

Représentations géométriques

E. Le Pennec
École polytechnique

`Erwan.Le-Pennec@polytechnique.edu`

Novembre 2015

Plan

Plan

- Images et traitement du signal.

Plan

- Images et traitement du signal.
- Représentation creuse et applications.

Plan

- 🔴 Images et traitement du signal.
- 🔴 Représentation creuse et applications.
- 🔴 Représentations classiques :
 - 🟢 Fourier : JPEG
 - 🟢 Ondelettes : JPEG 2000

Plan

- Images et traitement du signal.
- Représentation creuse et applications.
- Représentations classiques :
 - Fourier : JPEG
 - Ondelettes : JPEG 2000
- Représentations géométriques :
 - Triangulation adaptatives
 - Curvelets
 - Edgelets
 - Bandelettes

Plan

- Images et traitement du signal.
- Représentation creuse et applications.
- Représentations classiques :
 - Fourier : JPEG
 - Ondelettes : JPEG 2000
- Représentations géométriques :
 - Triangulation adaptatives
 - Curvelets
 - Edgelets
 - Bandelettes
- Approches dictionnaires et régularisation

Image et numérisation

Image et numérisation



● Image numérique : $\{c_{k_1, k_2}\}$.

Image et numérisation



- Image numérique : $\{c_{k_1, k_2}\}$.
- Image continue : $f \in L^2$

Image et numérisation



- Image numérique : $\{c_{k_1, k_2}\}$.
- Image continue : $f \in L^2$
- Lien via la numérisation : c_{k_1, k_2} est une moyenne locale de f .

$$c_{k_1, k_2} = \int f(x_1, x_2) \theta(k_1 \epsilon - x_1, k_2 \epsilon - x_2) dx_1 dx_2$$

Image et numérisation



- Image numérique : $\{c_{k_1, k_2}\}$.
- Image continue : $f \in L^2$
- Lien via la numérisation : c_{k_1, k_2} est une moyenne locale de f .

$$c_{k_1, k_2} = \int f(x_1, x_2) \theta(k_1 \epsilon - x_1, k_2 \epsilon - x_2) dx_1 dx_2$$

- Régularité : régularité de la fonction continue.

Traitement de l'image

Traitement de l'image

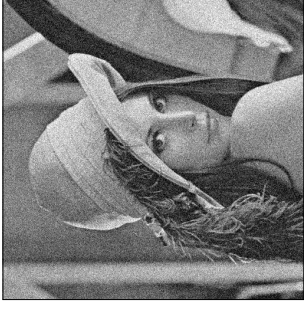
- Traitements des images numériques.

Traitement de l'image



- Traitements des images numériques.
- Compression (stockage, transmission) : décrire une image avec la meilleur qualité possible pour une taille donnée.

Traitement de l'image

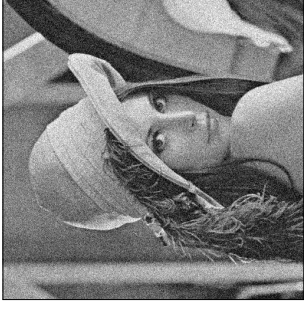


- Traitements des images numériques.

- Compression (stockage, transmission) : décrire une image avec la meilleur qualité possible pour une taille donnée.

- Restauration (débruitage, déconvolution) : retrouver un signal déformé lors de l'acquisition.

Traitement de l'image



- Traitements des images numériques.
- Compression (stockage, transmission) : décrire une image avec la meilleur qualité possible pour une taille donnée.
- Restauration (débruitage, déconvolution) : retrouver un signal déformé lors de l'acquisition.
- Amélioration de la qualité, analyse...

Représentation

Représentation

- Description efficace des images.

Représentation

- Description efficace des images.
- Coordonnées dans une base.

Représentation

- Description efficace des images.
- Coordonnées dans une base.
- Choix de la base.

Représentation

- Description efficace des images.
- Coordonnées dans une base.
- Choix de la base.
- Représentation creuse : peu de paramètres pour une bonne approximation.

Représentation

- Description efficace des images.
- Coordonnées dans une base.
- Choix de la base.
- Représentation creuse : peu de paramètres pour une bonne approximation.
- Important pour le traitement du signal : compression, débruitage,...

Représentation creuse dans une base

Représentation creuse dans une base



Décomposition dans une base orthonormée $\mathbf{B} = \{g_m\}_{m \in \mathbb{N}}$

$$f = \sum_{m \in \mathbb{N}} \langle f, g_m \rangle g_m .$$

Représentation creuse dans une base

- Décomposition dans une base orthonormée $\mathbf{B} = \{g_m\}_{m \in \mathbb{N}}$

$$f = \sum_{m \in \mathbb{N}} \langle f, g_m \rangle g_m .$$

- Approximation avec M vecteurs choisis adaptativement

$$f_M = \sum_{m \in I_M} \langle f, g_m \rangle g_m .$$

Représentation creuse dans une base

- Décomposition dans une base orthonormée $\mathbf{B} = \{g_m\}_{m \in \mathbb{N}}$

$$f = \sum_{m \in \mathbb{N}} \langle f, g_m \rangle g_m .$$

- Approximation avec M vecteurs choisis adaptativement

$$f_M = \sum_{m \in I_M} \langle f, g_m \rangle g_m .$$

- Pour minimiser $\|f - f_M\|^2 = \sum_{m \notin I_M} |\langle f, g_m \rangle|^2 ,$

Représentation creuse dans une base

- Décomposition dans une base orthonormée $\mathbf{B} = \{g_m\}_{m \in \mathbb{N}}$

$$f = \sum_{m \in \mathbb{N}} \langle f, g_m \rangle g_m .$$

- Approximation avec M vecteurs choisis adaptativement

$$f_M = \sum_{m \in I_M} \langle f, g_m \rangle g_m .$$

- Pour minimiser $\|f - f_M\|^2 = \sum_{m \notin I_M} |\langle f, g_m \rangle|^2$,

sélection des M plus grands produits scalaires :

$$I_M = \{m, |\langle f, g_m \rangle| > T_M\} : \text{seuillage.}$$

Représentation creuse dans une base

- Décomposition dans une base orthonormée $\mathbf{B} = \{g_m\}_{m \in \mathbb{N}}$

$$f = \sum_{m \in \mathbb{N}} \langle f, g_m \rangle g_m .$$

- Approximation avec M vecteurs choisis adaptativement

$$f_M = \sum_{m \in I_M} \langle f, g_m \rangle g_m .$$

- Pour minimiser $\|f - f_M\|^2 = \sum_{m \notin I_M} |\langle f, g_m \rangle|^2$,

sélection des M plus grands produits scalaires :

$$I_M = \{m, |\langle f, g_m \rangle| > T_M\} : \text{seuillage.}$$

- **Problème** : Comment choisir la base $\mathbf{B}$ de sorte que

$$\|f - f_M\|^2 \leqslant CM^{-\alpha} \quad \text{avec un grand } \alpha ?$$

Fourier

Fourier

- Base la plus utilisée.

Fourier

- Base la plus utilisée.
- $\{\cos(2k\pi), \sin(2k\pi)\}_{k \in \mathbb{Z}}$

Fourier

- Base la plus utilisée.
- $\{\cos(2k\pi), \sin(2k\pi)\}_{k \in \mathbb{Z}}$
- Variantes : DCT, DST, ...

Fourier

- Base la plus utilisée.
- $\{\cos(2k\pi), \sin(2k\pi)\}_{k \in \mathbb{Z}}$
- Variantes : DCT, DST, ...
- Très bonne localisation en fréquence mais délocalisation spatiale.

Fourier

- Base la plus utilisée.
- $\{\cos(2k\pi), \sin(2k\pi)\}_{k \in \mathbb{Z}}$
- Variantes : DCT, DST, ...
- Très bonne localisation en fréquence mais délocalisation spatiale.
- Base 2D par produit tensoriel.

Fourier

- Base la plus utilisée.
- $\{\cos(2k\pi), \sin(2k\pi)\}_{k \in \mathbb{Z}}$
- Variantes : DCT, DST, ...
- Très bonne localisation en fréquence mais délocalisation spatiale.
- Base 2D par produit tensoriel.
- $f \in \mathbf{C}^\alpha : \|f - f_M\|^2 \leq C M^{-\alpha}$.

Fourier

- Base la plus utilisée.
- $\{\cos(2k\pi), \sin(2k\pi)\}_{k \in \mathbb{Z}}$
- Variantes : DCT, DST, ...
- Très bonne localisation en fréquence mais délocalisation spatiale.
- Base 2D par produit tensoriel.
- $f \mathbf{C}^\alpha : \|f - f_M\|^2 \leqslant C M^{-\alpha}$.
- $f \mathbf{C}^\alpha$ en dehors de contours $\mathbf{C}^\alpha : \|f - f_M\|^2 \leqslant C M^{-1/2}$.

FFT

FFT

- Algorithme rapide en $O(N \log N)$ proposé par Cooley et Tukey (1965).

FFT

- Algorithme rapide en $O(N \log N)$ proposé par Cooley et Tukey (1965).
- Stratégie : diviser pour régner.

FFT

- Algorithme rapide en $O(N \log N)$ proposé par Cooley et Tukey (1965).
- Stratégie : diviser pour régner.
- Division selon la parité

$$\begin{aligned}\hat{f}[n] &= \sum_{k=0}^{2N-1} f[k] e^{-\frac{2i\pi}{2N}nk} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} f[2k] e^{-\frac{2i\pi}{2N}n(2k)} + \sum_{k=0}^{N-1} f[2k+1] e^{-\frac{2i\pi}{2N}n(2k+1)} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} f[2k] e^{-\frac{2i\pi}{N}nk} + e^{-\frac{2i\pi}{2N}n} \sum_{k=0}^{N-1} f[2k+1] e^{-\frac{2i\pi}{N}nk}\end{aligned}$$

FFT

- Algorithme rapide en $O(N \log N)$ proposé par Cooley et Tukey (1965).
- Stratégie : diviser pour régner.
- Division selon la parité

$$\begin{aligned}\hat{f}[n] &= \sum_{k=0}^{2N-1} f[k] e^{-\frac{2i\pi}{2N}nk} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} f[2k] e^{-\frac{2i\pi}{2N}n(2k)} + \sum_{k=0}^{N-1} f[2k+1] e^{-\frac{2i\pi}{2N}n(2k+1)} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} f[2k] e^{-\frac{2i\pi}{N}nk} + e^{-\frac{2i\pi}{2N}n} \sum_{k=0}^{N-1} f[2k+1] e^{-\frac{2i\pi}{N}nk}\end{aligned}$$

- Passage d'une FFT sur $2N$ points à 2 FFT sur N points plus $C2N$ opérations...

FFT

- Algorithme rapide en $O(N \log N)$ proposé par Cooley et Tukey (1965).
- Stratégie : diviser pour régner.
- Division selon la parité

$$\begin{aligned}\hat{f}[n] &= \sum_{k=0}^{2N-1} f[k] e^{-\frac{2i\pi}{2N}nk} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} f[2k] e^{-\frac{2i\pi}{2N}n(2k)} + \sum_{k=0}^{N-1} f[2k+1] e^{-\frac{2i\pi}{2N}n(2k+1)} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} f[2k] e^{-\frac{2i\pi}{N}nk} + e^{-\frac{2i\pi}{2N}n} \sum_{k=0}^{N-1} f[2k+1] e^{-\frac{2i\pi}{N}nk}\end{aligned}$$

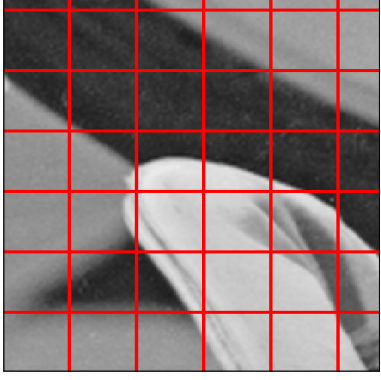
- Passage d'une FFT sur $2N$ points à 2 FFT sur N points plus $C2N$ opérations...
- Récurrence $C(2N) = 2C(N) + 2N \implies C(N) \leqslant CN \log N$.

JPEG

JPEG

- Comité JPEG 1990.

JPEG

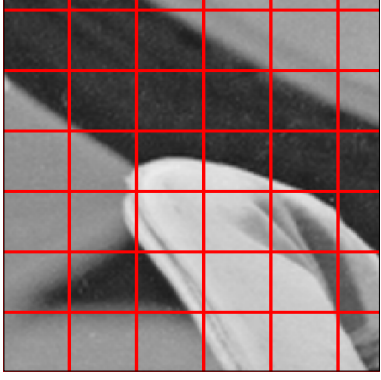


- Comité JPEG 1990.

- Utilisation d'une base de DCT-4 par bloc de taille 8×8 :

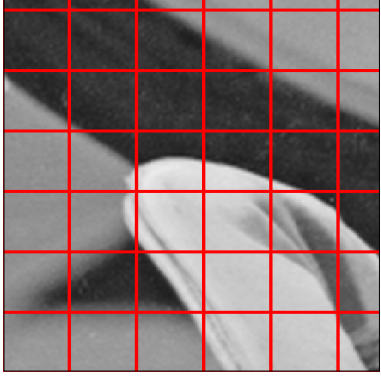
$$\{\cos(k_1\pi(x_1 + 1/2)) \times \cos(k_2\pi(x_2 + 1/2))\}_{(k_1, k_2) \in [0,7] \cdot}$$

JPEG



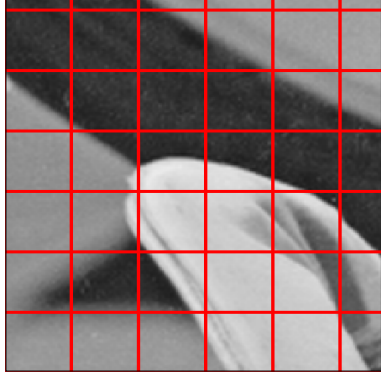
- Comité JPEG 1990.
- Utilisation d'une base de DCT-4 par bloc de taille 8×8 :
$$\{\cos(k_1\pi(x_1 + 1/2)) \times \cos(k_2\pi(x_2 + 1/2))\}_{(k_1, k_2) \in [0, 7]}$$
- Décomposition dans la base + quantification + codage d'Huffman.

JPEG



- Comité JPEG 1990.
- Utilisation d'une base de DCT-4 par bloc de taille 8×8 :
$$\{\cos(k_1\pi(x_1 + 1/2)) \times \cos(k_2\pi(x_2 + 1/2))\}_{(k_1, k_2) \in [0, 7]}$$
- Décomposition dans la base + quantification + codage d'Huffman.
- + Masquage perceptuel.

JPEG



- Comité JPEG 1990.
- Utilisation d'une base de DCT-4 par bloc de taille 8×8 :
$$\{\cos(k_1\pi(x_1 + 1/2)) \times \cos(k_2\pi(x_2 + 1/2))\}_{(k_1, k_2) \in [0,7]}$$
- Décomposition dans la base + quantification + codage d'Huffman.
- + Masquage perceptuel.
- Énorme succès !!!

Compression par transformée

Compression par transformée

- Compression par transformée = transformation + quantification + codage entropique.

Compression par transformée

- Compression par transformée = transformation + quantification + codage entropique.

- $$f_R = \sum Q(\langle f, g_m \rangle) g_m = \sum_{Q(\langle f, g_m \rangle) \neq 0} Q(\langle f, g_m \rangle) g_m \quad .$$

Compression par transformée

- Compression par transformée = transformation + quantification + codage entropique.

- $$f_R = \sum Q(\langle f, g_m \rangle) g_m = \sum_{Q(\langle f, g_m \rangle) \neq 0} Q(\langle f, g_m \rangle) g_m \quad .$$

- $$\begin{aligned} \|f - f_R\|^2 &= \sum_{Q(\langle f, g_m \rangle) \neq 0} (\langle f, g_m \rangle - Q(\langle f, g_m \rangle))^2 \\ &\quad + \sum_{Q(\langle f, g_m \rangle) = 0} \langle f, g_m \rangle^2 \quad . \end{aligned}$$

Compression par transformée

- Compression par transformée = transformation + quantification + codage entropique.

$$f_R = \sum Q(\langle f, g_m \rangle) g_m = \sum_{Q(\langle f, g_m \rangle) \neq 0} Q(\langle f, g_m \rangle) g_m \quad .$$

$$\begin{aligned} \|f - f_R\|^2 = & \sum_{Q(\langle f, g_m \rangle) \neq 0} (\langle f, g_m \rangle - Q(\langle f, g_m \rangle))^2 \\ & + \sum_{Q(\langle f, g_m \rangle) = 0} \langle f, g_m \rangle^2 \quad . \end{aligned}$$

- Erreur de quantification + Erreur d'approximation.

Compression par transformée

- Compression par transformée = transformation + quantification + codage entropique.

$$f_R = \sum Q(\langle f, g_m \rangle) g_m = \sum_{Q(\langle f, g_m \rangle) \neq 0} Q(\langle f, g_m \rangle) g_m .$$

$$\begin{aligned} \|f - f_R\|^2 = & \sum_{Q(\langle f, g_m \rangle) \neq 0} (\langle f, g_m \rangle - Q(\langle f, g_m \rangle))^2 \\ & + \sum_{Q(\langle f, g_m \rangle) = 0} \langle f, g_m \rangle^2 . \end{aligned}$$

- Erreur de quantification + Erreur d'approximation.
- Quantification uniforme de pas Δ avec boîte 0 de taille double :

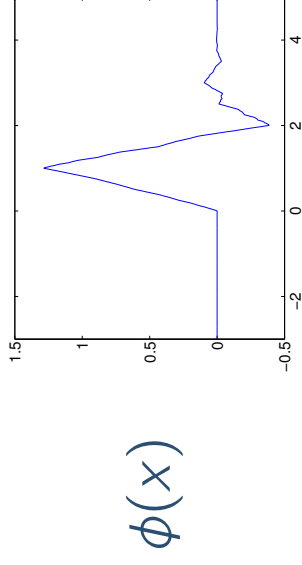
- $\|f - f_R\|^2 = M\Delta^2/12 + \|f - f_M\|^2$
- $R = M(C_1 + C_2 \log(M/N))$.

Base d'ondelettes 1D de $L^2[0, 1]$

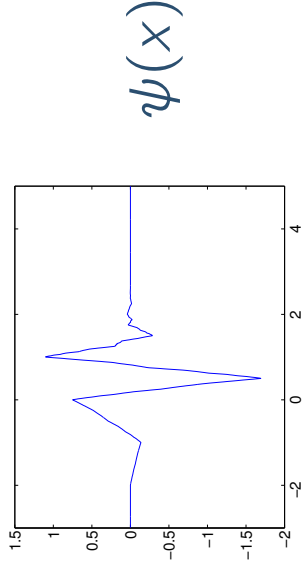
Base d'ondelettes 1D de $L^2[0, 1]$



Construite à partir d'une fonction d'échelle $\phi(x)$ et d'une ondelette mère $\psi(x)$



$\phi(x)$



$\psi(x)$

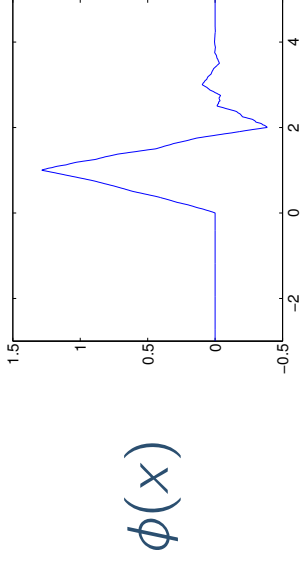
qui sont dilatées par 2^j et traduites de $2^j n$

$$\phi_{j,n}(x) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \phi\left(\frac{x - 2^j n}{2^j}\right) \quad , \quad \psi_{j,n}(x) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \psi\left(\frac{x - 2^j n}{2^j}\right)$$

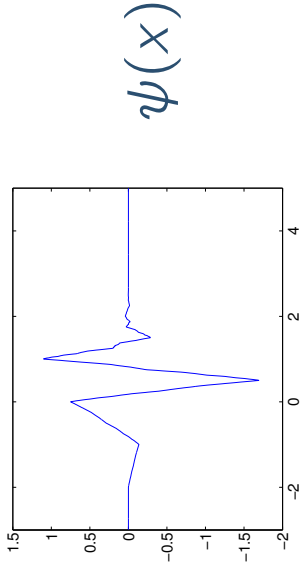
Base d'ondelettes 1D de $L^2[0, 1]$



Construite à partir d'une fonction d'échelle $\phi(x)$ et d'une ondelette mère $\psi(x)$



$\phi(x)$



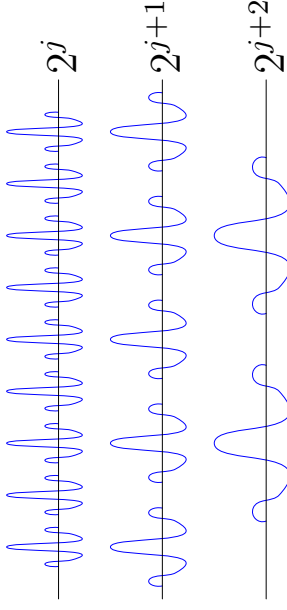
$\psi(x)$

qui sont dilatées par 2^j et traduites de $2^j n$

$$\phi_{j,n}(x) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \phi\left(\frac{x - 2^j n}{2^j}\right), \quad \psi_{j,n}(x) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \psi\left(\frac{x - 2^j n}{2^j}\right)$$



$\mathbf{B} = \{\psi_{j,n}\}_{j \in \mathbb{N}, 2^j n \in [0,1]}$ est une base orthonormale de $L^2[0, 1]$.



FWT

FWT

- Algorithme rapide proposé par Mallat (89).

FWT

- Algorithme rapide proposé par Mallat (89).
- Récursion et sous-échantillonnage.

FWT

- Algorithme rapide proposé par Mallat (89).
- Récursion et sous-échantillonnage.
- Multirésolution :

$$\begin{aligned}\phi_{j+1,l}(x) &= \sum_k g[-k] \phi_{j,2l+k}(x) & \implies \langle f, \phi_{j+1,l} \rangle &= \sum_k g[-k] \langle f, \phi_{j,2l+k} \rangle \\ \psi_{j+1,l}(x) &= \sum_k h[-k] \phi_{j,2l+k}(x) & \implies \langle f, \psi_{j+1,l} \rangle &= \sum_k h[-k] \langle f, \phi_{j,2l+k} \rangle\end{aligned}$$

FWT

- Algorithme rapide proposé par Mallat (89).
- Récursion et sous-échantillonnage.

