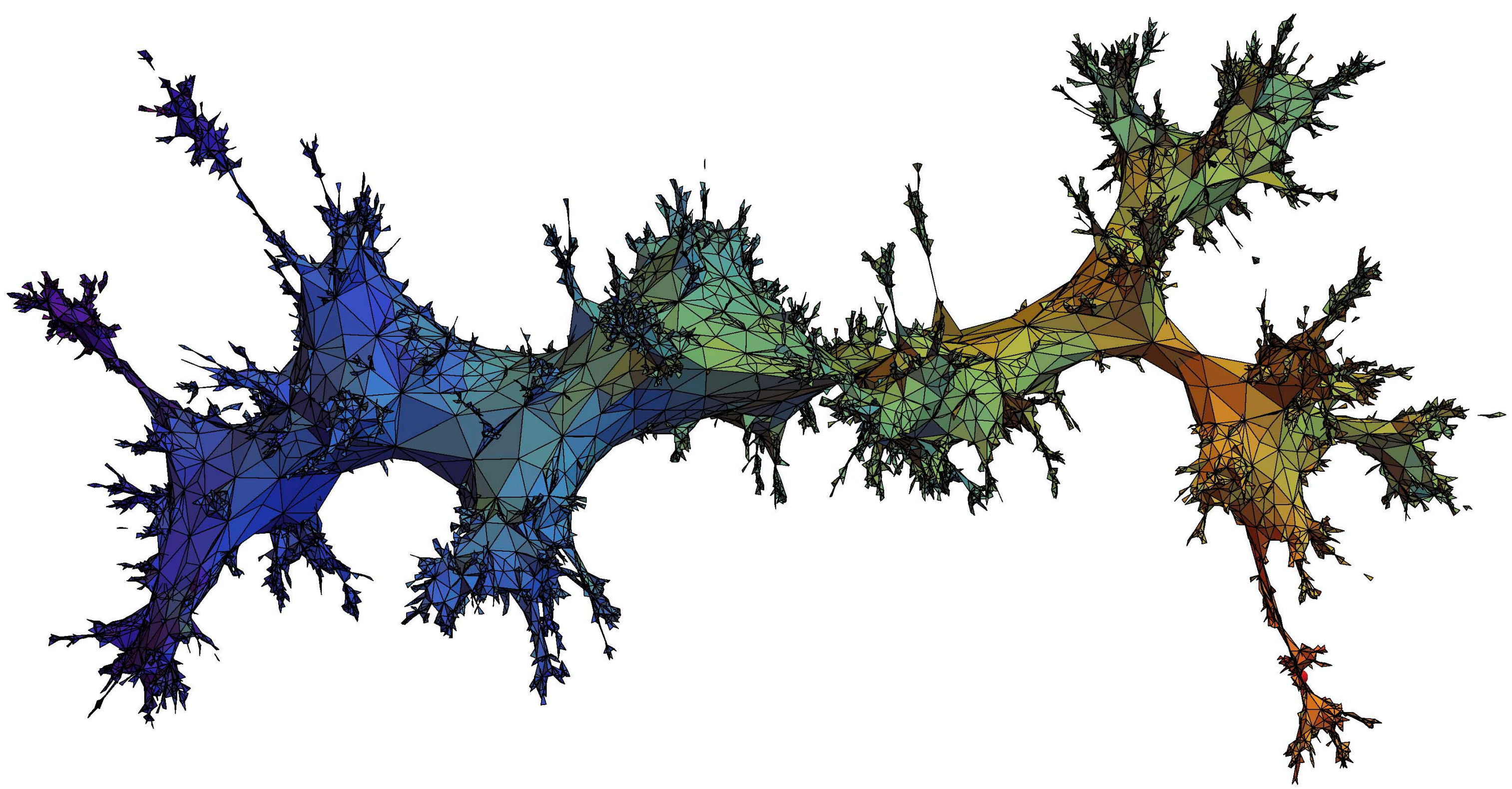
Théorèmes limites et applications



Igor Kortchemski

igor.kortchemski@polytechnique.edu

M2 – Mathématiques de l'aléatoire

I. Quelques motivations

I. Quelques motivations

II. Plan du cours et déroulement

Quelques motivations

De quoi s'agit-il ?

Ce cours s'intéresse aux convergences

$$X_n \quad \xrightarrow[n\to\infty]{} \quad X$$

pour des objets aléatoires.

De quoi s'agit-il ?

Ce cours s'intéresse aux convergences

$$X_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} X$$

pour des objets aléatoires.

$\leadsto$ *Dans quel espace vivent les objets ?*

De quoi s'agit-il ?

