CONCEPTION DE MICROMÉCANISMES PAR OPTIMISATION TOPOLOGIQUE

Grégoire ALLAIRE, François JOUVE

Centre de Mathématiques Appliquées (UMR 7641)
Ecole Polytechnique
91128 Palaiseau

Résumé :

La conception optimale de mécanismes destinés à la fabrication de micro-machines peut être envisagée comme un problème d'optimisation de formes avec une fonction objectif particulière. Nous proposons une telle méthode d'optimisation, dite topologique, utilisant l'homogénéisation.

Abstract :

The design of mechanisms for building micro-tools can be viewed as a shape optimization problem with a peculiar objective function. We propose such an optimization method based on homogenization, which is called topology optimization.

Mots clés :

micromécanisme, optimisation, homogénéisation.

1 Introduction

Depuis quelques années est apparue une méthode d'optimisation topologique de forme en mécanique des structures basée sur l'utilisation de techniques d'homogénéisation (cf. par exemple Allaire (2001), Bendsoe (1995), Rozvany*et al*. (1995)). Cette méthode a permis l'apparition de nouveux algorithmes performants qui capturent une forme optimale sur un maillage fixe sans restriction a priori sur sa topologie (voir par exemple Allaire *et al*. (1997), Allaire et Kohn (1993), Bendsoe et Kikuchi (1988)). Jusqu'ici cette méthode d'homogénéisation a été utilisée pour optimiser la rigidité d'une structure, mesurée par sa compliance (pour un ou plusieurs chargements) ou par sa ou ses premières fréquences propres de vibration. Dans ces cas, la théorie est tout-à-fait complète et les algorithmes numériques sont bien établis. Plus récemment, cette méthode a été étendue à l'optimisation de fonctions objectifs plus générales, non nécessairement liées à la rigidité de la structure (voir Allaire *et al*. (2001)). Dans ce cas plus général, la théorie n'est pas complètement satisfaisante mais des algorithmes numériques efficaces peuvent néanmoins être proposés (voir Allaire et Jouve (2001)). En particulier, on peut ainsi traiter le problème de la conception de mécanismes qui transforment un déplacement ou une force d'entrée en un autre déplacement ou force de sortie désirée. Le fonctionnement de ces mécanismes est assuré par les seules propriétés élastiques de leur forme sans avoir recours à la présence de systèmes d'articulation, de liaison ou de transmission (rotules, articulations, ressorts, etc.). On peut ainsi construire des micro-machines d'une taille de l'ordre du millimètre par découpe laser sur un substrat de silicium avec une résolution de quelques microns (voir, par exemple, Jonsmann *et al*. (1999).

Expliquons brièvement le principe de la méthode d'homogénéisation. L'approche classique de l'optimisation de formes consiste à traiter ce problème comme l'optimisation de la position de la frontière de la forme. Bien que cette approche fonctionne parfaitement, elle a l'in-

convénient majeur de ne jamais changer la topologie de la forme, c'est-à-dire de permettre l'apparition (ou la disparition) de nouveaux bords (ou trous dans la forme). Au contraire, la méthode d'homogénéisation considère que l'optimisation de formes est un problème de distribution de matière : en tout point de l'espace faut-il ou non mettre du vide ou un matériau. Présenté ainsi, il s'agit d'un problème en variable discrète 0/1 qui est très difficile à résoudre car, en particulier, on ne sait pas comment calculer un gradient par rapport à ces variables discrètes. L'idée principale de la méthode d'homogénéisation consiste donc à optimiser une densité de matériau correspondant à une microstructure de milieu poreux, densité qui est une variable continue dans l'intervalle $[0, 1]$. On a ainsi relaxé le problème d'optimisation discret ce qui permet, entre autres, de calculer un gradient et d'optimiser la topologie de la forme. Il est essentiel de remarquer que cette méthode ne change pas le problème d'origine mais simplement qu'elle le fractionne en deux étapes : trouver des microstructures poreuses optimales à une échelle sous-maille, puis optimiser la répartition macroscopique de densité de ces microstructures.