• Multirésolution :

$$\phi_{j+1,l}(x) = \sum_k g[-k] \phi_{j,2l+k}(x) \implies \langle f, \phi_{j+1,l} \rangle = \sum_k g[-k] \langle f, \phi_{j,2l+k} \rangle$$

$$\psi_{j+1,l}(x) = \sum_k h[-k] \phi_{j,2l+k}(x) \implies \langle f, \psi_{j+1,l} \rangle = \sum_k h[-k] \langle f, \phi_{j,2l+k} \rangle$$

- Calcul des 2^{-j} coefficients à l'échelle 2^j = convolution : $K 2^{-j}$ opérations où K dépend au support des filtres g et h .

FWT

- Algorithme rapide proposé par Mallat (89).
- Récursion et sous-échantillonnage.

• Multirésolution :

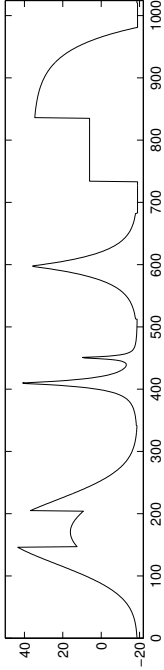
$$\begin{aligned}\phi_{j+1,l}(x) &= \sum_k g[-k] \phi_{j,2l+k}(x) &\implies \langle f, \phi_{j+1,l} \rangle &= \sum_k g[-k] \langle f, \phi_{j,2l+k} \rangle \\ \psi_{j+1,l}(x) &= \sum_k h[-k] \phi_{j,2l+k}(x) &\implies \langle f, \psi_{j+1,l} \rangle &= \sum_k h[-k] \langle f, \phi_{j,2l+k} \rangle\end{aligned}$$

- Calcul des 2^{-j} coefficients à l'échelle 2^j = convolution : $K2^{-j}$ opérations où K dépend au support des filtres g et h .
- Coût total : $O(N)$ (l'échelle fine domine).

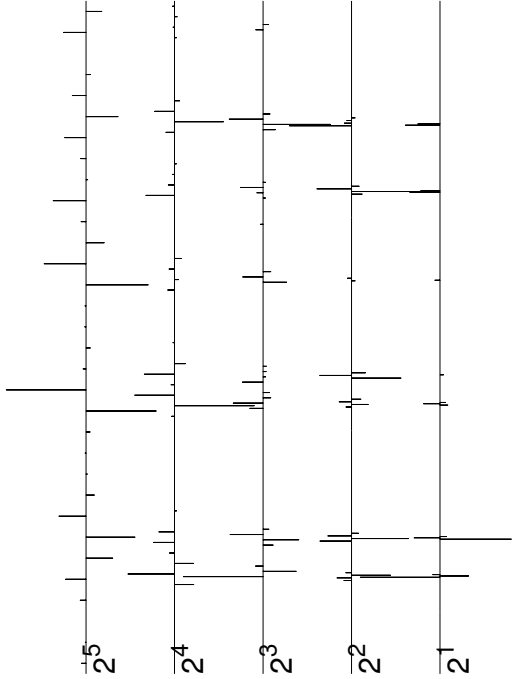
Approximation non linéaire en ondelettes

Approximation non linéaire en ondelettes

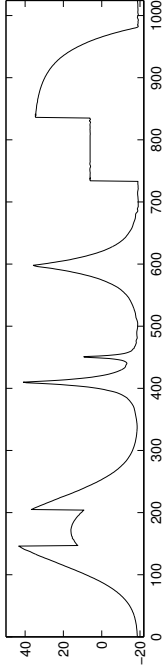
f



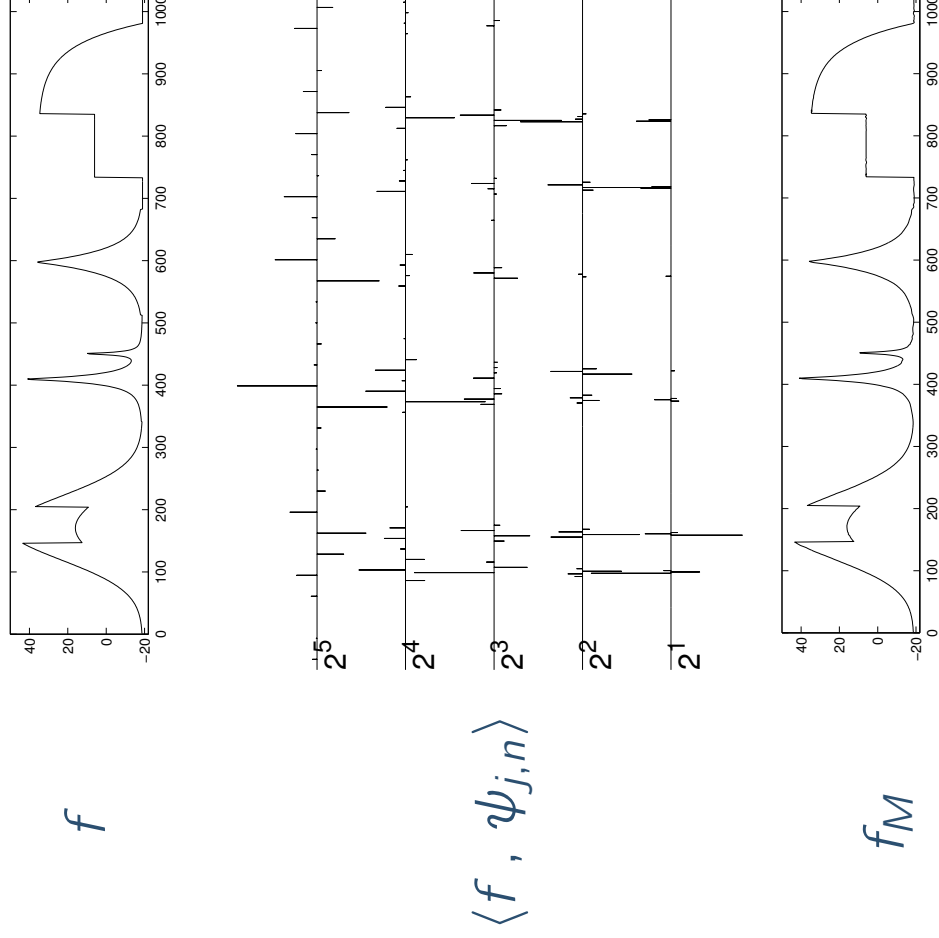
$\langle f, \psi_{j,n} \rangle$



f_M



Approximation non linéaire en ondelettes



🔴 Si f est $\mathbf{C}^\alpha$ par morceaux et ψ a $p > \alpha$ moments nuls alors

$$\|f - f_M\|^2 = O(M^{-2\alpha}) .$$

Base d'ondelettes 2D séparables

Base d'ondelettes 2D séparables



La famille

$$\left\{ \begin{array}{ll} \phi_{j,n_1}(x_1) \psi_{j,n_2}(x_2) & , \quad \psi_{j,n_1}(x_1) \phi_{j,n_2}(x_2) \\ \psi_{j,n_1}(x_1) \psi_{j,n_2}(x_2) & , \quad \psi_{j,n_1}(x_1) \psi_{j,n_2}(x_2) \end{array} \right\}_{(j,n_1,n_2) \in \mathbb{Z}^3}$$

forme une base orthonormée de $L^2[0, 1]^2$.

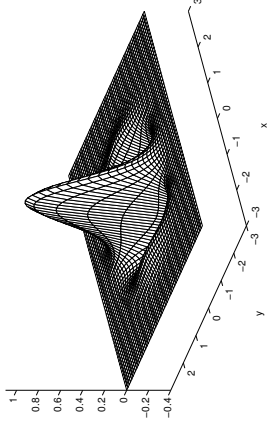
Base d'ondelettes 2D séparables



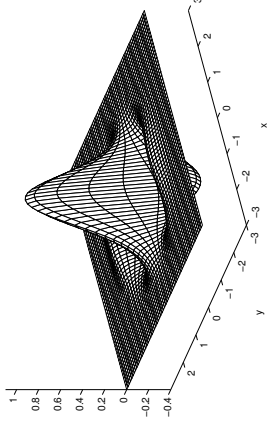
La famille

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_{j,n_1}(x_1) \psi_{j,n_2}(x_2) \quad , \quad \psi_{j,n_1}(x_1) \phi_{j,n_2}(x_2) \\ \psi_{j,n_1}(x_1) \psi_{j,n_2}(x_2) \end{array} \right\}_{(j,n_1,n_2) \in \mathbb{Z}^3}$$

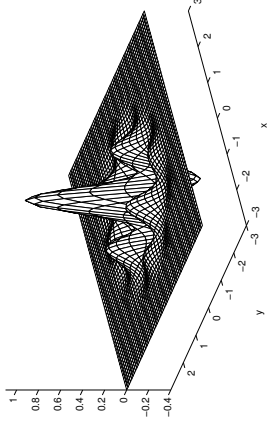
forme une base orthonormée de $L^2[0, 1]^2$.



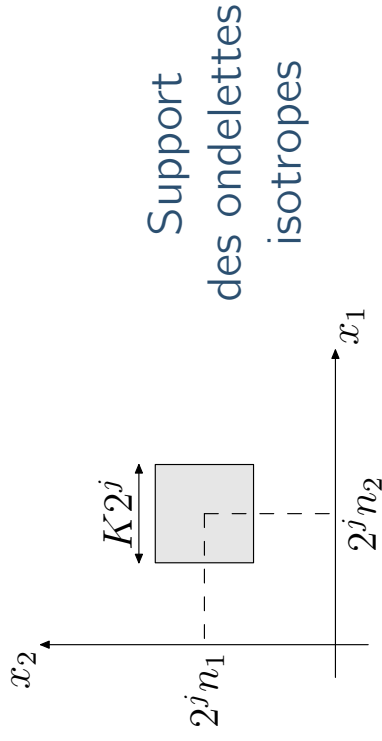
$$\phi_{j,n_1}(x_1) \psi_{j,n_2}(x_2)$$



$$\psi_{j,n_1}(x_1) \phi_{j,n_2}(x_2)$$



$$\psi_{j,n_1}(x_1) \psi_{j,n_2}(x_2)$$

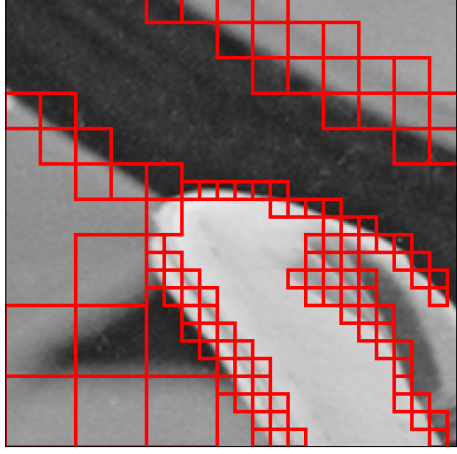


JPEG 2000

JPEG 2000

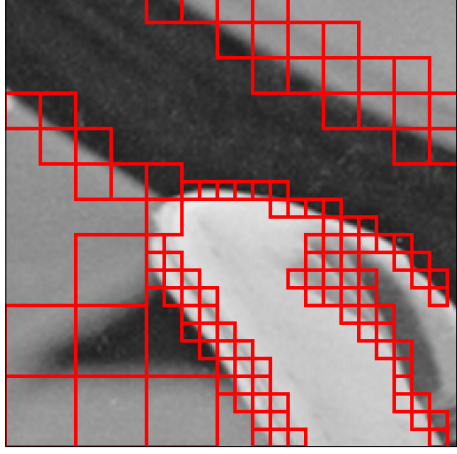
-  Comité JPEG 2000 : premier jet (Décembre 2000), version définitive (Août 2002).

JPEG 2000



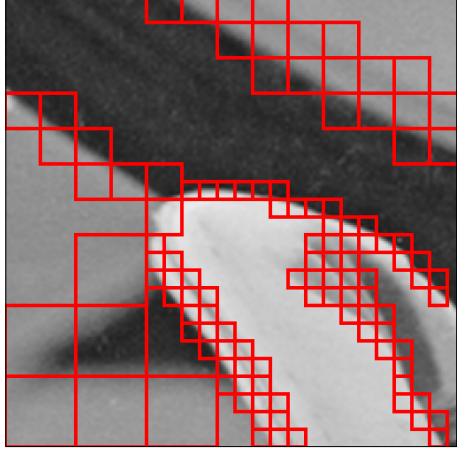
- Comité JPEG 2000 : premier jet (Décembre 2000), version définitive (Août 2002).
- Basé sur le codeur EBCOT (Taubman) : transformée en ondelettes, codage par plan de bits des différentes sous-bandes.

JPEG 2000



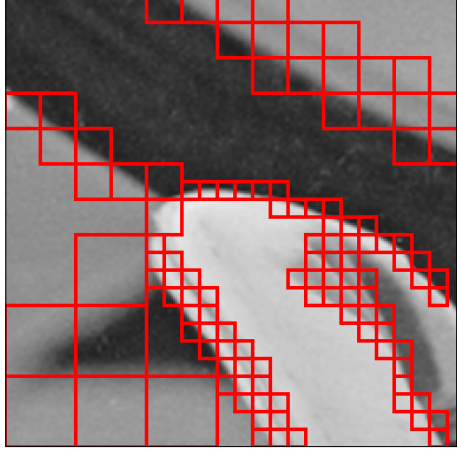
- Comité JPEG 2000 : premier jet (Décembre 2000), version définitive (Août 2002).
- Basé sur le codeur EBCOT (Taubman) : transformée en ondelettes, codage par plan de bits des différentes sous-bandes.
- Beaucoup plus fin que le codeur JPEG avec plus de possibilités (échelonnabilité, région d'intérêt,...).

JPEG 2000



- Comité JPEG 2000 : premier jet (Décembre 2000), version définitive (Août 2002).
- Basé sur le codeur EBCOT (Taubman) : transformée en ondelettes, codage par plan de bits des différentes sous-bandes.
- Beaucoup plus fin que le codeur JPEG avec plus de possibilités (échelonnabilité, région d'intérêt,...).
- Amélioration en terme de qualité vis à vis de JPEG.

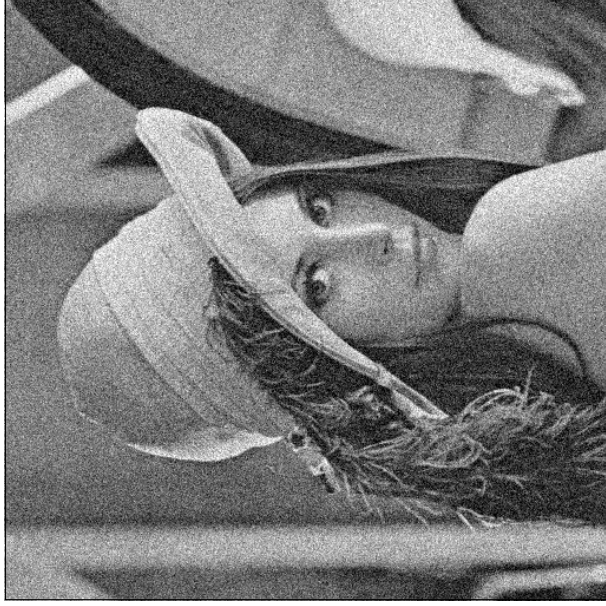
JPEG 2000



- Comité JPEG 2000 : premier jet (Décembre 2000), version définitive (Août 2002).
- Basé sur le codeur EBCOT (Taubman) : transformée en ondelettes, codage par plan de bits des différentes sous-bandes.
- Beaucoup plus fin que le codeur JPEG avec plus de possibilités (échelonnabilité, région d'intérêt,...).
- Amélioration en terme de qualité vis à vis de JPEG.
- Pas encore *grand public*.

Débruitage

Débruitage



- Enlever un bruit gaussien d'une image.

Débruitage



- Enlever un bruit gaussien d'une image.
- Utilisation statistique d'une base d'ondelettes par *Donoho et Johnstone* : 1993

Débruitage



- Enlever un bruit gaussien d'une image.
- Utilisation statistique d'une base d'ondelettes par *Donoho et Jonhystone* : 1993
- Méthode par seuillage $\sim$ approximation non-linéaire.

Débruitage



- Enlever un bruit gaussien d'une image.
- Utilisation statistique d'une base d'ondelettes par *Donoho et Jonhstone* : 1993
- Méthode par seuillage $\sim$ approximation non-linéaire.
- Erreur d'approximation non-linéaire optimale : erreur d'estimation optimale.

Débruitage



- Enlever un bruit gaussien d'une image.
- Utilisation statistique d'une base d'ondelettes par *Donoho et Johnstone* : 1993
- Méthode par seuillage $\sim$ approximation non-linéaire.
- Erreur d'approximation non-linéaire optimale : erreur d'estimation optimale.
- Invariance par translation pour améliorer les résultats.

Estimation et modèle de bruit blanc

Estimation et modèle de bruit blanc

- Modèle de bruit blanc avec un bruit de niveau ϵ

$$Y = f + \epsilon W$$

avec W gaussien.

Estimation et modèle de bruit blanc

- Modèle de bruit blanc avec un bruit de niveau ϵ

$$Y = f + \epsilon W$$

avec W gaussien.

- Propriétés de f : propriétés dans le domaine continu.

Estimation et modèle de bruit blanc

- Modèle de bruit blanc avec un bruit de niveau ϵ

$$Y = f + \epsilon W$$

avec W gaussien.

- Propriétés de f : propriétés dans le domaine continu.
- Estimateur F de f : fonction de Y .

Estimation et modèle de bruit blanc

- Modèle de bruit blanc avec un bruit de niveau ϵ

$$Y = f + \epsilon W$$

avec W gaussien.

- Propriétés de f : propriétés dans le domaine continu.
- Estimateur F de f : fonction de Y .
- Critère : risque quadratique

$$E(\|f - F\|^2)$$

Estimation dans une base

Estimation dans une base

- Décomposition de $Y = f + \epsilon W$ dans une base orthonormée

$$Y = \sum_{b_n} \langle Y, b_n \rangle b_n = \sum_{b_n} (\langle f, b_n \rangle + \epsilon \langle W, b_n \rangle) b_n \quad .$$

Estimation dans une base

- Décomposition de $Y = f + \epsilon W$ dans une base orthonormée

$$Y = \sum_{b_n} \langle Y, b_n \rangle b_n = \sum_{b_n} (\langle f, b_n \rangle + \epsilon \langle W, b_n \rangle) b_n \quad .$$

- Expression des coefficients de f à partir de ceux de Y :

$$\langle f, b_n \rangle = \langle Y, b_n \rangle - \epsilon \langle W, b_n \rangle$$

avec $\epsilon |\langle W, b_n \rangle| \simeq \epsilon$.

Estimation dans une base

- Décomposition de $Y = f + \epsilon W$ dans une base orthonormée

$$Y = \sum_{b_n} \langle Y, b_n \rangle b_n = \sum_{b_n} (\langle f, b_n \rangle + \epsilon \langle W, b_n \rangle) b_n \quad .$$

- Expression des coefficients de f à partir de ceux de Y :

$$\langle f, b_n \rangle = \langle Y, b_n \rangle - \epsilon \langle W, b_n \rangle$$

avec $\epsilon |\langle W, b_n \rangle| \simeq \epsilon$.

- Estimateur des coefficients de f à partir de ceux de Y

$$\langle \hat{f}, b_n \rangle = w(n, \langle Y, b_n \rangle) \langle Y, b_n \rangle \simeq \langle f, b_n \rangle$$

Estimation dans une base

- Décomposition de $Y = f + \epsilon W$ dans une base orthonormée

$$Y = \sum_{b_n} \langle Y, b_n \rangle b_n = \sum_{b_n} (\langle f, b_n \rangle + \epsilon \langle W, b_n \rangle) b_n \quad .$$

- Expression des coefficients de f à partir de ceux de Y :

$$\langle f, b_n \rangle = \langle Y, b_n \rangle - \epsilon \langle W, b_n \rangle$$

avec $\epsilon |\langle W, b_n \rangle| \simeq \epsilon$.

- Estimateur des coefficients de f à partir de ceux de Y

$$\langle \hat{f}, b_n \rangle = w(n, \langle Y, b_n \rangle) \langle Y, b_n \rangle \simeq \langle f, b_n \rangle$$

- Simplification $w(n, x) = 1$ ou $w(n, x) = 0$.

Estimation oracle dans une base

Estimation oracle dans une base

- Cas simpliste $\omega(n, x) = \mathbf{1}_{n \in \Gamma}$ (indépendant de x).

Estimation oracle dans une base

- Cas simpliste $\omega(n, x) = \mathbf{1}_{n \in \Gamma}$ (indépendant de x).
- Estimateur F par sélection de coordonnées :

$$F = Y_{\Gamma} = \sum_{n \in \Gamma} \langle Y, b_n \rangle b_n \quad .$$

Estimation oracle dans une base

- Cas simpliste $\omega(n, x) = \mathbf{1}_{n \in \Gamma}$ (indépendant de x).
- Estimateur F par sélection de coordonnées :

$$F = Y_{\Gamma} = \sum_{n \in \Gamma} \langle Y, b_n \rangle b_n \quad .$$

- Minimisation du risque quadratique :

$$E(\|f - F\|^2) = \sum_{n \notin \Gamma} |\langle f, b_n \rangle|^2 + \sum_{n \in \Gamma} \epsilon^2 \quad .$$

Estimation oracle dans une base

- Cas simpliste $\omega(n, x) = \mathbf{1}_{n \in \Gamma}$ (indépendant de x).
- Estimateur F par sélection de coordonnées :

$$F = Y_{\Gamma} = \sum_{n \in \Gamma} \langle Y, b_n \rangle b_n \quad .$$

- Minimisation du risque quadratique :

$$E(\|f - F\|^2) = \sum_{n \notin \Gamma} |\langle f, b_n \rangle|^2 + \sum_{n \in \Gamma} \epsilon^2 \quad .$$

- Solution : $\Gamma_O = \{n, |\langle f, b_n \rangle| \geq \epsilon\}$ et $F_O = Y_{\Gamma_O}$.

