 Igor Kortchemski – igor.kortchemski@polytechnique.edu

Devoir maison

À rendre individuellement le mardi 9 novembre (rendu papier ou rendu électronique). Les questions ne sont pas classées par ordre croissant de difficulté.

Exercice 1.

Pour $x = (x_1, x_2, \ldots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$, on note $\sup(x) = \sup_{i \geq 1} x_i$.

(1) Soit $X, X^1, X^2, \ldots$ des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (muni de la tribu et de la distance définies dans le cours 2) telles que $X^n \Rightarrow X$. Alexandra dit : on a alors $\sup(X^n) \Rightarrow \sup(X)$. A-t-elle raison ? Justifiez votre réponse.

(2) On considère $\ell^1 = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| < \infty\}$, muni de la distance $d(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|$ et de la tribu borélienne associée. Soit $X, X^1, X^2, \ldots$ des variables aléatoires à valeurs dans ℓ^1 telles que $X^n \Rightarrow X$. Béatrice dit : on a alors $\sup(X^n) \Rightarrow \sup(X)$. A-t-elle raison ? Justifiez votre réponse.

Éléments de correction :

(1) Non ! Par exemple, si X^n est défini de sorte que $(X_k^n)_{k \geq 1}$ sont indépendantes de même loi donnée par $\mathbb{P}(X_1^n = 1) = \frac{1}{n}$ et $\mathbb{P}(X_1^n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$. D'après le lemme de Borel-Cantelli, presque sûrement $X_k^n = 1$ pour une infinité de valeurs de k, donc presque sûrement $\sup(X^n) = 1$. Par contre, les marginales fini dimensionnelles de X^n convergent en loi vers des vecteurs nuls, de sorte que X^n converge en loi vers la suite nulle.

(2) Oui ! On vérifie que la fonction

$$\begin{array}{rccc} \sup & : & \ell^1 & \to & \mathbb{R} \\ & & (x_i)_{i \geq 1} & \mapsto & \sup_{i \geq 1} x_i \end{array}$$

est continue (c'est un argument déterministe), et le résultat s'ensuit par stabilité de la convergence en loi par composition par une fonction continue.

$\square$

Exercice 2.

Soit (E, d) un espace métrique et notons d_{LP} la distance de Lévy-Prokhorov sur E.

(1) Montrer que

$$d_{LP}(\mu, \nu) = \inf\{r > 0 : \forall F \text{ fermé de } E, \mu(F) \leq \nu(F^r) + r\}$$

où $F^r = \{x \in E : d(x, F) < r\}$.

(2) Que se passe-t-il si on remplace "fermé" par "ouvert" ? Autrement dit, a-t-on

$$d_{LP}(\mu, \nu) = \inf\{r > 0 : \forall O \text{ ouvert de } E, \mu(O) \leq \nu(O^r) + r\} ?$$

Éléments de correction :

(1) Notons
$$d_F(\mu,\nu) = \inf\{r > 0 : \forall F \text{ fermé de } E, \mu(F) \leq \nu(F^r) + r\}.$$
Tout d'abord, on a $d_{LP}(\mu,\nu) \geq d_F(\mu,\nu)$. En effet, si on choisit $r > d_{LP}(\mu,\nu)$, on a alors
$$\mu(A) \leq \nu(A^r) + r$$
pour tout borélien A et a fortiori pour tout A fermé, ce qui implique que $d_F(\mu,\nu) \leq r$. Ainsi $d_{LP}(\mu,\nu) \geq d_F(\mu,\nu)$.

Choisissons maintenant $r > d_F(\mu,\nu)$, de sorte que
$$\mu(F) \leq \nu(F^r) + r$$
pour tout fermé F. Pour un borélien A, on a alors
$$\mu(A) \leq \mu(\overline{A}) \leq \nu(\overline{A}^r) + r = \nu(A^r) + r$$
car $\overline{A}^r = A^r$ (en effet, l'inclusion $A^r \subset \overline{A}^r$ est claire, et pour l'autre inclusion, si $x \in \overline{A}^r$, on trouve $y \in \overline{A}$ tel que $d(x,y) < r$, puis $z \in A$ tel que $d(y,z) < r - d(x,y)$, de sorte que $d(x,z) < r$). Cela entraîne que $d_{LP}(\mu,\nu) \leq r$, ce qui conclut.