Dans le cadre de l'optimisation de micromachines, une approche similaire a été proposée par Sigmund (1997). Expliquons brièvement en quoi notre démarche est différente. Dans Sigmund (1997) l'optimisation de formes est aussi vue comme un problème de distribution de matière, mais la densité optimisée ne correspond à aucune microstructure réelle et est seulement un artefact numérique. Dans ce cas on parle de matériaux fictifs, ou plus précisément de matériaux "à loi de puissance" (cf. Rozvany*et al.* (1995)), c'est-à-dire que le tenseur d'élasticité de ces matériaux est simplement obtenu par multiplication du tenseur isotrope du matériau pur par une puissance convenable de la densité. Au contraire, dans notre approche le tenseur d'élasticité en chaque point est obtenu par homogénéisation de la vraie microstructure poreuse sous-jacente. Par conséquent, l'approche de Sigmund (1997) change le problème, ce qui peut entrainer un comportement numérique moins bon. En effet, dans les deux approches il existe une phase de pénalisation qui élimine à la fin les zones de densité intermédiaires de manière à obtenir une forme classique. Cette phase est plus délicate si la physique du problème n'a pas été respectée dans l'étape de relaxation.

2 Optimisation de mécanismes

Comme annoncé dans l'introduction, nous voyons la conception de mécanismes ou d'actuateurs comme un problème d'optimisation de formes. On se donne un domaine de travail (dans lequel doit s'inscrire la forme du mécanisme), un volume de matière disponible, des forces de chargement et un objectif, c'est-à-dire un champ de déplacements désiré sur une partie du domaine. On cherche alors la forme d'une structure élastique qui atteigne au mieux ce champ de déplacements cible, avec éventuellement des contraintes géométriques ou de rigidité. Décrivons plus précisément ce problème d'optimisation.

On note $\Omega \in \mathbb{R}^N$ $(N = 2, 3)$ le domaine de travail et A le matériau élastique linéaire isotrope dont est fait la forme. Afin de pouvoir effectuer des calculs sur un maillage fixe de Ω, le vide qui entoure la forme est approximé par un autre matériau élastique linéaire isotrope B, très peu rigide. Typiquement, les constantes de Lamé du matériau mou B sont 1000 fois plus faibles que celle de A. Cette approximation du vide par B est justifiée, au moins dans le cas de la minimisation de la compliance, dans Allaire *et al.* (1997). On introduit la fonction caractéristique χ de la phase A qui vaut $\chi(x) = 1$ si x est un point de A et $\chi(x) = 0$ si x est un point de B. Dans le domaine Ω, le tenseur d'élasticité est défini par $A_\chi = \chi A + (1 - \chi)B$. Le

champ de déplacement u_χ de la structure est alors la solution de

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\operatorname{div}\left(A_\chi e(u_\chi)\right) & = & f & \text{dans } \Omega \\ u_\chi & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{array} \right.$$

où $e(u_\chi) = (\nabla u + \nabla^t u)/2$ désigne le tenseur des déformations et f est une force de volume donnée. Pour des raisons de simplicité d'écriture nous présentons un problème avec des conditions de Dirichlet homogènes, mais des conditions aux limites et des chargements plus généraux sont envisageables. On note $u_0(x)$ le champ de déplacement cible, et $C(x)$ une fonction positive qui pondère les emplacements où l'on cherche à atteindre la cible u_0. Le problème d'optimisation de formes est donc

$$\inf_{\chi(x)=0,\ 1} \left\{ J(\chi) = \left(\int_\Omega \chi(x) C(x) |u(x) - u_0(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \ell \int_\Omega \chi(x) dx \right\}, \tag{1}$$

où ℓ désigne un multiplicateur de Lagrange associé à une contrainte de volume sur le matériau A. Pour le chargement extérieur donné f, minimiser cette fonction revient à chercher un mécanisme réalisant le déplacement voulu u_0 là où $C(x)$ est positif non nul.

Il est bien connu qu'en général (1) est un problème mal posé, c'est-à-dire qu'il n'admet pas de solutions et que les algorithmes numériques usuels sont très instables (nombreux minima locaux, forte influence du maillage ou du choix initial, voir par exemple Allaire (2001)). On peut néanmoins relaxer ce problème, c'est-à-dire lui trouver des solutions généralisées qui sont en fait des matériaux composites obtenus en mélangeant à un niveau microscopique les deux phases A et B

