Ω est définie comme la dérivée de Fréchet dans $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ en 0 de l'application $\theta \to J((\,\mathrm{Id} + \theta)(\Omega))$,* i.e.

$$J((\,\mathrm{Id} + \theta)(\Omega)) = J(\Omega) + J'(\Omega)(\theta) + o(\theta) \quad \textit{avec} \quad \lim_{\theta \to 0} \frac{\|o(\theta)\|}{\|\theta\|} = 0\,,$$

où $J'(\Omega)$ est une forme linéaire continue sur $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$.

Un résultat classique dit que la dérivée directionnelle $J'(\Omega)(\theta)$ dépend seulement de la trace $\theta \cdot n$ sur la frontière $\partial\Omega$.

Lemme 5 *Soit Ω un ouvert borné régulier et $J(\Omega)$ une fonction différentiable en Ω, sa dérivée satisfait*

$$J'(\Omega)(\theta_1) = J'(\Omega)(\theta_2)$$

si $\theta_1, \theta_2 \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ sont tels que $\theta_2 - \theta_1 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ et

$$\theta_1 \cdot n = \theta_2 \cdot n \qquad \text{sur } \partial\Omega.$$

Nous donnons deux exemples de dérivées de formes pour deux familles de fonctions-coût que nous utiliseront par la suite :

Lemme 6 *Soit Ω un ouvert borné régulier et $\phi(x) \in W^{1,1}(\mathbb{R}^d)$. On pose*

$$J(\Omega) = \int_\Omega \phi(x)\, dx.$$

Alors J est différentiable en Ω et

$$J'(\Omega)(\theta) = \int_\Omega \operatorname{div}(\theta(x)\, \phi(x))\, dx = \int_{\partial\Omega} \theta(x) \cdot n(x)\, \phi(x)\, ds$$

$\forall \theta \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$.

Lemme 7 *Soit Ω un ouvert borné régulier et $\phi(x) \in W^{1,1}(\mathbb{R}^d)$. On pose*

$$J(\Omega) = \int_{\partial\Omega} \phi(x)\, ds.$$

Alors J est différentiable en Ω et

$$J'(\Omega)(\theta) = \int_{\partial\Omega} \theta \cdot n \left(\frac{\partial \phi}{\partial n} + H\phi \right) ds,$$

$\forall \theta \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$, où H désigne la courbure moyenne de $\partial\Omega$ définie par $H = \operatorname{div} n$.

Théorème 8 *Soit Ω un ouvert borné régulier et $\theta \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$. On suppose que les données f et g ainsi que la solution u de (51) sont régulières, (i.e. $f \in H^1(\Omega)^d$, $g \in H^2(\Omega)^d$, $u \in H^2(\Omega)^d$). La dérivée de forme de*

$$J_1(\Omega) = \int_\Omega f \cdot u\, dx + \int_{\Gamma_N} g \cdot u\, ds = \int_\Omega A\, e(u) \cdot e(u)\, dx, \tag{53}$$

vaut

$$\begin{aligned} J_1'(\Omega)(\theta) = & \int_{\Gamma_N} \left(2 \left[\frac{\partial (g \cdot u)}{\partial n} + Hg \cdot u + f \cdot u \right] - Ae(u) \cdot e(u) \right) \theta \cdot n\, ds \\ & + \int_{\Gamma_D} Ae(u) \cdot e(u)\, \theta \cdot n\, ds. \end{aligned} \tag{54}$$

La dérivée de forme de

$$J_2(\Omega) = \left(\int_\Omega k(x)|u - u_0|^\alpha dx \right)^{1/\alpha}, \tag{55}$$

vaut

$$\begin{aligned} J_2'(\Omega)(\theta) = & \int_{\Gamma_N} \left(\frac{C_0}{\alpha} k|u - u_0|^\alpha + Ae(p) \cdot e(u) - f \cdot p - \frac{\partial(g \cdot p)}{\partial n} - Hg \cdot p \right) \theta \cdot n \, ds \\ & + \int_{\Gamma_D} \left(\frac{C_0}{\alpha} k|u - u_0|^\alpha - Ae(u) \cdot e(p) \right) \theta \cdot n \, ds. \end{aligned} \tag{56}$$

où p est l'état adjoint, supposé régulier, i.e. $p \in H^2(\Omega)^d$, défini comme la solution de

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\mathrm{div}\,(A\,e(p)) & = & -C_0 k(x)|u - u_0|^{\alpha-2}(u - u_0) & \textit{dans } \Omega \\ p & = & 0 & \textit{sur } \Gamma_D \\ (Ae(p))n & = & 0 & \textit{sur } \Gamma_N, \end{array} \right. \tag{57}$$

où C_0 est la constante

$$C_0 = \left(\int_\Omega k(x)|u(x) - u_0(x)|^\alpha dx \right)^{1/\alpha - 1}.$$

Nous pouvons maintenant décrire une méthode de gradient pour la minimisation d'une fonction-objectif $J(\Omega)$. L'expression de la dérivée de forme est

$$J'(\Omega)(\theta) = \int_{\partial\Omega} v \, \theta \cdot n \, ds,$$

où la fonction v est donnée par un résultat analogue au Théorème 8. Si on néglige les problèmes de régularité, une direction de descente sera définie en introduisant un champ de vecteurs

$$\theta = -v \, n, \tag{58}$$

et en actualisant la forme Ω par

$$\Omega_t = (\,\mathrm{Id} + t\theta)\Omega,$$

où $t > 0$ est un petit pas de descente. Formellement on obtient

$$J(\Omega_t) = J(\Omega) - t \int_{\partial\Omega} v^2 \, ds + \mathcal{O}(t^2)$$

ce qui garantit la décroissance de la fonction-objectif.

3.2 Paramétrisation des formes par une courbe de niveaux

Comme décrite ci-dessus, la méthode de sensibilité peut s'implémenter dans un cadre Lagrangien. Il suffit de mailler Ω et de déformer la frontière du maillage grâce à la direction de descente θ. Ce type d'implémentation souffre au moins de deux inconvénients. Tout d'abord, si la déformation est trop importante, il est nécessaire de remailler, ce qui peut s'avérer très coûteux (surtout en 3d) et introduire des instabilités. De plus, des parties initialement disjointes de la frontière peuvent avoir tendance à se rapprocher (jusqu'au contact) et il est alors très difficile de prendre en compte ces changements de topologie avec de telles méthodes de suivi de frontière. La méthode, Eulérienne, des courbes de niveaux permet de capturer la forme sur un maillage fixe, évitant ainsi ces inconvénients.

Soit $D \subset \mathbb{R}^d$ le domaine de travail dans lequel seront incluses toutes les formes admissibles Ω. Nous paramétrons la frontière de Ω par la fonction courbe de niveaux définie sur D par

$$\begin{cases} \psi(x) = 0 & \Leftrightarrow x \in \partial\Omega \cap D, \\ \psi(x) < 0 & \Leftrightarrow x \in \Omega, \\ \psi(x) > 0 & \Leftrightarrow x \in \left(D \setminus \overline{\Omega}\right). \end{cases}$$

Les équations de l'élasticité pour le champ de déplacement u ainsi que pour l'adjoint p sont prolongées au domaine D tout entier par la méthode du matériau fictif qui consiste à remplir les trous $D \setminus \Omega$ d'un matériau mou, simulant le vide tout en évitant la singularité de l'opérateur d'élasticité.

Au cours de la procédure d'optimisation, la forme évolue suivant un pseudo-temps qui correspond à un pas de descente. Si la forme évolue en temps, alors la courbe de niveau suit une équation d'Hamilton-Jacobi. Plus précisément, si $\Omega(t)$ varie en temps $t \in \mathbb{R}^+$ avec la vitesse normale $V(t,x)$, alors

$$\psi\Big(t, x(t)\Big) = 0 \quad \forall x(t) \in \partial\Omega(t).$$

On différencie par rapport à t et on remarque que la normale n à la forme Ω est donnée par $n = \nabla\psi/|\nabla\psi|$, d'où

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} + V|\nabla\psi| = 0.$$

Cette équation d'Hamilton-Jacobi est posée dans tout le domaine D et pas seulement sur la frontière $\partial\Omega$ dès lors que la vitesse V est connue partout. Remarquons que la méthode de level set permet de calculer facilement la courbure moyenne $H = \mathrm{div} n$ qui joue un grand rôle si on veut introduire une pénalisation du périmètre.

3.3 Algorithme d'optimisation

Pour le problème de minimisation (52) nous avons calculé une dérivée de forme

$$J'(\Omega)(\theta) = \int_{\partial\Omega} v\,\theta \cdot n\,ds,$$

où la fonction $v(u, p, n, H)$ est donnée par un résultat analogue au théorème 8. Comme n, H, u et p sont calculés dans tout le domaine D, v est définie partout et pas seulement sur la frontière $\partial\Omega$. On peut donc définir une direction de descente sur tout le domaine de travail D.

$$\theta = -v\, n.$$

La composante normale $\theta \cdot n = -v$ est ainsi la vitesse d'advection dans l'équation d'Hamilton-Jacobi

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} - v|\nabla \psi| = 0. \tag{59}$$

Transporter ψ par (59) est équivalent à bouger la frontière de Ω (la courbe de niveau 0 de ψ) suivant la direction de descente $-J'(\Omega)$.

Nous proposons un algorithme itératif structuré de la façon suivante :

1. Initialisation de la fonction level set ψ_0 correspondant à une forme initiale Ω_0.
2. Itération jusqu'à convergence, pour $k \geq 0$:
   (a) calcul de l'état u_k et de l'état adjoint p_k pour le domaine Ω_k. Le calcul s'effectue sur D avec le maillage fixe grâce à la méthode du matériau fictif ;
   (b) déformation de Ω_k par résolution de l'équation d'Hamilton-Jacobi (59). La nouvelle forme Ω_{k+1} est caractérisée par la fonction courbe de niveaux ψ_{k+1} solution de (59) après un pas de temps Δt_k en partant de la condition initiale $\psi_k(x)$ avec la vitesse $-v_k$ calculée en fontion de u_k et de p_k. Le pas de temps Δt_k est choisi tel que $J(\Omega_{k+1}) \leq J(\Omega_k)$.
3. De temps en temps, comme il est habituel de le faire dans les algorithmes de level set pour des raisons de stabilité, la fonction ψ est réinitialisée en résolvant une autre équation d'Hamilton-Jacobi dont la solution stationnaire est la fonction distance signée à la courbe de niveau 0.

L'équation d'Hamilton-Jacobi (59) est résolue par un schéma explicite décentré (cf. par exemple [111]) sur une grille cartésienne, ou bien par un schéma spécifique lorsque le maillage est non structuré (cf. [1]).

Des extensions à la méthodes ci-dessus ainsi que de nombreux détails d'implémentation sont décrits dans [FJ04c] et [FJ04e]. Nous donnons les dérivées de forme et des exemples de calculs numériques pour différentes fonctions-coût déjà analysées dans le cadre le la méthode d'homogénéisation : la compliance ou une somme de compliances (multi-chargement), un écart aux moindres carrés par rapport à un déplacement cible (55), ou encore la plus petite des fréquences propres. Nous décrivons aussi comment il est possible très facilement de prendre en compte des conditions aux limites de forces suiveuses (pression normale au bord ou bien force de direction constante appliquée sur le bord variable), des termes de périmètre (qui servent à régulariser les solutions) ou des modèles physiques plus complexes que l'élasticité linéarisée (un exemple est donné en élasticité non-linéaire pour un matériau hyperélastique en grandes déformations).

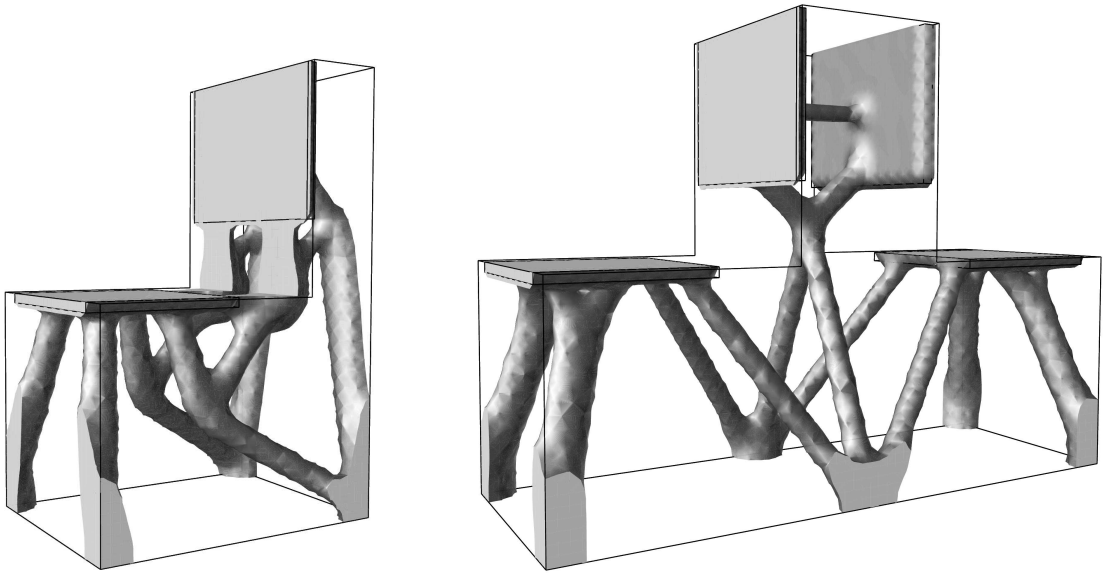

Fig. 9 – Chaises calculées par la méthode des courbes de niveaux. À droite une chaise double.

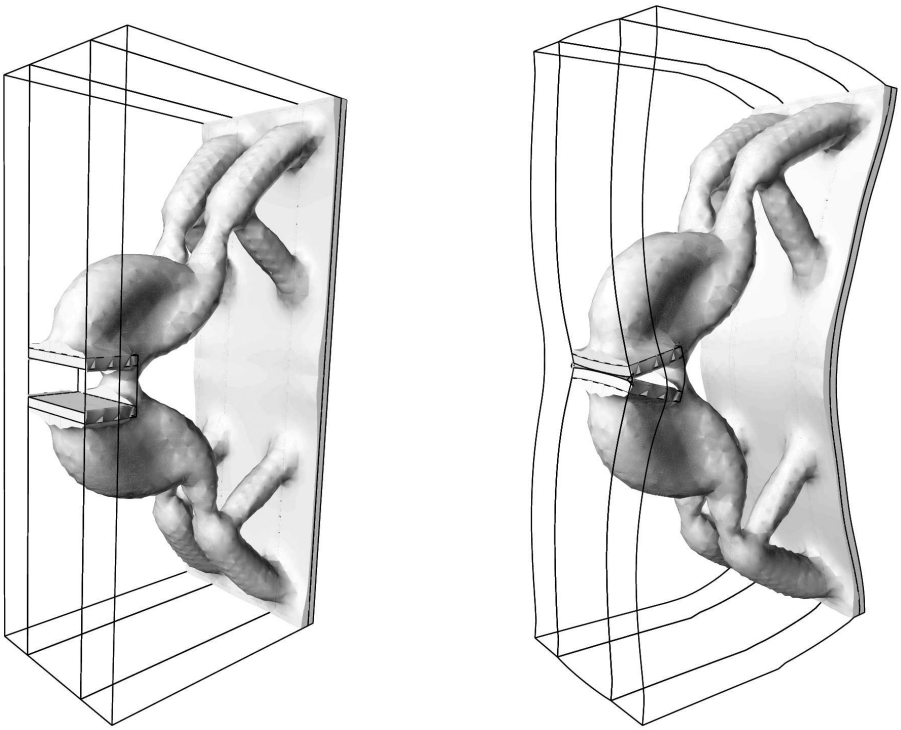

Fig. 10 – Pince calculée par la méthode des courbes de niveaux en utilisant la fonction-coût (55). Une portion des faces horizontales supérieures et inférieures est encastrées, une pression est appliquée sur la face verticale du fond et on cherche à obtenir la fermeture des mâchoires.

