Igor Kortchemski – igor.kortchemski@polytechnique.edu

Feuille d'exercices (cours 6 et 7) : Théorème de Donsker, pont brownien

1 Exercice à chercher

Cet exercice est à chercher pour le mardi 21 novembre.

Exercice 1. Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien standard à valeurs dans $\mathbb{R}$. On pose, pour tout $c>0$:

$$B^{(c)}_t = \frac{1}{\sqrt{c}} B_{ct}.$$

(1) Montrer que la famille de variables aléatoires à valeurs dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ $(B^{(c)}, c>0)$ est tendue.

(2) On suppose que $0<c<1$. Montrer l'égalité en loi

$$((B_{c+t}, t\geq 0), (B^{(c)}_s, 0\leq s\leq 1)) \quad \overset{\text{(loi)}}{=} \quad ((\sqrt{c}B'_1 + B_t, t\geq 0), (B'_s, 0\leq s\leq 1)),$$

où B' est un processus indépendant de B, et de même loi.

(3) On considère des réels strictement positifs $0<t_1<t_2<\cdots<t_k\leq 1$ et $0<t'_1<\cdots<t'_{k'}\leq 1$ et on garde les notations de la question précédente. Montrer la convergence en loi

$$(B_{t_1},\ldots,B_{t_k},B^{(c)}_{t'_1},\ldots,B^{(c)}_{t'_{k'}}) \quad \underset{c\to 0}{\overset{\text{(loi)}}{\longrightarrow}} \quad (B_{t_1},\ldots,B_{t_k},B'_{t'_1},\ldots,B'_{t'_{k'}}).$$

(4) En conclure que $(B,B^{(c)})$ converge en loi dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})^2$ vers (B,B') lorsque $c\to 0$. Expliquer pourquoi ce résultat peut paraître surprenant.

(5) Que devient la question précédente si on fait cette fois tendre $c\to\infty$?

2 Exercices à chercher

Exercice 2. Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ des variables aléatoires réelles i.i.d. centrées de variance 1. On pose $S_0=0$, $S_n = X_1+\cdots+X_n$, ainsi que $A_0=0$, $A_n=S_1+\cdots+S_n$. On définit $(S_t)_{t\geq 0}$ et $(A_t)_{t\geq 0}$ par interpolation linéaire. On note enfin, pour $0\leq t\leq 1$,

$$S^{(n)}_t = \frac{S_{nt}}{\sqrt{n}}, \qquad A^{(n)}_t = \frac{A_{nt}}{n^{3/2}}.$$

Montrer que $(S^{(n)},A^{(n)})$ converge en loi dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})^2$ vers une limite dont on précisera la loi.

Exercice 3. Soit $(b_t)_{0\leq t\leq 1}$ un pont brownien. Montrer que presque sûrement ses maxima locaux sont distincts (c'est-à-dire que presque sûrement, pour tous $0\leq a<b<c<d\leq 1$, $\sup_{[a,b]} b \neq \sup_{[c,d]} b$).

On pourra admettre que les maxima locaux du mouvement brownien sont presque sûrement distincts.

Exercice 4. – *(Loi forte des grands nombres fonctionnelle)* –

Igor Kortchemski – igor.kortchemski@polytechnique.edu

(1) Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ des variables aléatoires i.i.d. réelles telles que $\mathbb{E}[|X_1|]<\infty$. On pose $S_0=0$, $S_n=X_1+\cdots+X_n$ et on definit S_t par interpolation linéaire pour $t\geq 0$. On note finalement

$$S^{(n)}_t=\frac{S_{nt}}{n}, \qquad t\geq 0, \quad n\geq 1.$$

Montrer que presque sûrement, la convergence suivante a lieu pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact

$$(S^{(n)}_t)_{t\geq 0} \quad \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad (\mathbb{E}[X_1]t)_{t\geq 0}.$$