3 Une formulation relaxée par homogénéisation

La théorie de l'homogénéisation permet de calculer une formulation relaxée du problème d'origine (1). Les formes généralisées admissibles sont définies par une distribution de matériau composite dans tout le domaine. Ces matériaux composites sont caractérisés par la densité $\theta(x) \in [0,1]$ de la phase A et par la microstructure de l'arrangement microscopique entre les deux phases en chaque point $x \in \Omega$. Ces paramètres déterminent une loi de Hooke effective $A^*(x)$ en chaque point. La formulation relaxée de (1) s'écrit

$$\min_{(\theta(x), A^*(x)) \in [0,1] \times G_{\theta(x)}} J^*(\theta, A^*) = \left(\int_\Omega \theta(x) C(x) |u(x) - u_0(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \ell \int_\Omega \theta \, dx, \tag{2}$$

où $u(x)$ est la solution du problème homogénéisé

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\operatorname{div}\left(A^* e(u)\right) & = & f & \text{dans } \Omega, \\ u & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{array} \right. \tag{3}$$

et G_θ est l'ensemble de toutes les lois de Hooke homogénéisées obtenues en mélangeant les phases A et B en proportions θ et $(1-\theta)$.

Les avantages de la formulation relaxée (2) sont nombreux et classiques (voir par exemple Allaire (2001)). Elle admet toujours une solution car toute structure composite peut être obtenue comme limite d'une suite de structures classiques. Cela signifie que la relaxation ne change pas la nature du problème mais le rend simplement bien posé. On peut également en déduire que des formes classiques quasi-optimales peuvent facilement être obtenues à partir d'une forme

composite optimale en utilisant une procédure de pénalisation appropriée. De nombreux algorithmes numériques basés sur cette approche ont été proposés (cf. e.g. Allaire *et al*. (1997), Allaire et Kohn (1993), Bendsoe (1995), Bendsoe et Kikuchi (1988)).

Toutefois, la formulation relaxée (2) requiert la connaissance de l'ensemble G_θ de tous les matériaux composites, qui est malheureusement partiellement connu. Dans un certain nombre de cas, les conditions d'optimalité permettent de remplacer G_θ par un de ses sous-ensembles connu explicitement : l'ensemble L_θ des laminés séquentiels. C'est le cas lorsque la fonction-coût J, ou J^*, est la compliance ou la première fréquence propre de la structure, ou bien une somme pondérée de compliances associées à plusieurs chargements ou des premières fréquences propres. Dans ces cas, (2) est directement utilisable et on parle de "relaxation totale". Dans tous les autres cas, on va se restreindre au même sous-ensemble explicite de G_θ, c'est-à-dire celui des laminés séquentiels L_θ. Cette simplification proposée dans Allaire *et al*. (2001) est appelée "relaxation partielle".

On utilise ces laminés séquentiels car ils sont paramétrisés de façon explicite et ont des propriétés effectives optimales. Ces matériaux composites sont obtenus par mise en couches successives de A et de B en proportions respectives θ et $(1-\theta)$. Pour un nombre q de laminations donné, des directions de lamination $(e_i)_{1\leq i\leq q}$ et des proportions de lamination pour chacune des directions $(m_i)_{1\leq i\leq q}$ vérifiant $m_i \geq 0$ et $\sum_{i=1}^q m_i = 1$, la loi de Hooke associée A^* d'un laminé séquentiel de matrice A et d'inclusion B s'écrit :

$$(1-\theta)\,(A-A^*)^{-1} \;=\; (A-B)^{-1} - \theta \sum_{i=1}^{q} m_i f_A(e_i), \tag{4}$$

avec $\forall e \in \mathbb{R}^N,\ |e| = 1,\ \forall \xi$ matrice symétrique

$$f_A(e)\xi : \xi = \frac{1}{\mu_A}\left(|\xi e|^2 - (\xi e \cdot e)^2\right) + \frac{1}{\lambda_A + 2\mu_A}(\xi e \cdot e)^2. \tag{5}$$

Pour obtenir une méthode numérique simple, nous fixons le nombre q (en 2-D nous prenons $q = 12$) et les directions de laminations $(e_j)_{1\leq j\leq q}$ (qui discrétisent la sphère unité). Les paramètres de formes sont alors la densité de matériau θ, et les proportions de lamination $(m_i)_{1\leq i\leq q}$. La résolution de (3) s'effectuant par éléments finis, on choisit de prendre ses paramètres de forme constants sur chaque élément. On utilise une méthode de type "gradient projeté" qui nécessite le calcul du gradient de J^* par rapport aux variables de forme, ce qui se fait classiquement en introduisant un état adjoint p qui est la solution de

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\operatorname{div}\left(A^* e(p)\right) & = & \frac{\theta(x)C(x)(u(x)-u_0(x))}{\left(\int_\Omega \theta(x)C(x)|u(x)-u_0(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}} & \text{dans } \Omega \\ p & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{array}\right. \tag{6}$$

Nous renvoyons à Allaire *et al*. (2001) et Allaire et Jouve (2001) pour les formules précises des dérivées de J^* et pour l'algorithme numérique complet.