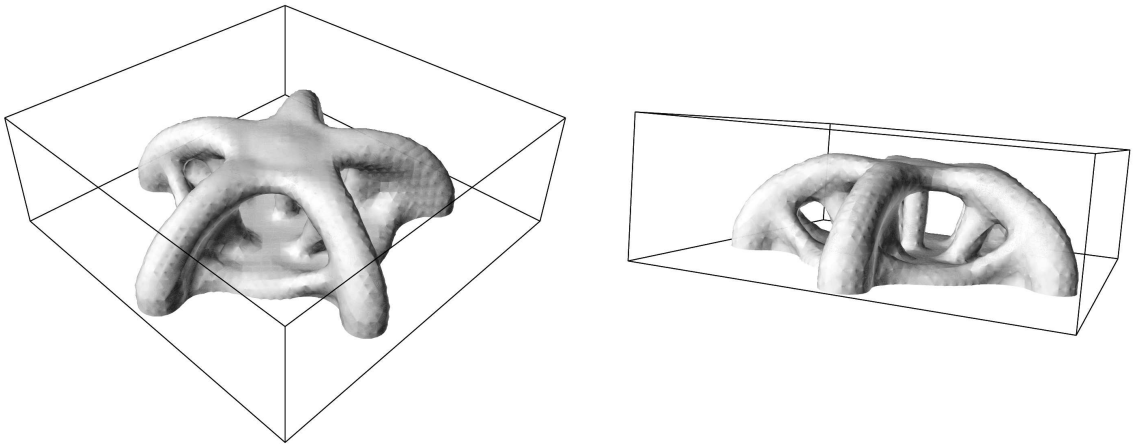

Fig. 11 – Une illustration de la capacité de l'algorithme à traiter des forces suiveuses : ici une pression normale à la paroi est appliquée. Il y a cinq points d'ancrage de la structure sur la face inférieure du domaine de calcul. Le calcul a été initialisé par un parallélépipède contenu dans la moitié inférieure du domaine.

3.4 Gradient topologique et méthode de level set

L'algorithme ci-dessus ne crée pas de nouveaux trous ni de nouvelles frontières si l'équation d'Hamilton-Jacobi (59) est résolue sous une stricte condition CFL car elle satisfait un principe du maximum. Toutefois, la méthode des courbes de niveaux est connue pour permettre le traitement aisé des changements de topologie, c'est-à-dire la création ou la suppression de trous. Ainsi notre algorithme est-il capable de supprimer des trous facilement si la structure initiale en comporte trop. Mais si l'initialisation n'est pas assez riche, ou si des structures fines ont été détruites par une étape intermédiaire de calcul, il lui sera impossible de recréer un trou au milieu du domaine. L'algorithme converge alors en général vers un minimum local. La solution pourrait être substantiellement amélioré par l'ajout d'un ou plusieurs trous judicieusement placés. Notons que cet inconvénient est surtout sensible en 2d. En effet, s'il est par exemple impossible par l'algorithme de level set de trouver une solution du même genre topologique qu'une coque sphérique en partant d'une boule (il faudrait creuser un trou à l'intérieur), on peut parfaitement obtenir, entre autres, une structure de même genre qu'un tore en faisant se rapprocher puis se toucher deux parois parallèles. On observe couramment ce phénomène lors de simulations numériques. La structure de la Figure 11, obtenue à partir d'une initialisation triviale, en est une bonne illustration.

Nous proposons d'utiliser la méthode du gradient topologique de Masmoudi, Schumacher, Sokołowski et leurs collaborateurs [32] [48], [57], [116], [117] pour définir un critère de nucléation permettant, à certaines étapes du calcul, de déterminer où il serait avantageux, du point de vue de la décroissance de la fonction-objectif, de percer un trou de taille infinitésimale.

Si $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ est un ouvert et $x_0 \in \Omega$, on note Ω_ρ le domaine Ω privé d'un trou sphérique centré en x_0 et de diamètre ρ (que l'on suppose interne, *i.e.* ayant une intersection vide avec $\partial\Omega$). Dans le cadre de l'optimisation de structures, on impose une condition aux limites de Neumann sur le bord des trous.

Si la fonction-objectif $J(\Omega)$ admet un développement du type suivant, appelé asymptotique topologique,

$$J(\Omega_\rho) = J(\Omega) + \rho^d D_T J(x_0) + o(\rho^d),$$

alors $D_T J(x_0)$ est appelée dérivée topologique au point x_0.

On peut calculer explicitement (cf. [57], [117]) la dérivée topologique dans le cas de la compliance (53) en 2d

$$D_T J_1(x) = \frac{\pi(\lambda + 2\mu)}{2\mu(\lambda + \mu)} \{4\mu Ae(u) \cdot e(u) + (\lambda - \mu) tr(Ae(u)) tr(e(u))\}(x), \tag{60}$$

et en 3d

$$D_T J_1(x) = \frac{\pi(\lambda + 2\mu)}{\mu(9\lambda + 14\mu)} \{20\mu Ae(u) \cdot e(u) + (3\lambda - 2\mu) tr(Ae(u)) tr(e(u))\}(x), \tag{61}$$

ainsi que pour la fonction-coût (55) en 2d

$$\begin{aligned} D_T J_2(x) &= -\frac{\pi}{\alpha} C_0 k(x) |u(x) - u_0(x)|^\alpha - \\ &\frac{\pi(\lambda + 2\mu)}{2\mu(\lambda + \mu)} \{4\mu A e(u) \cdot e(p) + (\lambda - \mu) tr(Ae(u)) tr(e(p))\}(x), \end{aligned} \tag{62}$$

et en 3d

$$\begin{aligned} D_T J_2(x) &= -\frac{4\pi}{3\alpha} C_0 k(x) |u(x) - u_0(x)|^\alpha - \\ &\frac{\pi(\lambda + 2\mu)}{\mu(9\lambda + 14\mu)} \{20\mu A e(u) \cdot e(p) + (3\lambda - 2\mu) tr(Ae(u)) tr(e(p))\}(x). \end{aligned} \tag{63}$$

Nous utilisons ces quantités pour insérer une étape supplémentaire dans l'algorithme de la page 34 :

1. Initialisation de la fonction level set ψ_0 correspondant à une forme initiale Ω_0.
2. Itération jusqu'à convergence, pour $k \geq 0$:
   (a) calcul de l'état u_k et de l'état adjoint p_k pour le domaine Ω_k ;
   (b) déformation de Ω_k par résolution de l'équation d'Hamilton-Jacobi (59). La nouvelle forme Ω_{k+1} est caractérisée par la fonction courbe de niveaux ψ_{k+1} ;
   (c) de temps en temps, suivant un paramètre donné par l'utilisateur, calcul du gradient topologique $D_T J$ et initiation de trous là où il est minimal et négatif (après y avoir le cas échéant ôté le multiplicateur de Lagrange ℓ correspondant au terme de poids de l'équation (7)).

En 2d, les résultats numériques sont conformes aux attentes : les solutions obtenues avec cette méthode, en partant d'un état initial trivial (domaine rempli de matériau), correspondent aux meilleures des solutions atteintes par l'algorithme précédent lorsque l'on fait varier le nombre de trous initiaux. Elle permet donc d'avoir une plus grande confiance dans la qualité de la solution, quelle que soit l'initialisation choisie. En 3d, du fait de la plus grande facilité de changement de topologie déjà discutée plus haut, nous n'avons pas mis en évidence d'exemple pour lequel l'introduction du gradient topologique permettrait d'améliorer sensiblement la solution. Tout au plus permet-il de dégrossir plus rapidement la topologie de la structure et ainsi d'accélérer un peu la convergence, ce qui n'est pas totalement négligeable en 3d.

La Figure 12 montre un exemple de déroulement de calcul avec quelques structures intermédiaires. Le gradient topologique est calculé toutes les 15 itérations. On présente les structures obtenues aux itérations 20, 35, 50, 65, ... , 230, 300 (à chaque fois 5 itérations après l'intervention du gradient topologique, pour que le transport de la level set ait le temps de lisser la forme, dans un pur soucis esthétique). Au delà de l'itération 225, le gradient topologique reste toujours partout positif et la topologie ne change plus au passage de l'étape (c) de l'algorithme. La convergence est obtenue après 500 itérations.

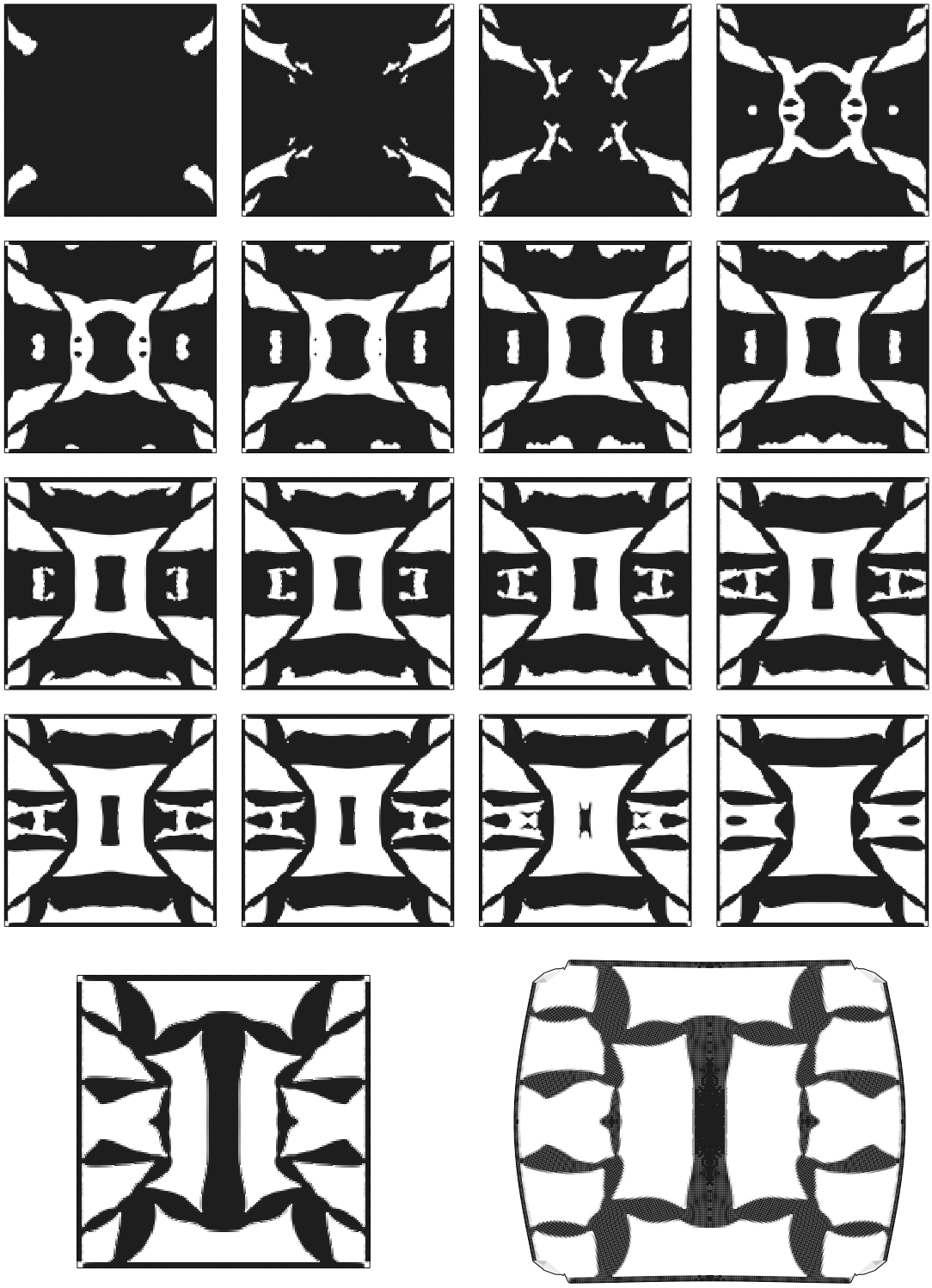

FIG. 12 – Mécanisme ayant le comportement apparent d'un matériau élastique à coefficient de Poisson négatif. Les 16 figures du haut montrent des configurations intermédiaires obtenues au cours du calcul, après chaque intervention efficace du gradient topologique (toutes les 15 itérations). En bas, la solution convergée et sa déformée lorsque les bords verticaux sont soumis à une traction.

4 Optimisation de formes par algorithmes évolutionnaires

Nous abordons maintenant les problèmes d'optimisation de forme sous un angle purement algorithmique. Il s'agit de cesser de se préoccuper de considérations d'existence, de convergence, de régularité ou de stabilité, pour attaquer les problèmes frontalement, grâce à la force informatique brute. Cette entrée en matière volontairement provocatrice n'est pas dénuée de fondement mais elle est profondément injuste puisque tout le propos des articles présentés rapidement ci-dessous est de plaider pour une utilisation subtile des algorithmes génétiques dans ce domaine. Une représentation des formes appropriée, et un choix judicieux des opérateurs de mutation et de croisement associés, étant au coeur de la réussite, ou de l'échec, de l'application de ces algorithmes à des problèmes inverses délicats de ce type.

Les publications présentées sont relativement anciennes, à l'exception de [FJ02c] qui est un article de synthèse, à la lumière de développements plus récents, sur les différents types de représentation – génotypes dans la terminologie darwinienne employée par les spécialistes d'algorithmes génétiques – utilisables pour faire de l'optimisation topologique de structures.

Les principes de base des algorithmes génétiques ne sont pas rappelés ici et nous renvoyons le lecteur aux ouvrages de référence pour plus de détails (par exemple [60]). Mentionnons juste qu'il s'agit de méthodes stochastiques et "d'ordre 0" dans la mesure où elles n'ont besoin que du calcul de la fonction-coût, certes de très nombreuses fois. Aucun "gradient" de la fonctionnelle, au sens large du terme, n'est nécessaire. Leur robustesse et leur souplesse leur permettent d'attaquer la résolution numérique de problèmes difficiles à résoudre autrement. Mais c'est leur capacité à travailler sur des espaces de recherche non standards qui leur offre les perspectives les plus originales.

Très peu de résultats théoriques de convergence sont disponibles (cf. [33]) et ils sont en général peu utiles en pratique, car établis pour des problèmes extrêmement simplifiés.

4.1 Identification d'inclusions mécaniques par algorithmes évolutionnaires

Cette partie résume les résultats publiés dans [FJ96a] en collaboration avec Leila Kallel et Marc Schoenauer.

L'identification de coefficients à partir de données au bord est un problème très important et très étudié. Comme les problèmes d'optimisation de structures il est connu pour être mal posé. Nous proposons d'étudier un cas bidimensionnel d'identification d'inclusions. Le domaine de calcul est un carré dans lequel on doit identifier une distribution inconnue de deux matériaux linéairement élastiques en fonction de résultats d'expériences (qui sont simulées numériquement). Les essais s'effectuent sur quatre configurations don-

nées dont les réponses aux essais sont préalablement calculées numériquement pour servir à l'évaluation de la performance des individus. Les deux matériaux ont le même coefficient de Poisson et le contraste entre leurs modules d'Young est de 1.5 (c'est un cas assez difficile car un plus fort contraste favorise l'identification). Une des faces du carré est encastrée et 37 chargements ponctuels perpendiculaires aux bords sont appliqués, successivement, en 37 points différents, équirépartis sur les autres faces. Pour les 37 déformées, on peut choisir d'utiliser la totalité de l'information sur le champ de déplacement (en fait le déplacement en chaque point du maillage utilisé), ou bien le champ de déplacement sur tout le bord du domaine, ou enfin, cas qui s'apparente plus à des mesures réelles, le déplacement en un certain nombre de points du bord (9 en l'occurence). Cette information sert à évaluer la performance d'un individu, en la comparant aux valeurs calculées pour la solution exacte. Des calculs ont également été menées avec un bruit additionnel simulé sur les mesures.

Plusieurs représentations sont évoquées. Le coût de calcul de ces algorithmes étant prohibitif (surtout pour l'époque), seuls des maillages très grossiers peuvent être utilisés. Afin d'éviter de nombreux problème dus au remaillage, nous choisissons de travailler sur un maillage fixe (24×24 en général plus quelques essais avec un maillage deux fois plus grossier et un autre deux fois plus fin). La représentation comme un tableau de bits ("bitarray") code un individu par une suite de 0 et de 1 (correspondant à chacun des deux matériaux) de taille 24^2. La représentation "rectangle" (resp. "triangle") considère que le domaine est rempli de matériau 1 avec un certain nombre d'inclusions rectangulaires (resp. triangulaires), de taille et de position variable, contenant du matériau 0. Enfin la représentation de Voronoï s'appuie sur des points (centres) servant à définir un diagramme de Voronoï : à chaque centre est attaché une cellule convexe qui est constituée de tous les points du domaine qui sont plus proches de ce centre que des autres centres. À chaque centre est affectée une valeur 0 ou 1 indiquant le matériau constituant la cellule. La représentation bitarray est de taille fixe, mais liée à la taille du maillage. Les autres représentation sont plus compactes, de taille variable, et indépendantes de la discrétisation. Pour effectuer un calcul par éléments finis, il est nécessaire de projeter les structures sur le maillage fixe (décodage). En revanche les opérateurs génétiques (croisement, mutation) agissent sur la représentation compacte.