Ce cours s'intéresse aux convergences

$$X_n \quad \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad X$$

pour des objets aléatoires.

$\leadsto$ *Dans quel espace vivent les objets ?* Ici, un espace métrique (E, d).

De quoi s'agit-il ?

Ce cours s'intéresse aux convergences

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{} X$$

pour des objets aléatoires.

- *Dans quel espace vivent les objets ?* Ici, un espace métrique (E, d).
- *Quel est le sens de la convergence lorsque les objets sont aléatoires ?*

De quoi s'agit-il ?

Ce cours s'intéresse aux convergences

$$X_n \quad \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad X$$

pour des objets aléatoires.

- *Dans quel espace vivent les objets ?* Ici, un espace métrique (E, d).
- *Quel est le sens de la convergence lorsque les objets sont aléatoires ?* Ici, convergence en loi :

$$\mathbb{E}\left[F(X_n)\right] \quad \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad \mathbb{E}\left[F(X)\right]$$

pour toute fonction continue bornée $F : Z \to \mathbb{R}$.

Intérêt ?

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'objets « discrets » convergeant en loi vers un objet « continu » X :

$$X_n \quad \xrightarrow[n\to\infty]{} \quad X.$$

Intérêt ?

Soit $(X_n)_{n \geqslant 1}$ une suite d'objets « discrets » convergeant en loi vers un objet « continu » X :

$$X_n \quad \xrightarrow[n \to \infty]{} \quad X.$$

Plusieurs intérêts :

↝ *Du discret au continu :* si une certaine propriété $\mathcal{P}$ est vérifiée par tous les X_n et passe à la limite, X vérifie $\mathcal{P}$.

Intérêt ?

Soit $(X_n)_{n \geqslant 1}$ une suite d'objets « discrets » convergeant en loi vers un objet « continu » X :

$$X_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} X.$$

Plusieurs intérêts :

- *Du discret au continu :* si une certaine propriété $\mathcal{P}$ est vérifiée par tous les X_n et passe à la limite, X vérifie $\mathcal{P}$.

- *Du continu au discret :* si une certaine propriété $\mathcal{P}$ est vérifiée par X et passe à la limite, X_n vérifie « à peu près » $\mathcal{P}$ pour n grand.

Intérêt ?

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'objets « discrets » convergeant en loi vers un objet « continu » X :

$$X_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} X.$$

Plusieurs intérêts :

- *Du discret au continu :* si une certaine propriété $\mathcal{P}$ est vérifiée par tous les X_n et passe à la limite, X vérifie $\mathcal{P}$.
- *Du continu au discret :* si une certaine propriété $\mathcal{P}$ est vérifiée par X et passe à la limite, X_n vérifie « à peu près » $\mathcal{P}$ pour n grand.
- *Universalité :* si $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ est une autre suite d'objets qui converge vers X, alors X_n et Y_n ont à peu près les mêmes propriétés pour n grand.

Exemples

Espace fonctionnel

Soit $(X_i)_{n \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. telles que $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = \frac{1}{2}$.

Espace fonctionnel

Soit $(X_i)_{n \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. telles que $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = \frac{1}{2}$. On pose $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.

Espace fonctionnel

Soit $(X_i)_{n \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. telles que $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = \frac{1}{2}$. On pose $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. On sait que

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \quad \xrightarrow[n\to\infty]{\text{loi}} \quad \text{Gaussienne.}$$

Espace fonctionnel

Soit $(X_i)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. telles que $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = \frac{1}{2}$. On pose $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. On sait que

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \quad \xrightarrow[n\to\infty]{\text{loi}} \quad \text{Gaussienne.}$$

Mais que dire de la trajectoire $\left(\frac{S_{nt}}{\sigma\sqrt{n}}, t \geqslant 0\right)$, où S_t est défini par interpolation linéaire ?