Estimation oracle dans une base

- Cas simpliste $\omega(n, x) = \mathbf{1}_{n \in \Gamma}$ (indépendant de x).
- Estimateur F par sélection de coordonnées :

$$F = Y_{\Gamma} = \sum_{n \in \Gamma} \langle Y, b_n \rangle b_n \quad .$$

- Minimisation du risque quadratique :

$$E(\|f - F\|^2) = \sum_{n \notin \Gamma} |\langle f, b_n \rangle|^2 + \sum_{n \in \Gamma} \epsilon^2 \quad .$$

- Solution : $\Gamma_O = \{n, |\langle f, b_n \rangle| \geq \epsilon\}$ et $F_O = Y_{\Gamma_O}$.
- Problème : demande la connaissance de f ! (Oracle $\neq$ estimateur)

Oracle, risque et approximation

Oracle, risque et approximation

- Risque quadratique de l'estimateur oracle F_O :

$$E(\|f - F_O\|^2) = \sum_{n \notin \Gamma_O} |\langle f, b_n \rangle|^2 + \sum_{n \in \Gamma_O} \epsilon^2$$

$$E(\|f - F_O\|^2) = \|f - f_{\Gamma_O}\|^2 + \epsilon^2 |\Gamma_O| \quad .$$

Oracle, risque et approximation

- Risque quadratique de l'estimateur oracle F_O :

$$E(\|f - F_O\|^2) = \sum_{n \notin \Gamma_O} |\langle f, b_n \rangle|^2 + \sum_{n \in \Gamma_O} \epsilon^2$$

$$E(\|f - F_O\|^2) = \|f - f_{\Gamma_O}\|^2 + \epsilon^2 |\Gamma_O| \quad .$$

- Compromis entre erreur d'approximation et nombre de termes.

Oracle, risque et approximation

- Risque quadratique de l'estimateur oracle F_O :

$$E(\|f - F_O\|^2) = \sum_{n \notin \Gamma_O} |\langle f, b_n \rangle|^2 + \sum_{n \in \Gamma_O} \epsilon^2$$

$$E(\|f - F_O\|^2) = \|f - f_{\Gamma_O}\|^2 + \epsilon^2 |\Gamma_O| \quad .$$

- Compromis entre erreur d'approximation et nombre de termes.
- Théorie de l'approximation :

$$\begin{aligned} E(\|f - F_O\|^2) &= \|f - f_{\Gamma_O}\|^2 + \epsilon^2 |\Gamma_O| \leq C \left(\epsilon^2 \right)^{\frac{\beta}{\beta+1}} \\ &\Leftrightarrow \|f - f_M\|^2 \leq CM^{-\beta} \Leftrightarrow f \in \mathcal{A}^\beta \quad . \end{aligned}$$

Oracle, risque et approximation

- Risque quadratique de l'estimateur oracle F_O :

$$E(\|f - F_O\|^2) = \sum_{n \notin \Gamma_O} |\langle f, b_n \rangle|^2 + \sum_{n \in \Gamma_O} \epsilon^2$$

$$E(\|f - F_O\|^2) = \|f - f_{\Gamma_O}\|^2 + \epsilon^2 |\Gamma_O| \quad .$$

- Compromis entre erreur d'approximation et nombre de termes.
- Théorie de l'approximation :

$$\begin{aligned} E(\|f - F_O\|^2) &= \|f - f_{\Gamma_O}\|^2 + \epsilon^2 |\Gamma_O| \leq C \left(\epsilon^2 \right)^{\frac{\beta}{\beta+1}} \\ &\Leftrightarrow \|f - f_M\|^2 \leq C M^{-\beta} \Leftrightarrow f \in \mathcal{A}^\beta \quad . \end{aligned}$$

- Pour Θ , classe de fonctions, quelle base donne $\Theta \subset \mathcal{A}^\beta$ avec β optimal ? $((\epsilon^2)^{\frac{\beta}{\beta+1}}$ vitesse minimax).

Estimateur par seuillage

Estimateur par seuillage

- Oracle : $\Gamma_O = \{n, |\langle f, b_n \rangle| \geq \epsilon\}$ et $F_O = Y_{\Gamma_O}$.

Estimateur par seuillage

- Oracle : $\Gamma_O = \{n, |\langle f, b_n \rangle| \geq \epsilon\}$ et $F_O = Y_{\Gamma_O}$.
- Stratégie : garder les grands coefficients.

Estimateur par seuillage

- Oracle : $\Gamma_O = \{n, |\langle f, b_n \rangle| \geq \epsilon\}$ et $F_O = Y_{\Gamma_O}$.
- Stratégie : garder les grands coefficients.
- Seuillage : $\Gamma_S = \{n, |\langle Y, b_n \rangle| \geq T(\epsilon)\}$ et $F_S = Y_{\Gamma_S}$.

Estimateur par seuillage

- Oracle : $\Gamma_O = \{n, |\langle f, b_n \rangle| \geq \epsilon\}$ et $F_O = Y_{\Gamma_O}$.
- Stratégie : garder les grands coefficients.
- Seuillage : $\Gamma_S = \{n, |\langle Y, b_n \rangle| \geq T(\epsilon)\}$ et $F_S = Y_{\Gamma_S}$.
- **Théorème (Donoho, Johnstone)** : Si $T(\epsilon) = \lambda \sqrt{|\log \epsilon|} \epsilon$, alors

$$E(\|f - F_S\|^2) \leq C |\log \epsilon| E(\|f - F_O\|^2)$$

$$E(\|f - F_S\|^2) \leq C \min_{\Gamma} \|f - f_{\Gamma}\|^2 + \lambda^2 |\log \epsilon| \epsilon^2 |\Gamma| \quad \text{plus fin.}$$

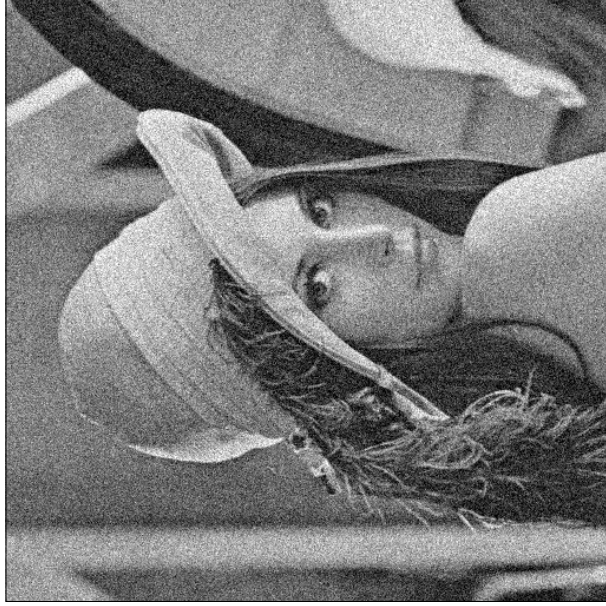
Estimateur par seuillage

- Oracle : $\Gamma_O = \{n, |\langle f, b_n \rangle| \geq \epsilon\}$ et $F_O = Y_{\Gamma_O}$.
- Stratégie : garder les grands coefficients.
- Seuillage : $\Gamma_S = \{n, |\langle Y, b_n \rangle| \geq T(\epsilon)\}$ et $F_S = Y_{\Gamma_S}$.
- **Théorème (Donoho, Johnstone)** : Si $T(\epsilon) = \lambda \sqrt{|\log \epsilon|} \epsilon$, alors
$$E(\|f - F_S\|^2) \leq C |\log \epsilon| E(\|f - F_O\|^2)$$
$$E(\|f - F_S\|^2) \leq C \min_{\Gamma} \|f - f_{\Gamma}\|^2 + \lambda^2 |\log \epsilon| \epsilon^2 |\Gamma| \quad \text{plus fin.}$$
- Importance du choix de la base et de l'approximation non linéaire !

Originale



Bruitée (20,19 dB)



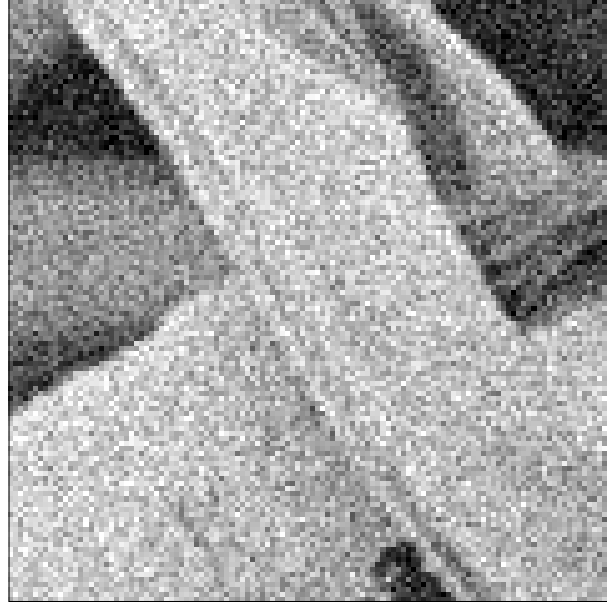
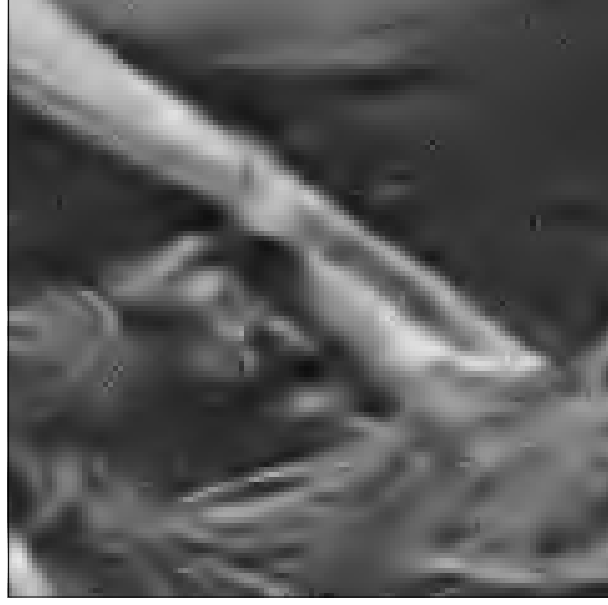
Ondelettes (28,21 dB)



Bruitée



Ondelettes



Succès et échecs des bases d'ondelettes

Succès et échecs des bases d'ondelettes

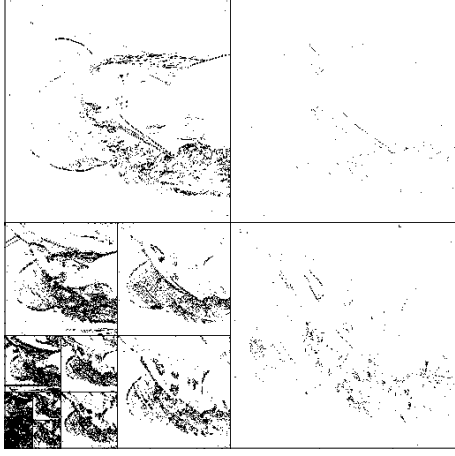


- Les images sont décomposées dans une base d'ondelettes 2D et les coefficients les plus grands sont conservés (JPEG-2000).

f



M plus grands coeff.



f_M



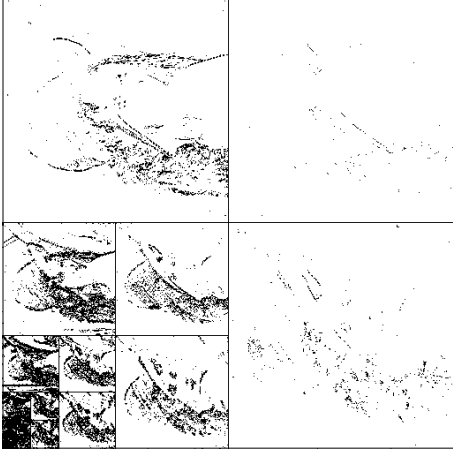
Succès et échecs des bases d'ondelettes

- Les images sont décomposées dans une base d'ondelettes 2D et les coefficients les plus grands sont conservés (JPEG-2000).

f



M plus grands coeff.



f_M



- (Cohen, DeVore, Petrushev, Xue) : Optimal pour les fonctions à variation bornée : $\|f - f_M\|^2 \leq C \|f\|_{TV} M^{-1}$.

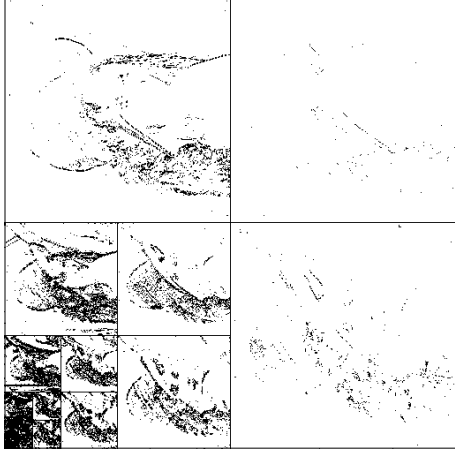
Succès et échecs des bases d'ondelettes

- Les images sont décomposées dans une base d'ondelettes 2D et les coefficients les plus grands sont conservés (JPEG-2000).

f



M plus grands coeff.



f_M

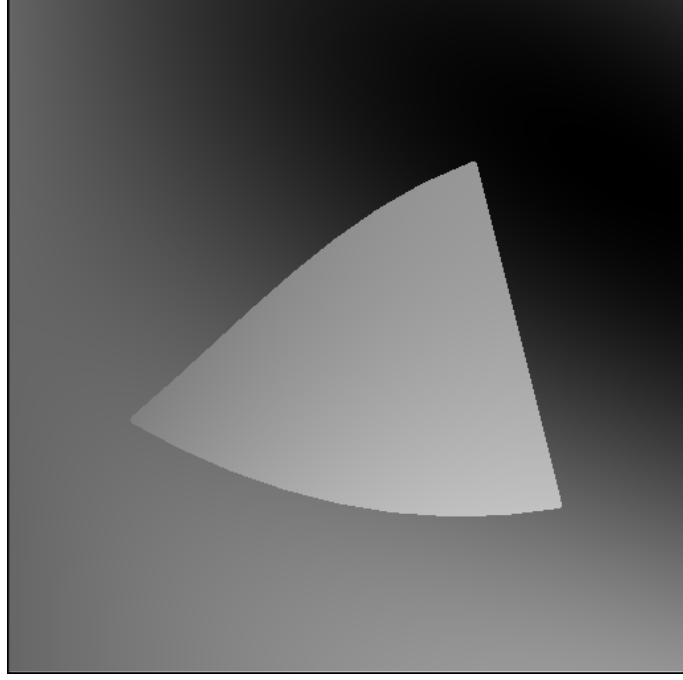


- (Cohen, DeVore, Petrushev, Xue) : Optimal pour les fonctions à variation bornée : $\|f - f_M\|^2 \leq C \|f\|_{TV} M^{-1}$.
- Mais ne prend avantage d'aucune sorte de régularité géométrique.

Ondelettes et géométrie

Ondelettes et géométrie

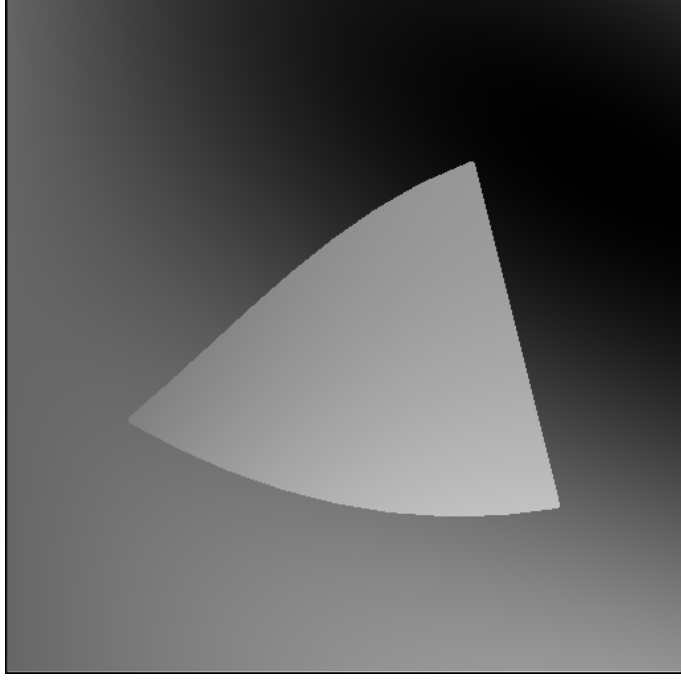
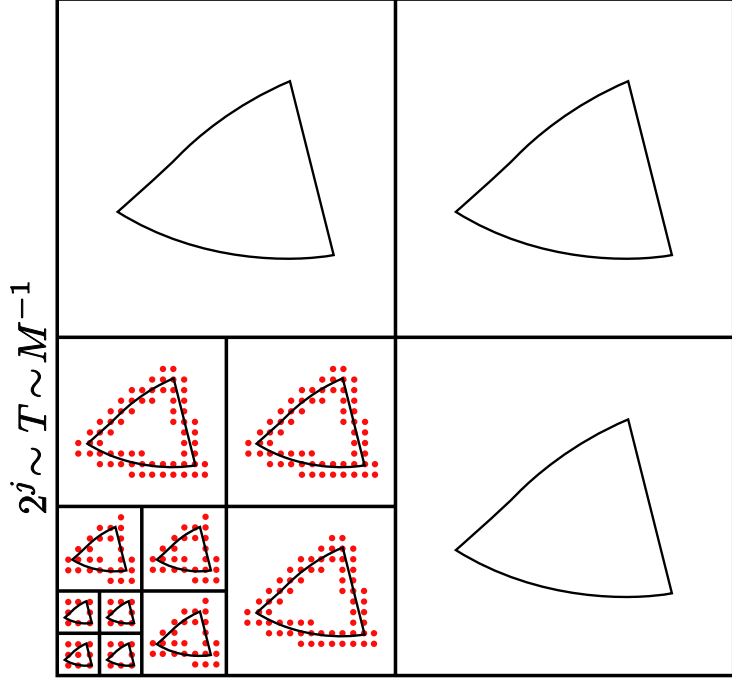
- Approximation de f $\mathbf{C}^\alpha$ en dehors de *contours* $\mathbf{C}^\alpha$:



Ondelettes et géométrie



Approximation de f $\mathbf{C}^\alpha$ en dehors de contours $\mathbf{C}^\alpha$:

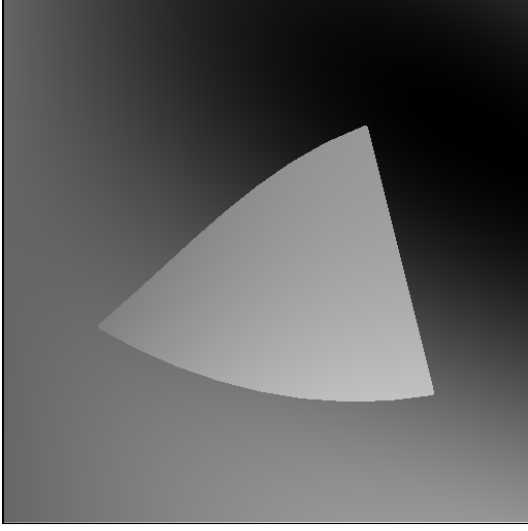


Avec M ondelettes : $\|f - f_M\|^2 \leq C M^{-1}$.

Éléments géométriques et contours

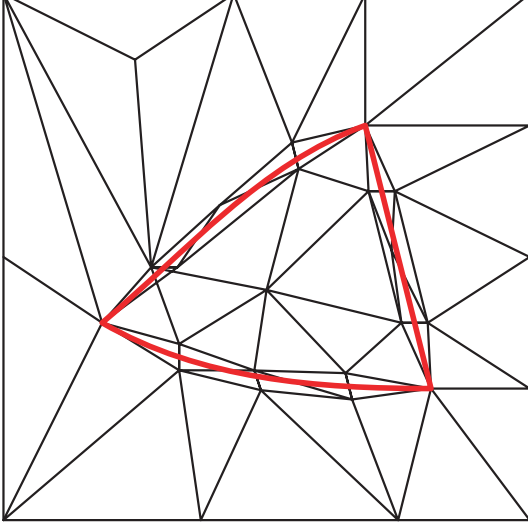
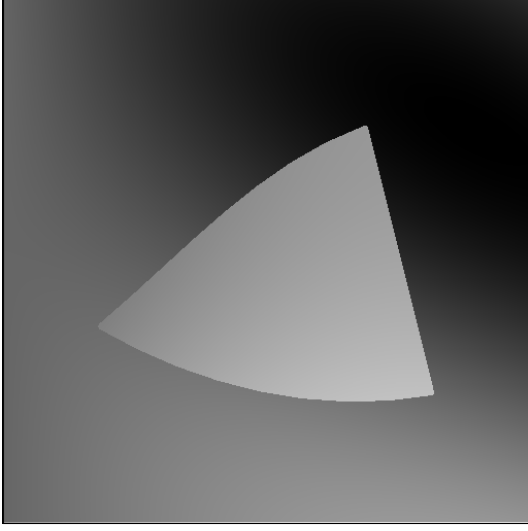
Éléments géométriques et contours

- Approximation de $f \in \mathbf{C}^\alpha$ en dehors de contours $\mathbf{C}^\alpha$.

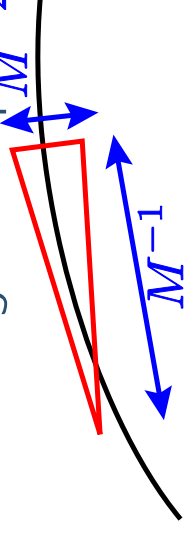


Éléments géométriques et contours

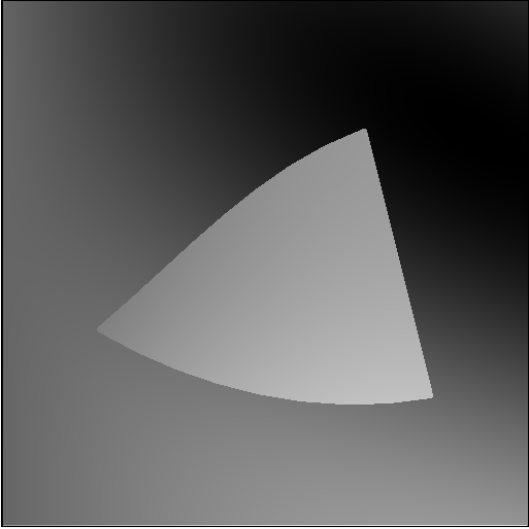
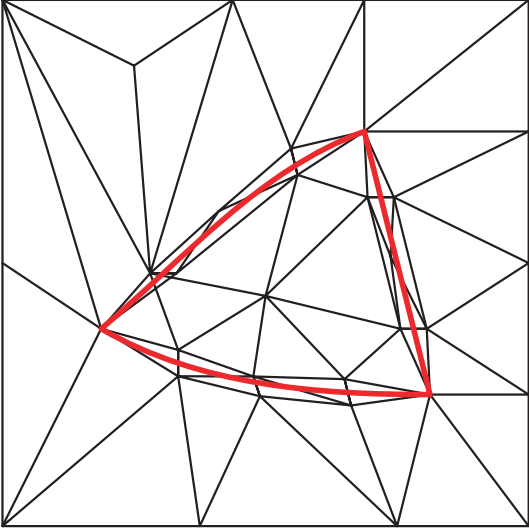
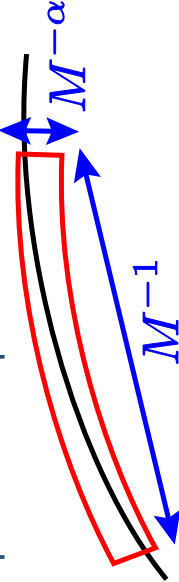
- Approximation de $f \in \mathbf{C}^\alpha$ en dehors de contours $\mathbf{C}^\alpha$.