3.1 Résultats numériques

Les résultats numériques de notre méthode d'homogénéisation sont souvent de type composite, c'est-à-dire que de larges régions de la structure optimale possèdent des densités de matériau intermédiaires entre 0 et 1. D'un point de vue pratique, c'est un inconvénient si on cherche de vraies formes classiques, et on applique donc un procédé de pénalisation (assez usuel désormais, voir par exemple Allaire (2001)) qui force la densité θ vers les valeurs

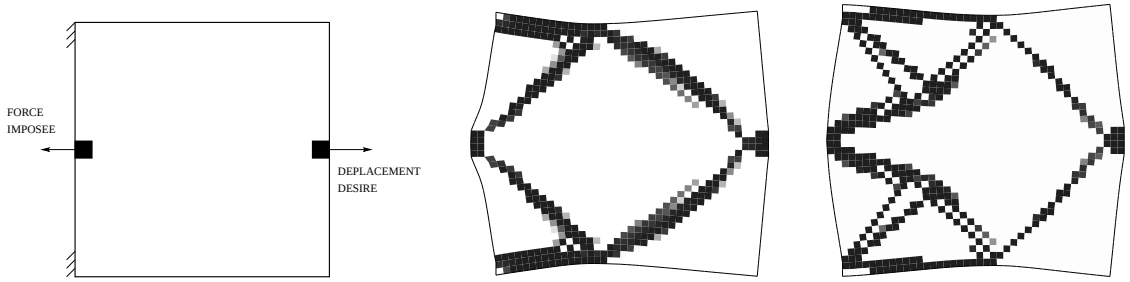

FIG. 1 – *Inverseur de force. Définition du problème (à gauche), structure optimale déformée sans contrainte (au milieu) et avec contrainte de rigidité (à droite).*

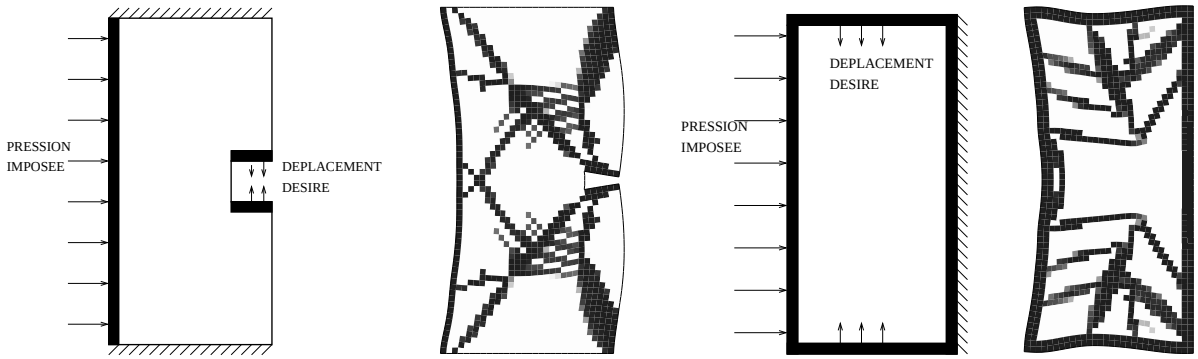

FIG. 2 – *Pince (à gauche) et mécanisme à module de Poisson négatif (à droite) : définition du problème et structure optimale déformée.*

extrêmes 0 (vide) ou 1 (matériau pur). Ce sont donc ces formes pénalisées que nous présentons dans la suite.

Nous présentons plusieurs exemples d'application pour lesquels on choisit des fonctions $C(x)$ et $u_0(x)$ appropriées dans la fonction-coût (2). Dans le premier exemple, on construit un inverseur de force (voir la figure 1) de volume 20% celui du domaine de travail. En tirant vers la gauche sur le coté gauche, on veut créer un déplacement à droite sur le coté droit. On donne deux résultats obtenus sans ou avec contrainte sur le déplacement du point d'application de la force d'entrée. Dans le deuxième exemple, on veut actionner la fermeture d'une pince par une pression horizontale uniforme sur un bord. Dans le troisième exemple, on veut obtenir un effet global de module de Poisson négatif pour concevoir un mécanisme d'encastrement efficace (voir la figure 2). Les derniers exemples sont des mécanismes bloqués en leur centre (voir la figure 3).