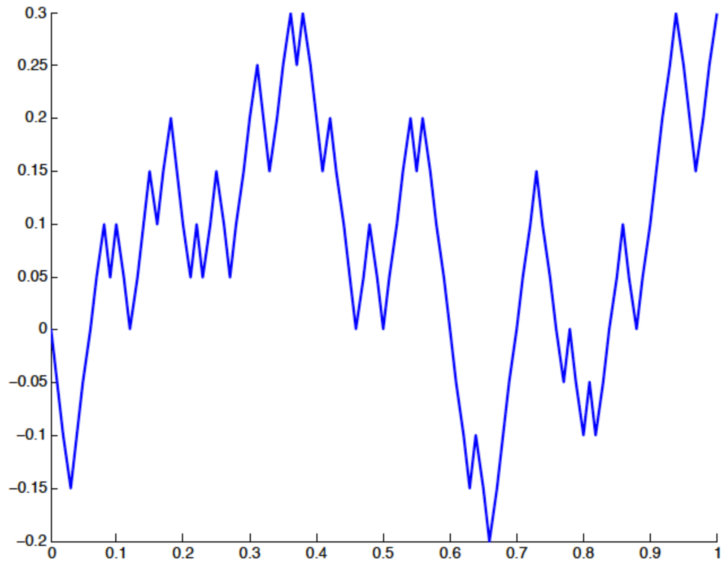
Espace fonctionnel

Soit $(X_i)_{n \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. telles que $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = \frac{1}{2}$. On pose $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. On sait que

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \to \infty]{\text{loi}} \text{Gaussienne.}$$

Mais que dire de la trajectoire $\left(\frac{S_{nt}}{\sigma\sqrt{n}}, t \geqslant 0\right)$, où S_t est défini par interpolation linéaire ?

$$\left(\frac{S_{nt}}{\sigma\sqrt{n}}, 0 \leqslant t \leqslant 1\right)$$
pour $n = 100$:



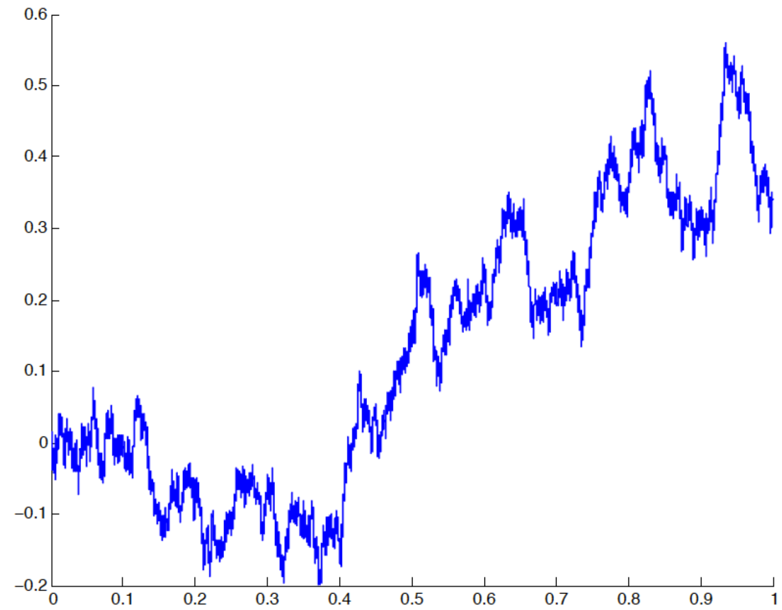
Espace fonctionnel

Soit $(X_i)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. telles que $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = \frac{1}{2}$. On pose $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. On sait que

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{loi}} \text{Gaussienne.}$$

Mais que dire de la trajectoire $\left(\frac{S_{nt}}{\sigma\sqrt{n}}, t \geqslant 0\right)$, où S_t est défini par interpolation linéaire ?

$\left(\frac{S_{nt}}{\sigma\sqrt{n}}, 0 \leqslant t \leqslant 1\right)$ pour $n = 100000$:



Espace fonctionnel

Soit $(X_i)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. telles que $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = \frac{1}{2}$. On pose $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Alors (théorème de Donsker)

$$\left(\frac{S_{nt}}{\sigma\sqrt{n}}, t \geqslant 0\right) \quad \xrightarrow[n\to\infty]{\text{loi}}$$

Espace fonctionnel

Soit $(X_i)_{n \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. telles que $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = \frac{1}{2}$. On pose $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Alors (théorème de Donsker)

$$\left(\frac{S_{nt}}{\sigma \sqrt{n}}, t \geqslant 0 \right) \quad \xrightarrow[n \to \infty]{\text{loi}} \quad (W_t, t \geqslant 0),$$

Espace fonctionnel

Soit $(X_i)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. telles que $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = \frac{1}{2}$. On pose $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Alors (théorème de Donsker)

$$\left(\frac{S_{nt}}{\sigma\sqrt{n}}, t \geqslant 0\right) \quad \xrightarrow[n\to\infty]{\text{loi}} \quad (W_t, t \geqslant 0),$$

dans l'espace des fonctions continues $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact,

Espace fonctionnel

Soit $(X_i)_{n \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. telles que $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = \frac{1}{2}$. On pose $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Alors (théorème de Donsker)

$$\left(\frac{S_{nt}}{\sigma\sqrt{n}}, t \geqslant 0\right) \quad \xrightarrow[n\to\infty]{\text{loi}} \quad (W_t, t \geqslant 0),$$

dans l'espace des fonctions continues $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact, où $(W_t, t \geqslant 0)$ est une fonction continue aléatoire appelée mouvement brownien (indépendante de σ).