- Approximation linéaire par morceaux avec M triangles adaptés₂:
si $\alpha \geq 2$ alors $\|f - f_M\|^2 \leq C M^{-2}$,



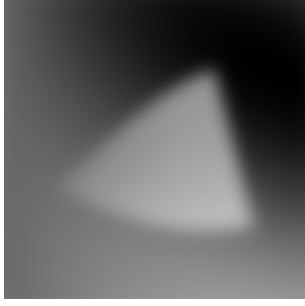
Éléments géométriques et contours

- 
 Approximation de $f \in \mathbf{C}^\alpha$ en dehors de contours $\mathbf{C}^\alpha$.
 
- 
 Approximation linéaire par morceaux avec M triangles adaptés₂:
 si $\alpha \geq 2$ alors $\|f - f_M\|^2 \leq C M^{-2}$,
- 
 Approximation avec M éléments géométriques adaptés :
 $\|f - f_M\|^2 \leq C M^{-\alpha}$.

Triangulation adaptative

Triangulation adaptative

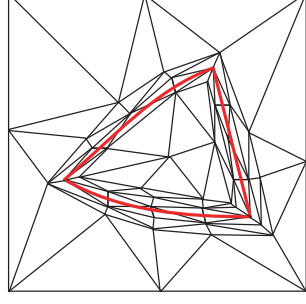
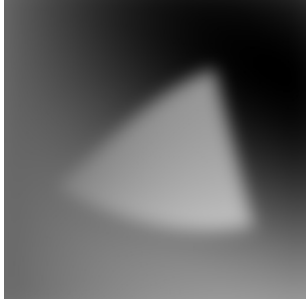
- Approximations de $f = \tilde{f} \star h_s$ avec :
 - $f \in \mathbf{C}^\alpha$ en dehors de contours $\mathbf{C}^\alpha$ ($\alpha \geq 2$) :
 - h_s un noyau régularisant de taille s



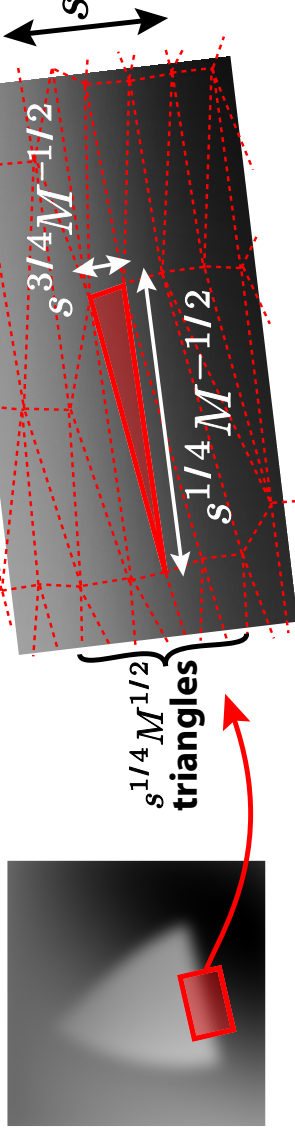
Triangulation adaptative

• Approximations de $f = \tilde{f} \star h_s$ avec :

- $f \in \mathbf{C}^\alpha$ en dehors de contours $\mathbf{C}^\alpha$ ($\alpha \geq 2$) :
- h_s un noyau régularisant de taille s



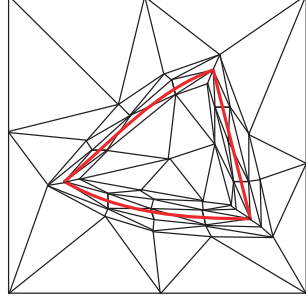
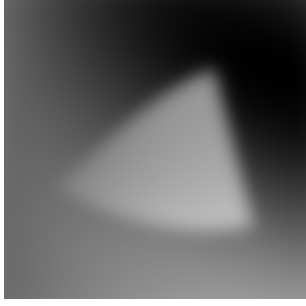
• Avec M triangles adaptatifs : $\|f - f_M\|^2 \leq C M^{-2}$.



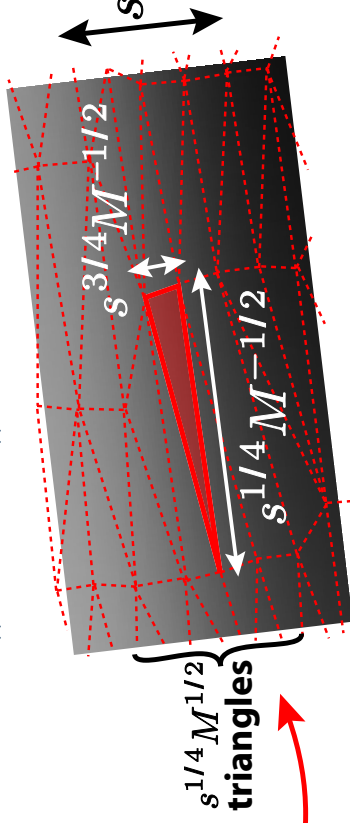
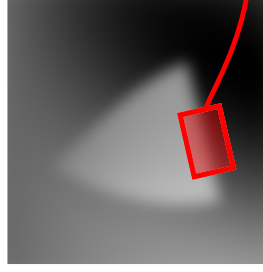
Triangulation adaptative

• Approximations de $f = \tilde{f} \star h_s$ avec :

- $f \in \mathbf{C}^\alpha$ en dehors de contours $\mathbf{C}^\alpha$ ($\alpha \geq 2$) :
- h_s un noyau régularisant de taille s



• Avec M triangles adaptatifs : $\|f - f_M\|^2 \leq C M^{-2}$.



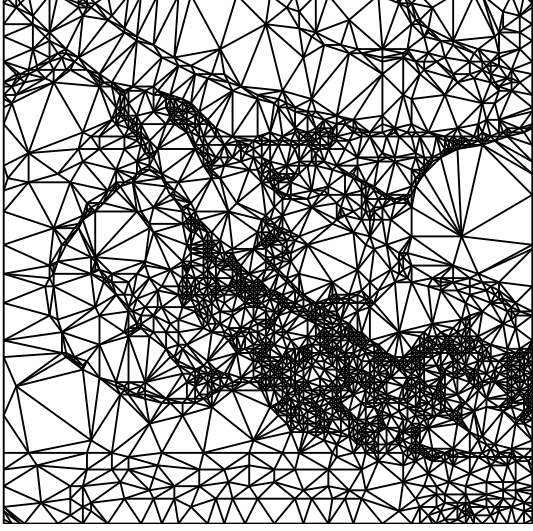
• Difficile d'obtenir une approximation optimale mais bonnes solutions avec des algorithmes gloutons (*Dekel, Demaret, Dyn, Iske, Cohen, Mirebeau*).

Résultats

Original



Triangulation



Ondelettes

0.15 bits par pixel



Triangulation

Curvelets

Curvelets

- Curvelets forment un *tight frame* de $L^2[0, 1]^2$ avec des éléments allongés et orientés (Candes, Donoho) : $\{c_j(R_\theta x - \eta)\}_{j,\theta,\eta}$



Curvelets

- Curvelets forment un *tight frame* de $L^2[0, 1]^2$ avec des éléments allongés et orientés (Candes, Donoho) : $\{c_j(R_\theta x - \eta)\}_{j,\theta,\eta}$



- Si f est $\mathbf{C}^\alpha$ en dehors de contours $\mathbf{C}^\alpha$ avec M curvelets :
 si $\alpha \geq 2$ alors $\|f - f_M\|^2 \leq C (\log M)^3 M^{-2}$.

Curvelets

- Curvelets forment un *tight frame* de $L^2[0, 1]^2$ avec des éléments allongés et orientés (Candes, Donoho) : $\{c_j(R_\theta x - \eta)\}_{j,\theta,\eta}$



- Si f est $\mathbf{C}^\alpha$ en dehors de contours $\mathbf{C}^\alpha$ avec M curvelets :
si $\alpha \geq 2$ alors $\|f - f_M\|^2 \leq C (\log M)^3 M^{-2}$.
- Optimal pour $\alpha = 2$.

Curvelets

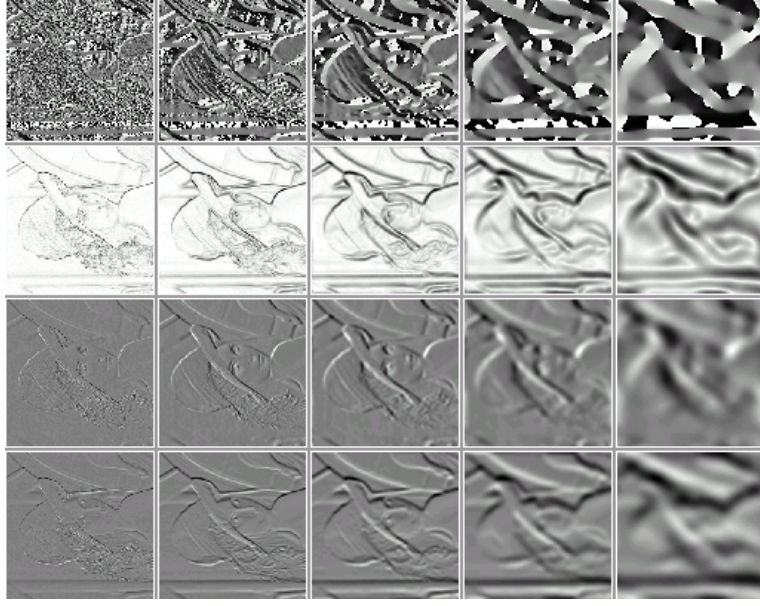
- Curvelets forment un *tight frame* de $L^2[0, 1]^2$ avec des éléments allongés et orientés (Candes, Donoho) : $\{c_j(R_\theta x - \eta)\}_{j,\theta,\eta}$



- Si f est $\mathbf{C}^\alpha$ en dehors de contours $\mathbf{C}^\alpha$ avec M curvelets :
si $\alpha \geq 2$ alors $\|f - f_M\|^2 \leq C (\log M)^3 M^{-2}$.
- Optimal pour $\alpha = 2$.
- Difficile de construire des bases (Vetterli & Minh Do).

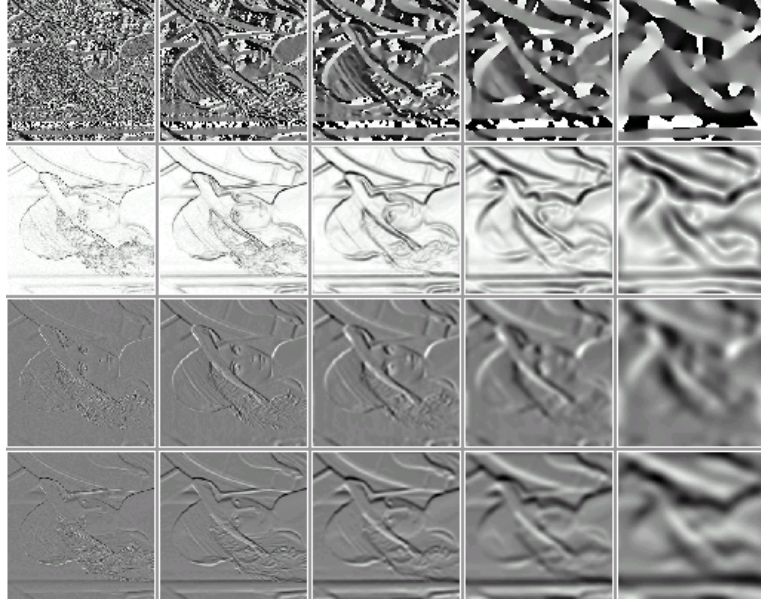
Ondelettes dyadiques

Ondelettes dyadiques



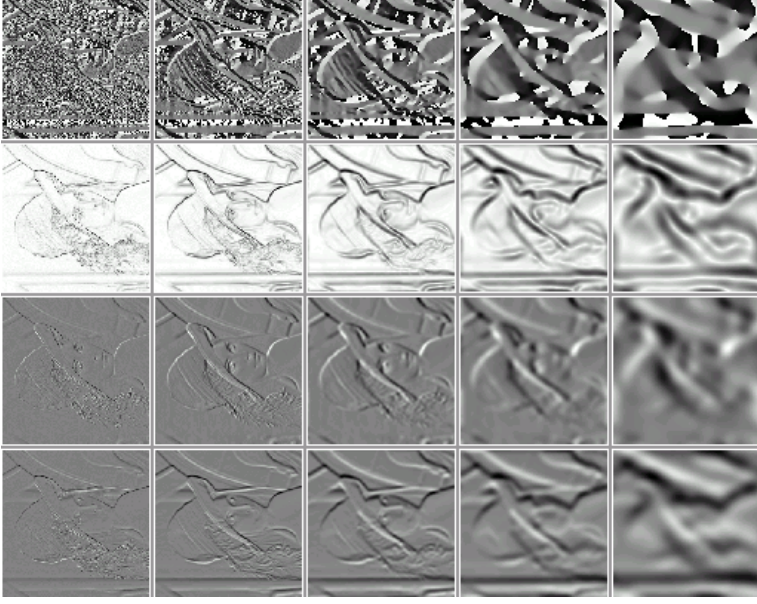
• Compression : redondance est un problème.

Ondelettes dyadiques



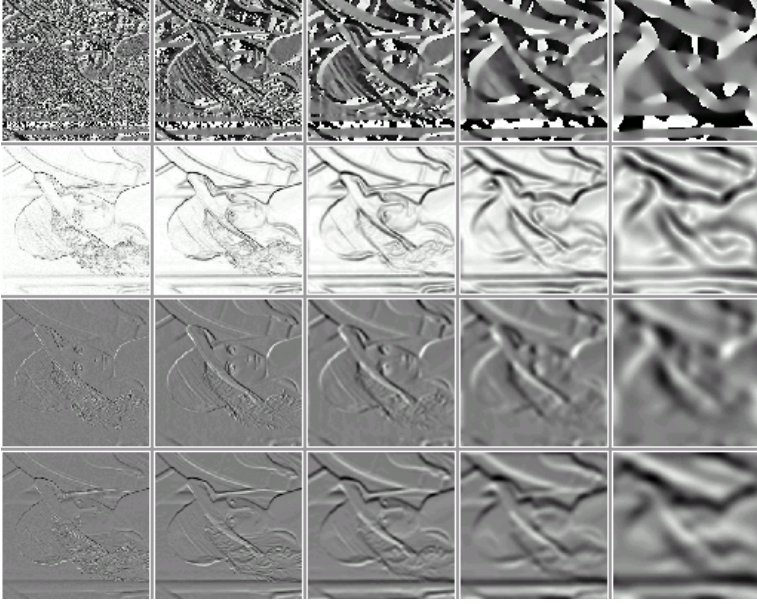
- Compression : redondance est un problème.
- Débruitage : redondance n'est pas un problème mais seulement la concentration de l'énergie du signal sur une faible portion des coefficients.

Ondelettes dyadiques



- Compression : redondance est un problème.
- Débruitage : redondance n'est pas un problème mais seulement la concentration de l'énergie du signal sur une faible portion des coefficients.
- Ondelettes dyadiques : suppression de la phase de sous-échantillonnage des ondelettes.

Ondelettes dyadiques



- Compression : redondance est un problème.
- Débruitage : redondance n'est pas un problème mais seulement la concentration de l'énergie du signal sur une faible portion des coefficients.
- Ondelettes dyadiques : suppression de la phase de sous-échantillonnage des ondelettes.
- Opérateur de filtrage classique ($f_j = f \star \psi_j$) / Algorithme à trous.

Algorithme à trous

Algorithme à trous

- Algorithme rapide en $O(N \log N)$ proposé par Bijaoui, Starck et Murtagh (1993)

Algorithme à trous

- Algorithme rapide en $O(N \log N)$ proposé par Bijaoui, Starck et Murtagh (1993)
- Suppression du sous-échantillonnage mais conservation du principe de la FWT.

Algorithme à trous

- Algorithme rapide en $O(N \log N)$ proposé par Bijaoui, Starck et Murtagh (1993)
- Suppression du sous-échantillonnage mais conservation du principe de la FWT.
- Sous échantillonnage se transforme en des ajouts de zéros dans les filtres :

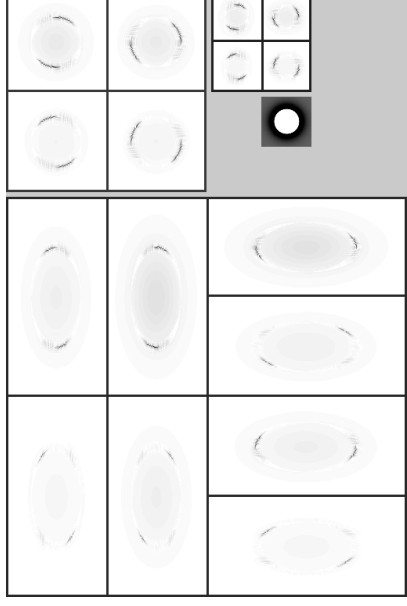
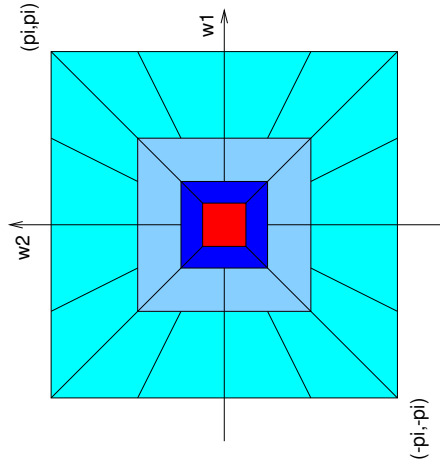
$$\begin{aligned}\phi_{j+1}(x) &= \sum_k g_j[-k] \phi_j(x-k) & \implies & f \star \phi_{j+1}(x) = \sum_k g_j[-k] f \star \phi_j(x+k) \\ \psi_{j+1}(x) &= \sum_k h_j[-k] \phi_j(x-k) & \implies & f \star \psi_{j+1}(x) = \sum_k h_j[-k] f \star \phi_j(x+k)\end{aligned}$$

avec

$$g_j[k] = \begin{cases} g[l] & \text{si } k = l2^j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

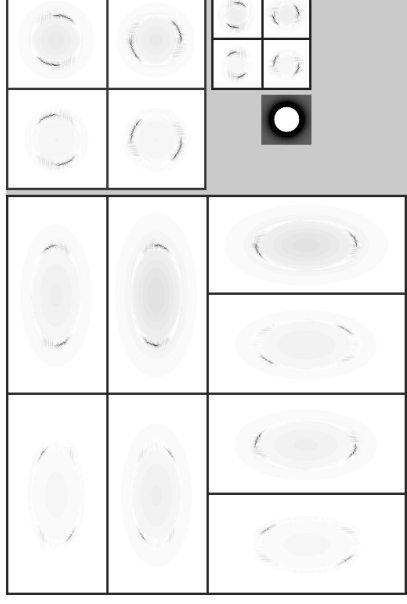
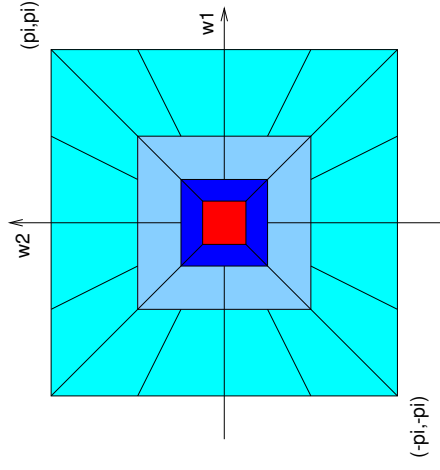
Filtres orientés

Filtres orientés



● Redondance = liberté accrue pour la représentation.

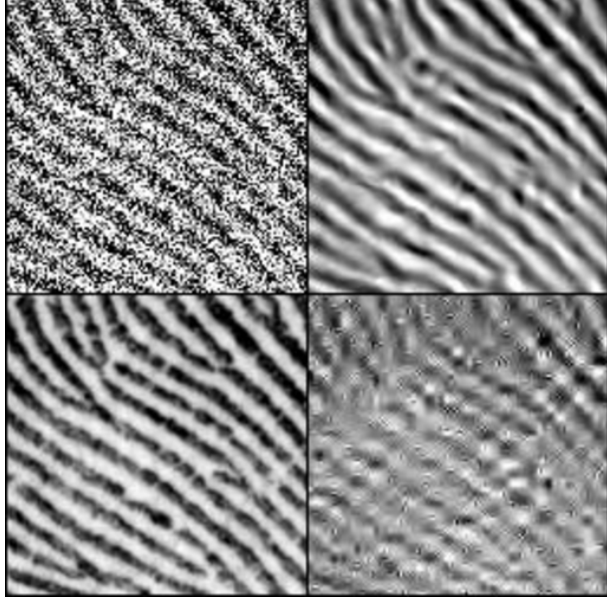
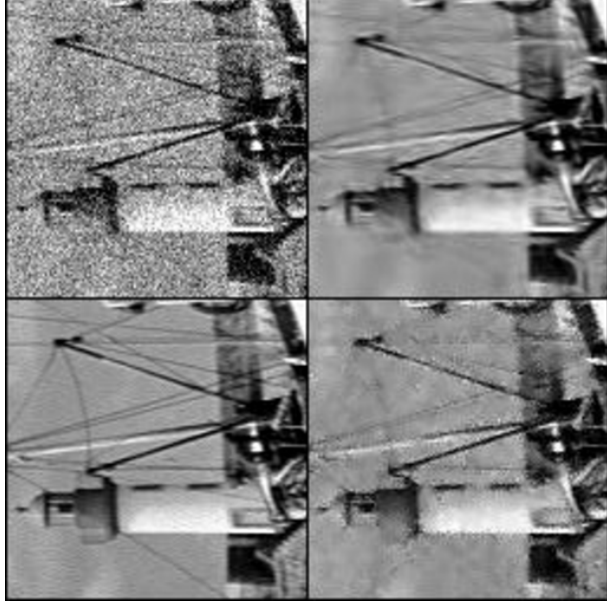
Filtres orientés



- Redondance = liberté accrue pour la représentation.
- Représentation géométrique par filtrage orienté : curvelets, contourlets, pyramide orientée, ...