Il est possible de considérer des actuateurs thermiques ou thermo-électriques, c'est-à-dire où la force d'entrée est produite par effet thermique ou Joule. Pour cela, il faut considérer un modèle couplé de thermo-élasticité comme dans Sigmund (1999). Cette généralisation ainsi que celle qui consiste à optimiser concuramment pour plusieurs cas de chargements sont l'objet d'un travail en cours.

Références

Allaire G. 2001 Shape optimization by the homogenization method, Springer Verlag, New York.

Allaire G., Aubry S., Jouve F. 2001 Shape optimization with general objective functions using

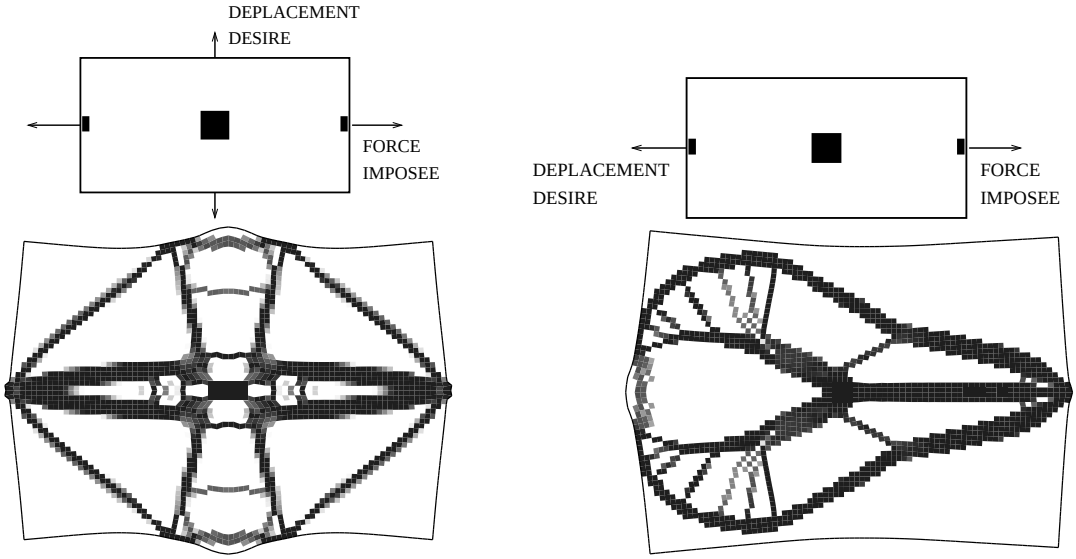

FIG. 3 – *Deux mécanismes fixés en leur centre : module de Poisson négatif (à gauche), et inverseur de force (à droite).*

partial relaxation, in Topology optimization of structures and composite continua, G.I.N. Rozvany and N. Olhoff eds., pp.239-249, Kluwer Academic Publishers.

Allaire G., Bonnetier E., Francfort G., Jouve F. 1997 Shape optimization by the homogenization method, *Nümerische Mathematik* **76**, 27-68.

Allaire G., Jouve F. 2001 Optimisation de structures par homogénéisation pour des fonctions-coût générales. Application à l'optimisation de mécanismes, Colloque National En Calcul des Structures, Giens, Mai 2001.

Allaire G., Kohn R.V. 1993 Optimal design for minimum weight and compliance in plane stress using extremal microstructures, *Europ. J. Mech. A/Solids* **12**, 6, 839-878.

Bendsoe M. 1995 Methods for optimization of structural topology, shape and material, Springer Verlag, New York.

Bendsoe M., Kikuchi N. 1988 Generating Optimal Topologies in Structural Design Using a Homogenization Method, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* **71**, 197-224.

Jonsmann J., Sigmund O., Bouwstra S. 1999 Compliant thermal microactuators, *Sensors and actuators* **76**, 463-469.

Rozvany G., Bendsoe M., Kirsch U. 1995 Layout optimization of structures, *Appl. Mech. Reviews* **48**, 41-118.

Sigmund O. 1997 On the design of compliant mechanisms using topology optimization, *Mech. Struct. Mach.* **25**, 493-524.

Sigmund O. 1999 Design of multiphysics actuators using topology optimization, part I : one-material structures, *Mech. Struct. Mach.* **25**, 493-524.