(2) Soit $(N_t)_{t\geq 0}$ un processus de Poisson standard avec $N_0=0$. Montrer que presque sûrement, la convergence suivante a lieu pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact

$$\left(\frac{1}{n}N_{nt}\right)_{t\geq 0} \quad \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad (t)_{t\geq 0}.$$

3 Exercices additionnels

Exercice 5. – *(Détails de la preuve du théorème de Lévy)* – On considère une marche aléatoire symétrique simple $(S_n)_{n\geq 0}$ (c'est-à-dire $S_0=0$ et $S_n=X_1+\cdots+X_n$ avec $(X_i)_{i\geq 1}$ i.i.d. et $\mathbb{P}(X_1=\pm 1)=\frac{1}{2}$). On pose

$$I_n=\min_{0\leq k\leq n} S_k, \quad \theta_0=0 \quad \text{et} \quad \theta_n=\mathrm{Card}\{1\leq k\leq n : S_k-I_k\neq S_{k-1}-I_{k-1}\} \quad \text{pour } n\geq 1.$$

On définit aussi $\theta^{-1}_0=0$ et $\theta^{-1}_k=\inf\{n\geq 1:\theta_n=k\}$ pour $k\geq 1$. Finalement, on pose $X_n=S_{\theta^{-1}_n}-I_{\theta^{-1}_n}$ et on définit $(X_t)_{t\geq 0}$ par interpolation linéaire.

(1) Justifier que $(X_t)_{t\geq 0}$ et $(|S_t|)_{t\geq 0}$ ont même loi.

(2) Vérifier que $(S_n-I_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov récurrente nulle et en déduire que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{1}_{S_k-I_k=0} \quad \underset{n\to\infty}{\overset{p.s.}{\longrightarrow}} \quad 0.$$

(3) Montrer que $\max_{1\leq k\leq n}\left|\theta^{-1}_{k/n}-1\right|$ converge en probabilité vers 0 lorsque $n\to\infty$ et en déduire que

$$\left(\frac{X_{nt}}{\sqrt{n}}:t\geq 0\right) \quad \underset{n\to\infty}{\overset{\text{(loi)}}{\longrightarrow}} \quad (B_t-I_t:t\geq 0).$$

(4) Conclure que $(B_t-I_t:t\geq 0)$ et $(|B_t|:t\geq 0)$ ont même loi.

Exercice 6. Soit X une variable aléatoire réelle non constante, de fonction caractéristique notée ϕ. On rappelle que X est dite lattice s'il existe $b\in\mathbb{R}$ et $h>0$ tel que $\mathbb{P}(X\in b+h\mathbb{Z})=1$ et que son span est le plus grand tel h.

(1) Montrer que X est lattice si et seulement si il existe $t_0\in\mathbb{R}_*$ tel que $|\phi(t_0)|=1$.

(2) Montrer que X a pour span h si et seulement si $|\phi(2\pi/h)|=1$ et $|\phi(t)|<1$ pour $0<|t|<2\pi/h$.

Igor Kortchemski – igor.kortchemski@polytechnique.edu

On suppose maintenant que X est à valeurs entières. On rappelle que X est dite apériodique si son span vaut 1.

(3) On suppose que X est lattice de span h. A-t-on forcément $h \in \mathbb{Z}$?

(4) Est-il vrai que si le PGCD du support $\mathrm{supp}(X)$ de X vaut 1, alors X est apériodique ?

(5) On suppose qu'il existe $k \in \mathrm{supp}(X)$ tel que $\mathrm{PGCD}(\{i-k : i \in \mathrm{supp}(X)\}) = 1$. Montrer que X est apériodique.

Exercice 7. Donner un exemple d'une famille de variables aléatoires $(X_i^{(n)})_{i,n\geq 1}$ à valeurs entières telles que pour tout $n \geq 1$, les variables aléatoires $(X_i^{(n)})_{i\geq 1}$ sont i.i.d. apériodiques, et telles que $S_n^{(n)} = X_1^{(n)} + \cdots + X_n^{(n)}$ satisfait à un théorème central limite mais pas à un théorème local limite.