Espace fonctionnel

Soit $(X_i)_{n \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. telles que $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = \frac{1}{2}$. On pose $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Alors (théorème de Donsker)

$$\left(\frac{S_{nt}}{\sigma \sqrt{n}}, t \geqslant 0 \right) \quad \xrightarrow[n \to \infty]{\text{loi}} \quad (W_t, t \geqslant 0),$$

dans l'espace des fonctions continues $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact, où $(W_t, t \geqslant 0)$ est une fonction continue aléatoire appelée mouvement brownien (indépendante de σ).

$\leadsto$ Conséquence : en prenant pour fonctionnelle ''$\sup_{[0,1]}$' 'pour tout $a > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\frac{\max_{0 \leqslant i \leqslant n} S_i}{\sigma \sqrt{n}} > a \right) \quad \xrightarrow[n \to \infty]{} \quad \mathbb{P}\left(\sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} W_t > a \right)$$

Espace fonctionnel

Soit $(X_i)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. telles que $\mathbb{P}(X_1=1)=\mathbb{P}(X_1=-1)=\frac{1}{2}$. On pose $S_n=X_1+X_2+\cdots+X_n$. Alors (théorème de Donsker)

$$\left(\frac{S_{nt}}{\sigma\sqrt{n}}, t\geqslant 0\right) \quad \xrightarrow[n\to\infty]{\text{loi}} \quad (W_t, t\geqslant 0),$$

dans l'espace des fonctions continues $\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact, où $(W_t, t\geqslant 0)$ est une fonction continue aléatoire appelée mouvement brownien (indépendante de σ).

$\rightsquigarrow$ Conséquence : en prenant pour fonctionnelle ''$\sup_{[0,1]}$'' pour tout $a>0$,

$$\mathbb{P}\left(\frac{\max_{0\leqslant i\leqslant n} S_i}{\sigma\sqrt{n}}>a\right) \quad \xrightarrow[n\to\infty]{} \quad \mathbb{P}\left(\sup_{0\leqslant t\leqslant 1} W_t>a\right)=2\int_a^\infty dx\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