(2) Oui ! Comme à la question précédente, on a $d_{LP}(\mu,\nu) \geq d_O(\mu,\nu)$. Pour l'autre inégalité, soit $r > d_O(\mu,\nu)$ de sorte que
$$\mu(O) \leq \nu(O^r) + r$$
pour tout ouvert O. Soit A un borélien ; nous allons vérifier que $\mu(A) \leq \nu(A^{r+\eta}) + r + \eta$ pour tout $\eta > 0$, ce qui impliquera que $d_{LP}(\mu,\nu) \leq r + \eta$ et concluera. Pour cela, on écrit
$$\mu(A) \leq \mu(A^\eta) \leq \nu((A^\eta)^r) + r \leq \nu(A^{\eta+r}) + r + \eta.$$
□

Exercice 3.

Soit μ une mesure de probabilité tendue sur un espace métrique (E,d). Montrer qu'il existe un borélien $A \subset E$ avec (A,d) séparable et $\mu(A) = 1$.

Éléments de correction :

Par tension, pour tout $n \geq 1$, il existe un compact $K_n \subset E$ tel que $\mu(K_n) \geq 1 - 1/n$. Posons
$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n.$$

Alors pour tout $n \geq 1$, $\mu(A) \geq 1 - 1/n$, de sorte qu'en faisant $n \to 1$ on obtient $\mu(A) = 1$. Par ailleurs, A est séparable, étant union dénombrable d'ensembles séparables (puisque compacts). □

Exercice 4.

Soit (E,d) un espace métrique et $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite à valeurs dans E. On suppose que $(\delta_{x_n})_{n\geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire X. Que dire de X ?

Éléments de correction :
La variable aléatoire X est presque sûrement constante. En effet, notons A l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\geq 1}$.

Vérifions d'abord que $\mathrm{Card}(A) \leq 1$. Raisonnons par l'absurde en supposant que $x \neq y$ sont deux valeurs d'adhérence de cette suite. Soit alors $\varepsilon < d(x,y)/3$. D'après le théorème de porte-manteau,

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{1}_{x_n \in \overline{B}(x,\varepsilon)} \leq \mathbb{P}\left(X \in \overline{B}(x,\varepsilon)\right),$$

de sorte que $\mathbb{P}\left(X \in \overline{B}(x,\varepsilon)\right) = 1$. De même, $\mathbb{P}\left(X \in \overline{B}(y,\varepsilon)\right) = 1$. Absurde car $\overline{B}(x,\varepsilon) \cap \overline{B}(y,\varepsilon) = \varnothing$.

Considérons

$$F = \{x_n : n \geq 1\} \cup A,$$

qui est fermé.

Si $A = \varnothing$, d'après le théorème de porte-manteau, comme précédemment, $\mathbb{P}(X \in F) = 1$. Puisque $A = \varnothing$, pour tout $i \geq 1$, il existe $\varepsilon_i > 0$ tel que $x_n \notin B(x_i, \varepsilon_i)$ pour n assez grand. D'après le théorème de porte-manteau on a alors $\mathbb{P}(X \in B(x_i,\varepsilon_i)) = 0$ pour tout $i \geq 1$, ce qui contredit $\mathbb{P}(X \in \{x_n : n \geq 1\}) = 1$.

Si $A = \{x\}$, d'après le théorème de Porte-manteau, pour tout $\varepsilon > 0$ on a $\mathbb{P}\left(X \in \overline{B}(x,\varepsilon)\right) = 1$, et on en déduit que $\mathbb{P}(X = x) = 1$. □

Exercice 5.

Considérons une suite $(E_n, d_n)_{n\geq 1}$ d'espaces métriques munis de leurs tribus boréliennes. Pour tout $n \geq 1$, soit μ_n une mesure de probabilité sur E_n, et $(X_n(k))_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans E_n de loi μ_n.

On note $\mathcal{M}_\infty(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*} = \{(a_{i,j})_{i,j\geq 1} : a_{i,j} \in \mathbb{R} \text{ pour } i,j \geq 1\}$ l'ensemble des matrices réelles "infinies", muni de la distance

$$d\left((a_{i,j})_{i,j\geq 1}, (b_{i,j})_{i,j\geq 1}\right) = \sum_{i,j=1}^{\infty} \frac{|a_{i,j} - b_{i,j}|}{|a_{i,j} - b_{i,j}| + 1} \times \frac{1}{2^{i+j}}$$

et de sa tribu borélienne associée.

Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes :

(i) la suite $\left((d_n(X_n(i), X_n(j)))_{i,j\geq 1}\right)_{n\geq 1}$ est tendue dans $\mathcal{M}_\infty(\mathbb{R})$;

(ii) la suite $(d_n(X_n(1), X_n(2)))_{n\geq 1}$ est tendue dans $\mathbb{R}$;

(iii) pour tout $n \geq 1$, il existe $x_n \in E_n$ tel que la suite $(d_n(x_n, X_n(1)))_{n\geq 1}$ est tendue dans $\mathbb{R}$.

Igor Kortchemski – igor.kortchemski@polytechnique.edu

Éléments de correction :

$\boxed{(i) \implies (ii)}$ Ceci découle que l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_\infty(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ (a_{i,j})_{i,j\geq 1} & \mapsto & a_{1,2} \end{array}$$

est continue.

$\boxed{(ii) \implies (i)}$ Soit $\varepsilon > 0$. Pour $i, j \geq 1$, soit $C_{i,j}$ tel que pour tout $n \geq 1$ on a

$$\mathbb{P}\Big(d_n(X_n(1), X_n(2)) \geq C_{i,j}\Big) \leq \frac{\varepsilon}{2^{i+j}}.$$

On vérifie (en utilisant le procédé d'extraction diagonal) que

$$K = \{(a_{i,j})_{i,j\geq 1} \in \mathcal{M}_\infty(\mathbb{R}) : |a_{i,j}| \leq C_{i,j} \text{ pour tous } i, j \geq 1\}$$

est un compact de $\mathcal{M}_\infty(\mathbb{R})$, et que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\Big((d_n(X_n(i), X_n(j)))_{i,j\geq 1} \notin K\Big) &\leq \sum_{i,j=1}^{\infty} \mathbb{P}\Big(d_n(X_n(i), X_n(j)) \geq C_{i,j}\Big) \\ &= \sum_{i,j=1}^{\infty} \mathbb{P}\Big(d_n(X_n(1), X_n(2)) \geq C_{i,j}\Big) \\ &\leq \sum_{i,j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{i+j}} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

$\boxed{(iii) \implies (ii)}$ Soit $x_n \in E_n$ tel que la suite $(d_n(x_n, X_n(1)))_{n\geq 1}$ est tendue dans $\mathbb{R}$. Fixons $\varepsilon > 0$ et $C > 0$ tel que $\mathbb{P}(d_n(x_n, X_n(1)) \geq C/2) \leq \varepsilon/2$. Alors par inégalité triangulaire

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(d_n(X_n(1), X_n(2)) > C) &\leq \mathbb{P}(d_n(x_n, X_n(1)) > C/2) + \mathbb{P}(d_n(x_n, X_n(2)) > C/2) \\ &= 2\mathbb{P}(d_n(x_n, X_n(1)) > C/2) \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

$\boxed{(ii) \implies (iii)}$ Pour tout $\varepsilon > 0$, soit $C_\varepsilon > 0$ tel que $\mathbb{P}(d_n(X_n(1), X_n(2)) > C_\varepsilon) \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq 1$ Puisque d'après le théorème de Fubini

$$\mathbb{P}(d_n(X_n(1), X_n(2)) > C) = \int_{E_n} \mu_n(\mathrm{d}x) \mathbb{P}(d_n(x, X_n(1)) > C),$$

il existe $x_n^\varepsilon \in E_n$ tel que $\mathbb{P}(d_n(x_n^\varepsilon, X_n(1)) > C_\varepsilon) \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq 1$.

 Igor Kortchemski – igor.kortchemski@polytechnique.edu

Vérifions que $x_n = x_n^{1/4}$ convient. Pour $\varepsilon < 1/2$, l'événement

$$\{d_n(x_n^{1/4}, X_n(1)) \leq C_{1/4}\} \cap \{d_n(x_n^{\varepsilon}, X_n(1)) \leq C_{\varepsilon}\}$$

est non vide car de probabilité au moins $1-\varepsilon-1/4$. On en déduit que $d_n(x_n^{1/4}, x_n^{\varepsilon}) \leq C_\varepsilon + C_{1/4}$. Ainsi,

$$\mathbb{P}\left(d_n(x_n^{1/4}, X_n(1)) \geq 2C_\varepsilon + C_{1/4}\right) \leq \mathbb{P}\left(d_n(x_n^{\varepsilon}, X_n(1)) > C_\varepsilon\right) \leq \varepsilon,$$

ce qui conclut.

