Igor Kortchemski – igor.kortchemski@polytechnique.edu

Feuille d'exercices (cours 3) : théorème de Prokhorov, théorème de représentation de Skorokhod, topologie de $\mathcal{M}_1(E)$

1 Exercice à chercher pour le mardi 11 octobre

Cet exercice sera corrigé au début de la séance du mardi 11 octobre

Exercice 1. – *(Principe des lois accompagnantes)* – Sur un même espace de probabilités, on suppose donnée une famille de variables aléatoires $(Y_{n,k}, n \geq 1, k \geq 1)$ ainsi que d'une autre suite de variables aléatoires $(X_n, n \geq 1)$, toutes étant à valeurs dans le même espace métrique (E,d).

On suppose que pour tout $k \geq 1$, la suite $(Y_{n,k}, n \geq 1)$ converge en loi vers une limite Y_k. Enfin, on suppose que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{k\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(d(X_n, Y_{n,k}) \geq \varepsilon) = 0.$$

(1) On suppose que $Y_k \Rightarrow Y$ lorsque $k \to \infty$. Montrer que $X_n \Rightarrow Y$.

(2) On suppose que (E,d) est séparable et complet. Montrer que $(Y_k)_{k\geq 1}$ converge en loi.

On pourra utiliser avec profit la distance de Lévy–Prokhorov.

Corrigé :

(1) On va appliquer porte-manteau. Soit F fermé, $\varepsilon > 0$. Notons $F_\varepsilon = \{x \in E : d(x,F) \leq \varepsilon\}$, qui est fermé. Alors

$$\mathbb{P}(X_n \in F) \leq \mathbb{P}(Y_{n,k} \in F_\varepsilon) + \mathbb{P}(d(X_n, Y_{n,k}) \geq \varepsilon).$$

Puisque $Y_{n,k} \Rightarrow Y_k$, par porte-manteau,

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n \in F) \leq \mathbb{P}(Y_k \in F_\varepsilon) + \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(d(X_n, Y_{n,k}) \geq \varepsilon).$$

Or $Y_k \Rightarrow Y$, donc en passant à la $\limsup$ quand $k \to \infty$, par porte-manteau :

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n \in F) \leq \mathbb{P}(Y \in F_\varepsilon).$$

En faisant $\varepsilon \downarrow 0$, on conclut que

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n \in F) \leq \mathbb{P}(Y \in F),$$

et donc $X_n \Rightarrow Y$ par porte-manteau.

(2) Puisque (E,d) est séparable complet, $(\mathcal{M}_1(E), d_{LP})$ est séparable complet. Il suffit donc de montrer que $(Y_k)_{k\geq 1}$ est de Cauchy dans $(\mathcal{M}_1(E), d_{LP})$. À cet effet, on écrit

$$d_{LP}(Y_p, Y_q) \leq d_{LP}(Y_p, Y_{n,p}) + d_{LP}(Y_{n,p}, Y_{n,q}) + d_{LP}(Y_{n,q}, Y_q),$$

Igor Kortchemski – igor.kortchemski@polytechnique.edu

de sorte que

$$d_{LP}(Y_p, Y_q) \leq \limsup_{n\to\infty} d_{LP}(Y_{n,p}, Y_{n,q}).$$

Ensuite, on écrit

$$d_{LP}(Y_{n,p}, Y_{n,q}) \leq d_{LP}(Y_{n,p}, X_n) + d_{LP}(Y_{n,q}, X_n).$$

Or pour tout borélien A,

$$\mathbb{P}(X_n \in A) \leq \mathbb{P}(Y_{n,k} \in A^{\varepsilon}) + \mathbb{P}(d(X_n, Y_{n,k}) \geq \varepsilon).$$

En choisissant K tel que

$$k \geq K \quad \Longrightarrow \quad \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(d(X_n, Y_{n,k}) \geq \varepsilon) \leq \varepsilon/2,$$

on en déduit que pour $k \geq K$, $\limsup_{n\to\infty} d_{LP}(X_n, Y_{n,k}) \leq \varepsilon$. Ainsi, pour tout $p, q \geq K$,

$$\limsup_{n\to\infty} d_{LP}(Y_{n,p}, Y_{n,q}) \leq 2\varepsilon,$$

ce qui conclut.

□

2 Exercices à chercher

Exercice 2. Soit (E, d) un espace métrique complet et $A \subset E$. Montrer que A est précompact si, et seulement si, A est relativement compact.