Les résultats présentés montrent l'écrasante supériorité, à la fois en terme de qualité des meilleures solutions et de vitesse de convergence globale de l'algorithme, des représentations compactes sur la représentation bitarray dans tous les cas de figure. Surtout évidemment lorsque les maillages deviennent plus fins. La représentation de Voronoï semble plus souple si on a peu d'idées préconçues sur les proportions respectives de matériau 0 et 1, tandis que les représentations en rectangles ou triangles fonctionnent bien si l'on sait par exemple que la solution est du type "inclusions de matériau 0 dans une matrice de matériau 1".

4.2 Identification de modèles rhéologiques par programmation génétique

Cette partie résume les résultats publiés dans [FJ96c] en collaboration avec Bertrand Lamy, Habibou Maitournam, Marc Schoenauer et Michèle Sebag.

La programmation génétique est une variante des algorithmes génétiques introduite par Koza [73] dans laquelle les individus sont des fonctions représentées par des arbres. Le choix des opérateurs logiques disponibles pour chaque bifurcation de l'arbre détermine l'espace de fonctions engendré par cette représentation. Par exemple les polynômes seront représentés par des arbres utilisant seulement les opérateurs $+$ et $\times$. La représentation n'est évidemment pas unique pour une même fonction. Cette représentation en arbre se prête bien aux algorithmes génétiques et les opérateurs de mutation (modification aléatoire d'une branche) et de croisement (échange de deux sous-arbres) sont naturels.

Nous utilisons la programmation génétique pour faire de l'identification de loi de comportement.

Dans une première partie nous cherchons une loi de comportement rhéologique monodimensionnelle sous la forme d'un assemblage d'éléments mécaniques de base rappelant l'élasticité (le ressort), la viscosité (l'amortisseur), et le comportement à seuil de contrainte (le patin). Ils peuvent s'organiser en série ou en parallèle. Un arbre, représentant une loi rhéologique, est constitué de "feuilles", prises parmi les trois composants élémentaires, associées chacune à une valeur numérique réelle, et de noeuds logiques "série" ou "parallèle". Les résultats présentés montrent la faisabilité de l'approche choisie. Ils restent toutefois largement perfectibles...

Dans une seconde partie, nous cherchons à identifier une loi de comportement non-linéaire hyperélastique tridimensionnelle, caractérisée par sa densité d'énergie W. Si le matériau est isotrope, on sait que W est une fonction des trois invariants principaux du tenseur $F^T F$ où F désigne le gradient de déformation (cf. [39]). Le problème direct est simulé par éléments finis en employant la méthode de Newton. Les quantités reliées à l'énergie élastique W qui interviennent dans le calcul direct sont les dérivées premières et secondes de W par rapport à ses trois variables. Il est possible d'obtenir les arbres associés aux dérivées d'une fonction, mais leurs complexité est beaucoup plus grande que celle de la fonction initiale. Pour éviter les cas, très nombreux statistiquement, où l'algorithme de Newton ne converge pas car l'individu (W) est une fonction qui ne satisfait pas certaines conditions physiques indispensables, un test *a priori* a été rajouté qui filtre une partie des lois de comportement absurdes. Moyennant cette modification, qui a fait baisser dramatiquement le temps d'exécution, de premiers résultats intéressants ont pu être obtenus pour une loi de Mooney-Rivlin.

4.3 Optimisation topologique par algorithmes évolutionnaires

Cette partie résume les résultats publiés dans [FJ95a] et [FJ02c] en collaboration avec Hatem Hamda, Couro Kane, Evelyne Lutton, Marc Schoenauer et Michèle Sebag.

Dans une courte publication assez ancienne [FJ95a] nous proposons de faire de l'optimisation topologique de structures élastiques par algorithmes génétiques. La représentation par tableau de bits, déjà évoquée dans le paragraphe 4.1, est employée. Les structures considérées étant bidimensionnelles, l'utilisation d'un opérateur de croisement prenant en compte cette structure 2d, par opposition à l'opérateur standard qui considère les individus comme des chaînes de bits 1d (bitstring), améliore grandement des capacités de l'algorithme. Différentes configurations de cantilevers 2d sont traitées et un cas-limite, pour lequel deux solutions topologiquement différentes ont des performances identiques, est mis en évidence. Finalement un cas utilisant l'élasticité non-linéaire est présenté.

L'article [FJ02c] aborde de nouveau l'optimisation topologique de formes en insistant sur l'importance de la représentation. Nous proposons trois représentations basées sur les diagrammes de Voronoï, depuis la représentation Voronoï simple jusqu'aux plus complexes représentations par dipôles ou barres de Voronoï. Ces trois représentations sont non structurées, c'est-à-dire qu'un individu est caractérisé par une liste de "gènes" non ordonnée et de longueur variable. La complexité de la structure d'un gène élémentaire augmente de la représentation Voronoï jusqu'à la représentation par barres de Voronoï. Toutefois, ces trois types de représentations permettent d'obtenir des méthodes où la complexité est auto-adaptative, *i.e.* pour lesquelles la complexité effective des individus évolue à travers l'algorithme.

Nous avons testé ces représentations sur des cas-test simples. Les résultats semblent montrer que les trois représentations sont adaptées à la résolution de ce type de problèmes. Elles demandent grossièrement le même temps de calcul pour atteindre des solutions comparables, avec un léger avantage pour la représentation par barres de Voronoï. Pourtant, après examen de la complexité du codage des solutions obtenues, on trouve un avantage net pour la représentation par barres de Voronoï, dont les solutions utilisent moins de "gènes" que les deux autres. Cela explique sans doute le très léger avantage observé pour ce codage en terme de rapport qualité/coût de calcul. En effet, il est plus facile d'ajuster finement la solution lorsque peu de gènes sont en jeu.

Finalement, nous présentons la représentation à base de systèmes de fonctions itérées (IFS) dans laquelle la structure est définie indirectement comme l'attracteur d'un ensemble de transformations contractantes définies sur le domaine de travail. Une telle représentation ne fait aucune hypothèse *a priori* sur la forme des blocs élémentaires constitutifs d'une solution d'un problème d'optimisation topologique. Cette technique devrait permettre d'atteindre des solutions plus complexes sans avoir à définir de gènes élémentaires spécifiques.

Pourtant, la représentation par IFS n'a pas été capable de trouver d'excellent résultats

sur les cas-test simples qui ont été essayés. Mais il est possible que le manque de feed-back direct de la structure mécanique sur son génotype (l'IFS) empêche des évolutions utiles sur les populations restreintes et de si petits nombres de générations.

Dans l'attente de nouveaux résultats, la représentation par barres de Voronoï semble être un bon choix pour l'optimisation topologique par AE en 2d, réalisant un bon compromis entre la compacité du codage des individus et la facilité de recherche des bonnes solutions. Toutefois, alors que la généralisation des représentations Voronoï et par dipôles à trois dimensions est immédiate (ainsi que celle par IFS), la représentation par barres de Voronoï demande un peu plus d'efforts. De plus, il sera sans doute nécessaire d'introduire des plaques et des barres de différentes sections dans le catalogue des gènes élémentaires.

5 Quelques applications en ophtalmologie. Implants intraoculaires accommodatifs

Mon travail de thèse portait sur la modélisation et la simulation du comportement mécanique de l'œil humain, avec des applications à la simulation d'opérations de chirurgie réfractive en vogue à l'époque (kératotomie radiaire, kératomileusis, kératotomie arciforme ou transverse, épikératophakie). Un des objectifs de cette modélisation était de prévoir à l'avance les résultats obtenus par diverses techniques chirurgicales visant à corriger les défauts de vision en modifiant la forme de la cornée. Par exemple en y pratiquant des incisions. Le long intervalle de temps qui s'est écoulé depuis a laissé à l'Histoire le loisir de trancher : ces techniques opératoires sont maintenant quasiment toutes abandonnées. Restent quelques publications académiques [FJ86a, FJ88a, FJ88b, FJ89a, FJ89b, FJ89c, FJ90a, FJ91a, FJ91b, FJ91c, FJ91d, FJ91e, FJ91f, FJ92a, FJ99a], un livre [FJ93], un modèle mécanique de l'œil en élasticité non-linéaire toujours valide et surtout des effets à long terme peu agréables pour la plupart des malheureux patients ayant eu à subir de telles opérations.

Subsiste également ma collaboration continue depuis lors avec Khalil Hanna – chirurgien à l'Hôtel Dieu (Paris) – et son foisonnement permanent d'idées nouvelles.

Au cours des années 90 nous avons abordé différents sujets mêlant modélisation mathématique, simulation numérique et ophtalmologie. Ils faisaient la plupart du temps l'objet de contrats, offrant peu de possibilités de publication. Les solutions que nous proposions sont souvent, pour diverses raisons, restées lettre morte et n'ont pas été adoptées par les praticiens même si elles étaient parfois susceptibles d'améliorer sensiblement les techniques existantes. Je pense en particulier au système de focalisation du laser excimer que nous avions développé, permettant d'obtenir une meilleure régularité de surface après l'opération du LASIK (LAser in SItu Keratomileusis) qui est la technique actuellement utilisée pour traiter les myopies et les hypermétropies faibles à moyennes (< 10 Dioptries). En cela nous avons longtemps minimisé le rapport
$\frac{\text{(reconnaissance académique)}+\text{(reconnaissance commerciale)}}{\text{(travail fourni)}}$.

Mais notre persévérance fut tout de même récompensée : à la fin des années 90, nous nous sommes intéressés au mécanisme de l'accommodation avec l'idée que sa compréhension pourrait nous aider à concevoir un implant – un cristallin artificiel destiné à remplacer le cristallin naturel après l'opération de cataracte – permettant au patient d'accommoder à différentes distances. Rappelons que ce n'est pas le cas avec les implants traditionnels qui sont des lentilles de puissance réfractive fixe. Nous décrivons notre démarche dans la suite de ce chapitre, qui est une version largement développée de la courte note [FJ04a]. Il constitue l'ossature d'une publication en préparation (publication tardive en raison des problèmes de confidentialité commerciale). Ce travail a été effectué en relation avec la société HumanOptics de Nuremberg (`www.humanoptics.com`), créée en 1999 pour développer et commercialiser ces nouveaux implants accommodatifs.

5.1 Description schématique du mécanisme de l'accommodation et de la presbytie

Le cristallin peut-être considéré dans un premier temps comme constitué d'une membrane très fine, d'épaisseur comprise entre 5μm et 20μm suivant les zones, appelée *capsule*, contenant une lentille très déformable dont l'épaisseur au centre varie entre 3 et 4.5 mm. Le module d'Young moyen de la capsule, de l'ordre du MPa, est environ 1000 fois supérieur à celui de la lentille qui est de l'ordre du kPa [50][51]. La lentille est constituée de couches concentriques donnant une structure rappelant celle d'un oignon. On peut distinguer un *noyau* central et une zone périphérique appelée *cortex* (cf. Figure 13). Elle a donc des propriétés mécaniques inhomogènes et anisotropes complexes. Le noyau peut être considéré comme isotrope tandis que le cortex est anisotrope et un peu plus rigide que le noyau. Cette anisotropie décroît avec l'âge, et la rigidité moyenne de l'ensemble croît. Le cristallin est quasiment incompressible chez le sujet jeune. Sa teneur en eau décroît avec l'âge et son coefficient de Poisson diminue jusqu'à une valeur d'environ 0.35. L'indice de réfraction du cristallin est variable en fonction de la distance à l'axe optique. Cette propriété joue un rôle important dans la correction des aberrations sphériques issues de la cornée et donc dans la qualité de l'image formée sur la rétine.

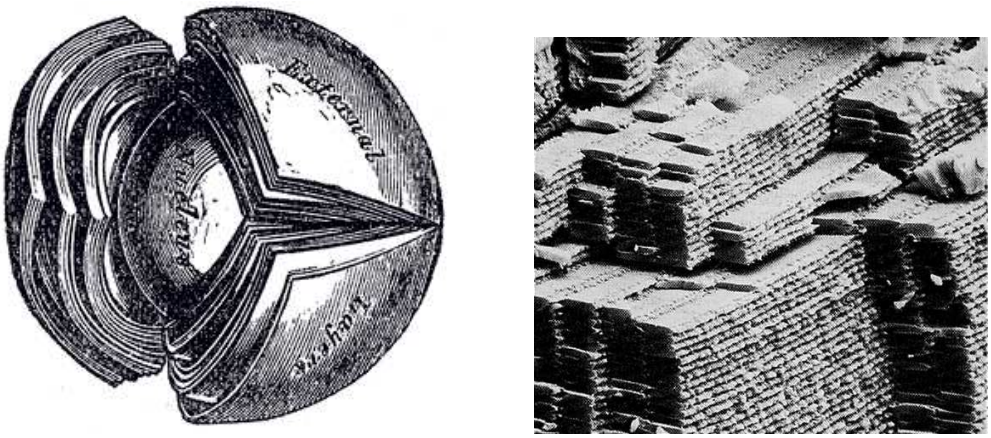

FIG. 13 – Structure interne du cristallin avec le cortex et le noyau (à gauche d'après [61]) et structure fine de la matière corticale (à droite)

Des études expérimentales ont montré une grande variabilité de la géométrie du cristallin suivant les individus et les classes d'âge [27]. Le cristallin au repos, avec la capsule, possède la forme dite "accommodée", c'est-à-dire la géométrie adaptée à la vision de près. Lorsque l'on retire la capsule, il prend la forme "dé-accommodée" utilisée pour la vision lointaine (Fincham [49]). Nous sommes donc en présence d'un système mécanique constitué d'une membrane très fine mais relativement rigide contenant un corps beaucoup plus mou avec une disparité de formes. Au repos, le système est sous contraintes. La configuration de référence n'est pas un état naturel. Sa géométrie est celle du cristallin accommodé. L'état précontraint et le quasi-équilibre mécanique du système permettent de passer à l'autre géométrie intéressante – l'état dé-accommodé – en exerçant le minimum d'efforts

extérieurs. De plus la répartition et l'intensité de ces efforts n'ont pas besoin d'être très précises : une simple traction de la capsule en son équateur suffit pour relâcher les contraintes exercées sur ce qu'elle contient et obtenir la forme dé-accommodée correspondant à la géométrie de repos de la lentille, formée du noyau et du cortex. Un solide élastique homogène nécessiterait au contraire une très grande précision dans l'ajustement des forces pour atteindre une géométrie déformée donnée. Tout se passe donc comme si le système (capsule+cortex+noyau) formant le cristallin était un solide à mémoire de forme, capable de passer très précisément d'une forme à une autre, les positions intermédiaires étant aussi accessibles, avec le minimum d'effort et de précision dans le contrôle de ces efforts.

Le *muscle ciliaire*, ou *corps ciliaire* est une zone en forme d'anneau, solidaire de la sclère, qui est déformable volontairement. Le cristallin est relié au muscle ciliaire par l'intermédiaire de fibres, formant la *zonule*, insérées dans la zone équatoriale de la capsule. L'insertion, vue en coupe, a la forme d'un éventail dont la pointe est ancrée au corps ciliaire et la périphérie se rattache en plusieurs points de la capsule du cristallin au voisinage de l'équateur (cf. Figure 14). Le principe du mécanisme de l'accommodation a été décrit dans ses grandes lignes par Von Helmholtz en 1855 [67] : la contraction du muscle ciliaire entraîne une relaxation de la tension des fibres constituant la zonule. Le cristallin n'est alors plus soumis à leur traction et prend sa forme de repos, c'est-à-dire la forme accommodée (plus "ronde"). Lorsque le muscle ciliaire se relâche, les fibres se tendent et tirent sur la capsule en son équateur. C'est alors la lentille (cortex+noyau) qui a tendance à revenir à son état de repos, c'est-à-dire la géométrie dé-accommodée, plus "plate" au centre (cf. Figure 15).