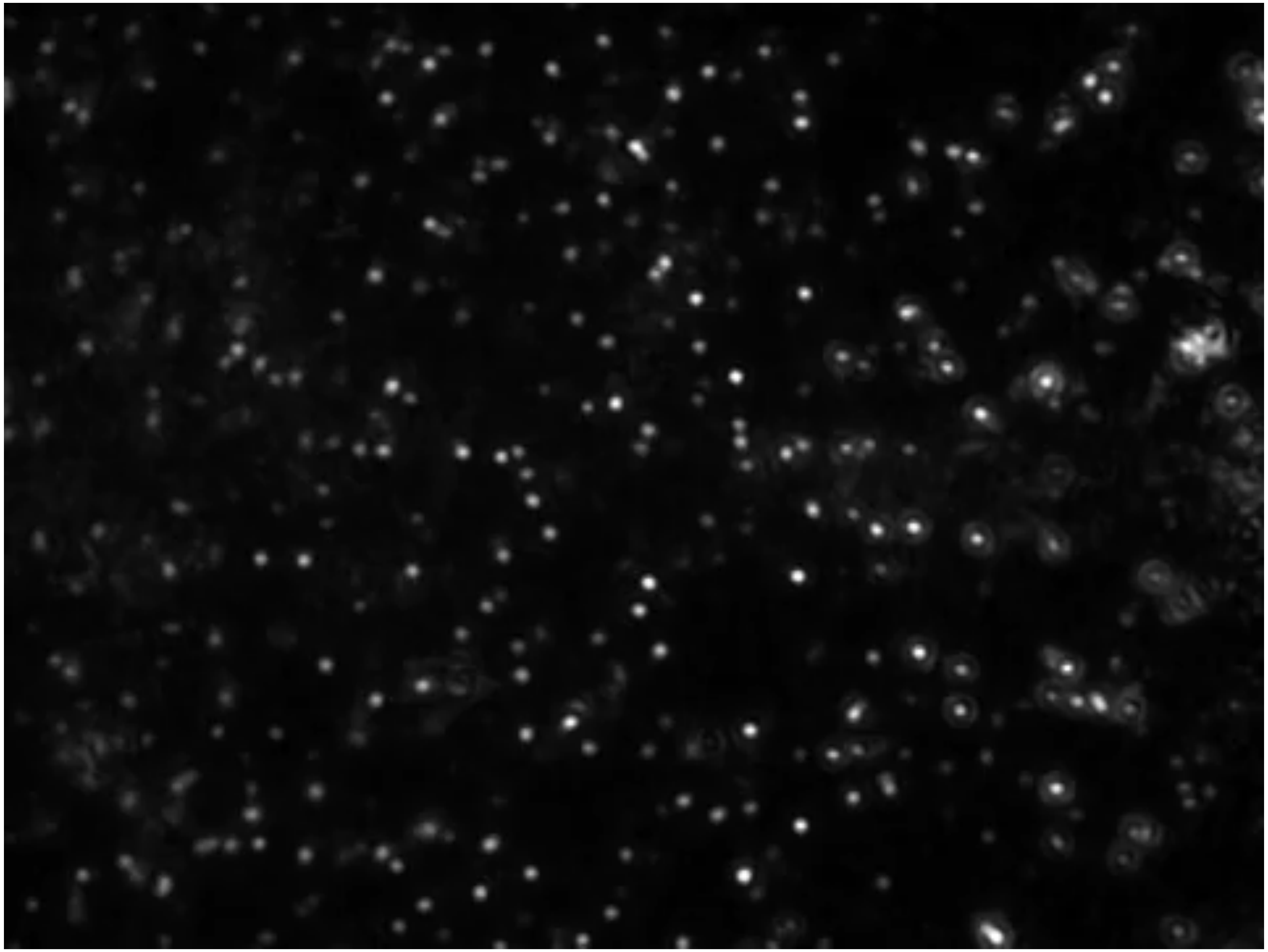
Le mouvement brownien

Le mouvement brownien

– 1827 : Brown observe le déplacement désordonné du pollen dans de l'eau ;

Le mouvement brownien

– 1827 : Brown observe le déplacement désordonné du pollen dans de l'eau ;



Le mouvement brownien

– 1827 : Brown observe le déplacement désordonné du pollen dans de l'eau ;

– 1905 : Einstein propose une explication de cette observation en utilisation les notions d'atomes et molécules ;

Le mouvement brownien

- 1827 : Brown observe le déplacement désordonné du pollen dans de l'eau ;
- 1905 : Einstein propose une explication de cette observation en utilisation les notions d'atomes et molécules ;
- 1908 : Perrin confirme expérimentalement l'existence d'atomes et molécules (prix Nobel 1926) ;

Le mouvement brownien

- 1827 : Brown observe le déplacement désordonné du pollen dans de l'eau ;
- 1905 : Einstein propose une explication de cette observation en utilisation les notions d'atomes et molécules ;
- 1908 : Perrin confirme expérimentalement l'existence d'atomes et molécules (prix Nobel 1926) ;

« C'est un cas où il est vraiment naturel de penser à ces fonctions continues sans dérivées que les mathématiciens ont imaginées, et que l'on regardait à tort comme de simples curiosités mathématiques, puisque l'expérience peut les suggérer. »

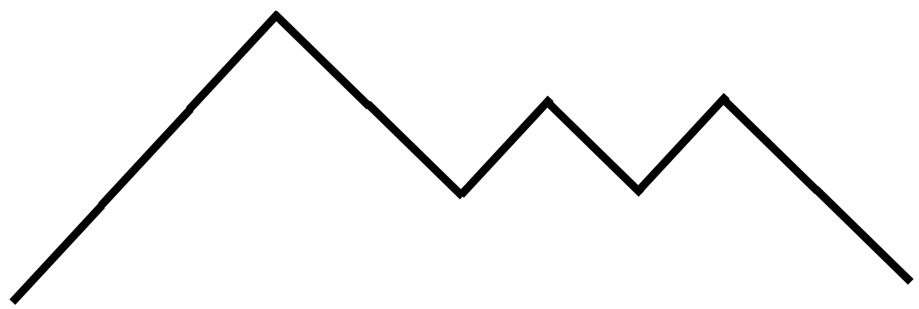
– Jean Perrin

Le mouvement brownien

- 1827 : Brown observe le déplacement désordonné du pollen dans de l'eau ;
- 1905 : Einstein propose une explication de cette observation en utilisation les notions d'atomes et molécules ;
- 1908 : Perrin confirme expérimentalement l'existence d'atomes et molécules (prix Nobel 1926) ;
- 1923 : Wiener donne une construction mathématique du mouvement brownien.