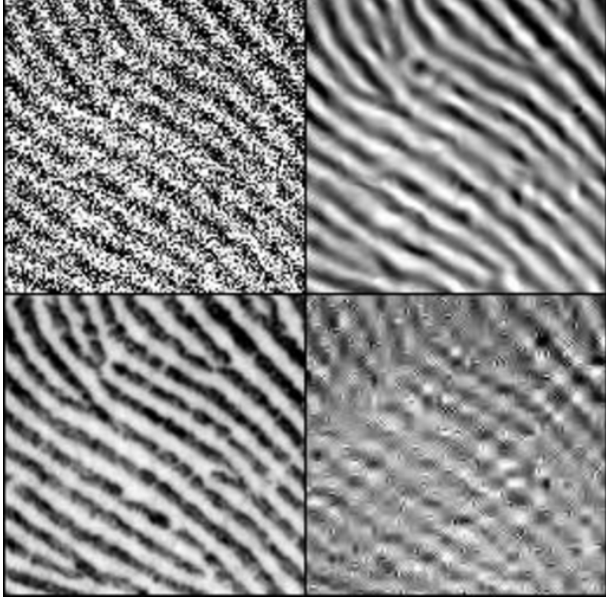
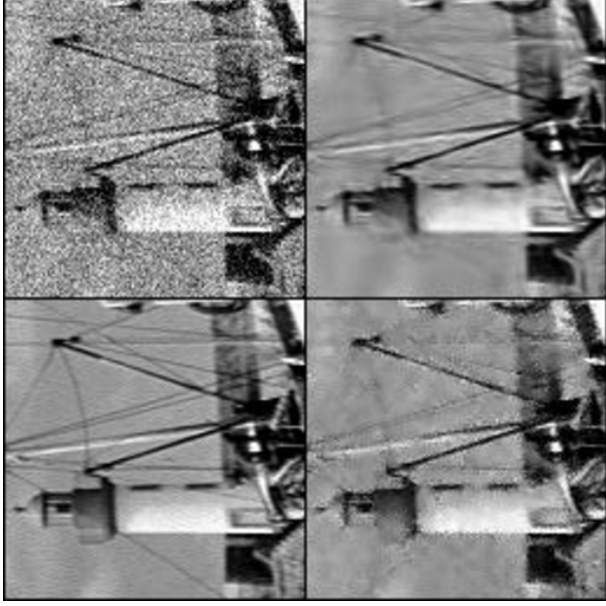
Débruitage

Débruitage



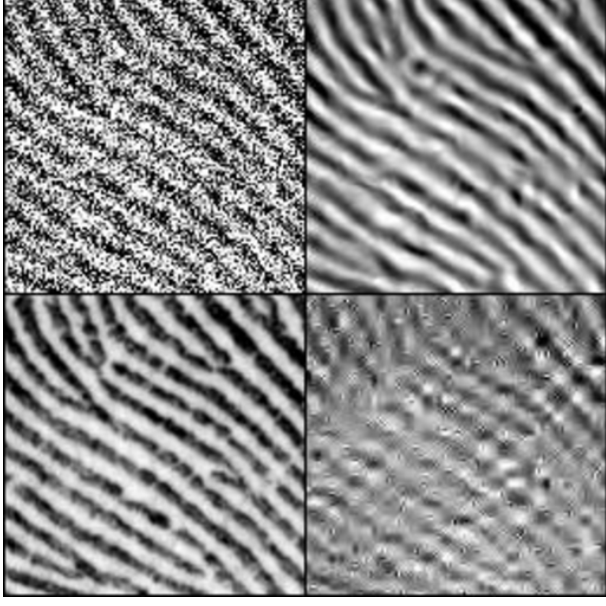
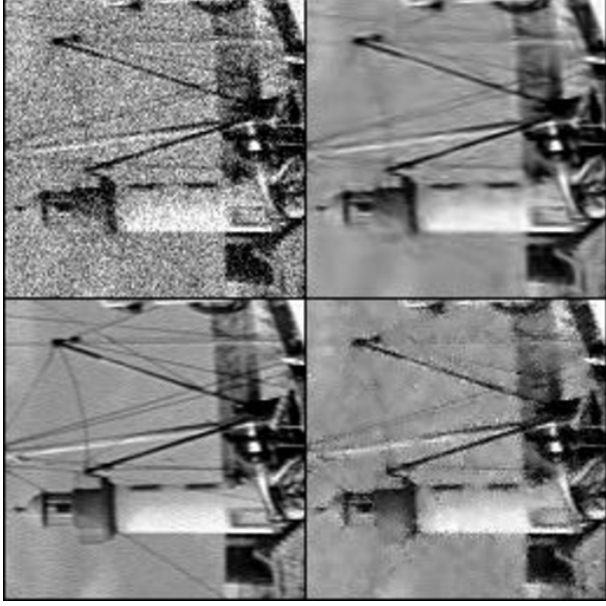
- Portilla, Simoncelli et al. : steerable pyramid.

Débruitage



- *Portilla, Simoncelli et al.* : steerable pyramid.
- Modélisation des coefficients par mélanges de gaussiennes.

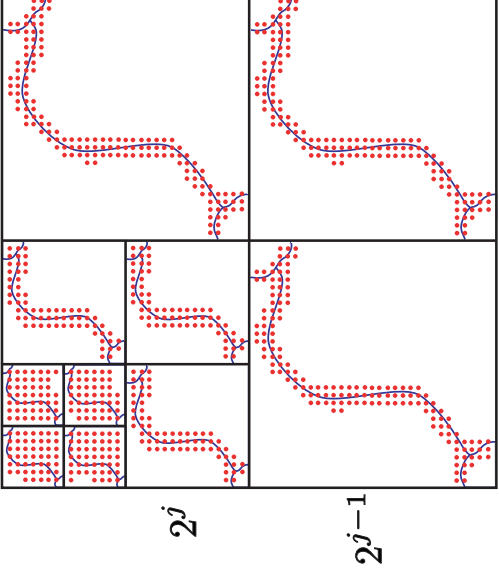
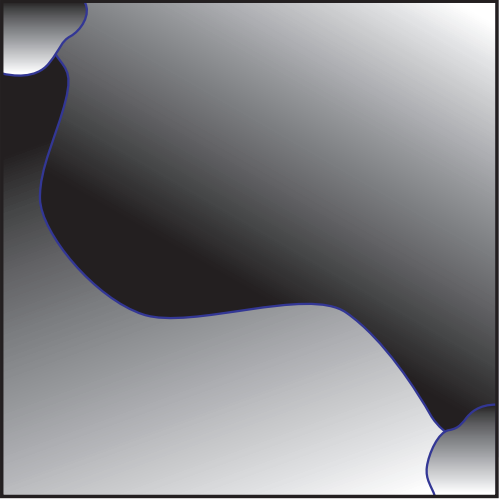
Débruitage



- *Portilla, Simoncelli et al.* : steerable pyramid.
- Modélisation des coefficients par mélanges de gaussiennes.
- Estimation locale des variables cachées.

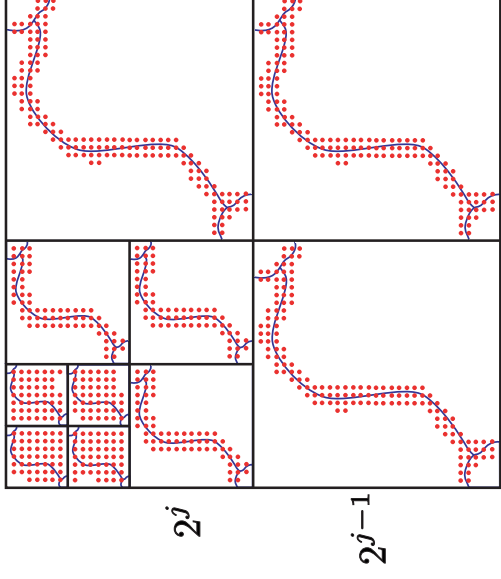
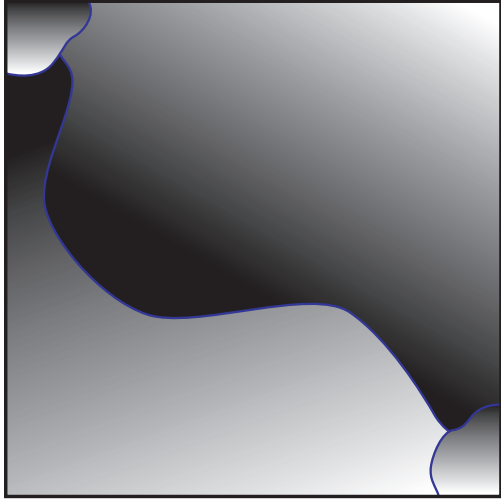
Retour vers les ondelettes

Retour vers les ondelettes



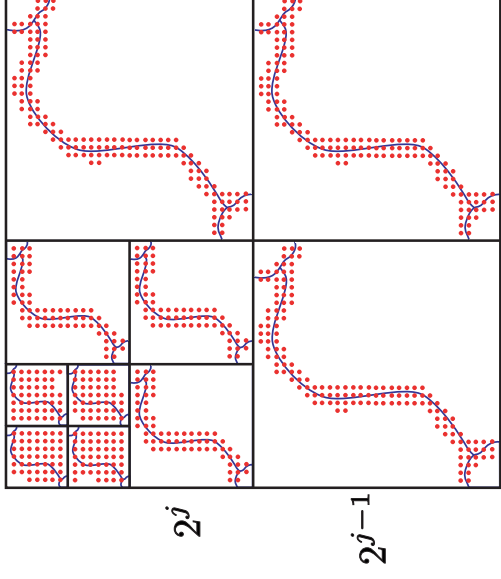
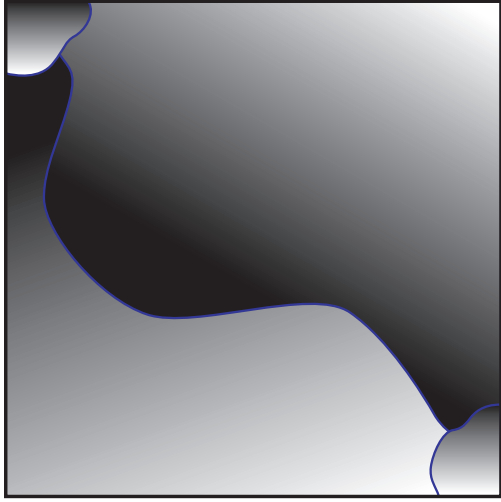
- À chaque échelle, comment approcher les coefficients non nuls (comportement chaotique) ?

Retour vers les ondelettes



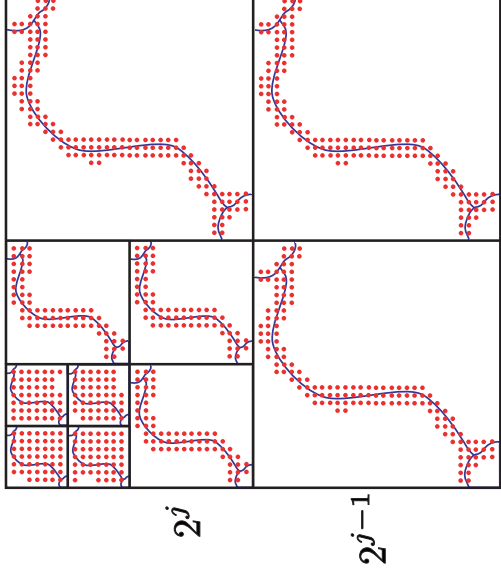
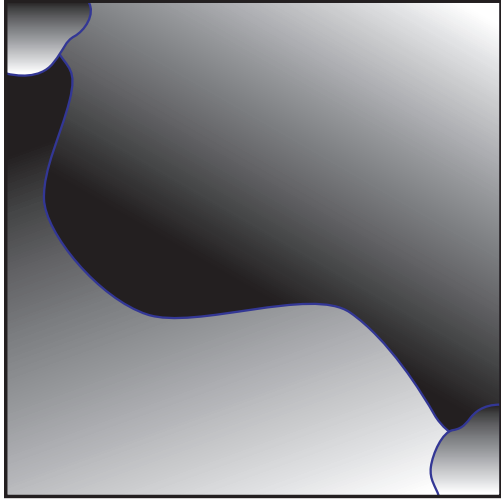
- À chaque échelle, comment approcher les coefficients non nuls (comportement chaotique) ?
- Utilisation de modèles paramétrés projetés sur les ondelettes : “wedgelets” et “wedgeprints” de *Baraniuk, Romberg, Wakin* et *Dragotti, Vetterli* (discontinuités le long de courbes).

Retour vers les ondelettes



- À chaque échelle, comment approcher les coefficients non nuls (comportement chaotique) ?
- Utilisation de modèles paramétrés projetés sur les ondelettes : “wedgelets” et “wedgeprints” de *Baraniuk, Romberg, Wakin et Dragotti, Vetterli* (discontinuités le long de courbes).
- Problème avec les contours flous : $f = \tilde{f} \star h_s$.

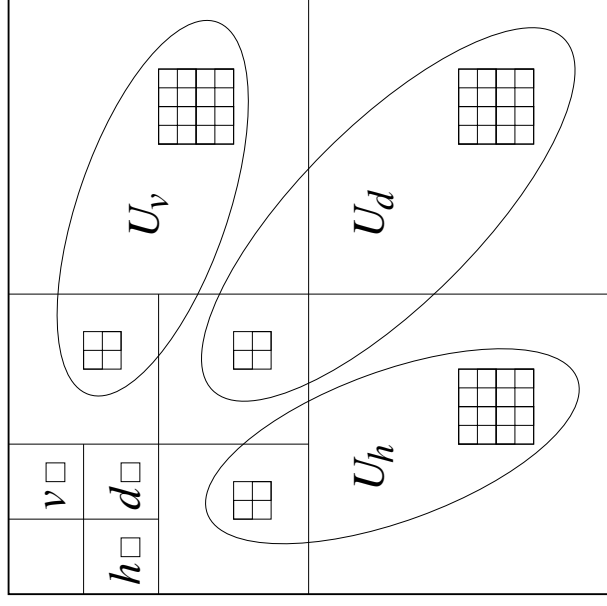
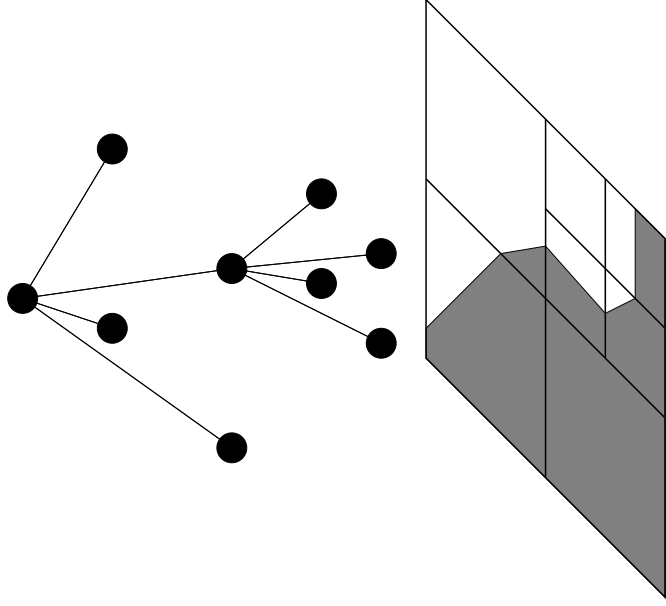
Retour vers les ondelettes



- À chaque échelle, comment approcher les coefficients non nuls (comportement chaotique) ?
- Utilisation de modèles paramétrés projetés sur les ondelettes : “wedgelets” et “wedgeprints” de Baraniuk, Romberg, Wakin et Dragotti, Vetterli (discontinuités le long de courbes).
- Problème avec les contours flous : $f = \tilde{f} \star h_s$.
- Modification de la transformée en ondelettes (Cohen).

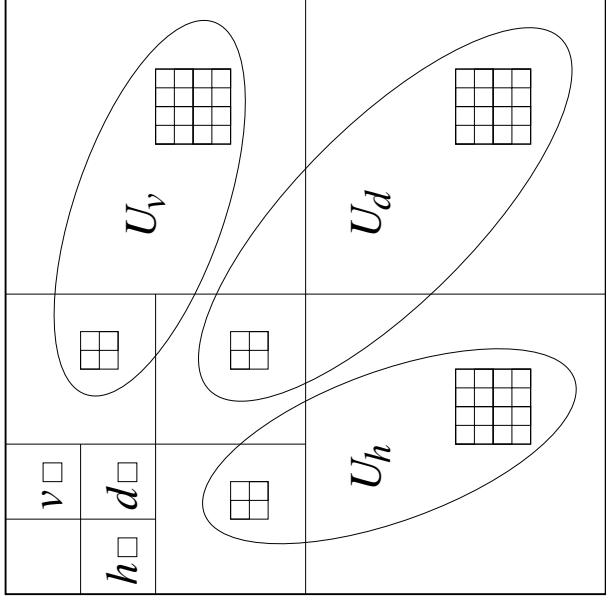
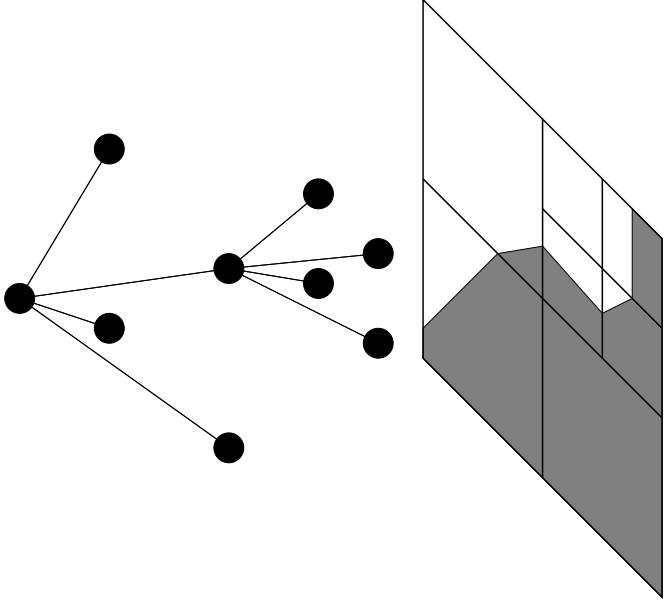
Compression

Compression



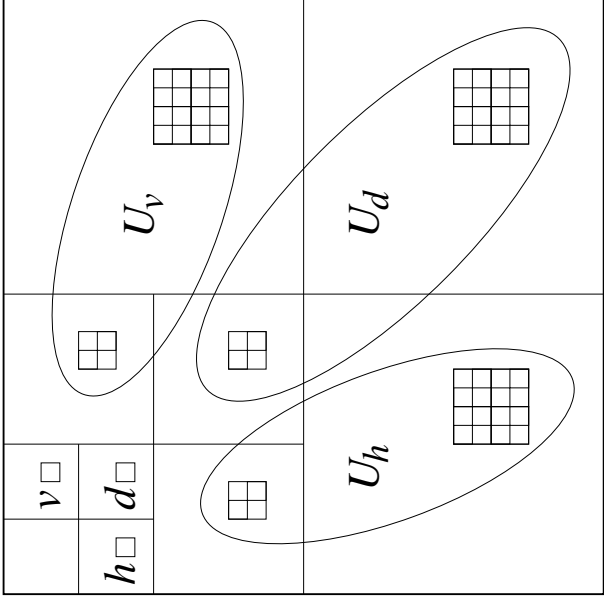
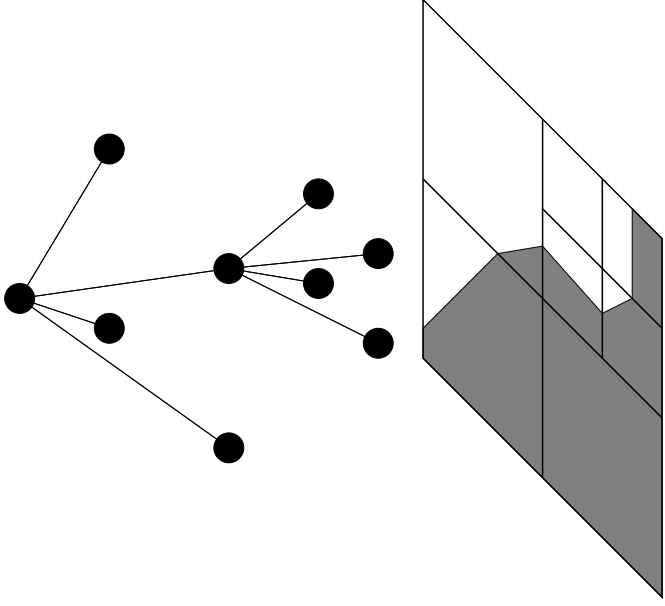
● Wedgelets : carrés dyadiques avec une discontinuité le long d'un segment.