Corrigé :

$\boxed{\Longleftarrow}$ Si $\overline{A}$ est compact, pour tout $\varepsilon > 0$ il peut être recouvert par un nombre fini de boules de rayon ε, et c'est a fortiori le cas pour A.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Tout d'abord, remarquons que $\overline{A}$ est également précompact (si A est inclus dans une union de boules rayon ε, $\overline{A}$ est inclus dans une union de boules de rayon 2ε). Par caractérisation séquentielle de la compacité dans un espace métrique, il suffit de montrer que toute suite $(x_n)_{n\geq 1}$ de $\overline{A}$ a une valeur d'adhérence. Par précompacité, on peut construire par récurrence des extractions $\psi_1, \psi_2, \ldots$ et des éléments $z_1, z_2, \ldots$ tels que pour tout $n \geq 1$,

$$x_{\psi_1(n)} \in B(z_1, \varepsilon), \ldots, x_{\psi_1 \circ \cdots \psi_k(n)} \in B(z_k, \varepsilon/2^k), \ldots$$

et $B(z_{k+1}, \varepsilon/2^{k+1}) \subset B(z_k, \varepsilon/2^{k-1})$. Par procédé diagonal, on pose $\phi(n) = \psi_1 \circ \cdots \circ \psi_n(n)$ et on vérifie que la suite $(x_{\psi(n)})_{n\geq 1}$ est de Cauchy, donc convergente car E est complet. □

Exercice 3. Soit $X, X_1, X_2, \ldots$ des variables aléatoires réelles telles que $X_n \Rightarrow X$ et $X_n \geq 0$. Montrer que $\mathbb{E}[X] \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n]$.

Igor Kortchemski – igor.kortchemski@polytechnique.edu

Corrigé :

Corrigé plus tard en séance.

D'après le théorème de représentation de Skorokhod, quitte à changer d'espace de probabilité, on peut supposer que la convergence $X_n \to X$ a lieu presque sûrement. En particulier, $X \geq 0$ presque sûrement et le résultat désiré découle du lemme de Fatou. □

3 Exercices additionnels

Exercice 4. Soit (E,d) un espace métrique séparable.

(1) Montrer que l'application $F : x \mapsto \delta_x$ est un homéomorphisme de E sur $E_0 := \{\delta_y : y \in E\}$, où ce dernier est vu comme sous-espace de $\mathcal{M}_1(E)$ muni de la topologie de la convergence étroite.

Soit $\mu_n = \delta_{x_n}$ une suite de E_0 qui converge étroitement vers μ. On suppose par l'absurde que $(x_n)_{n\geq 1}$ n'admet aucune sous-suite convergente.

(2) Montrer que $\{x_n, n \geq 1\}$ est un fermé, ainsi que toutes ses parties (finies ou infinies). Montrer que cela est contradictoire avec la convergence étroite de μ_n. En déduire que E_0 est un fermé de $\mathcal{M}_1(E)$.

(3) En déduire que si $\mathcal{M}_1(E)$ est compact, alors E est compact.

Corrigé :

(1) Il est clair que si $x_n \to x$, alors $f(x_n) \to f(x)$ pour toute fonction $f : E \to \mathbb{R}$ continue bornée, donc F est continue. Par ailleurs, F est clairement injective : si $\delta_x = \delta_y$ avec $x \neq y$, on a alors $1 = \delta_x(\{x\}) = \delta_y(\{x\}) = 0$. Enfin, si $\delta_{x_n} \to \delta_x$, en considérant les fonctions $f_K(u) = \max(1 - Kd(x,u), 0)$ et en remarquant que $\delta_z(f_K) = 0$ si $d(z,x) > 1/K$, on voit que $x_n \to x$. Ceci conclut.

(2) Toute partie de $\{x_n : n \geq 1\}$ est fermée puisque $(x_n)_{n\geq 1}$ n'a aucune sous-suite convergence par hypothèse. Ainsi, pour toute partie infinie $F \subset \{x_n : n \geq 1\}$, d'après porte-manteau,

$$1 = \limsup_{n\to\infty} \delta_{x_n}(F) \leq \mu(F).$$

Donc $\mu(\{x_{2n} : n \geq 1\}) = 1$ et $\mu(\{x_{2n+1} : n \geq 1\} = 1$, absurde.

Pour montrer que E_0 est un fermé de $\mathcal{M}_1(E)$, considérons une suite $\mu_n = \delta_{x_n}$ une suite de E_0 qui converge étroitement vers μ. D'après ce qui précède, il existe une extraction telle que $(x_{\phi(n)})_{n\geq 1}$ converge vers une limite notée x. Alors $\delta_{x_{\phi(n)}} \Rightarrow \delta_x$ et donc $\mu = \delta_x$. Ainsi, E_0 est fermé.

(3) Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite de E. Alors $(\delta_{x_n})_{n\geq 1}$ est une suite de E_0, compact (car fermé dans $\mathcal{M}_1(E)$ compact). Il existe donc une extraction ϕ telle que $(\delta_{x_{\phi(n)}})$ converge étroitement, et d'après ce qui précéde il existe $x \in E$ tel que $x_{\phi(n)} \to x$, d'où le résultat.