Espace fonctionnel

Application en arbres aléatoires :



Hauteur de l'arbre $\leftrightarrow$ supremum de la fonction de contour

Espace des suites

Une pierre de masse 1 se désagrège au fur et à mesure du temps (processus de fragmentation).

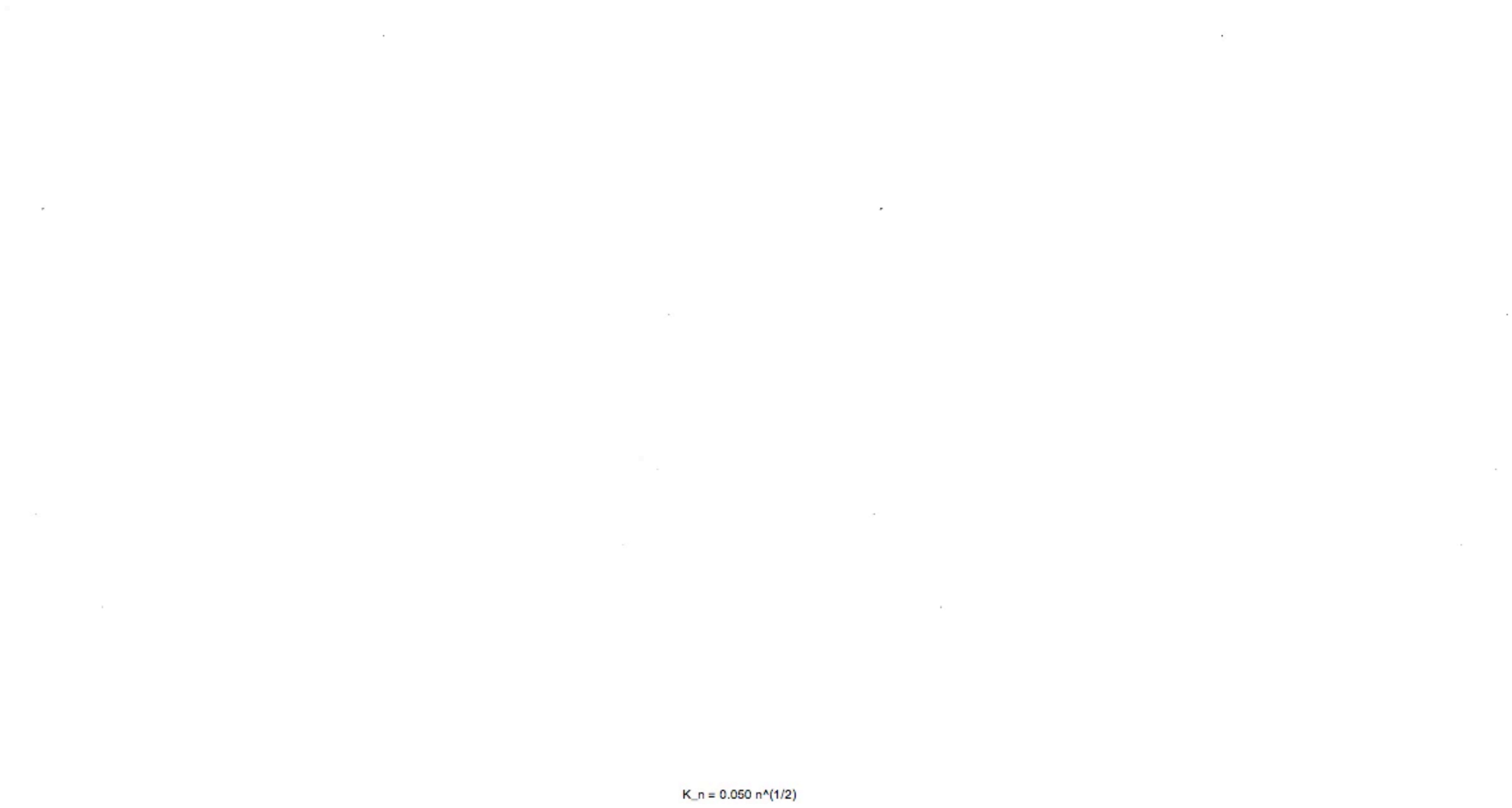
Espace des suites

Une pierre de masse 1 se désagrège au fur et à mesure du temps (processus de fragmentation). L'espace E est celui des fonctions à valeurs dans

$$\{(x_i)_{i\geqslant 1} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}} : x_1 \geqslant x_2 \geqslant x_3 \geqslant \cdots, x_1 + x_2 + \cdots \leqslant 1\}$$

Espace des sous-ensembles compacts du disque

On trace récursivement et aléatoirement des cordes dans le disque sans qu'elles ne se croisent.