Compression



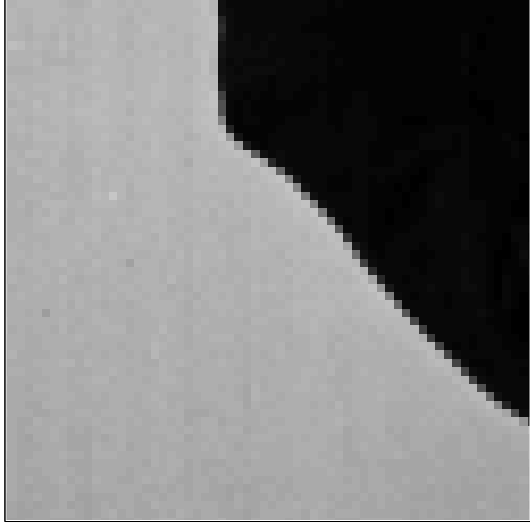
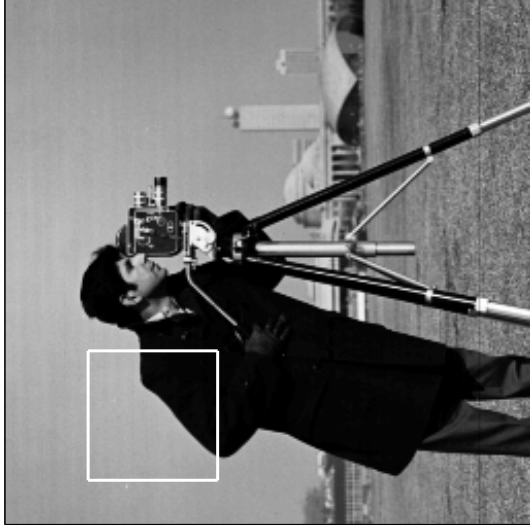
- Wedgelets : carrés dyadiques avec une discontinuité le long d'un segment.
- Décomposition en ondelettes et codage : coefficients, zerotree + wedgelets.

Compression



- Wedgelets : carrés dyadiques avec une discontinuité le long d'un segment.
- Décomposition en ondelettes et codage : coefficients, zerotree + wedgelets.
- Algorithme rapide d'optimisation.

Résultats



Ondelettes

28.8 dB

0.2 bits par pixel



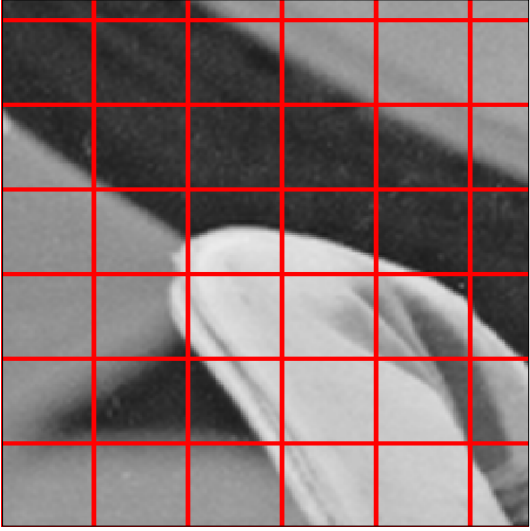
Wedgelets

30.2 dB

0.2 bits par pixel

Bandelettes

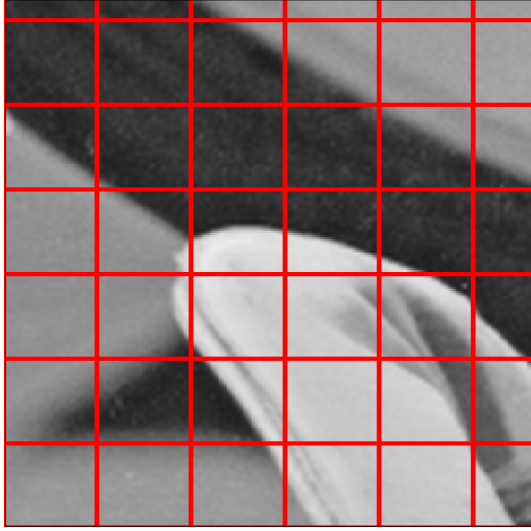
Bandelettes



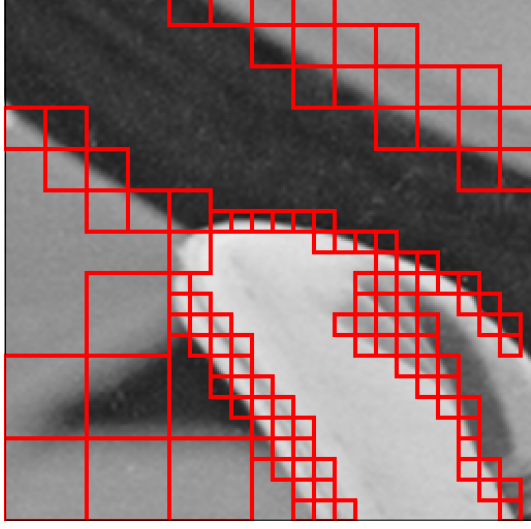
Fourier

Base

Bandelettes

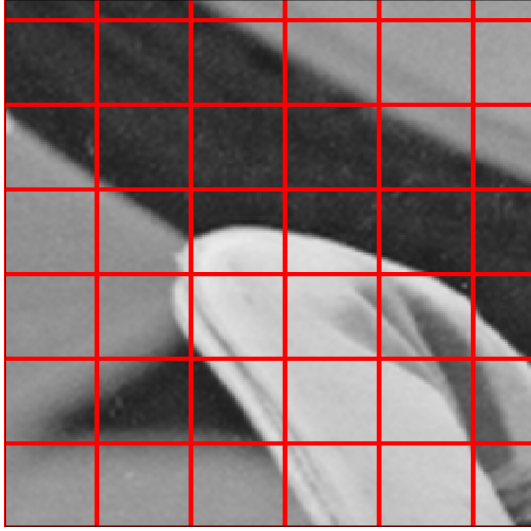


Fourier
Base



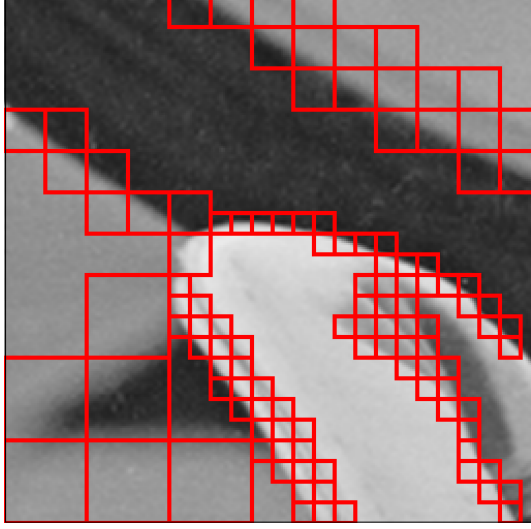
Ondelettes
Multiéchelle

Bandelettes



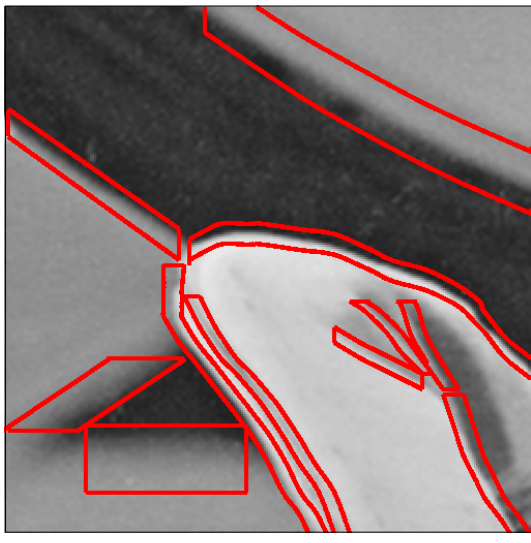
Fourier

Base



Ondelettes

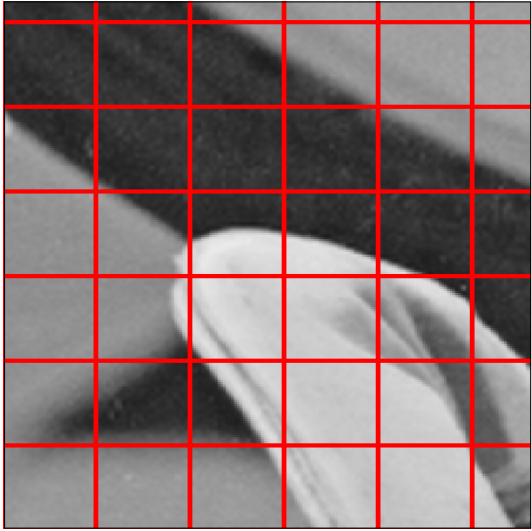
Multiéchelle



Bandelettes

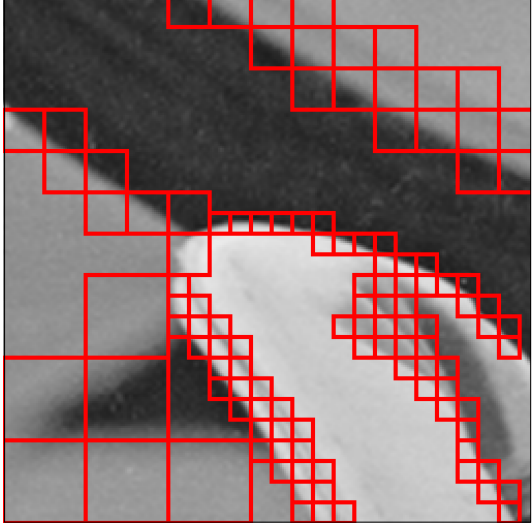
Géométrie

Bandelettes



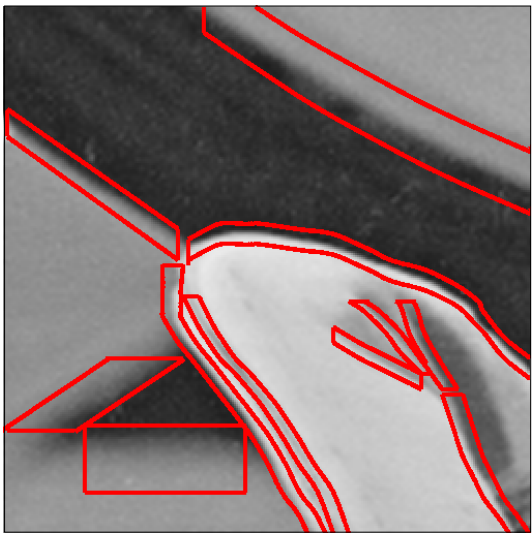
Fourier

Base



Ondelettes

Multiéchelle

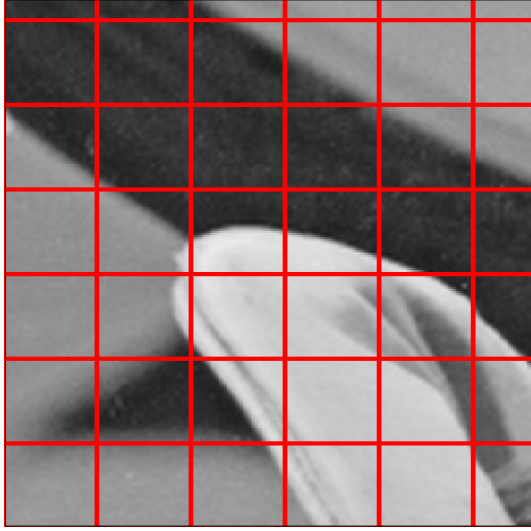


Bandelettes

Géométrie

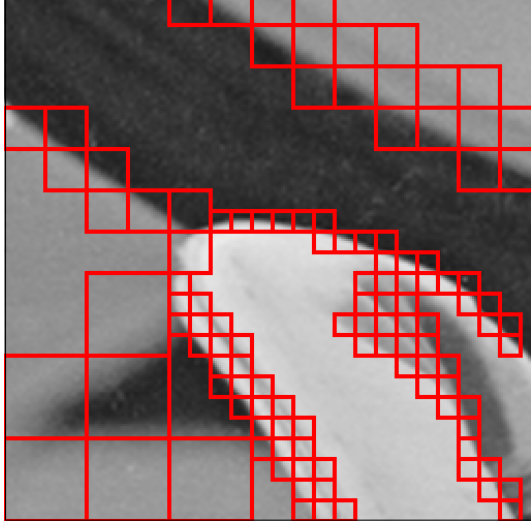
- Coût : adaptativité, choix de la géométrie.

Bandelettes



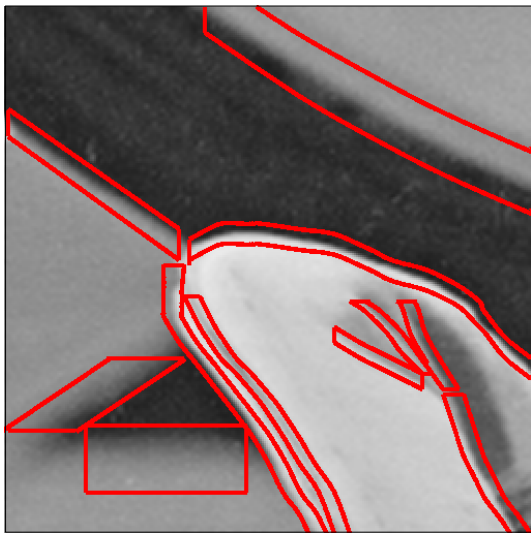
Fourier

Base



Ondelettes

Multiéchelle

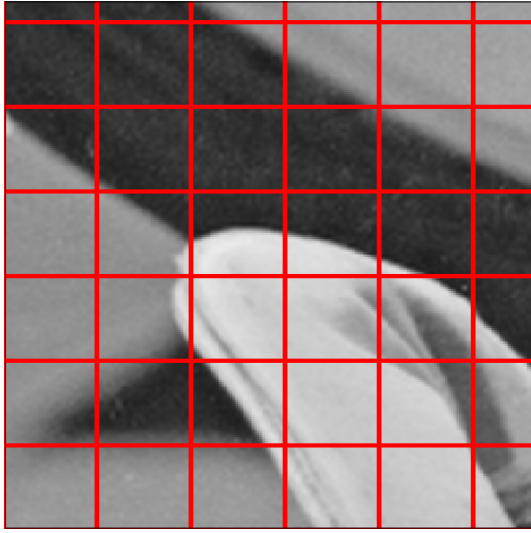


Bandelettes

Géométrie

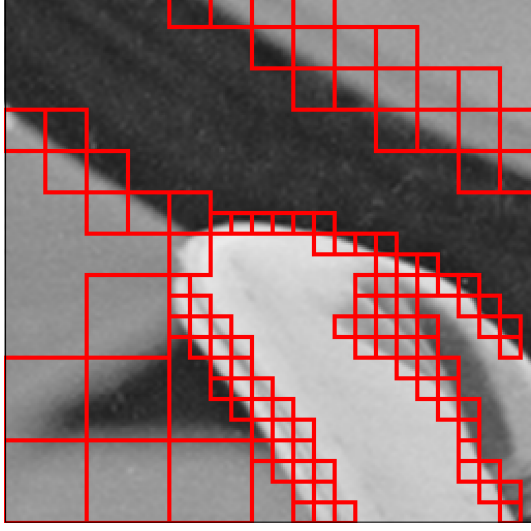
- Coût : adaptativité, choix de la géométrie.
- Algorithme rapide pour ce choix.

Bandelettes



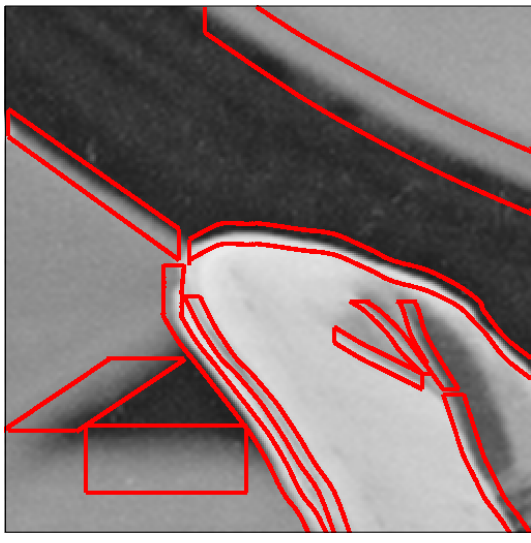
Fourier

Base



Ondelettes

Multiéchelle

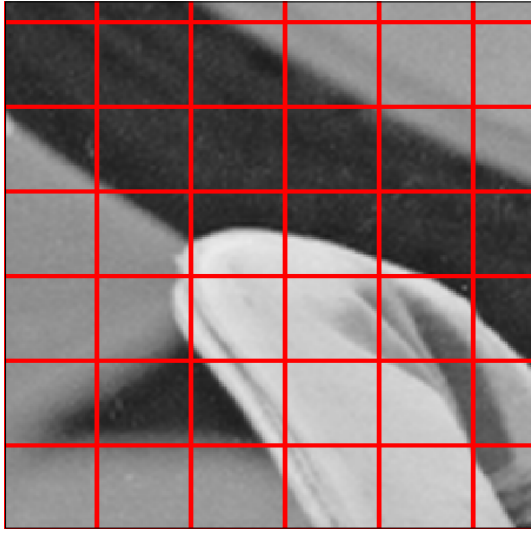


Bandelettes

Géométrie

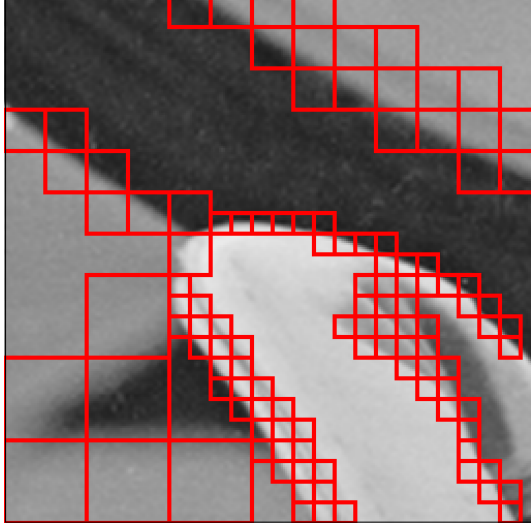
- Coût : adaptativité, choix de la géométrie.
- Algorithme rapide pour ce choix.
- Preuve théorique de l'efficacité.

Bandelettes



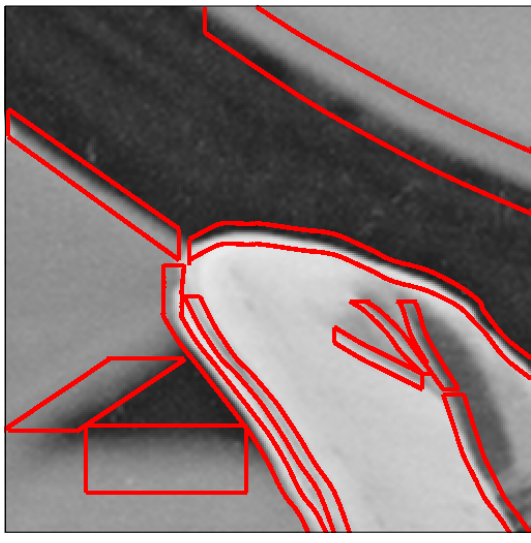
Fourier

Base



Ondelettes

Multiéchelle



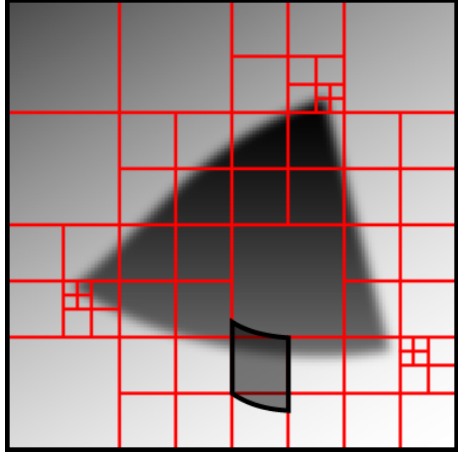
Bandelettes

Géométrie

- Coût : adaptativité, choix de la géométrie.
- Algorithme rapide pour ce choix.
- Preuve théorique de l'efficacité.
- Implémentation mais pas d'optimisation fine.

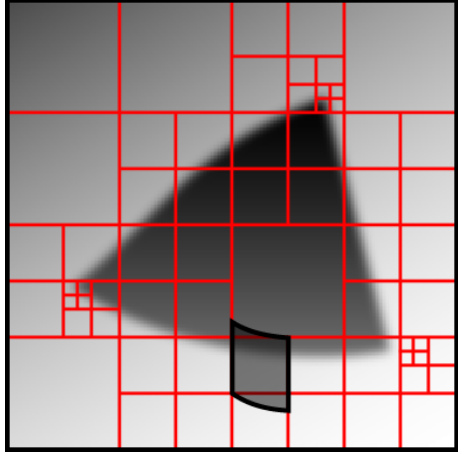
Bandelettes

Bandelettes



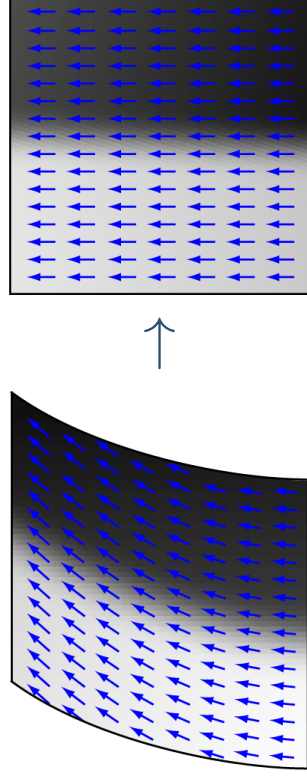
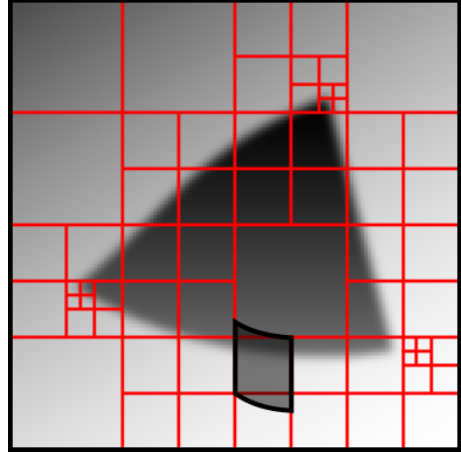
- Image $\mathbf{C}^\alpha$ – $\mathbf{C}^\alpha$ simple

Bandelettes



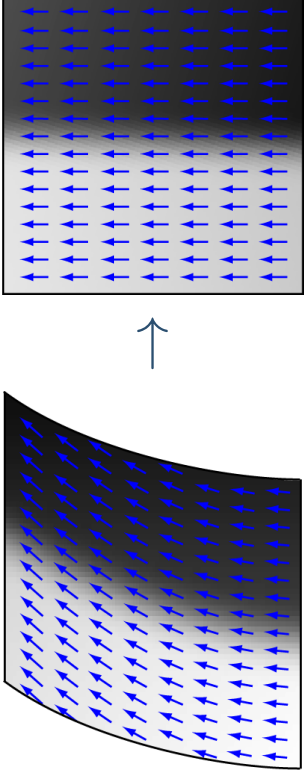
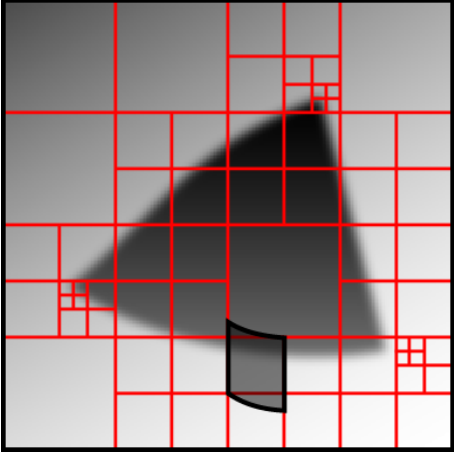
- Image $\mathbf{C}^\alpha$ – $\mathbf{C}^\alpha$ simple par morceaux.