□

Exercice 5. Soit $(E_i)_{i\geq 1}$ une suite d'espaces polonais. On pose $E = E_1 \times E_2 \times \cdots$, muni de la même distance d que dans la feuille d'exercices 2 :

$$\forall x, y \in E, \qquad d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(x,y)}{1 + d_n(x,y)}.$$

Igor Kortchemski – igor.kortchemski@polytechnique.edu

Montrer qu'une famille $\Gamma \subset \mathcal{M}_1(E)$ est tendue si et seulement si pour tout $i \geq 1$, $\{\pi_i\mu : \mu \in \Gamma\}$ est tendu, où $\pi_i : E \to E_i$ est la projection canonique et $\pi_i\mu$ la mesure image de μ par π_i.

Corrigé :

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que pour tout $i \geq 1$, $\{\pi_i\mu : \mu \in \Gamma\}$ est tendu. Soit $\varepsilon > 0$ et pour tout $i \geq 1$ choisissons un compact $K_i \subset E_i$ tel que pour tout $\mu \in \Gamma$ on ait $\pi_i\mu({}^cK_i) \leq \varepsilon/2^i$. On pose alors

$$K = \prod_{i=1}^{\infty} K_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} \pi_i^{-1}(K_i).$$

Par procédé diagonal on vérifie que K est un compact de E. Par ailleurs, pour tout $\mu \in \Gamma$

$$\mu({}^cK) \leq \sum_{i=1}^{\infty} (\mu(\pi_i^{-1}({}^cK_i))) = \sum_{i=1}^{\infty} (1 - \pi_i\mu(K_i)) \leq \varepsilon.$$

$\boxed{\Longrightarrow}$ Soit $\varepsilon > 0$ et K un compact de E tel que $\mu(K) \geq 1 - \varepsilon$ pour tout $\mu \in \Gamma$. Par continuité des projections canoniques, les $K_i = \pi_i(K)$ sont compacts. Par ailleurs, pour $i \geq 1$ et $\mu \in \Gamma$, puisque $K \subset \pi_i^{-1}(K_i)$, on a

$$\pi_i\mu(K_i) \geq \mu(K) \geq 1 - \varepsilon.$$

$\square$

Exercice 6. Soit (E, d) un espace métrique et $A \subset E$. On voit A comme un espace métrique muni de la distance d.

(1) Montrer que les ouverts de (A, d) sont de la forme $A \cap O$ avec O ouvert de (E, d).

(2) Montrer que les éléments de $(A, \mathcal{B}(A))$ sont de la forme $A \cap B$ avec $B \in \mathcal{B}(E)$.

(3) Soit $K \subset A$ un compact de (A, d). Montrer que K est fermé dans E.

Corrigé :

(1) L'inclusion $I : (A, d) \to (E, d)$ étant continue, l'image réciproque de tout ouvert est un ouvert, donc les élements de la forme $A \cap O$ avec O ouvert de (E, d) sont des ouverts de (A, d).

Réciproquement, soit U un ouvert de (A, d). Pour tout $x \in U$, il existe alors $r_x > 0$ tel que $B_A(x, r_x) \subset U$. Alors

$$U = \bigcup_{x \in U} B_A(x, r_x).$$

Or $B_A(x, r_x) = B_E(x, r_x) \cap A$. Donc

$$U = \bigcup_{x \in U} (B_E(x, r_x) \cap A) = \left(\bigcup_{x \in U} B_E(x, r_x) \right) \cap A,$$

d'où le résultat en prenant $O = \cup_{x \in U} B_E(x, r_x)$, ouvert dans E.

Igor Kortchemski – igor.kortchemski@polytechnique.edu

(2) L'inclusion $I : (A, d) \to (E, d)$ étant continue donc mesurable, on en déduit que les éléments de la forme $A \cap B$ avec $B \in \mathcal{B}(E)$ sont des éléments de $(A, \mathcal{B}(A))$.

Réciproquement, les éléments de la forme $A \cap B$ avec $B \in \mathcal{B}(E)$ contiennent les ouverts de A (d'après la question précédente) et forment une tribu, donc contiennent les éléments de $(A, \mathcal{B}(A))$.

(3) Soit $(x_n)_{n \geq 1}$ une suite d'éléments de K qui converge vers $x \in E$. Par compacité dans K, il existe une extraction ϕ et $y \in K$ tels que $x_{\phi(n)} \to y$. Ainsi $y = x \in K$, donc K est fermé.

□

Exercice 7. Montrer qu'il n'existe pas de distance sur $\mathbb{R}^{[0,1]}$ qui métrise la convergence simple (on pourra montrer l'existence d'une suite de fonctions qui ne converge pas simplement, mais telle que de toute sous-suite on peut ré-extraire une sous-sous-suite qui converge simplement)

Corrigé :

On prend par exemple f_n défini comme suit. Pour $n \geq 1$, on écrit $n = 2^N + k$ avec $0 \leq k < 2^N$ et on pose

$$f_n(x) = \mathbb{1}_{\frac{k}{2^N} \leq x \leq \frac{k+1}{2^N}}.$$

(cela correspond à balayer $[0,1]$ avec des rectangles de plus en plus fins). □