Théorèmes limites et applications – MdA Paris-Saclay – Examen

Mardi 16 janvier 2024 – 9h-12h

Les documents ne sont pas autorisés.

La précision et la clarté de la rédaction sera prise en compte dans l'évaluation.

Toute question peut être admise et utilisée ultérieurement, à condition de l'indiquer clairement.

Le sujet comporte 2 pages.

Questions de cours.

(1) Énoncer le théorème de représentation de Skorokhod.

(2) Énoncer le critère de tension de Kolmogorov.

(3) Soit $(B_t)_{0\leq t\leq 1}$ un mouvement brownien réel standard issu de 0. Démontrer que lorsque $\varepsilon \to 0$, la loi de $(B_s)_{0\leq s\leq 1}$ sachant que $\{|B_1| \leq \varepsilon\}$ converge vers la loi de $(B_s - sB_1)_{0\leq s\leq 1}$.

***

Exercice 1. Soit $\lambda > 0$ et soit X une variable aléatoire dont la loi est donnée par $\mathbb{P}(X \geq a) = a^{-\lambda}$ pour tout $a \geq 1$. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de même loi que X et on pose

$$T_n = \left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)^{1/n}.$$

Lorsque $n \to \infty$, est-ce que T_n converge dans L^1 ? Justifier votre réponse.

Exercice 2. Soit (E, d) un espace métrique séparable et X_n, Y_n des variables aléatoires à valeurs dans E. On suppose que X_n converge presque sûrement et que $\forall \varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(d(X_n, Y_n) \geq \varepsilon) \to 0$.

(1) Montrer que Y_n converge en probabilité.

(2) Est-il vrai que Y_n converge presque sûrement ? Justifiez votre réponse (si la réponse est oui, donnez une preuve ; si la réponse est non, donnez un contre-exemple avec l'espace E de votre choix).

Exercice 3. Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $\mathbb{P}_x$ la loi d'un mouvement brownien réel standard partant de x. Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels.

(1) Lorsque $(x_n)_{n\geq 1}$ est bornée, montrer que la suite $(\mathbb{P}_{x_n})_{n\geq 1}$ est tendue dans $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$.

(2) Le résultat reste-t-il vrai si la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ n'est plus supposée bornée ? Justifiez votre réponse.

Exercice 4. On note $\mathbb{D} = \mathbb{D}([0, 1], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions càdlàg sur $[0, 1]$ à valeurs réelles muni de la topologie J_1 de Skorokhod définie en cours. Pour une variable aléatoire Z, on note F_Z sa fonction de répartition définie par $F_Z(t) = \mathbb{P}(Z \leq t)$ pour $t \in \mathbb{R}$, vue comme élément de $\mathbb{D}$ par restriction à $[0, 1]$.

Soient $(X_n)_{n\geq 1}, X$ des variables aléatoires réelles à valeurs dans $[\frac{1}{2}, 1]$.

(1) Alix dit : “si X_n converge en loi, alors F_{X_n} converge dans $\mathbb{D}$.” A-t-il raison ? Justifiez votre réponse.

(2) Billie dit : “si F_{X_n} converge dans $\mathbb{D}$, alors X_n converge en loi.” A-t-elle raison ? Justifiez votre réponse.

Exercice 5. Soit $n \geq 1$ un entier. On considère une urne avec $2n$ boules. Parmi celles-ci, n sont étiquetées $+1$ et n sont étiquetées -1. On tire successivement indépendamment au hasard $2n$ boules, on pose $S_0 = 0$ et pour $1 \leq k \leq 2n$ on note S_k la somme des k premières boules tirées. On définit S_t pour $0 \leq t \leq 2n$ par interpolation linéaire. Étudier la convergence en loi de la suite

$$\left(\frac{S_{2nt}}{\sqrt{n}} : 0 \leq t \leq 1 \right)$$

dans l'espace $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ dans les deux cas suivants :

(1) les tirages se font **avec** remise,

(2) les tirages se font **sans** remise.

Petit problème 6.

Première partie. On considère des variables aléatoires réelles $I_n, I_n(\delta), I, I(\delta)$ pour $\delta > 0$ et $n \geq 1$ telles que :

(i) presque sûrement $I(\delta) \to I$ lorsque $\delta \to 0$,

(ii) pour tout $\delta > 0$, $I_n(\delta)$ converge en loi vers $I(\delta)$ lorsque $n \to \infty$,

(iii) pour tout $n \geq 1$ et $\delta > 0$, $\mathbb{E}[|I_n(\delta) - I_n|] \leq \delta$.

(1) Montrer que $I_n \to I$ en loi lorsque $n \to \infty$.

On considère dans la suite des variables aléatoires $(X_i)_{i \geq 1}$ i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{Z}$ apériodiques avec $\mathbb{E}[X_1] = 0$, $\mathbb{E}[X_1^2] = 1$. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ pour tout $n \geq 1$. On note $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien réel standard issu de 0. On fixe également $0 < \gamma < 1$.

Deuxième partie.

(2) Montrer que pour tout $\delta > 0$, presque sûrement la mesure de Lebesgue de $\{t \in [0,1] : B_t = \delta\}$ est nulle.

(3) Montrer que pour tout $\delta > 0$ la convergence suivante a lieu en loi

$$\frac{1}{n^{1-\gamma/2}} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{|S_i|^\gamma} \mathbb{1}_{|S_i| > \delta\sqrt{n}} \quad \xrightarrow[n\to\infty]{\text{(loi)}} \quad \int_0^1 \frac{1}{|B_t|^\gamma} \mathbb{1}_{|B_t| > \delta} \mathrm{d}t.$$

Troisième partie.

(4) Montrer que presque sûrement $t \mapsto \frac{1}{|B_t|^\gamma}$ est intégrable sur $[0,1]$ par rapport à la mesure de Lebesgue.

(5) Montrer que la convergence suivante a lieu en loi

$$\frac{1}{n^{1-\gamma/2}} \sum_{i=1, S_i \neq 0}^{n} \frac{1}{|S_i|^\gamma} \quad \xrightarrow[n\to\infty]{\text{(loi)}} \quad \int_0^1 \frac{1}{|B_t|^\gamma} \mathrm{d}t.$$

(∗) (Question Hors Barème) Que se passe-t-il pour $\gamma = 1$?

Fin