□

Exercice 6.

Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ des variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $\mathcal{C}([0,1])$, l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme uniforme. On suppose qu'il existe $C, \varepsilon > 0$ tels que

$$\forall 0 \leq s,t \leq 1, \quad \mathbb{E}[(X_1(s)-X_1(t))^2] \leq C|s-t|^{1+\varepsilon}, \qquad \forall 0 \leq s \leq 1, \quad \mathbb{E}[X_1(s)] = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{E}[X_1(s)^2] < \infty.$$

On pose

$$Z_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}}.$$

(1) Pour $0 \leq s,t \leq 1$, calculer $\mathbb{E}[(Z_n(s)-Z_n(t))^2]$.

(2) Montrer que $(Z_n)_{n\geq 1}$ converge en loi dans $\mathcal{C}([0,1])$.

Éléments de correction :

(1) On trouve que $\mathbb{E}[(Z_n(s)-Z_n(t))^2] = \mathbb{E}[(X_1(s)-X_1(t))^2]$.

(2) On vérifie d'abord la tension avec le critère de tension de Kolmogorov. D'une part, pour tout $s \in [0,1]$, $\mathbb{E}[Z_n(s)^2] = \mathbb{E}[X_1(s)^2] < \infty$, de sorte que pour tout $s \in [0,1]$, la suite $(Z_n(s))_{n\geq 1}$ est bornée dans L^2, donc tendue. D'autre part, par la question précédente, on a bien pour tous $s,t \in [0,1]$, $\mathbb{E}[(Z_n(s) - Z_n(t))^2] \leq C|s-t|^{1+\varepsilon}$.

Pour l'identification de la limite, on remarque que les marginales fini-dimensionnelles de Z_n convergent. En effet, pour $0 \leq t_1 < \cdots < t_k$, on peut écrire

$$(Z_n(t_1), \ldots, Z_n(t_k)) = \frac{Y_1 + \cdots + Y_n}{\sqrt{n}},$$

où $Y_1 = (X_1(t_1), \ldots, X_1(t_k))$ avec les $(Y_i)_{1\leq i\leq n}$ i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{R}^k$. D'après le théorème central limit multidimensionnel, $(Z_n(t_1), \ldots, Z_n(t_k))$ converge en loi lorsque $n \to \infty$ vers un vecteur gaussien centré sur $\mathbb{R}^k$ de matrice de covariance $(\mathbb{E}[X_1(t_i)X_1(t_j)])_{1\leq i,j\leq n}$.

Ceci conclut. □

Igor Kortchemski – igor.kortchemski@polytechnique.edu

Petit problème.

On considère $\mathbb{U} = \cup_{n=0}^{\infty} (\mathbb{N}^*)^n$, où $(\mathbb{N}^*)^0 = \{\varnothing\}$ par convention. Un élément $u \in \mathbb{U}$ est ainsi une suite finie d'entiers strictement positifs, appelé aussi mot. Si $u \in (\mathbb{N}^*)^n$, on note $|u| = n$ sa longueur. On définit $\partial\mathbb{U} = (\mathbb{N}^*)^{\mathbb{N}^*}$ et on pose $\overline{\mathbb{U}} = \mathbb{U} \cup \partial\mathbb{U}$. Pour $u \in \mathbb{U}$ et $v \in \overline{\mathbb{U}}$, on note uv la concaténation de u et de v (en particulier $\varnothing u = u\varnothing$ pour tout mot u), et on note $u \preceq uv$.

Pour $u, v \in \overline{\mathbb{U}}$ avec $u \neq v$, on note $u \wedge v \in \mathbb{U}$ le plus long mot pour lequel il existe $x, y \in \overline{\mathbb{U}}$ tels que $u = (u \wedge v)x$ et $v = (u \wedge v)y$. On pose enfin $u \wedge u = u$.

(1) On définit pour $u, v \in \overline{\mathbb{U}}$:
$$d(u,v) = \begin{cases} 0 & \text{si } u = v, \\ e^{-|u \wedge v|} & \text{sinon.} \end{cases}$$
Montrer que d est une distance sur $\overline{\mathbb{U}}$ qui vérifie $d(u,w) \leq \max(d(u,v), d(v,w))$ pour tous $u, v, w \in \overline{\mathbb{U}}$ et qui rend cet espace polonais.