Avec l'âge, le cristallin augmente de volume. Il devient plus rigide tandis que la capsule devient plus souple, rendant la déformation de l'ensemble plus difficile. Bien que la question ne soit pas totalement tranchée, il semble aussi que le muscle ciliaire perde un peu de sa vigueur. La conjonction de ces phénomènes entraîne une perte inexorable de la capacité d'accommodation avec les années. Elle est comprise entre 10 et 20 dioptries à 8 ans (20 dioptries correspond à un punctum proximum à 5 cm) et décroît jusqu'à passer, entre 40 et 50 ans, sous la barre des 3 dioptries. Il faut alors chausser des lunettes pour lire à distance habituelle. C'est le phénomène de *presbytie*. Il touche la totalité de la population. La Figure 16 montre la capacité d'accommodation mesurée de façon subjective (évaluation par le patient de la distance de lecture minimale) en fonction de l'âge des individus pour un gros échantillon de population. Les myopes peuvent parfois continuer à lire sans lunettes grâce à leur myopie mais ils sont tout autant touchés par la presbytie.

Cette théorie classique du mécanisme de l'accommodation et de la presbytie de Von Helmholtz remonte à presque de 150 ans. Elle a été confirmée et affinée par de très nombreuses études plus récentes [49, 50, 51, 52, 59, 99]. En 1992 Schachar [108, 109] a proposé un modèle totalement différent de l'accommodation, en contradiction complète avec la théorie classique. Dans ce modèle la presbytie serait uniquement due à l'augmentation du diamètre du cristallin qui n'aurait plus assez de place pour accommoder. Cette théorie est très contestée. D'autant plus qu'elle a conduit au développement d'une chirurgie de la presbytie consistant à "ménager de la place" au cristallin devenu trop gros, dont les effets objectifs sont douteux et discutés [85]. Rappelons que la presbytie touche 100% de la population et représente donc d'importants intérêts financiers.

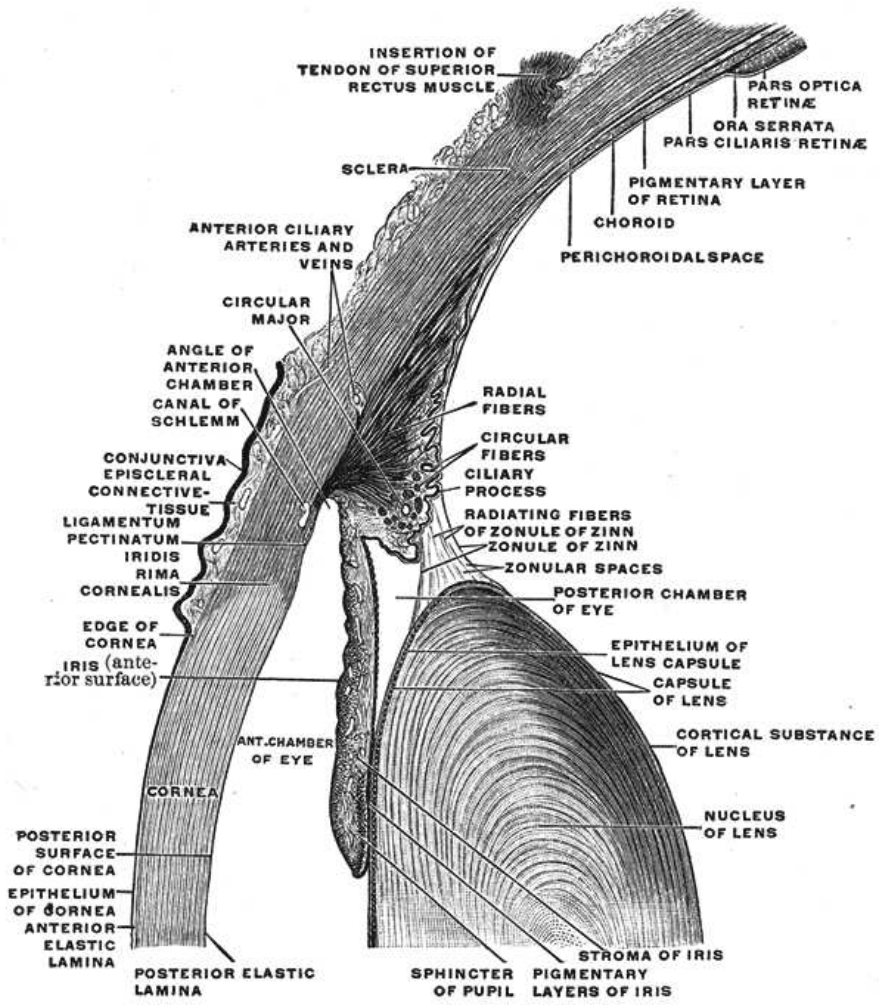

FIG. 14 – Planche anatomique montrant, entre autres, le corps ciliaire, la zonule et ses insertions sur la capsule du cristallin (d'après [61]).

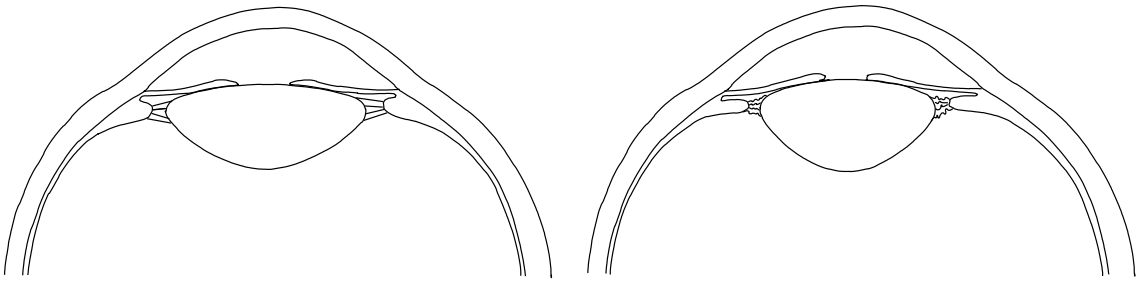

FIG. 15 – Schéma de la théorie classique de l'accommodation. Muscle ciliaire relaxé et zonule sous tension pour la vision lointaine (à gauche) ; muscle ciliaire contracté et zonule relâchée pour la vision de près (à droite).

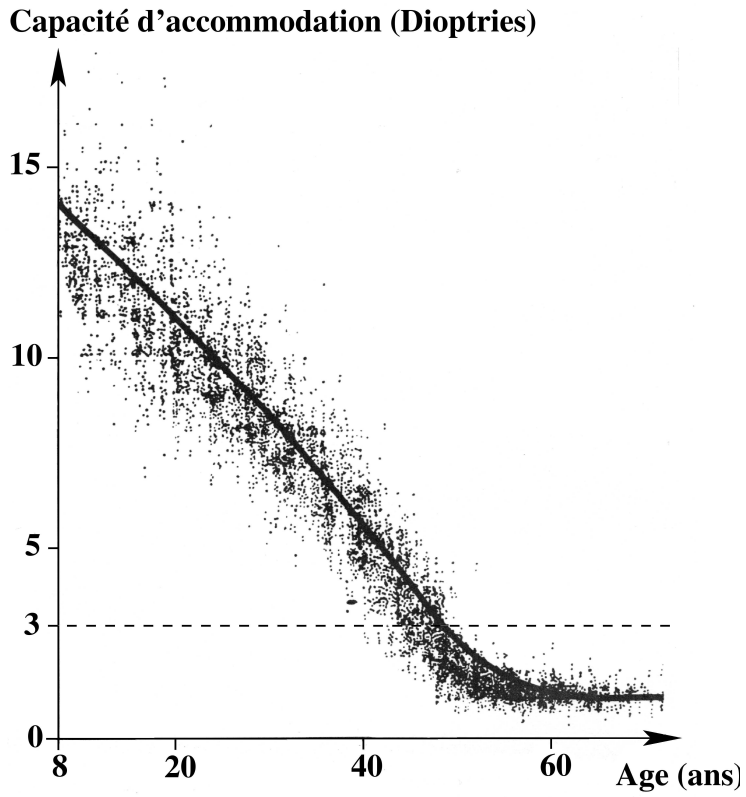

FIG. 16 – Capacité d'accommodation en fonction de l'âge pour 1500 individus mesurés (d'après Duane [46])

5.2 L'opération de cataracte

La cataracte est une opacification du cristallin menant, à terme, à la cécité totale. Elle touche une large proportion de la population au delà de 60 ans. Dans les pays riches, on la traite maintenant de façon courante par une banale opération chirurgicale que nous décrivons ci-dessous. Malgré tout, elle reste la première cause de cécité, particulièrement en Afrique (en 1997 on a compté dans le monde 16 millions de cas dus à la cataracte).

Les premières opérations connues remontent à l'antiquité égyptienne et indienne. Elles consistaient en un *abaissement* du cristallin opacifié (*i.e.* un déplacement provoqué par un stylet ou par des chocs répétés pour l'écarter de l'axe optique) afin de laisser passer les rayons lumineux paraxiaux. Cette technique d'abaissement du cristallin s'est peu à peu améliorée (cf. Figure 17), en particulier au début du XXeme siècle grâce à Barraquer. Mais les patients, du fait de l'absence d'une lentille à la puissance réfractive importante, se retrouvaient ensuite hypermétropes d'une vingtaine de dioptries. Ils devaient porter dans la vie courante d'impressionnantes lunettes correctrices à verres convexes.

FIG. 17 – Abaissement du cristallin au XVIe siècle (d'après [16]).

Un pas très important fut franchi à la fin des années 60 avec l'introduction conjointe de deux techniques dans la pratique courante des chirurgiens :

• *la phakoémulsification* permet, grâce à une sonde introduite dans la capsule, de détruire le cristallin par des ultra-sons tout en préservant la zonule et l'essentiel de la capsule ;

• *l'implant intraoculaire* (Intra-Ocular Lens ou IOL) qui est une lentille, en PMMA, en acrylique ou en silicone, de puissance dioptrique équivalente à la puissance moyenne du cristallin naturel. Il est le plus souvent placé dans la capsule (implant intracapsulaire) mais peut aussi être posé devant l'iris en s'appuyant sur l'angle irido-cornéen (implant de chambre antérieure) ou encore fixé sur l'iris. Il permet d'éviter les gros verres correcteurs qui étaient nécessaires après l'opération. Le premier implant expérimental a été posé en 1949.

Ces techniques sont en progrès constant. Actuellement, on pratique sur la face antérieure de la capsule, dont le diamètre total est de l'ordre de 9mm, l'ablation d'une calotte d'environ 6mm de diamètre centrée sur l'axe optique (*capsulorhexis*). La sonde de phakoémulsification et l'implant sont successivement introduits dans l'œil à travers une incision de plus en plus petite pratiquée en périphérie de cornée : longue de plus 5mm il y a quelques années, elle fait maintenant couramment 3mm. On arrive même aujourd'hui à des incisions de moins de 1mm grâce à de nouveaux implants très fins. L'implant est introduit dans l'œil en utilisant un petit injecteur en forme de seringue dans lequel il est roulé, glissé à travers un canal cylindrique puis libéré à l'intérieur de la capsule. Une courte incision minimise les risques d'effets secondaires et réduit la durée d'hospitalisation. Elle permet aussi d'éviter

de suturer la périphérie de la cornée, réduisant ainsi les risques d'astigmatisme induit. Il est important de noter qu'en général, à l'exception du trou de capsulorhexis centré sur l'axe optique, la capsule et la zonule qui la relie au corps ciliaire, sont préservées au cours de l'intervention. La plupart du temps le muscle ciliaire est toujours fonctionnel, permettant d'espérer sa réutilisation pour actionner un implant accommodatif. Toutefois, au bout d'un certain temps, si l'implant qui remplace le cristallin ne maintient pas la capsule suffisamment tendue avec une forme proche de celle qu'elle avait avant l'opération, elle se rétracte fortement et devient très rigide, figeant l'éventuel mécanisme qui était à l'intérieur. C'est le phénomène de *fibrose*. Il n'est pas trop gênant si l'on utilise un implant fixe assez rigide pour supporter la rétraction de la capsule et ayant des appuis suffisamment équilibrés pour ne pas perdre son centrage et sa perpendicularité par rapport à l'axe optique lorsque la fibrose intervient. En revanche, dans la conception d'un implant accommodatif, on devra veiller à prévenir la fibrose pour garantir la pérennité de l'accommodation, même si un implant accommodatif concurrent (cf. [41][45]) prétend utiliser la fibrose comme "moteur" de l'accommodation, suivant un principe mécanique qui nous semble peu clair.

En 2000, environ 400000 opérations de ce type furent pratiquées en France, et plus de 10 millions dans le monde, principalement dans les pays riches.

Malgré le caractère miraculeux que ressentent les malades après l'opération, qui leur permet de redécouvrir la clarté et les couleurs en leur donnant l'impression d'émerger d'un épais brouillard, leur vision postopératoire est différente de celle d'un sujet sain car leur capacité accommodative est totalement perdue : l'implant traditionnel est une lentille de puissance fixe procurant une image nette à une distance donnée, ajustée suivant les habitudes de chaque patient (plutôt "lecteur" ou plutôt "amateur de grands espaces"). Il doit chausser des lunettes pour voir correctement en dehors de sa plage de profondeur de champ.

5.3 Accommodation et pseudo-accommodation

L'accommodation est une variation active de la puissance dioptrique globale de l'œil. On parle parfois de *pseudo-accommodation* lorsque le sujet est capable de voir plus ou moins clairement à différentes distances sans que la mesure objective de la puissance de son œil ne soit modifiée. C'est le cas grâce à des dispositifs multifocaux (implants ou lentilles progressives, nouveaux implants dits "diffractifs" ayant deux zones de netteté) ou bien en utilisant des aberrations oculaires, naturelles ou provoquées, comme l'astigmatisme ou les aberrations sphériques.

Pour concevoir un implant capable de restaurer, même partiellement, une capacité accommodative active, deux familles d'approches sont possibles :

• remplacer le cristallin par une lentille déformable qui, comme le cristallin naturel, modifie sa capacité réfractive – par exemple ses rayons de courbure – sous l'action du muscle ciliaire ;

• utiliser une (ou plusieurs) lentille(s) de puissance(s) dioptrique(s) fixe(s) qui soi(en)t capable(s) de se déplacer le long de l'axe optique grâce à un système mécanique de forme particulière. Il sera actionné par l'appareil accommodatif – muscle ciliaire, zonule, capsule – qui subsiste après l'opération.

Les implants que nous allons décrire ci-dessous, ainsi que les implants accommodatifs commercialisés à ce jour mis au point par d'autres compagnies, appartiennent tous à cette seconde famille. Des solutions consistant à injecter une substance de type "gel" dans la capsule sont à l'étude actuellement dans plusieurs équipes. Pour le moment elles posent de nombreux problèmes techniques, qui semblent encore difficiles à surmonter du fait du comportement, proche du liquide, des matériaux utilisés.

Nous travaillons, pour notre part, sur des systèmes déformables fonctionnant par modification de rayons de courbure, mais utilisant un matériau au comportement élastique. Ces recherches n'ont pas pour le moment abouti à des solutions qui fonctionnent avec l'ordre de grandeur des forces en jeu *in vivo* et des matériaux autorisés d'un point de vue sanitaire pour la confection d'implants intraoculaires.

Le phénomène d'accommodation par translation interne d'une lentille se comprend aisément au travers d'un modèle optique de l'œil. Le premier modèle optique fiable est dû à Gullstrand il y a plus d'un siècle [62]. Il est composé de 6 dioptres sphériques (2 pour la cornée et 4 pour le cristallin en tenant compte du noyau, cf. Figure 18) et utilise l'optique géométrique classique. Par la suite, des raffinements ont été introduits, concernant la modélisation optique du cristallin naturel et la représentation des surfaces asphériques des dioptres. Ils ne sont cependant pas utiles pour notre propos. Grâce à un tel modèle, on peut calculer la variation de puissance dioptrique totale du système en fonction de la position de l'implant. Lorsqu'il se déplace vers l'avant, on obtient une accommodation positive permettant la mise au point sur un sujet proche. Pour un déplacement de 1 mm de la lentille le long de l'axe optique vers "l'avant" (*i.e.* du fond de l'œil vers la cornée, cf. Figure 19), on calcule une variation comprise entre +1.2D et +2D. Cette efficacité accommodative dépend de la longueur de l'œil et de la puissance réfractive de la cornée (et donc de la puissance réfractive de l'implant seul qui est une fonction de ces deux paramètres). Idéalement, pour concurrencer un œil sain, un implant devrait procurer une capacité accommodative d'au moins 3 dioptries, autorisant ainsi une vision parfaite entre l'infini et 33 cm (= 1/3 m), distance de lecture moyenne. Il devrait donc être capable de se déplacer, sous l'action de la zonule, d'une distance comprise entre 2.5 mm et 1.5 mm le long de l'axe optique.