Bandelettes



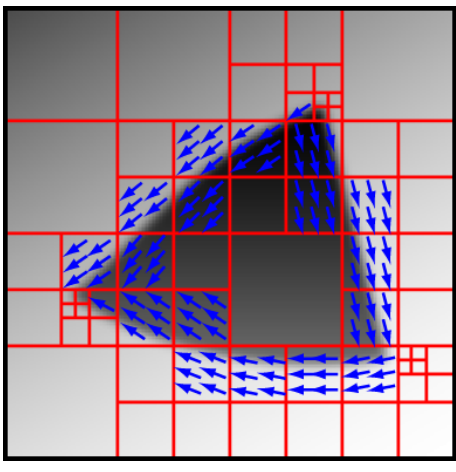
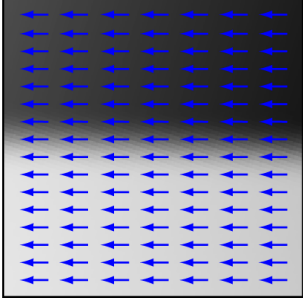
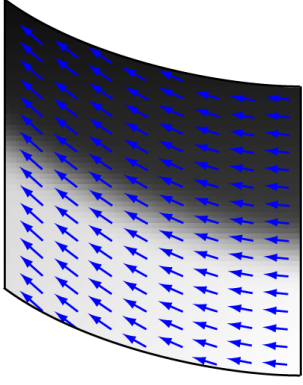
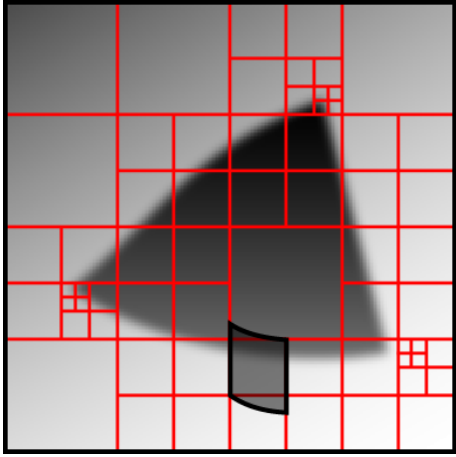
- Image $\mathbf{C}^\alpha$ – $\mathbf{C}^\alpha$ simple par morceaux.
- Déformation locale $\implies$ singularité verticale/horizontale.

Bandelettes



- Image $\mathbf{C}^\alpha$ – $\mathbf{C}^\alpha$ simple par morceaux.
- Déformation locale $\implies$ singularité verticale/horizontale.
- Bandelettes locales : préimage d'une base adaptée.

Bandelettes



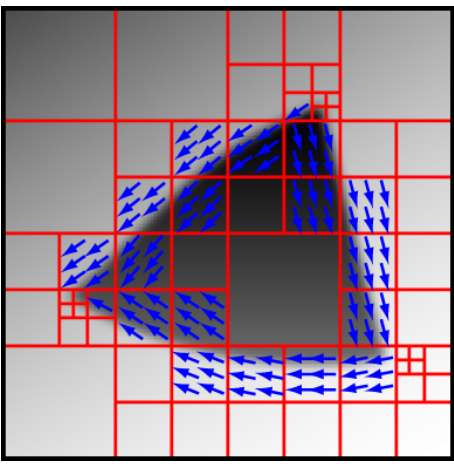
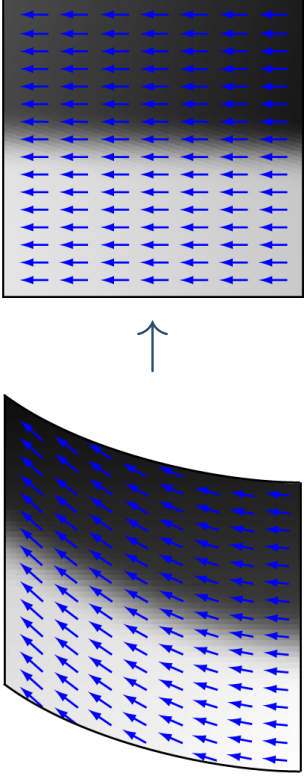
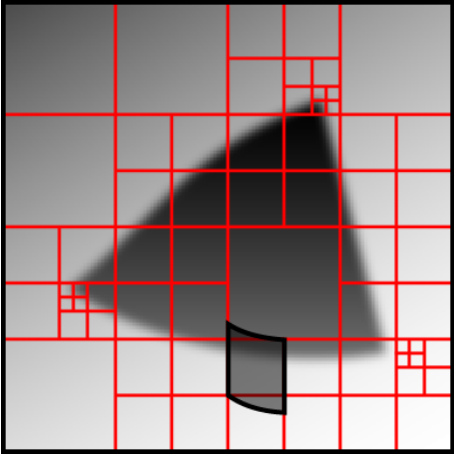
- Image $\mathbf{C}^\alpha$ – $\mathbf{C}^\alpha$ simple par morceaux.

- Déformation locale $\implies$ singularité verticale/horizontale.

- Bandelettes locales : préimage d'une base adaptée.

- Base de bandelettes : segmentation dyadique + une géométrie par carré.

Bandelettes



- Image $\mathbf{C}^\alpha - \mathbf{C}^\alpha$ simple par morceaux.

- Déformation locale $\implies$ singularité verticale/horizontale.

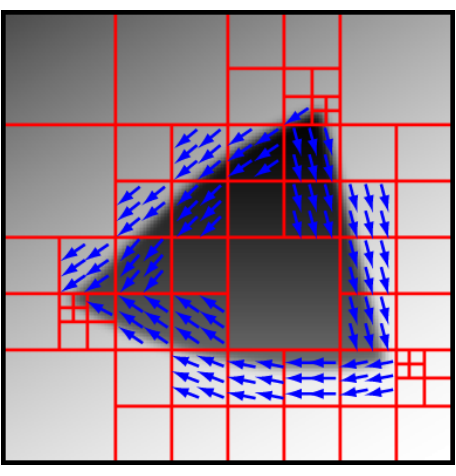
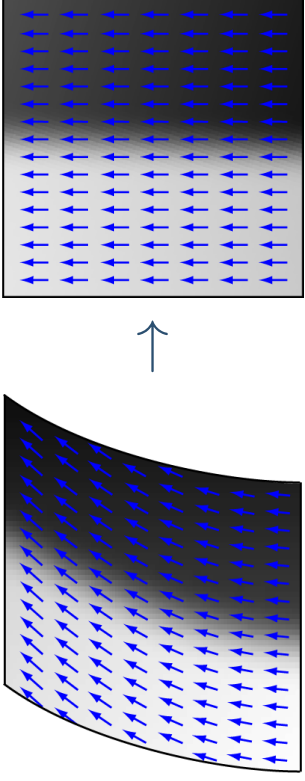
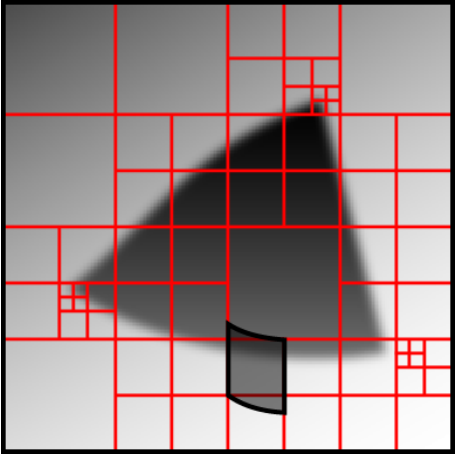
- Bandelettes locales : préimage d'une base adaptée.

- Base de bandelettes : segmentation dyadique + une géométrie par carré.

- **Théorème** : Si f est $\mathbf{C}^\alpha - \mathbf{C}^\alpha$, alors, dans une meilleure base,

$$\|f - f_M\|^2 \leq C(\log M)M^{-\alpha}.$$

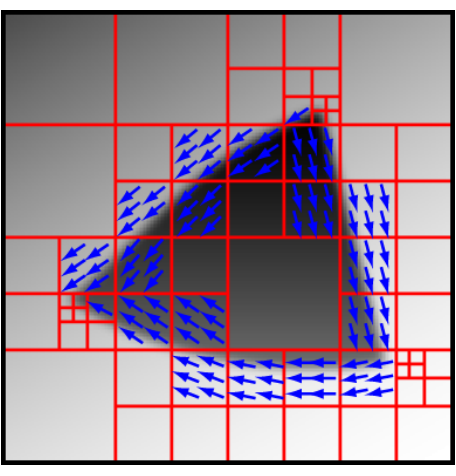
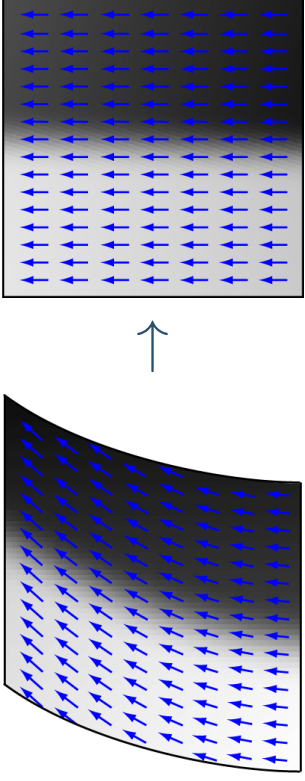
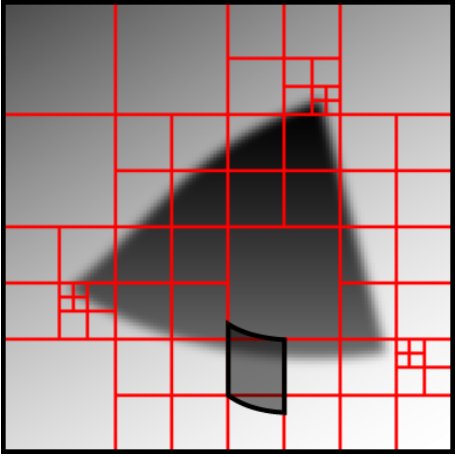
Bandelettes



- Image $\mathbf{C}^\alpha - \mathbf{C}^\alpha$ simple par morceaux.
- Déformation locale $\implies$ singularité verticale/horizontale.
- Bandelettes locales : préimage d'une base adaptée.
- Base de bandelettes : segmentation dyadique + une géométrie par carré.
- **Théorème** : Si f est $\mathbf{C}^\alpha - \mathbf{C}^\alpha$, alors, dans une meilleure base,

$$\|f - f_M\|^2 \leq C(\log M)M^{-\alpha}.$$
- Approche Lagrangienne : minimisation de $\|f - f_M\|^2 + T^2 M \implies$ seuillage dans une base fixe (facile) et recherche d'une meilleure base (difficile).

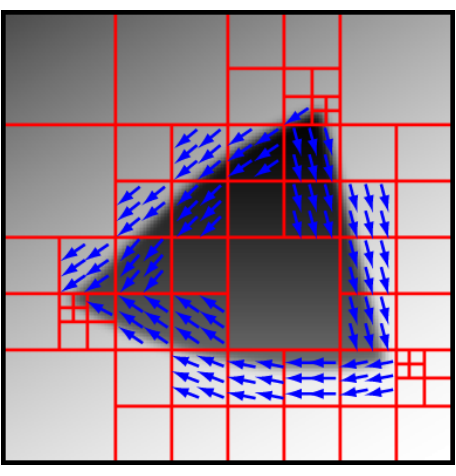
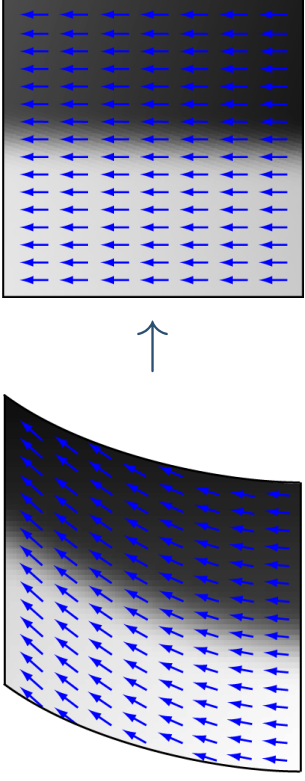
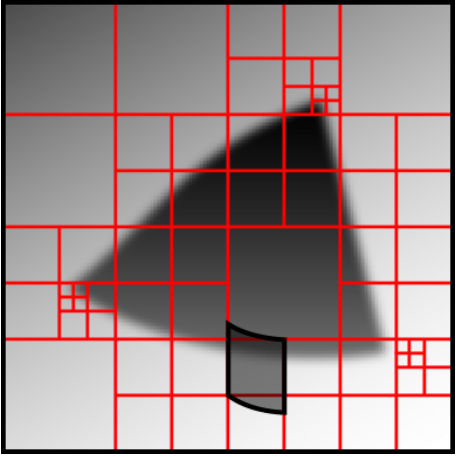
Bandelettes



- Image $\mathbf{C}^\alpha - \mathbf{C}^\alpha$ simple par morceaux.
- Déformation locale $\implies$ singularité verticale/horizontale.
- Bandelettes locales : préimage d'une base adaptée.
- Base de bandelettes : segmentation dyadique + une géométrie par carré.
- **Théorème** : Si f est $\mathbf{C}^\alpha - \mathbf{C}^\alpha$, alors, dans une meilleure base,

$$\|f - f_M\|^2 \leq C(\log M)M^{-\alpha} .$$
- Approche Lagrangienne : minimisation de $\|f - f_M\|^2 + T^2 M \implies$ seuillage dans une base fixe (facile) et recherche d'une meilleure base (difficile).
- Structure hiérarchique de la segmentation et additivité du Lagrangien : algorithme de meilleure base de Wickerhauser (CART).

Bandelettes



- Image $\mathbf{C}^\alpha - \mathbf{C}^\alpha$ simple par morceaux.

- Déformation locale $\implies$ singularité verticale/horizontale.

- Bandelettes locales : préimage d'une base adaptée.

- Base de bandelettes : segmentation dyadique + une géométrie par carré.

- **Théorème** : Si f est $\mathbf{C}^\alpha - \mathbf{C}^\alpha$, alors, dans une meilleure base,

$$\|f - f_M\|^2 \leq C(\log M)M^{-\alpha} .$$

- Approche Lagrangienne : minimisation de $\|f - f_M\|^2 + T^2 M \implies$ seuillage dans une base fixe (facile) et recherche d'une meilleure base (difficile).

- Structure hiérarchique de la segmentation et additivité du Lagrangien : algorithme de meilleure base de Wickerhauser (CART).

- Exploration exhaustive des géométries dans chaque carré ($\neq$ détection).

Compression d'image

Compression d'image

- Lien entre la compression et l'approximation non linéaire.

Compression d'image

- Lien entre la compression et l'approximation non linéaire.
- Une image comprimée $\tilde{f}$ est obtenue à partir de f en :
 - choisissant une segmentation et un flot quantifié,
 - quantifiant uniformément les coefficients de bandelettes avec un pas de taille Δ .
 - effectuant le codage entropique de tous les paramètres avec un total de R bits.

Compression d'image

- Lien entre la compression et l'approximation non linéaire.
- Une image comprimée $\tilde{f}$ est obtenue à partir de f en :
 - choisissant une segmentation et un flot quantifié,
 - quantifiant uniformément les coefficients de bandelettes avec un pas de taille Δ .
 - effectuant le codage entropique de tous les paramètres avec un total de R bits.
- Optimisation de la géométrie (segmentation et flot) pour minimiser le lagrangien :

$$\|f - \tilde{f}\|^2 + \lambda \Delta^2 R$$

Compression d'image

- Lien entre la compression et l'approximation non linéaire.
- Une image comprimée $\tilde{f}$ est obtenue à partir de f en :
 - choisissant une segmentation et un flot quantifié,
 - quantifiant uniformément les coefficients de bandelettes avec un pas de taille Δ .
 - effectuant le codage entropique de tous les paramètres avec un total de R bits.
- Optimisation de la géométrie (segmentation et flot) pour minimiser le lagrangien :
$$\|f - \tilde{f}\|^2 + \lambda \Delta^2 R$$
- $O(N^2 (\log N)^2)$ opérations.

Compression d'image

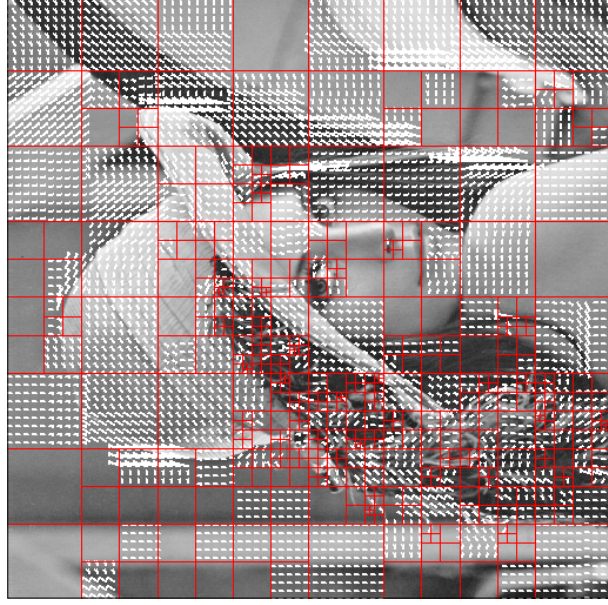
- 🔴 Lien entre la compression et l'approximation non linéaire.
- 🔴 Une image comprimée $\tilde{f}$ est obtenue à partir de f en :
 - 🟢 choisissant une segmentation et un flot quantifié,
 - 🟢 quantifiant uniformément les coefficients de bandelettes avec un pas de taille Δ .
 - 🟢 effectuant le codage entropique de tous les paramètres avec un total de R bits.
- 🔴 Optimisation de la géométrie (segmentation et flot) pour minimiser le lagrangien :

$$\|f - \tilde{f}\|^2 + \lambda \Delta^2 R$$

- 🔴 $O(N^2 (\log N)^2)$ opérations.
- 🔴 Résultat théorique :

$$\|f - \tilde{f}\|^2 \leqslant C R^{-\alpha} |\log R|^\alpha$$

Originale

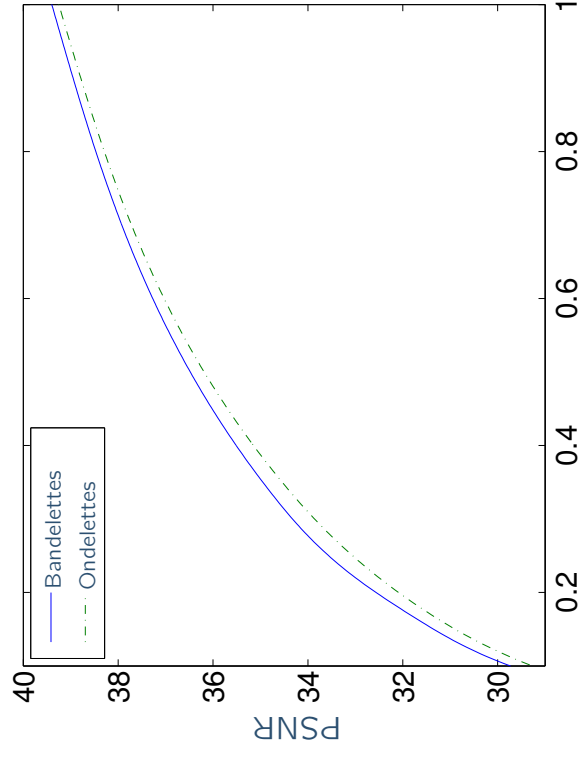


$$R/N^2 = 0,22 \text{ bpp}$$

Bandelettes (33,05 db)



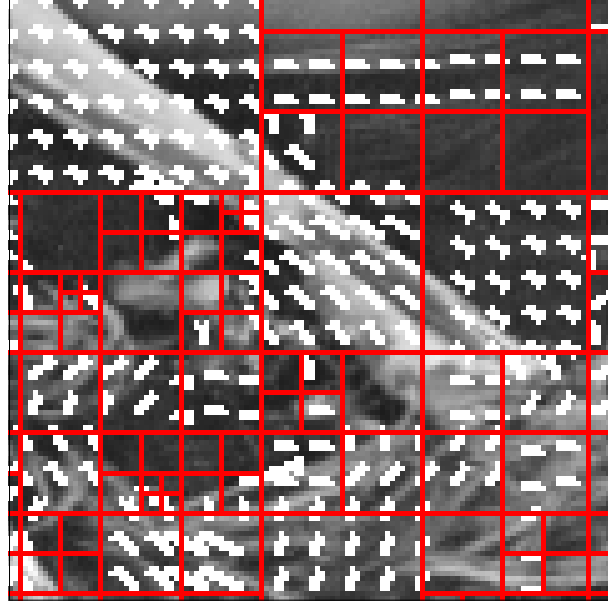
Distorsion-Débit



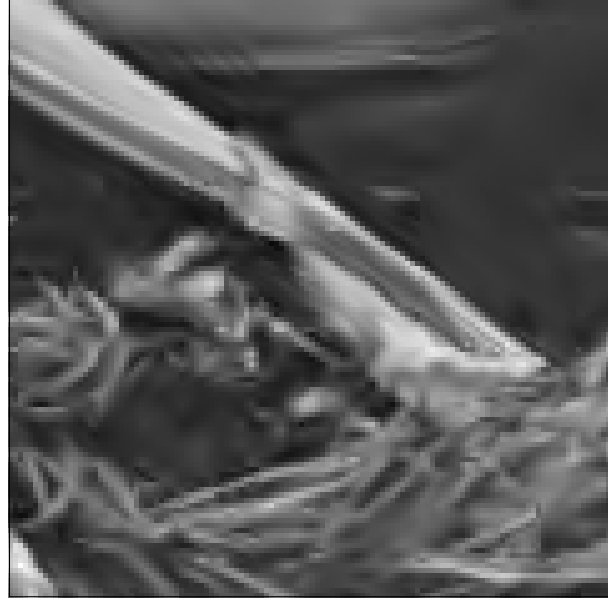
Ondelettes (R/N^2 32,54 db)