(2) Montrer que dans $\overline{\mathbb{U}}$ les boules ouvertes sont fermées.

(3) Pour $u \in \mathbb{U}$, on note $T(u) = \{uv : v \in \overline{\mathbb{U}}\}$. Soit $(\mu_n)_{n \geq 1}$ une suite de mesure de probabilités sur $\overline{\mathbb{U}}$ muni de sa tribu borélienne. Montrer que $(\mu)_{n \geq 1}$ converge étroitement vers une mesure de probabilité μ sur $\overline{\mathbb{U}}$ si et seulement si pour tout $u \in \mathbb{U}$,
$$\mu_n(\{u\}) \to \mu(\{u\}) \qquad \text{et} \qquad \mu_n(T(u)) \to \mu(T(u)).$$

Éléments de correction :

(1) La séparation et la symétrie de d sont claires. Pour l'inégalité triangulaire, on remarque que pour $u, v, w \in \overline{\mathbb{U}}$ on a $d(u,w) \leq \max(d(u,v), d(v,w))$. En effet, si $d(u,w) > d(u,v)$, alors $u \wedge w \preceq u \wedge v$, de sorte que $v \wedge w = u \wedge w$ et $d(u,w) = d(v,w)$.

Pour la séparabilité, $\mathbb{U}$ est dense dans $\overline{\mathbb{U}}$. En effet, si $u \in \partial\mathbb{U}$ et $[u]_k \in \mathbb{U}$ désigne les k premiers entiers de u, on a clairement $d([u]_k, u) \to 0$ quand $k \to \infty$.

Vérifions maintenant que $\overline{\mathbb{U}}$ est polonais. Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite de Cauchy de $\overline{\mathbb{U}}$. Remarquons que pour tous $u, v \in \overline{\mathbb{U}}$ et $k \geq 1$, on a $d([u]_k, [v]_k) \leq d(u,v)$. Par ailleurs, pour $u, v \in (\mathbb{N}^*)^k$, $d(u,v) < e^{-k}$ implique $u = v$. Par conséquent, pour tout $k \geq 1$, $[u_n]_k$ est constant pour n assez grand et converge vers une limite notée $v(k)$, qui vérifie $[v(\ell)]_k = v(k)$ pour tous $k \leq \ell$. Il existe donc $v \in \overline{\mathbb{U}}$ tel que $[v]_k = v(k)$ pour tout $k \geq 1$, et on a $u_n \to v$.

(2) Soit $u \in \overline{\mathbb{U}}$ et $r > 0$. Vérifions que $B(u,r) = \{v \in \overline{\mathbb{U}} : d(u,v) < r\}$ est fermé. Pour cela, soit $v \in \overline{\mathbb{U}} \backslash B(u,r)$ de sorte que $d(u,v) \geq r$, et vérifions que $B(v,r) \cap B(u,r) = \varnothing$. En effet, par l'absurde, si $w \in B(v,r) \cap B(u,r)$, on a $d(w,v) < r$ et $d(w,u) < r$, et alors $d(u,v) \leq \max(d(u,w), d(w,v)) < r$, absurde.

(3) On vérifie tout d'abord que les ensembles de la forme $\{u\}$ et $T(u)$ pour $u \in \mathbb{U}$ sont à la fois ouverts et fermés. Ceci provient de la question précédente, en remarquant que pour $u \in (\mathbb{N}^*)^n$, on a $\{u\} = B(u, 2^{-n-1})$ et $T(u) = B(u, 2^{-n+1/2})$.

L'implication provient alors immédiatement du théorème de porte-manteau.

Pour la réciproque, par séparabilité, tout ouvert peut s'écrire comme union dénombrable de boules ouvertes. On remarque que les boules ouvertes de $\overline{\mathbb{U}}$ sont précisément de la forme $\{u\}$ et $T(u)$ pour $u \in U$, et que deux boules ouvertes sont soit disjointes, soit incluses l'une dans l'autre. Par suite, tout ouvert O de $\overline{\mathbb{U}}$ peut s'écrire comme union dénombrable disjointe d'ensembles de la forme précédente (ouverts et fermés). Ainsi, en écrivant $O = \coprod_{k \geq 1} O_k$, d'après le lemme de Fatou :

$$\mu(O) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(O_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \liminf_{n\to\infty} \mu_n(O_k) \leq \liminf_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mu_n(O_k) = \liminf_{n\to\infty} \mu_n(O),$$

ce qui conclut.

□