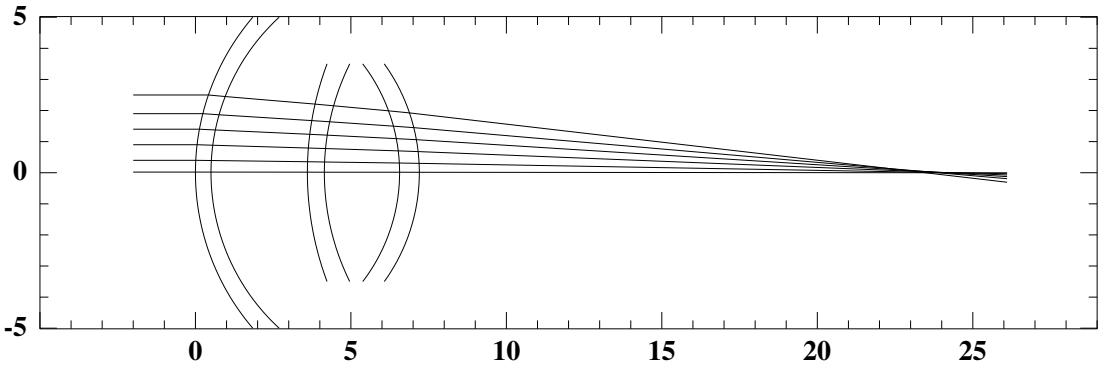

FIG. 18 – Modèle optique de Gullstrand à 6 dioptres sphériques incluant la cornée et le cristallin avec son noyau entouré du cortex. Trajet d'un faisceau de rayons lumineux venant de l'infini.

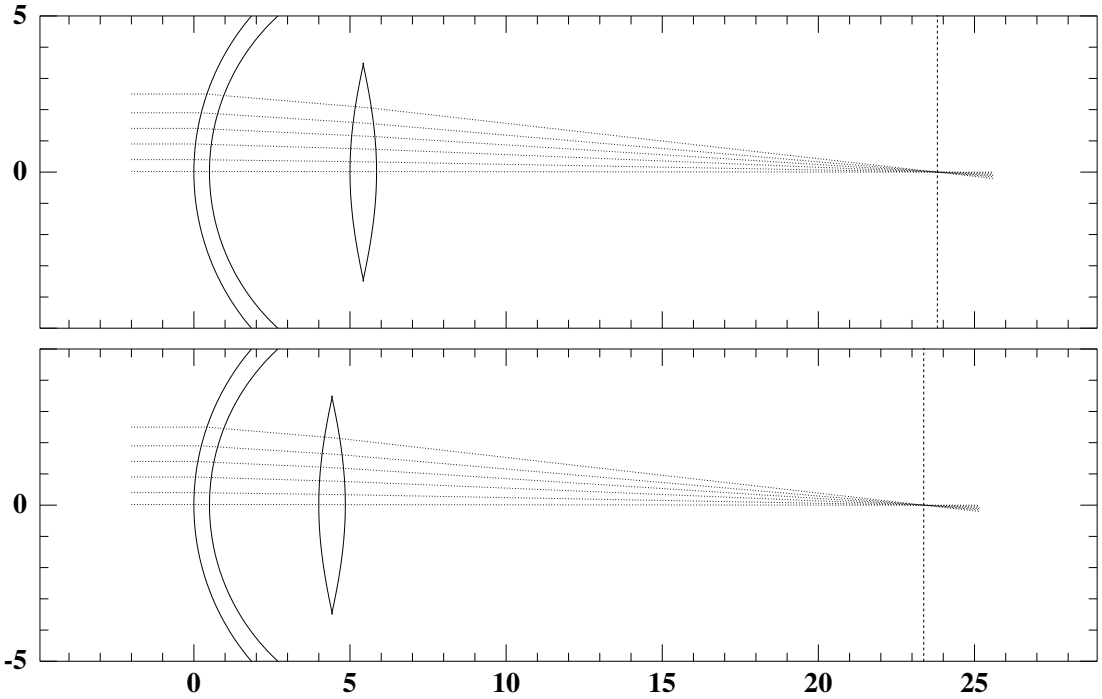

FIG. 19 – Accommodation par translation d'une lentille remplaçant le cristallin : variation du plan focal en fonction de la position de l'implant pour un faisceau de rayons incidents parallèles.

5.4 Critères de conception

Nous allons maintenant utiliser notre expertise en matière de calcul de formes optimales pour élaborer un implant potentiellement accommodatif.

La conception d'un implant accommodatif fonctionnant suivant le principe décrit ci-dessus doit se faire en tenant compte d'un certain nombre de critères, dont beaucoup sont impératifs. La plupart d'entre eux ne sont pas des critères facilement quantifiables, capables de se transformer en contraintes sous forme habituelle, à rajouter à un problème d'optimisation de structures :

• *critères physiologiques :* en l'absence de toute considération de performance accommodative, l'implant doit se comporter aussi bien qu'un implant traditionnel. En particulier en cas de non fonctionnement du mécanisme d'accommodation pour diverses raisons (essentiellement le mauvais état de l'appareil accommodatif du patient), il ne doit pas occasionner plus d'effets secondaires néfastes qu'un implant classique. De plus, sa forme doit être conçue de telle sorte que le processus de fibrose de la capsule soit évité au maximum. Il doit donc entraîner la tension permanente de la capsule avec une géométrie aussi proche que possible de sa position naturelle (rappelons que la cause principale de la fibrose est la mauvaise tension de la capsule après l'opération). Si malgré tout la fibrose intervient, l'implant ne doit pas trop se déformer lors de la rétraction de la capsule. Il ne doit pas s'effondrer sur lui-même et encore moins être expulsé de l'autre coté de l'iris. Il doit rester fonctionnel comme un implant traditionnel non accommodatif. Les cas où l'explantation est nécessaire doivent rester exceptionnels ;

• *critères ergonomiques pour l'implantation :* son implantation ne doit pas être sensiblement plus compliquée que celle d'un implant classique. Il doit pouvoir se plier pour passer plus facilement à travers une incision de faible longueur, ou mieux, se rouler pour pouvoir être introduit dans l'œil à travers un injecteur. Dans ce cas, il doit pouvoir revenir naturellement dans sa configuration de repos, dans l'espace qui lui est alloué, sans risquer de rester coincé dans une position intermédiaire une fois libéré dans la capsule. Le sens d'implantation doit être facilement repérable par le chirurgien ;

• *critères mécaniques :* étant données les informations partielles connues sur les forces agissant sur un implant intracapsulaire, il faut trouver une forme, compatible avec les autres critères, qui maximise le déplacement axial de la lentille – ou au moins procure un déplacement axial de l'ordre de 2mm – pour une intensité de forces extérieures dans la gamme physiologique admise. Le design ne doit toutefois pas être trop souple afin de permettre un retour naturel de l'implant dans sa position initiale, sans aide extérieure, lorsque la tension de la capsule est relâchée ;

• *contraintes de fabrication :* on retrouve ici des problèmes plus familiers aux numériciens ayant l'habitude de l'industrie, ce qui ne les rend pas pour autant plus simples à prendre en compte. Le matériau utilisé est une donnée du problème – c'est de l'acrylique dans notre cas – et le procédé de fabrication n'autorise pas toutes les formes possibles.

5.5 Un premier implant accommodatif

Dans cette première phase, c'est la simulation directe qui nous a aidé dans la conception. En effet, les outils d'optimisation de forme automatiques décrits dans les chapitres précédents sont inaptes à prendre en compte des jeux de contraintes aussi complexes que ceux énoncés ci-dessus. De plus, la modélisation de l'implant *in vivo* réclamait une validation. Notre travail a donc consisté dans un premier temps à simuler numériquement des formes élaborées en collaboration avec Khalil Hanna, tout en affinant au fur et à mesure la modélisation nécessaire à ces simulations et en modifiant manuellement les géométries à la lumière des résultats des calculs numériques.

Suivant le principe admis du mécanisme de l'accommodation classique, celui de Von Helmholtz, l'implant est au repos lorsque la zonule exerce une traction radiale sur la capsule. Il se trouve alors dans sa position dé-accommodée adaptée à la vision lointaine. Il doit être capable de se déformer jusqu'à sa position accommodée avec le minimum d'efforts extérieurs exercés par la rétraction de la capsule. Les efforts en jeu dans ce mécanisme sont assez peu connus de façon quantitative et certainement très variables d'un patient à l'autre. Fisher [53] a mesuré, *in vitro* et par une méthode indirecte, la résultante totale des forces de contraction exercées par le muscle ciliaire : elle varie entre 0.8g et 1.2g pour des sujets de 15 à 45 ans. Elle décroît au delà de 60 ans. Ce sont les seuls ordres de grandeur disponibles dans la littérature à notre connaissance. Ils sont imprécis et ne renseignent pas sur la répartition fine des efforts en jeu, tant en intensité qu'en direction. Il est à noter que les mesures directes dans la région de la zonule et du corps ciliaire sont pratiquement impossibles *in vivo* car cette zone est masquée par l'iris. Ces données incomplètes nous seront tout de même utiles par la suite pour vérifier que nos implants se meuvent facilement pour des forces extérieures compatibles avec les efforts réels. L'état postopératoire de la capsule est également important pour le bon fonctionnement du système.

Le principe de base de l'implant que nous proposons est d'imiter le cristallin naturel qui se compose de deux parties – la capsule à l'extérieur et le cortex et son noyau à l'intérieur – avec une disparité de formes au repos entre les deux. Cette structure permet de passer avec peu d'efforts de la position accommodée à la position dé-accommodée. Notre implant comportera donc également deux composants : une enveloppe en forme de "pneu" ajouré pour le rendre plus déformable, et une lentille supportée par quatre pattes articulées, appelées aussi *haptiques*. Au repos, le diamètre total de la lentille avec ses pattes est supérieur au diamètre intérieur du pneu (cf. Figure 22). Les deux parties sont dimensionnées de telle sorte que la partie supportant la lentille, une fois introduite à l'intérieur du pneu, est capable de le déformer pour se retrouver à l'équilibre dans une position proche de son état de repos, c'est-à-dire en position dé-accommodée. Mais le pneu, ayant emmagasiné de l'énergie, peut la restituer ensuite. Il aide ainsi la capsule, qui exerce des efforts radiaux de compression dès qu'elle ne subit plus la traction de la zonule, à déformer l'ensemble du système pour le mener vers la position accommodée. Le diamètre au repos du pneu est choisi de telle sorte que la lentille dans cette position procure une accommodation convenable. Idéalement, si les rigidités respectives des deux composants sont bien réglées, on doit pouvoir obtenir après assemblage un système capable de passer

d'une position à l'autre avec des efforts extérieurs infinitésimaux.

Le pneu joue également un rôle dans la préservation de la fonctionnalité de la capsule car il la maintient tendue avec une forme proche de celle du cristallin naturel, évitant ainsi la fibrose. Il a enfin une fonction de garde-fou si la fibrose intervient malgré tout : en cas de très forte rétraction de la capsule, le pneu est capable de soutenir des efforts radiaux importants car sa forme semi-torique le rend très difficile à comprimer. Il évitera donc une expulsion éventuelle de l'implant vers l'avant, à travers l'iris, qui n'est pas une chose souhaitable. Pour parfaire la sécurité de l'ensemble, quatre ailettes partant du bord de l'optique avec un angle convenable pour ne pas entraver le mouvement normal de l'ensemble sont placées entre les pattes (cf. Figure 21). Elle viennent buter sur le pneu en cas de déformation trop importante, afin encore une fois d'éviter l'expulsion de l'implant vers l'avant.

Après l'optimisation manuelle décrite ci-dessus, le premier implant accommodatif "candidat" est celui présenté sur les Figures 21 à 24. L'angle que font les pattes avec le plan perpendiculaire à l'axe optique vaut 5°. Il empêche l'implant d'initier un déplacement vers l'arrière en cas de mauvais positionnement. La face postérieure bombée des haptiques a aussi ce rôle en venant buter contre la capsule. Le profil extérieur du pneu correspond à celui du cristallin naturel en position accommodée. Les trous qui y sont pratiqués, ainsi que les "festons" de sa face postérieure, servent à le rendre plus facilement déformable. Les encoches permettent de plus, en cas de complications cliniques, de pouvoir pratiquer des interventions au laser à travers les trous afin d'atteindre la face postérieure de la capsule. Les festons servent en outre de repère au chirurgien pour être certain de positionner l'objet dans le bon sens pendant l'opération.

5.6 Simulation directe du comportement de l'implant à deux composants

Nous décrivons le principe de la modélisation de l'implant à deux composants que nous avons effectuée. Cette modélisation a permis la simulation directe et l'optimisation "manuelle" de l'implant qui est proposé ici. Elle est intervenue à la source de la conception et non pas *a posteriori* comme validation. La modélisation elle-même a évolué en fonction des résultats obtenus et des discussions avec K.Hanna. Elle est donc aussi le fruit d'une sorte de processus d'optimisation. De même que le design proposé Figures 21 à 24 est l'aboutissement – provisoire – de cette partie de l'étude, nous ne présentons que la modélisation finalement retenue.

Il y a deux difficultés principales dans la modélisation de cet implant :

• trouver une façon fiable de simuler une structure à deux composants avec une disparité de formes, la physique du contact entre deux parties n'étant pas totalement connue (contact parfaitement glissant, adhérence ou autre type de contact) ;

• proposer une modélisation qui ne repose pas sur la description complète des efforts exercés par la capsule sur l'implant, ceux-ci n'étant pas connus avec assez de précision.

Nous utilisons l'élasticité non-linéaire avec une loi de comportement de St Venant-Kirchhoff, qui présente l'avantage d'être caractérisée par deux coefficients de Lamé, comme l'élasticité linéarisée isotrope. Ce choix de loi de comportement se fait uniquement par défaut, car les données expérimentales disponibles sur l'acrylique utilisé sont peu nombreuses. En particulier, nous n'avons pas trouvé de données pouvant permettre l'utilisation d'une loi de comportement non-linéaire. Le choix de l'élasticité non-linéaire est en revanche indispensable du fait des grands déplacements et des grandes rotations que subit l'implant.

Nous faisons une hypothèse importante qui est à la base de notre modèle : nous supposons que la partie externe des haptiques qui s'appuie sur l'enveloppe ne subit qu'un déplacement rigide au cours de la déformation du système. Autrement dit, cette partie, qui géométriquement est une portion de tore, conserve globalement sa forme lorsque l'implant fonctionne. En conséquence, le contact avec l'enveloppe se fait aussi sur une portion de tore. Cette hypothèse est justifiée par la grande rigidité relative de cette partie de l'implant comparée aux zones faibles des haptiques qui sont destinées à se plier (cf. Figure 25). La validité de cette hypothèse nécessite aussi que les efforts extérieurs dus à la capsule soient bien répartis sur toute la circonférence. Qu'il n'y ait pas de zones où les efforts soient plus concentrés ou de dissymétries trop marquées entre les forces extérieures (mais dans ce cas on imagine qu'un implant intracapsulaire déformable aura de toute façon beaucoup de difficultés à fonctionner correctement).

Cette hypothèse permet de remplacer le problème couplé, comprenant les deux composants de l'implant et une condition de non interpénétration entre les deux sous-domaines, par deux séries de problèmes disjoints d'élasticité non-linéaire, posés sur chaque domaine, avec conditions de contact unilatéral.

Soient Ω_1 et Ω_2 les deux domaines correspondant aux deux composants et Γ_1^c, Γ_2^c les deux portions de frontière de chacun des domaines susceptibles d'être soumises à la condition de contact unilatéral. Le choix de Γ_1^c et Γ_2^c est important dans la qualité du modèle. On note S_λ la fonction de $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ qui caractérise la surface sur laquelle est supposée se faire le contact. $\mathbf{S}_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } S_\lambda(x) = 0\}$ est l'ensemble des points de la surface et le signe de $S_\lambda(x)$ détermine de quel côté de la surface se trouve le point x. La surface de contact potentiel est paramétrée par $\lambda \in \mathbb{R}$. Dans notre cas $\mathbf{S}_\lambda$ est un tore de rayon majeur λ.