Espace des sous-ensembles compacts du disque

On trace récursivement et aléatoirement des cordes dans le disque sans qu'elles ne se croisent.

L'espace E est celui des fonctions à valeurs dans l'ensemble des sous-ensembles compacts du disque unité fermé.

Espace des mesures (superprocessus)

Des particules se déplacent dans $\mathbb{R}^n$, grossissent et se divisent.

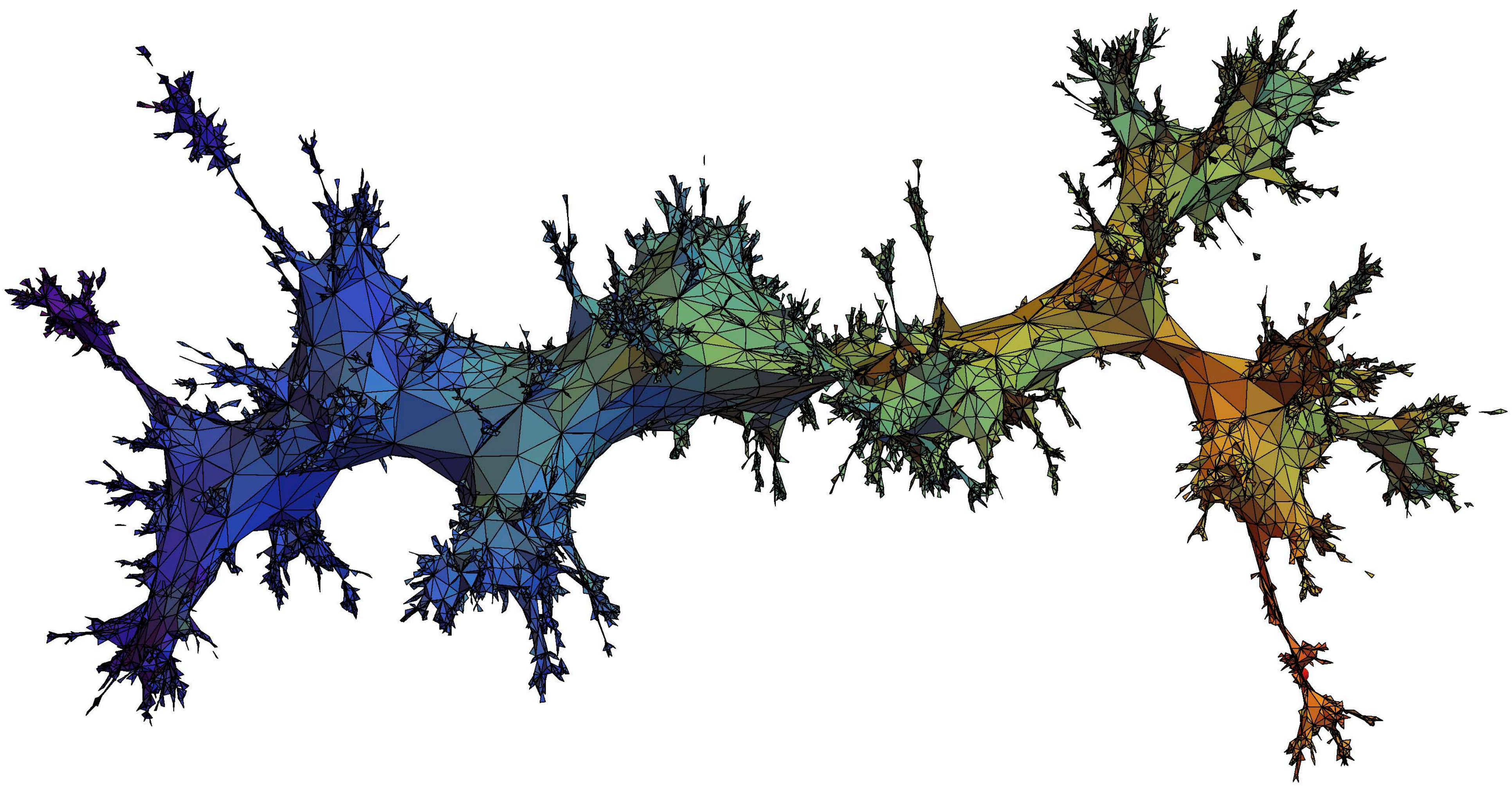
Espace des mesures (superprocessus)

Des particules se déplacent dans $\mathbb{R}^n$, grossissent et se divisent.