Si u est un champ de déplacement, on note $W(I+\nabla u)$ la densité d'énergie du matériau hyperélastique considéré. Pour une valeur donnée du paramètre λ, on résout indépendemment les deux problèmes suivants, en l'absence de forces extérieures :

$$\inf_{\substack{u_{\lambda,1} \in H^1(\Omega_1) \\ S_\lambda(x+u_{\lambda,1}(x)) \leq 0 \ \ \forall x \in \Gamma_1^c}} \int_{\Omega_1} W(I + \nabla u_{\lambda,1}) dx, \tag{64}$$

$$\inf_{\substack{u_{\lambda,2}\in H^1(\Omega_2)\\ S_\lambda(x+u_{\lambda,2}(x))\geq 0\ \ \forall x\in\Gamma_2^c}} \int_{\Omega_2} W(I+\nabla u_{\lambda,2})dx. \tag{65}$$

On écrit une version pénalisée de (64,65) afin d'éliminer les contraintes de contact unilatéral

$$I_{\lambda,1} = \inf_{u_{\lambda,1}\in H^1(\Omega_1)} \left\{ \int_{\Omega_1} W(I+\nabla u_{\lambda,1})dx + \frac{1}{\varepsilon}\int_{\Gamma_1^c} \rho\Big(S_\lambda(x+u_{\lambda,1}(x))\Big)ds \right\}, \tag{66}$$

$$I_{\lambda,2} = \inf_{u_{\lambda,2}\in H^1(\Omega_2)} \left\{ \int_{\Omega_2} W(I+\nabla u_{\lambda,2})dx + \frac{1}{\varepsilon}\int_{\Gamma_2^c} \rho\Big(-S_\lambda(x+u_{\lambda,2}(x))\Big)ds \right\}, \tag{67}$$

où ρ désigne la fonction partie positive, éventuellement régularisée en 0, et ε est un petit paramètre.

La position d'équilibre du système sera obtenue pour une valeur de λ qui minimise l'énergie totale, somme des énergie des deux sous-domaines :

$$\min_{\lambda\in[\lambda_1,\lambda_2]} \Big(I_{\lambda,1}+I_{\lambda,2}\Big), \tag{68}$$

où $[\lambda_1,\lambda_2]$ est un intervalle convenable. En pratique λ_1 est la valeur pour laquelle le pneu est au repos et λ_2 celle pour laquelle la partie optique est au repos. La Figure 20 montre une courbe typique de l'énergie élastique totale du système en fonction du paramètre λ.

Il va sans dire qu'il est sans doute difficile d'établir un résultat d'existence pour un tel problème sans le dégrader fortement. Mais ici, la modélisation pertinente du phénomène physique nous semble devoir prendre le pas sur la production de théorèmes.

De cette façon, on parvient à simuler le comportement de l'implant bi-composants assemblé, sans forces appliquées. On détermine la position d'équilibre du système et on peut évaluer l'énergie qu'il faut fournir pour le déformer jusqu'à la position accommodée ($\lambda=\lambda_1$) en partant de son état d'équilibre. Cette valeur est à comparer aux rares données connues concernant les forces agissant sur la capsule (cf. [53]). La forme présentée sur les Figures 21 à 24 a été obtenue en effectuant des simulations de ce type et en modifiant petit à petit les formes pour essayer de trouver un compromis entre la souplesse du système total (pour que la capsule puisse l'actionner), la souplesse du pneu (pour que la position d'équilibre soit très proche de la position de repos de la partie optique), et les contraintes de fabrication. Les structures doivent par exemple avoir une épaisseur minimale qui est imposée par le procédé d'usinage.

En l'état, cet implant aurait sans doute été fonctionnel et sûr...

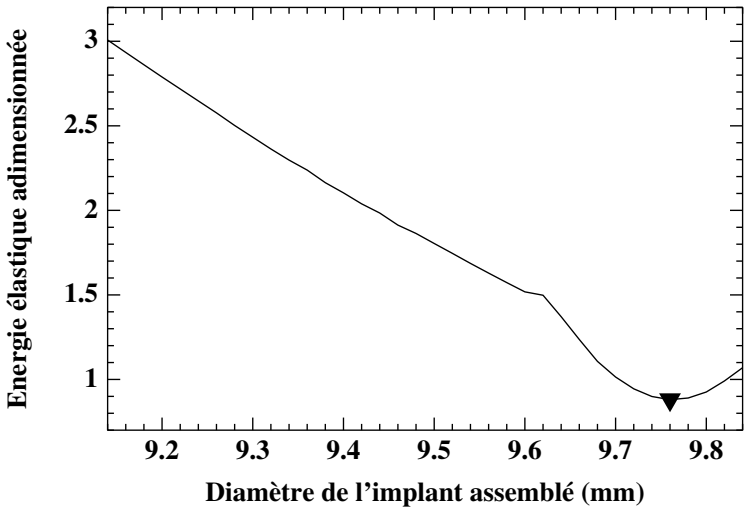

FIG. 20 – Implant accommodatif bi-composants : énergie élastique du système assemblé en fonction de la position de l'implant (paramètre λ dans l'équation (68)). L'équilibre a lieu dans une position proche de la position de repos de la partie optique (position dé-accommodée).

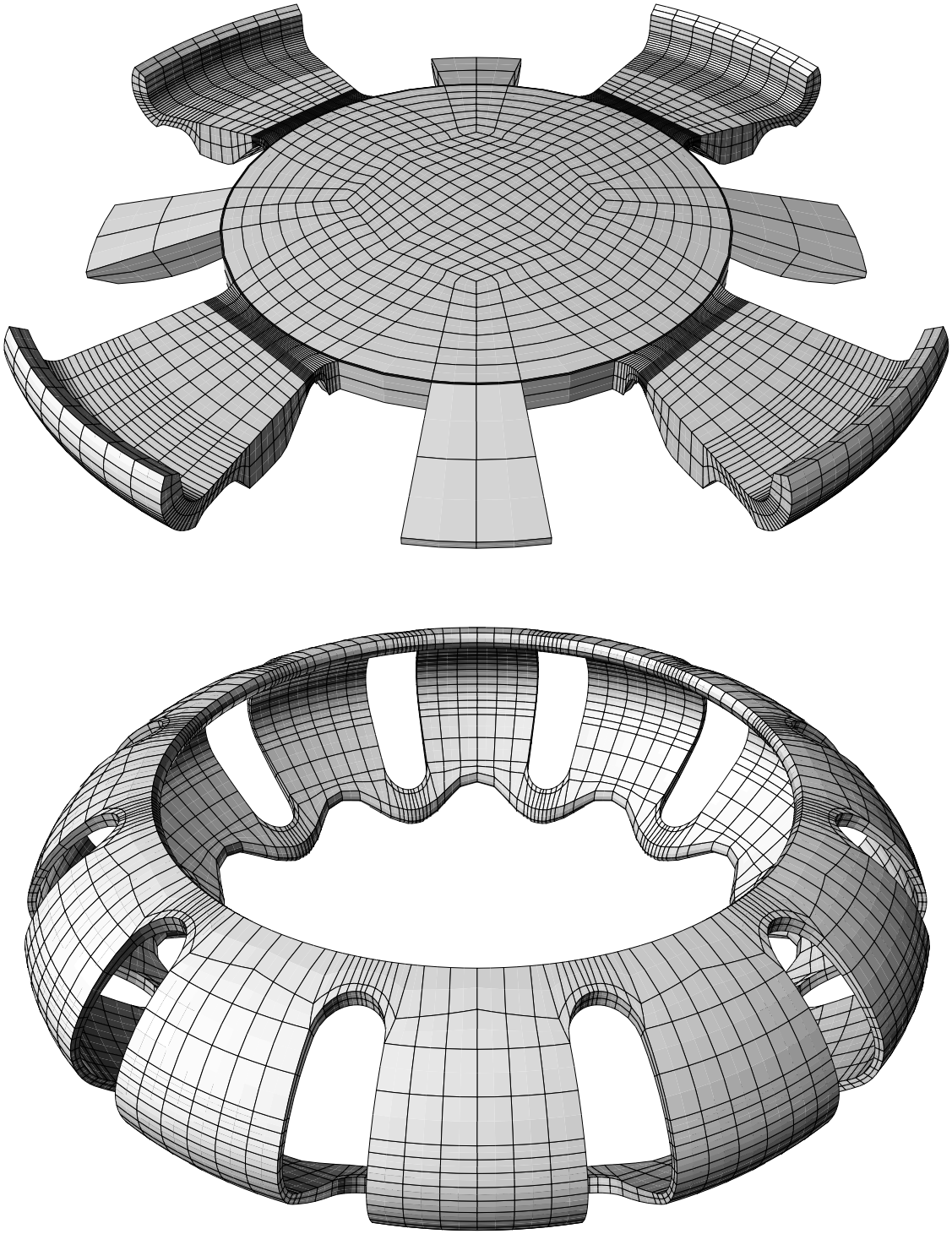

FIG. 21 – Implant accommodatif bi-composants : maillage de la partie mobile comprenant l'optique et les haptiques (en haut) et de l'enveloppe, ou "pneu", qui est en contact avec la capsule (en bas). Les maillages utilisent des éléments quadratiques Q2.

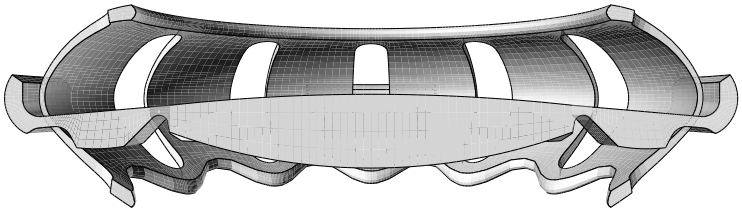

FIG. 22 – Implant accommodatif bi-composants : superposition des deux composants montrant la disparité de formes entre eux.

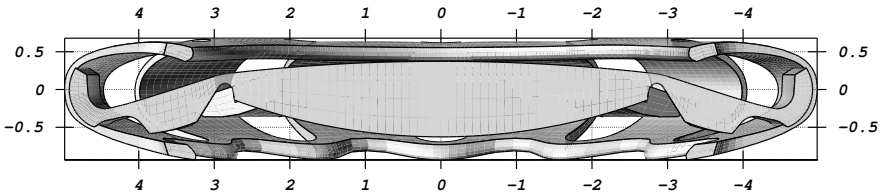

FIG. 23 – Implant accommodatif bi-composants : position d'équilibre une fois l'implant assemblé. Cette configuration correspond à la forme dé-accommodée (échelle 10 : 1).

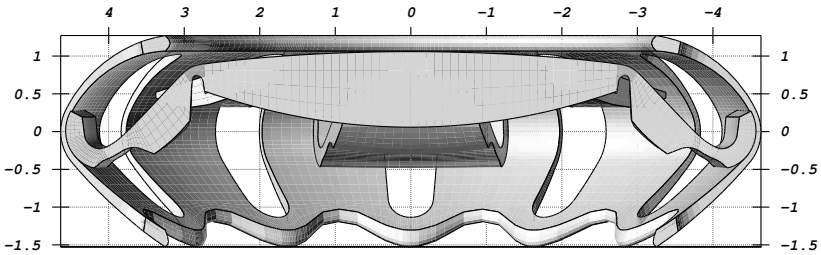

FIG. 24 – Implant accommodatif bi-composants : position accommodée (échelle 10 : 1).

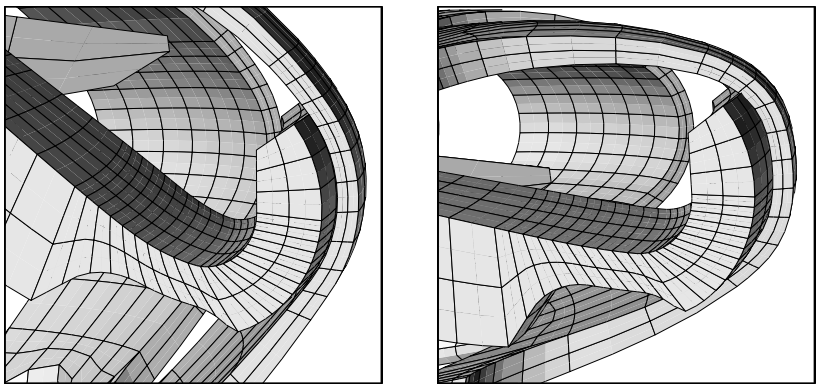

FIG. 25 – Implant accommodatif bi-composants : gros plan sur la zone de contact entre l'haptique et le pneu en position accommodée (à gauche) et dé-accommodée (à droite).

5.7 Le 1CU

Nous venons de voir que l'ensemble des contraintes à respecter pour la conception d'un implant intraoculaire était très respectable. Nous n'avons pas encore décrit les contraintes de fabrication. Le procédé choisi par la société HumanOptics consiste à usiner par tournage-fraisage un barreau d'acrylique. La forme de la lentille proposée ci-dessus est bien adaptée à un tel procédé. En revanche, l'enveloppe s'est avérée quasiment impossible à produire en série de cette façon, sachant que son épaisseur – comprise entre 80μm et 250μm suivant les zones, donc très faible – doit être respectée avec une bonne précision pour que le système fonctionne. Sous la pression d'une contrainte surnuméraire qu'il serait déplacé d'évoquer trop longtemps ici (des capital-risqueurs ayant investi quelques liquidités à la grande époque des start-up), il a été décidé de tenter l'implantation de la seule partie optique, sans son enveloppe en forme de pneu. Les ailettes, censées venir buter sur le pneu en cas de risque d'expulsion, ont été supprimées car devenues sans objet (le risque d'expulsion étant en revanche toujours présent). Son nom commercial est le 1CU (à prononcer *"One see you"* ou *"I see you"*).

Les premiers essais d'implantation eurent lieu en juin 2000 et les résultats cliniques furent très encourageants (cf. [10][11][74][75][76][77][78][84]). L'évaluation clinique de l'efficacité accommodative du 1CU (et des implants concurrents) est paradoxalement assez difficile. Très schématiquement, on distingue deux classes de méthodes pour mesurer l'accommodation :

• les méthodes "subjectives" qui reviennent toutes plus ou moins à demander au patient de lire une charte dans des conditions normalisées et d'indiquer quand la lecture devient impossible ;

• les méthodes "objectives" qui consistent à mesurer directement, grâce à des instruments divers, la réfraction de l'œil ou bien à évaluer la variation de la position de l'implant lorsque le muscle ciliaire est stimulé artificiellement.

Les méthodes subjectives sont beaucoup plus favorables au 1CU et aux autres implants accommodatifs que les méthodes objectives. De plus, les méthodes objectives donnent paradoxalement des résultats plus fluctuants et moins reproductibles d'une mesure à une autre que les méthodes subjectives [77]. Une des raisons possibles est la mauvaise adaptation des appareils de mesure classiques aux forts indices de réfraction des implants. Une autre piste est la grande différence de conditionnement physiologique, et même psychologique, du patient entre les deux types de méthodes : lecture naturelle dans le premier cas, dilatation forcée de l'iris et stimulation artificielle (physique ou chimique) du muscle ciliaire dans le second. Enfin, la profondeur de champ, accentuée par le faible diamètre pupillaire qu'ont souvent les personnes âgées, est sans doute la cause d'une légère surévaluation de l'accommodation dans le cas des mesures subjectives.

Le tableau ci-dessous reproduit les résultats de [77] concernant l'amplitude d'accommodation de 23 patients, évaluée 6 mois après l'implantation du 1CU par quatre méthodes

différentes (deux objectives et deux subjectives). Les valeurs sont données en Dioptries. La première ligne indique la valeur moyenne et la déviation standard, la deuxième ligne les valeurs extrêmes de l'échantillon et la dernière ligne la valeur médiane.

méthodes objectives		*méthodes subjectives*	
Réfractométrie vidéo	Rétinoscopie	Punctum proximum	Lentille négative
1.00 ± 0.44 (0.75–2.13) [1.00]	0.99 ± 0.48 (0.13–2.00) [0.88]	1.60 ± 0.55 (0.50–2.56) [1.70]	1.46 ± 0.53 (1.00–2.50) [1.75]

Par une méthode de mesure subjective, sur un échantillon de 42 patients, une autre étude [84] trouve une amplitude d'accommodation de 1.90 ± 0.77 D (0.75–2.75) à 6 mois.

Ces résultats sont intéressants et valident *a posteriori* la démarche choisie. Ils plaident en faveur de la poursuite dans cette voie pour la conception d'implants accommodatifs. Pourtant, il serait souhaitable d'augmenter l'amplitude de l'accommodation effectivement mesurée. À ce jour (septembre 2004), environ 21000 patients ont reçu le 1CU. Cette expérience à grande échelle permet de déduire des informations précieuses sur les efforts qui agissent sur l'implant *in vivo*. Les nouveaux design proposés, issus des techniques d'optimisation de formes par exemple, pourront maintenant être facilement comparés au 1CU.

5.8 Un nouveau design amélioré

Nous avons utilisé les outils d'optimisation de formes décrits dans les chapitres précédents pour améliorer les performances du 1CU, en particulier pour augmenter son pouvoir accommodatif. De nombreux design ont été obtenus à la fois en utilisant la méthode d'homogénéisation et l'optimisation par courbes de niveaux. Pour un domaine de travail donné, correspondant à l'encombrement maximal de l'implant, la zone optique et l'extrémité des haptiques étant exclues de l'optimisation, on cherche une forme qui maximise le déplacement axial au centre de l'optique pour une force de compression radiale donnée agissant sur les extrémités des haptiques. La fonction-coût adaptée à cet objectif est (40). Ainsi formulé, ce problème rentre dans le cadre des méthodes présentées dans [FJ00a],[FJ02b] (homogénéisation) et [FJ04e] (méthode des lignes de niveau). L'algorithme de level set permet l'utilisation de l'élasticité non-linéaire, ce qui est en principe un avantage important pour ce problème particulier. En réalité l'optimisation de formes pour un problème non-linéaire peut s'avérer très délicate à piloter du fait de la non convergence épisodique de la méthode de Newton servant à résoudre le problème direct. Cela arrive lorsque la structure trouvée à une itération donnée est trop souple pour soutenir les efforts. Le matériau mou utilisé pour remplir les trous effectués par l'optimisation peut aussi être en cause dans certains cas.

Après *un certain nombre* d'essais, utilisant les deux méthodes d'homogénéisation et de level set, un nouvel implant a pu être conçu. Pour chaque forme optimale proposée par

l'algorithme, le comportement de la structure, éventuellement "nettoyée" manuellement, est systématiquement recalculé avec une modélisation en élasticité non-linéaire. Le design finalement obtenu est assez différent de celui du 1CU. Sa capacité accommodative – si l'on en croit les simulations numériques – est augmentée de 30% à 40% pour des efforts extérieurs identiques par rapport à l'implant actuel. Il présente en outre l'avantage de n'enfreindre aucun des brevets connus d'implants accommodatifs – et en particulier pas celui de [41] – car il fonctionne suivant un principe mécanique un peu différent. Une protection juridique de son design général est en cours et les détails fins de sa géométrie ne sont pas encore totalement figés. Il est donc hélas pour le moment impossible de présenter ici des images de ce nouvel implant.

Fig. 26 – Le 1CU tel qu'il est actuellement commercialisé et son modèle numérique.

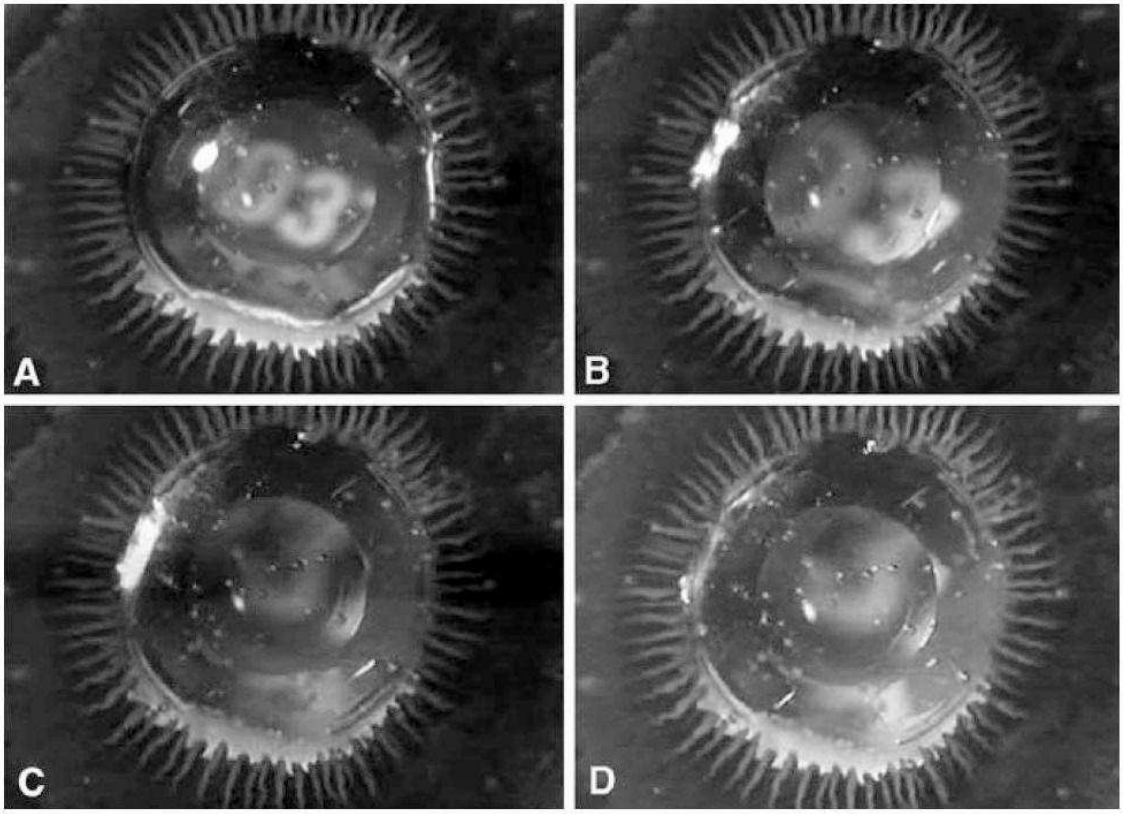

FIG. 27 – Simulation *in vitro* du fonctionnement du 1CU sur un œil de donneur. L'iridectomie permet de voir l'implant dans son ensemble, ce qui n'est jamais possible *in vivo*. La focalisation de l'image sur la rétine varie suivant la position de la lentille (d'après [11]).

6 Activité logicielle

La plupart des simulations numériques présentées dans ce document et les publications auxquelles il se réfère ont été effectuées en utilisant des logiciels dont je suis l'auteur en quasi-totalité. Quelques parties importantes, concernant en particulier l'optimisation de formes, ont été développées en collaboration avec Grégoire Allaire, Sylvie Aubry, Zakaria Belhachmi, Éric Bonnetier, Frédéric De Gournay, Patrice Hauret, Hervé Maillot et Anca-Maria Toader. Le moteur des algorithmes évolutionnaires décrits dans la partie 4 a été écrit par Marc Schoenauer et ses collaborateurs. Certains maillages 2d complexes sont générés par emc2 (INRIA).

Le reste représente plus 250000 lignes de code, soit plus de 200000 hors commentaires, essentiellement en Fortran, avec un peu de C et de shell script. On peut grossièrement classer ces programmes en trois catégories :

• *Préprocesseur* : une collection de petits modules permettant la création et la modification de maillages, ainsi que la préparation des données pour les calculs (par exemple la définition des conditions aux limites). Ils ne prétendent ni à l'exhaustivité, ni à la puissance ni à la souplesse des mailleurs commerciaux. Ils permettent toutefois de faire des choses assez sophistiquées comme par exemple les maillages de la Figure 21 page 62.

• *Calcul* : essentiellement un gros module de calcul résolvant les équations de l'élasticité 2d et 3d, linéarisée ou non-linéaire (matériau et grandes déformations), statique ou dynamique, par éléments finis (P1, P2, Q1, Q2 en 2d et 3d). Il comprend un certain nombre de lois de comportement de matériaux hyperélastiques et des conditions aux limites variées comme des conditions de contact uni et bilatérales. S'y rajoutent des modules indépendants (optimisation de formes par homogénéisation, level set, algorithmes génétiques, calcul de croissance de films cristallins...) qui y font appel ou en utilisent des parties comme librairie.

• *Postprocesseur* : le programme graphique 3d de post-traitement `xd3d` et le traceur de courbes `xgraphic` sont des logiciels libres sous licence GPL[1] depuis juillet 2003. Ils sont disponibles à l'adresse : `www.cmap.polytechnique.fr/~jouve/xd3d`. Ils ont été téléchargés plus de 8000 fois sur ce site depuis cette date, soit en moyenne une vingtaine de fois par jour. Ils font maintenant partie de certaines distributions de linux. Toutes les illustrations non explicitement créditées de ce document ainsi que celles de `www.cmap.polytechnique.fr/~optopo` ont été générées avec ces outils.

Cette série de logiciels est utilisée depuis de nombreuses années par les différents collègues avec qui j'ai collaboré, mais aussi tous les ans par de nombreux élèves de la majeure SeISM de l'École Polytechnique. Ils ont un talent certain pour débusquer instantanément des bugs de programmation insoupçonnés. Qu'ils en soient ici remerciés.

[1] consultable sur `gnu.org`

7 Tout le reste...

Nous avons choisi de présenter dans ce document nos travaux ayant peu ou prou rapport avec l'optimisation de forme. À la lecture de la bibliographie de la page 3 et suivantes, il apparaît que quelques pans de notre activité passée n'ont pas trouvé leur place dans ce résumé. Certains sont des travaux en cours ou n'ayant pas donné lieu à publication, d'autres sont liés à des contrats industriels. Nous les mentionnons ici pour mémoire et par soucis d'exhaustivité.

• Avec Antonin Chambolle et Éric Bonnetier nous travaillons sur des modèles de croissance de films cristallins ([FJ02e], [FH05a]). Il s'agit d'un travail en cours.

• Avec Philippe Mounaix, Denis Pesme et Guy Laval nous avons développé une méthode d'approximation permettant de gagner jusqu'à un ordre de grandeur en vitesse de calcul pour des simulations de séparation isotopique par laser [Cont01a].

• J'ai dirigé la thèse de Kevin Lyvan dans le cadre d'une convention CIFRE avec Thomson Training and Simulation. Titre de la thèse : *Étude de matériaux élastiques définis par des barres. Application à la simulation en chirurgie endoscopique.* Soutenue en septembre 2003.

• J'ai eu la charge pendant plusieurs années d'un contrat avec la SNPE concernant le calcul d'écoulements dans les propulseurs à poudre, comme les booster d'Ariane V. Ce contrat a été à la base du code `Patric` dont le développement continue toujours. J'ai travaillé pour cela avec François Béreux, Jean-Marc Dupuy, Youssef Islah et Philippe Lefloch au CMAP, et Franck Godfroy et Pierre-Yves Tissier à la SNPE ([FJ92b], [Cont89a], [Cont90a], [Cont90b], [Cont91a], [Cont93a], [Cont93b], [Cont94a])

Bibliographie

[1] Abgrall R., Numerical discretization of the first-order Hamilton-Jacobi equation on triangular meshes, *Com. Pure Applied Math.*, **XLIX**, 1339-1373 (1996).

[2] Achtziger W., Topology Optimization Subject to Design-Dependent Validity of Constraints, *in Topology optimization of structures and composite continua, G.I.N. Rozvany and N. Olhoff eds.*, 177-191, Kluwer Academic Publishers (2000).

[3] Alexandrov 0., Santosa F., A topology-preserving level set method for shape optimization, *preprint.*

[4] Allaire G., *Shape optimization by the homogenization method*, Springer Verlag, New York (2001).

[5] Allaire G., Explicit lamination parameters for three-dimensional shape optimization, *Control and Cybernetics*, **23**, 309-326 (1994).

[6] Allaire G., Francfort G., A numerical algorithm for topology and shape optimization, in *Topology design of structures*, Nato ASI Series E, M. Bendsoe et al. eds., 239-248, Kluwer, Dordrecht (1993).

[7] Allaire G., Kohn R.V., Optimal bounds on the effective behavior of a mixture of two well-ordered elastic materials, *Quat. Appl. Math.*, **51**, 643-674 (1993).

[8] Allaire G., Kohn R.V., Optimal design for minimum weight and compliance in plane stress using extremal microstructures, *Europ. J. Mech. A/Solids*, **12**(6), 839-878 (1993).

[9] Ambrosio L., Buttazzo G., An optimal design problem with perimeter penalization, *Calc. Var.*, **1**, 55-69 (1993).

[10] Auffarth G.U., Martin M., Fuchs H.A., Rabsilber T.M., Becker K.A., Schmack I., Validity of anterior chamber depth measurements for the evaluation of accommodation after implantation of an accommodative Humanoptics 1CU intraocular lens *Ophthalmologe*, **99**(11), 815-819 (2002).

[11] Auffarth G.U., Schmidbauer J., Becker K.A., Rabsilber T.M., Apple D.J., Miyake-Apple video analysis of movement patterns of an accommodative intraocular lens implant, *Ophthalmologe*, **99**(11), 811-814 (2002).

[12] Avellaneda M., Optimal bounds and microgeometries for elastic two-phase composites, *SIAM J. Appl. Math.*, **47**(6), 1216-1228 (1987).

[13] Avellaneda M., Milton G., Bounds on the effective elasticity tensor of composites based on two point correlations, *in Proceedings of the ASME Energy Technology Conference and Exposition*, Houston, 1989, D. Hui et al. eds., ASME Press, New York (1989).

[14] Bäck T., Fogel D.B., Michalewicz Z., (editors), *Handbook of Evolutionary Computation*, Oxford University Press (1997).

[15] Ball J.M., Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity, *Archives for Rational Mechanics and Analysis*, **63**, 337-403 (1977).

[16] Bartish G., *Ophthalmodouleia*, Dresde (1583). Réédition in "The History of Ophthalmology (21 vol.)", vol. 3, J. Hirschenberg, Wayenborgh Press, Ostend (1996).

[17] Bendsoe M., Optimal shape design as a material distribution problem, *Struct. Optim.*, **1**, 193-202 (1989).

[18] Bendsoe M., *Methods for optimization of structural topology, shape and material, Springer Verlag, New York* (1995).

[19] Bendsoe M., Diaz A., Optimization of material properties for improved frequency response, *Struct. Optim.*, **7**, 138-140 (1994).

[20] Bendsoe M., Diaz A., Kikuchi N., Topology and generalized layout optimization of structures, In *Topology Optimization of Structures*, Nato ASI Series E, M. Bendsoe et al. eds., 159-205, Kluwer, Dordrecht (1993)

[21] Bendsoe M., Kikuchi N., Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **71**, 197-224 (1988).

[22] Bendsoe M., Sigmund O., *Topology Optimization. Theory, Methods, and Applications*, Springer Verlag, New York (2003).

[23] Bensoussan A., Lions J.L., Papanicolaou G., *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*, North Holland, Amsterdam (1978).

[24] Bourdin B., Chambolle A., Design-dependent loads in topology optimization, *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, **9**, 19-48 (2003).

[25] Brezzi F., Fortin L., *Mixed and hybrid Finite Element Methods,* Springer (1991).

[26] Briane M., Correctors for the homogenization of a laminate, *Advances in Mathematical Sciences and Applications*, Gakkotosho, Tokyo, **4**, 357-379 (1994).

[27] Brown N., The change in shape and internal form of the lens of the eye on accommodation, *Exp. eye res.*, **15**, 441-459 (1973).

[28] Buhl T., Pedersen C., Sigmund O., Stiffness design of geometrically nonlinear structures using topology optimization, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, **19**, 2, 93-104 (2000).

[29] Burger M., A framework for the construction of level set methods for shape optimization and reconstruction, *Interfaces and Free Boundaries*, **5**, 301-329 (2003).

[30] Burger M., Hackl B., Ring W., Incorporating topological derivatives into level set methods, *J. Comp. Phys.*, **194**(1), 344-362 (2004).

[31] Céa J., Conception optimale ou identification de formes, calcul rapide de la dérivée directionnelle de la fonction coût, *Math. Model. Num. Anal.*, **20**, 3, 371-402 (1986).

[32] Céa J., Garreau S., Guillaume P., Masmoudi M., The shape and topological optimizations connection, IV WCCM, Part II (Buenos Aires, 1998), Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 188, 713-726 (2000).

[33] Cerf R. An asymptotic theory of genetic algorithms, In J.-M. Alliot, E. Lutton, E. Ronald, M. Schoenauer, and D. Snyers, eds., *Artificial Evolution*, vol. 1063 of *LNCS*, 37-53, Springer Verlag (1996).