L'espace E est celui des fonctions à valeurs dans l'espace des mesures finies sur $\mathbb{R}^n$ (on représente une particule de masse m en x par $m\delta_x$).

Espace d'espaces métriques

On voit des graphes aléatoires comme des espaces métriques compacts aléatoires en équipant l'ensemble de leurs sommets de la distance de graphe.



L'espace $\mathbb{E}$ est l'ensemble des espaces métriques compacts à isométrie près.

Plan du cours et déroulement

Plan du cours (10 séances)

- Première partie ($\simeq$ 3 cours) : convergence étroite de mesures de probabilités dans des espaces métriques polonais (complets et ayant une suite dénombrable dense).

Plan du cours (10 séances)

- Première partie ($\simeq$ 3 cours) : convergence étroite de mesures de probabilités dans des espaces métriques polonais (complets et ayant une suite dénombrable dense).

  Philosophie générale : on utilisera d'abord un langage « théorie de la mesure » puis on interprétera en langage « probabiliste ».

Plan du cours (10 séances)

- Première partie ($\simeq$ 3 cours) : convergence étroite de mesures de probabilités dans des espaces métriques polonais (complets et ayant une suite dénombrable dense).

  Philosophie générale : on utilisera d'abord un langage « théorie de la mesure » puis on interprétera en langage « probabiliste ».

- Seconde partie ($\simeq$ 5 cours) : convergence étroite dans des espaces fonctionnels.

Plan du cours (10 séances)

- Première partie ($\simeq$ 3 cours) : convergence étroite de mesures de probabilités dans des espaces métriques polonais (complets et ayant une suite dénombrable dense).

  Philosophie générale : on utilisera d'abord un langage « théorie de la mesure » puis on interprétera en langage « probabiliste ».

- Seconde partie ($\simeq$ 5 cours) : convergence étroite dans des espaces fonctionnels.

- Troisième partie ($\simeq$ 2 cours) : mesures aléatoires de Poisson

Plan du cours (10 séances)

- Première partie ($\simeq$ 3 cours) : convergence étroite de mesures de probabilités dans des espaces métriques polonais (complets et ayant une suite dénombrable dense).

  Philosophie générale : on utilisera d'abord un langage « théorie de la mesure » puis on interprétera en langage « probabiliste ».

- Seconde partie ($\simeq$ 5 cours) : convergence étroite dans des espaces fonctionnels.

- Troisième partie ($\simeq$ 2 cours) : mesures aléatoires de Poisson

Certaines séances comprendront une partie TD.

Plan du cours (10 séances)

- Première partie ($\simeq$ 3 cours) : convergence étroite de mesures de probabilités dans des espaces métriques polonais (complets et ayant une suite dénombrable dense).

  Philosophie générale : on utilisera d'abord un langage « théorie de la mesure » puis on interprétera en langage « probabiliste ».

- Seconde partie ($\simeq$ 5 cours) : convergence étroite dans des espaces fonctionnels.

- Troisième partie ($\simeq$ 2 cours) : mesures aléatoires de Poisson

Certaines séances comprendront une partie TD.

Syllabus plus précis sur la page web du cours :

`http://www.cmap.polytechnique.fr/~kortchemski/M2/`

Déroulement

- premier cours le 19 septembre.

Déroulement

- premier cours le 19 septembre.
- Vacances de la Toussaint : pas de cours les 24/10 et 31/10

Déroulement

- premier cours le 19 septembre.
- Vacances de la Toussaint : pas de cours les 24/10 et 31/10
- Dernier cours le 5 décembre.

Déroulement

- premier cours le 19 septembre.
- Vacances de la Toussaint : pas de cours les 24/10 et 31/10
- Dernier cours le 5 décembre.

Évaluation :

Déroulement

- premier cours le 19 septembre.
- Vacances de la Toussaint : pas de cours les 24/10 et 31/10
- Dernier cours le 5 décembre.

Évaluation :

$\leadsto$ un DM (à faire pendant les vacances de la Toussaint) et un examen final.

Des notes de cours seront disponibles ainsi que les feuilles d'exercices, avec quelques corrigés.

Des notes de cours seront disponibles ainsi que les feuilles d'exercices, avec quelques corrigés.

Pour aller plus loin :

- P. Billingsley, *Convergence of Probability Measures*, 2nd edition, Wiley, 1999,
- O. Kallenberg, *Foundations of Modern Probability*, 2nd edition, Probability and Its Applications, Springer-Verlag, 2001.
- J. F. C. Kingman, *Poisson Processes*, Clarendon Press et G. Last, M. Penrose, *Lectures on the Poisson Process*, Cambridge University Press