[34] Chambolle A., A density result in two-dimensional linearized elasticity and applications, *Arch. for Rational Mech. and Anal.*, **167**(3), 211-233 (2003).

[35] Chambolle A., Larsen C.J., C^∞-regularity of the free boundary for a two-dimensional optimal compliance problem, *Calc. of Variations and Partial Diff. Eq.*, **18**(1), (2003).

[36] Chenais D., On the existence of a solution in a domain identification problem, *J. Math. Anal. Appl.*, **52**, 189-289 (1975).

[37] Cheng G.D., Guo X., Study on topology optimization with stress constraints, *Eng. Optim.* **20**, 129-148 (1992).

[38] Cherkaev A., *Variational Methods for Structural Optimization,* Springer Verlag, New York (2000).

[39] Ciarlet P.G., *Mathematical Elasticity, Vol I : Three-Dimensional Elasticity,* North-Holland, Amsterdam (1988).

[40] Cox S., Lipton R., Extremal eigenvalue problems for two-phase conductors, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **136**, 101-117 (1996).

[41] Cumming J.S., Slade S.G., Chayet A., Clinical evaluation of the model AT-45 silicone accommodating intraocular lens : results of feasibility and the initial phase of a Food and Drug Adm. clinical trial, *Ophthalmology*, **108**(11), 2005-2009 (2001).

[42] Dal Maso G., Kohn R., The local character of G-closure, unpublished work.

[43] Diaz A., Kikuchi N., Solutions to shape and topology eigenvalue optimization problems using a homogenization method, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, **35**, 1487-1502 (1992).

[44] Diaz A., Sigmund O., Checkerboard patterns in layout optimization. *Structural Optimization*, **10**, 40-45 (1995).

[45] Dick H.B., Kaiser S., Dynamic aberrometry during accommodation of phakic eyes and eyes with potentially accommodative intraocular lenses, *Ophthalmologe*, **99**(11), 825-834 (2002).

[46] Duane A., Normal values of the accommodation at all ages, *J. of the American Medical Association*, **59**, 1010-1013 (1912).

[47] Duysinx P., Bendsoe M., Topology Optimization of Continuum Structures with Local Stress Constraints, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 43, 1453-1478 (1998).

[48] Eschenauer H., Schumacher A., Bubble method for topology and shape optimization of structures, *Structural Optimization*, **8**, 42-51 (1994).

[49] Fincham E.F., The mechanism of accommodation, *British Journal of Ophthalmology*, Supplement 8, 5-80 (1937).

[50] Fisher R.F., Elastic constants of the human lens capsule, *Journal of Physiology*, **201**, 1-19 (1969).

[51] Fisher R.F., The elastic constants of the human lens, *Journal of Physiology*, **212**, 147-180 (1971).

[52] Fisher R.F., Presbyopia and the changes with age in the human crystalline lens, *Journal of Physiology*, **228**, 765-779 (1973).

[53] Fisher R.F., The force of contraction of the human ciliary muscle during accommodation, *Journal of Physiology*, **270**, 51-74 (1977).

[54] Folgado J., Rodrigues H., Structural optimization with a non-smooth buckling load criterion, *Control and Cybernetics*, **27**, 235-253 (1998).

[55] Francfort G., Murat F., Homogenization and optimal bounds in linear elasticity, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **94**, 307-334 (1986).

[56] Francfort G., Murat F., Tartar L., Fourth order moments of a non-negative measure on S^2 and application, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **131**(4), 305-333 (1995).

[57] Garreau S., Guillaume P., Masmoudi M., The topological asymptotic for PDE systems : the elasticity case, *SIAM J. Control Optim.*, **39**, no. 6, 1756-1778 (2001).

[58] Gibianski L., Cherkaev A., Design of composite plates of extremal rigidity, *Ioffe Physicotechnical Institute preprint*, (1984). (English translation in *Topics in the mathematical modeling of composite materials*, A. Cherkaev and R.V. Kohn eds., series "Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications", Birkhaüser, Boston (1997).)

[59] Glasser A., Campbell M.C.W., Presbyopia and the optical changes in the human lens with age, *Vision Research*, **38**, 209-229 (1998).

[60] Goldberg D.E., *Genetic algorithms in search, optimization and machine learning*, Addison Wesley (1989).

[61] Gray H., *Anatomy of the Human Body, Lea & Febiger, Philadelphia* (1918). Réédition : Bartleby.com (2000).

[62] Gullstrand A., Appendix II in *Handbuch der Physiologischen Optik* (1909). English translation : Southall J.P.C., *Introduction to physiological optics, New York, Dover*, 351-352 (1961).

[63] Hamda H., Roudenko O., Schoenauer M., Multi-Objective Evolutionary Topological Optimum Design, in I.C. Parmee (Ed.), *Proceedings of the 5th Int. Conf. on Adaptive Computing Design and Manufacture (ACDM 2002)*, Springer-Verlag, Univ. of Exeter, 121-132 (2002).

[64] Hashin Z., The elastic moduli of heterogeneous materials, *J. Appl. Mech.*, **29**, 143-150 (1963).

[65] Hashin Z., Shtrikman S., A variational approach to the theory of the elastic behavior of multiphase materials, *J. Mech. Phys. Solids*, **11**, 127-140 (1963).

[66] Haug E., Rousselet B., Design sensitivity analysis in structural mechanics. II. Eigenvalue variations, *J. Struct. Mech.*, **8**, 161-186 (1980).

[67] Von Helmholtz H., *Handbuch der Physiologischen Optik* (1909). English translation : Southall J.P.C., *Introduction to physiological optics, New York, Dover* (1961).

[68] Holland J., *Adaptation in natural and artificial systems.* University of Michigan Press, Ann Arbor (1975).

[69] Jog C., Haber R., Bendsoe M., Topology design with optimized, self-adaptative materials, *Int. Journal for Numerical Methods in Engineering*, **37**, 1323-1350 (1994).

[70] Kane C., Schoenauer M., Topological optimum design using genetic algorithms, *Control and Cybernetics*, **25**, 1059-1088 (1996).

[71] Kohn R., Lipton R., Optimal bounds for the effective energy of a mixture of isotropic, incompressible, elastic materials, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **102**(4), 331-350 (1988).

[72] Kohn R., Strang G., Optimal Design and Relaxation of Variational Problems I-II-III, *Comm. Pure Appl. Math.*, **39**, 113-137, 139-182, 353-377 (1986).

[73] Koza J.R., *Genetic programming : on the programming of computers by means of natural evolution,* MIT press, Massachussetts (1994).

[74] Küchle M., Nguyen N.X., Langenbucher A., Gusek-Schneider G.C., Seitz B., Two years experience with the new accommodative 1CU intraocular lens, *Ophthalmologe*, **99**(11), 820-824 (2002).

[75] Küchle M., Seitz B., Langenbucher A., Martus P., Nguyen N.X., Stability of refraction, accommodation, and lens position after implantation of the 1CU accommodating posterior chamber intraocular lens, *J. Cataract Refract. Surg.*, **29**(12), 2251-2254 (2003).

[76] Küchle M., Seitz B., Langenbucher A., Gusek-Schneider G.C., Martus P., Nguyen N.X., Comparison of 6-month results of implantation of the 1CU accommodative intraocular lens with conventional intraocular lenses, *Ophthalmology*, **111**(2), 318-324 (2004).

[77] Langenbucher A., Huber S., Nguyen N.X., Seitz B., Gusek-Schneider G.C., Küchle M., Measurement of accommodation after implantation of an accommodating posterior chamber intraocular lens, *J. Cataract Refract. Surg.*, **29**(4), 677-685 (2003).

[78] Langenbucher A., Seitz B., Huber S., Nguyen N.X., Küchle M., Theoretical and measured pseudophakic accommodation after implantation of a new accommodative posterior chamber intraocular lens, *Arch Ophthalmol.*, **121**(12), 1722-1727 (2003).

[79] Lipton R., A saddle-point theorem with application to structural optimization, *J. Opt. Th. Appl.*, **81**(3), 549-567 (1994).

[80] Lipton R., Design of functionally graded composite structures in the presence of stress constraints, *Int. J. Solids Structures*, **39**, 2575-2586 (2002).

[81] Lurie K., Cherkaev A., Effective characteristics of composite materials and the optimal design of structural elements, *Uspekhi Mekhaniki* **9**, 3-81 (1986). (English translation in *Topics in the mathematical modeling of composite materials*, A. Cherkaev and R.V. Kohn eds., series "Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications", Birkhaüser, Boston (1997).)

[82] Lurie K., Cherkaev A., Fedorov A., Regularization of Optimal Design Problems for Bars and Plates I,II, *J. Optim. Th. Appl.*, **37**, 499-521, 523-543 (1982).

[83] Mc Leod S.D., Portney V., Ting A., A dual optic accommodating foldable intraocular lens, *Br. J. Ophthalmol.*, **87**(9), 1083-1085 (2003).

[84] Mastropasqua L., Toto L., Nubile M., Falconio G., Ballone E., Clinical study of the 1CU accommodating intraocular lens, *J. Cataract Refract. Surg.*, **29**(7), 1307-1312 (2003).

[85] Mathews S., Scleral expansion surgery does not restore accommodation in human presbyopia, Ophtalmology, **106**, 873-877 (1999).

[86] Meyers N.G., An L^p-estimate for the gradient of solutions of second-order elliptic divergence equations, *Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa*, **17**, 198-206 (1963).

[87] Michalewicz Z., *Genetic Algorithms+Data Structures=Evolution Programs*, Springer Verlag, New-York, 3rd edition (1996).

[88] Michell A., The limits of economy of material in frame-structures, *Phil. Mag.*, **8**, 589-597 (1904).

[89] Milton G., *The theory of composites,* Cambridge University Press (2001).

[90] Mohammadi B., Pironneau O., *Applied shape optimization for fluids,* Clarendon Press, Oxford (2001).

[91] Murat F., Contre-exemples pour divers problèmes où le contrôle intervient dans les coefficients, *Ann. Mat. Pura Appl.*, **112**, 49-68 (1977).

[92] Murat F., Simon S., Études de problèmes d'optimal design, *Lecture Notes in Computer Science 41, 54-62, Springer Verlag, Berlin* (1976).

[93] Murat F., Tartar L., H-convergence, *in Topics in the mathematical modeling of composite materials*, A. Cherkaev and R.V. Kohn eds., series : "Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications", Birkhaüser, Boston (1997). (French version : mimeographed notes, séminaire d'Analyse Fonctionnelle et Numérique de l'Université d'Alger (1978)).

[94] Murat F., Tartar L., Calcul des Variations et Homogénéisation, *Les Méthodes de l'Homogénéisation Théorie et Applications en Physique*, Coll. Dir. Etudes et Recherches EDF, Eyrolles, 319-369 (1985). (English translation in *Topics in the mathematical modeling of composite materials*, A. Cherkaev and R.V. Kohn eds., series "Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications", Birkhaüser, Boston, (1997)).

[95] Neves M., Rodrigues H., Guedes J., Generalized topology design of structures with a buckling load criterion, *Struct. Optim.*, **10**, 71-78 (1995).

[96] Olhoff N., Seyranian A.P., Lund E., Multiple eigenvalues in structural optimization problems, *Struct. Optim.*, **8**, 207-227 (1994).

[97] Osher S., Santosa F., Level set methods for optimization problems involving geometry and constraints : frequencies of a two-density inhomogeneous drum, *J. Comp. Phys.*, **171**, 272-288 (2001).

[98] Osher S., Sethian J.A., Front propagating with curvature dependent speed : algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations, *J. Comp. Phys.*, **78**, 12-49 (1988).

[99] Pau H., Kranz J., The increasing sclerosis of the human lens with age and its relevance to accommodation and presbyopia, *Graefe's Archive for Clinical and Experimental Ophthalmology*, **229**, 294-296 (1991).

[100] Pedregal P., Fully explicit quasiconvexification of the mean-square deviation of the gradient of the state in optimal design, *Electr. Res. Announc. of the A.M.S.*, **7**, 72-78 (2001).

[101] Pereira J.T., Fancello E.A., Barcellos C.S., Topology optimization of continuum structures with material failure constraints, *Struct. Multidisc. Optim.*, **26**, 50-66 (2004).

[102] Pironneau O., *Optimal shape design for elliptic systems,* Springer-Verlag, New York (1984).

[103] Raitums U., On the local representation of G-closure, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **158**(3), 213-234 (2001).

[104] Rechenberg I., *Evolutionstrategie : Optimierung Technisher Systeme nach Prinzipien des Biologischen Evolution*, Fromman-Hozlboog Verlag, Stuttgart (1973).

[105] Rozvany G., Bendsoe M., Kirsch U., Layout optimization of structures, *Appl. Mech. Reviews*, **48**, 41-118 (1995).

[106] Sanchez-Hubert J., Sanchez-Palencia E., *Vibration and coupling of continuous systems. Asymptotic methods*, Springer Verlag, Berlin (1989).

[107] Sanchez-Palencia E., *Non homogeneous media and vibration theory,* Lecture Notes in physics 127, Springer Verlag (1980).

[108] Schachar R.A., Cause and treatment of presbyopia with a method for increasing the amplitude of accommodation, *Annals of Ophthalmology*, **24**, 445-452 (1992).

[109] Schachar R.A., Tello C., Cudmore D.P. Liebmann J.M., Black T.D., Ritch R., In vivo increase of the human lens equatorial diameter during accommodation, *The American Journal of Physiology*, **271**, 670-676 (1996).

[110] Schoenauer M., Representations for evolutionary optimization and identification in structural mechanics, In J. Périaux and G. Winter, editors, *Genetic Algorithms in Engineering and Computer Sciences*, 443-464. John Wiley (1995).

[111] Sethian J.A., *Level set Methods and fast marching methods : evolving interfaces in computational geometry, fluid mechanics, computer vision and materials science,* Cambridge University Press (1999).

[112] Sethian J., Wiegmann A., Structural boundary design via level set and immersed interface methods, *J. Comp. Phys.,* **163**, 489-528 (2000).

[113] Sigmund O., On the design of compliant mechanisms using topology optimization, *Mech. Struct. Mach.*, **25**, 493-524 (1997).

[114] Sigmund O., Petersson J., Numerical instabilities in topology optimization : A survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima, *Struct. Optim.*, **16**, 68-75 (1998).

[115] Simon J., Differentiation with respect to the domain in boundary value problems, *Num. Funct. Anal. Optimz.*, **2**, 649-687 (1980).

[116] Sokołowski J., Żochowski A., On the topological derivative in shape optimization, *SIAM J. Control Optim.*, **37**, 1251-1272 (1999).

[117] Sokołowski J., Żochowski A., Topological derivatives of shape functionals for elasticity systems, *Mech. Structures Mach.*, **29**, no. 3, 331-349 (2001).

[118] Sokołowski J., Zolesio J.P., *Introduction to shape optimization : shape sensitivity analysis, Springer Series in Computational Mathematics,* Vol. 10, Springer, Berlin (1992).

[119] Suzuki K., Kikuchi N., A homogenization method for shape and topology optimization, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **93**, 291-318 (1991).

[120] Tartar L., Estimation de coefficients homogénéisés, *Computing methods in applied sciences and engineering*, R. Glowinski, J.L. Lions eds., Lecture Notes in Math., 704, Springer Verlag, 364-373 (1978).

[121] Tartar L., Estimations fines des coefficients Homogénéisés, *Ennio de Giorgi colloquium*, P. Krée ed., Pitman Research Notes in Math., 125, 168-187 (1985).

[122] Tartar L., Remarks on optimal design problems, *in Calculus of variations, homogenization and continuum mechanics, G. Bouchitté et al. eds.*, Series on Adv. in Math. for Appl. Sci, **18**, 279-296, World Scientific, Singapore (1994).

[123] Vigdergauz S., Effective elastic parameters of a plate with a regular system of equal-strength holes, *Mech. Solids*, **21**, 162-166 (1986).

[124] Wang M.Y., Wang X., Guo D., A level set method for structural topology optimization, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **192**, 227-246 (2003).

[125] Wang M.Y., Wang X., Guo D., Structural shape and topology optimization in a level set based framework of region representation, *Struct. and Multidisc. Opt.* , **27**(1-2), 1-19 (2004).

[126] Zhou M., Rozvany G., The COC algorithm, Part II : Topological, geometrical and generalized shape optimization, *Comp. Meth. App. Mech. Engrg.*, **89**, 309-336 (1991).