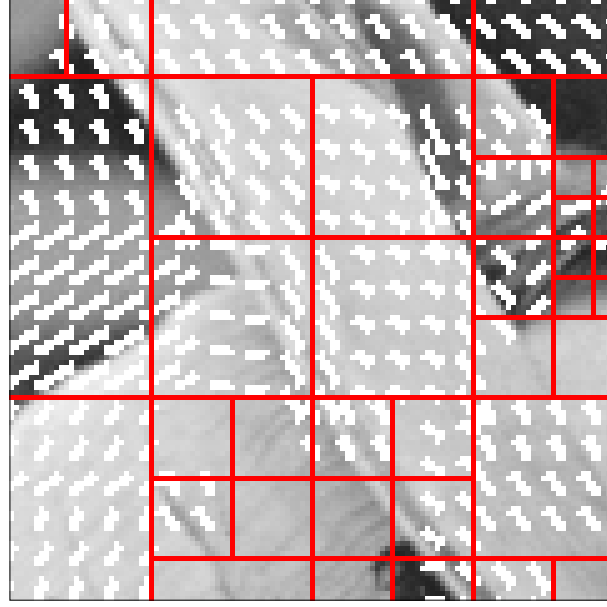
Originale



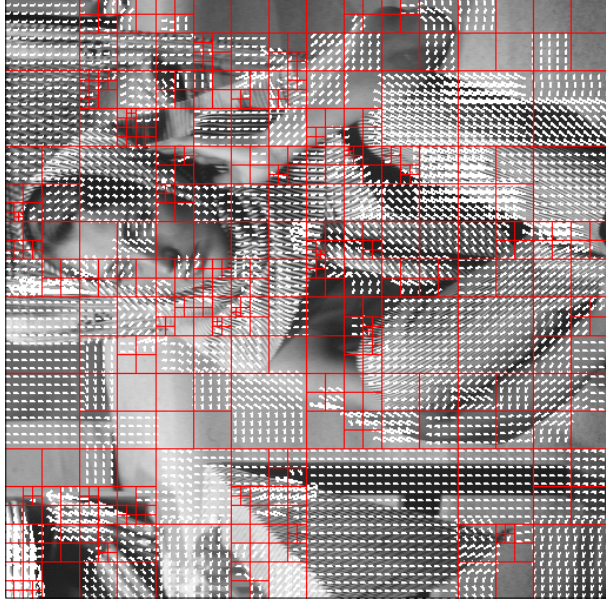
Bandelettes



Ondelettes



Originale

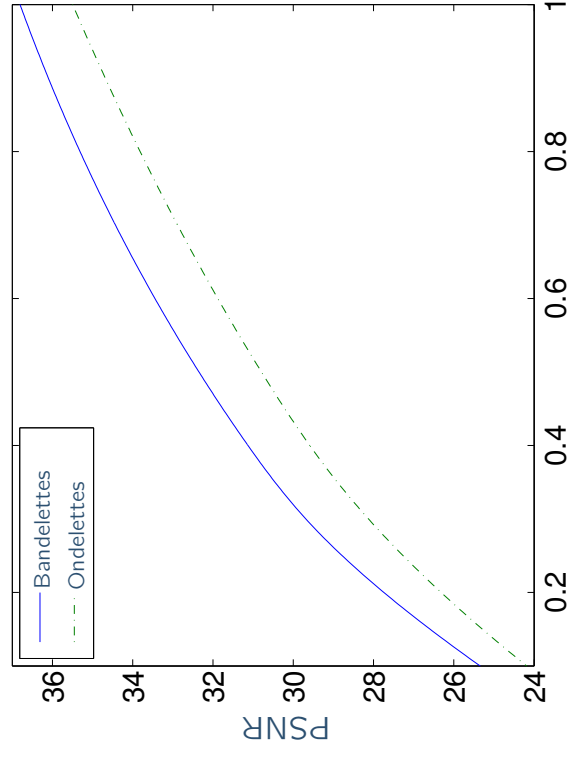


$R/N^2 = 0,40$ bpp

Bandelettes (31,22 db)



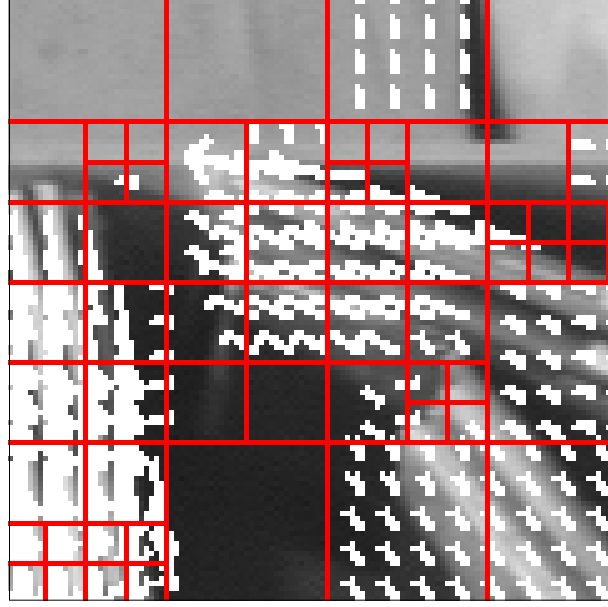
Distorsion-Débit



Ondelettes (R/N^2 , 68 db)



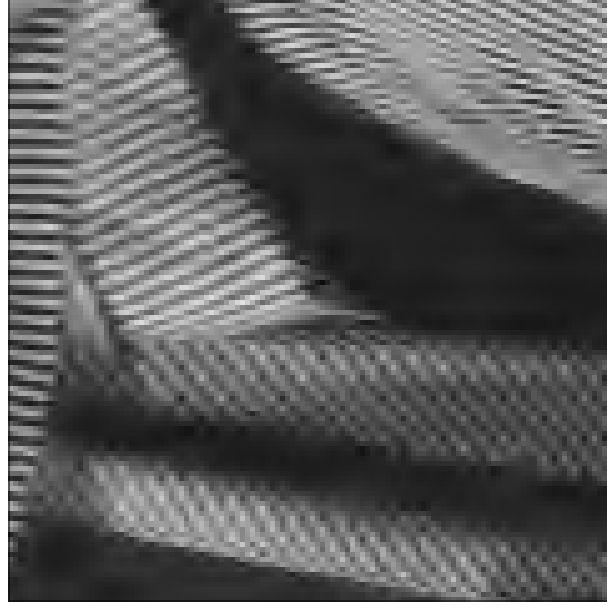
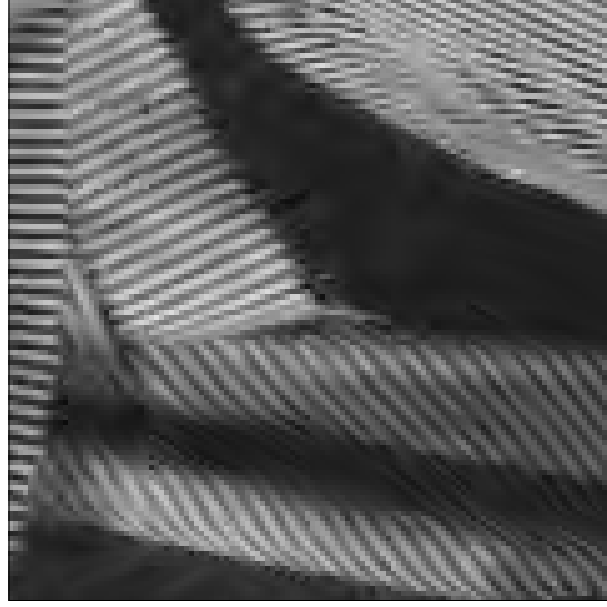
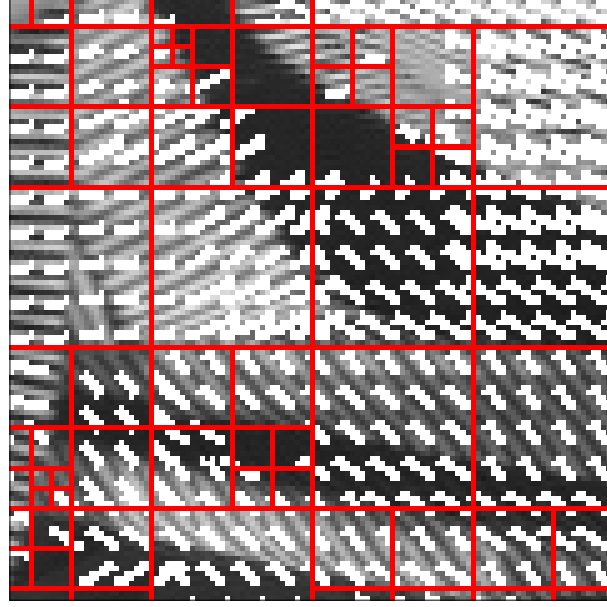
Originale



Bandelettes



Ondelettes

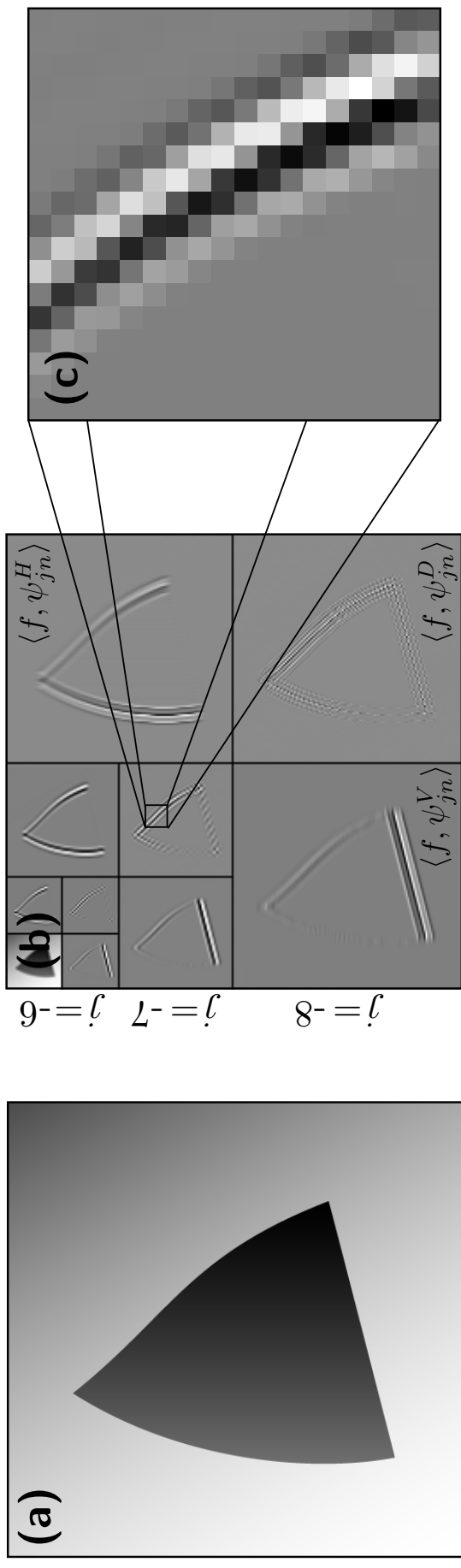


Bandelettes et géométrie multiéchelle

Bandelettes et géométrie multiéchelle

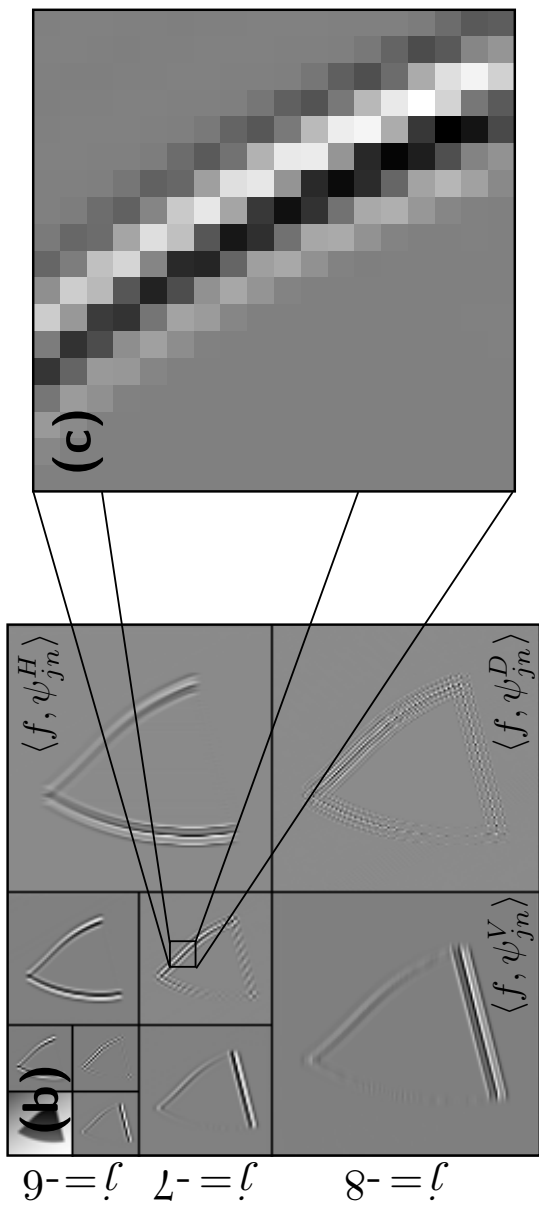
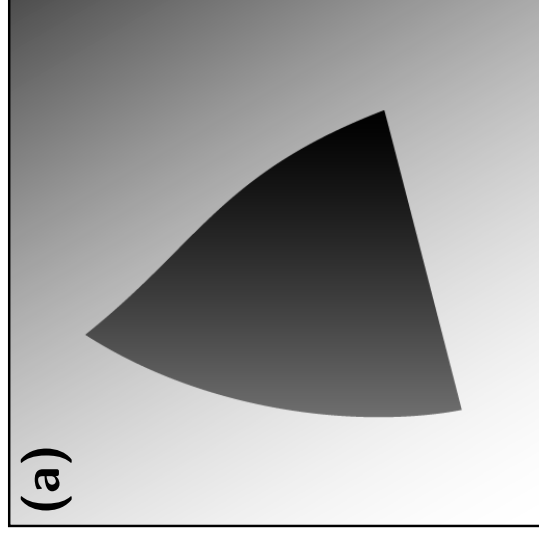
- Bandelettes : géométrie monoéchelle.

Bandelettes et géométrie multiéchelle



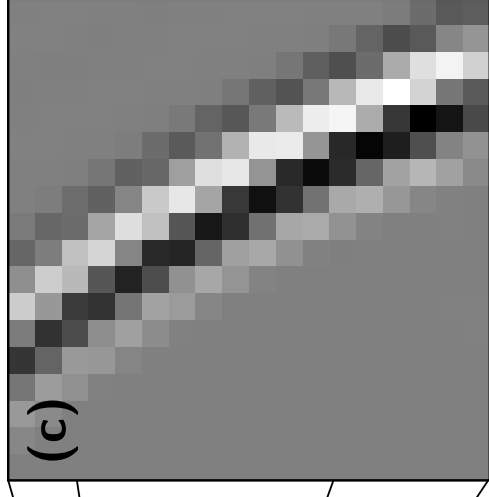
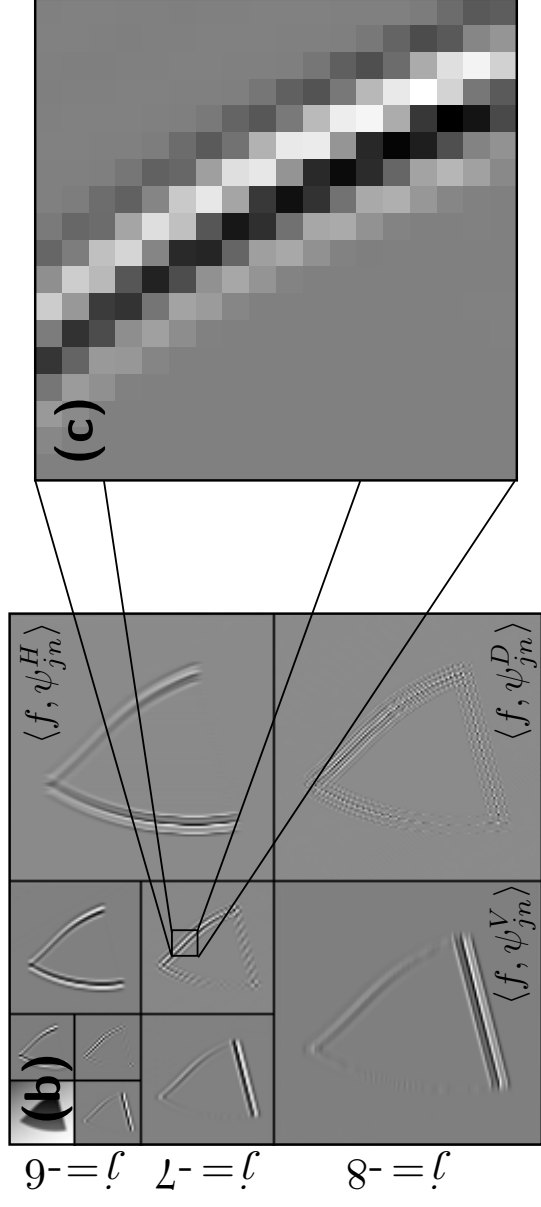
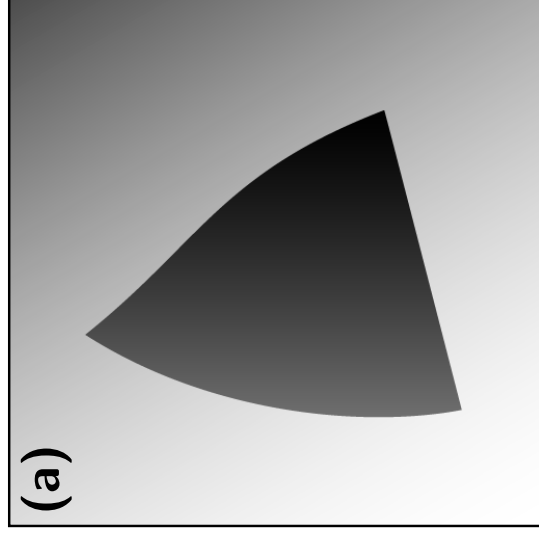
- Bandelettes : géométrie monoéchelle.
- Ondelettes : représentation multiéchelle.

Bandelettes et géométrie multiéchelle



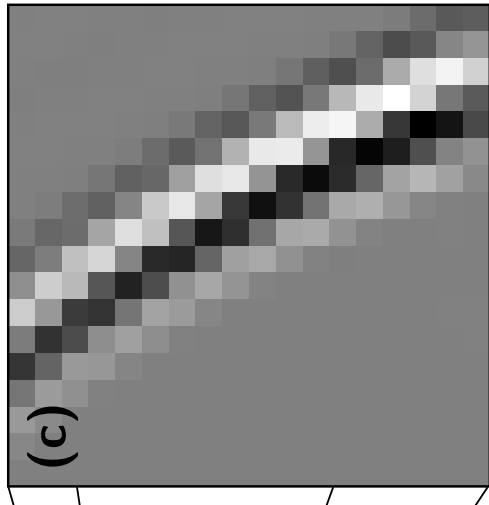
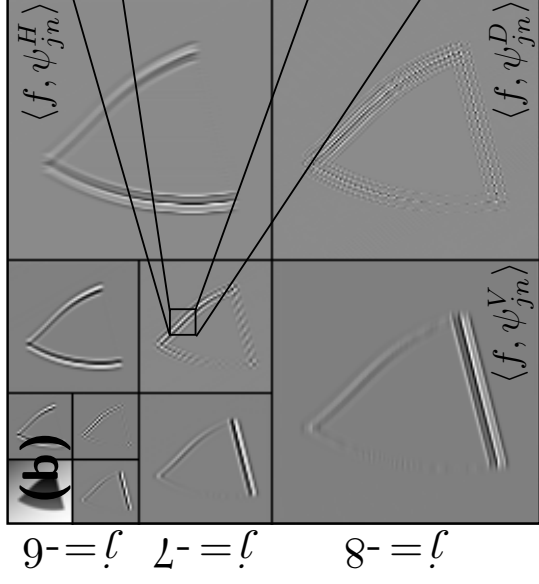
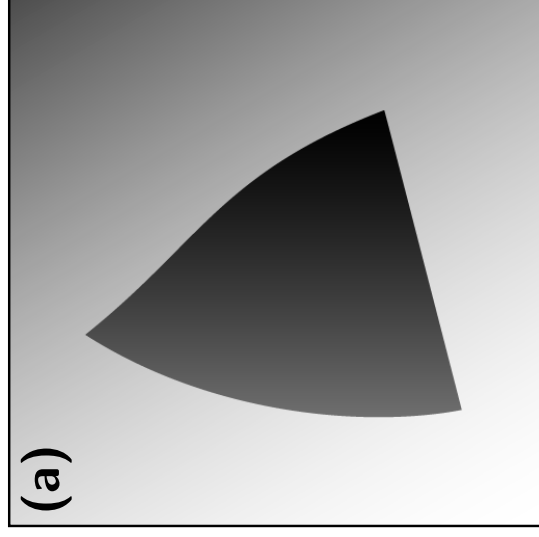
- Bandelettes : géométrie monoéchelle.
- Ondelettes : représentation multiéchelle.
- Comment combiner les deux ?

Bandelettes et géométrie multiéchelle



- Bandelettes : géométrie monoéchelle.
- Ondelettes : représentation multiéchelle.
- Comment combiner les deux ?
- Bandelettes sur les coefficients d'ondelettes !

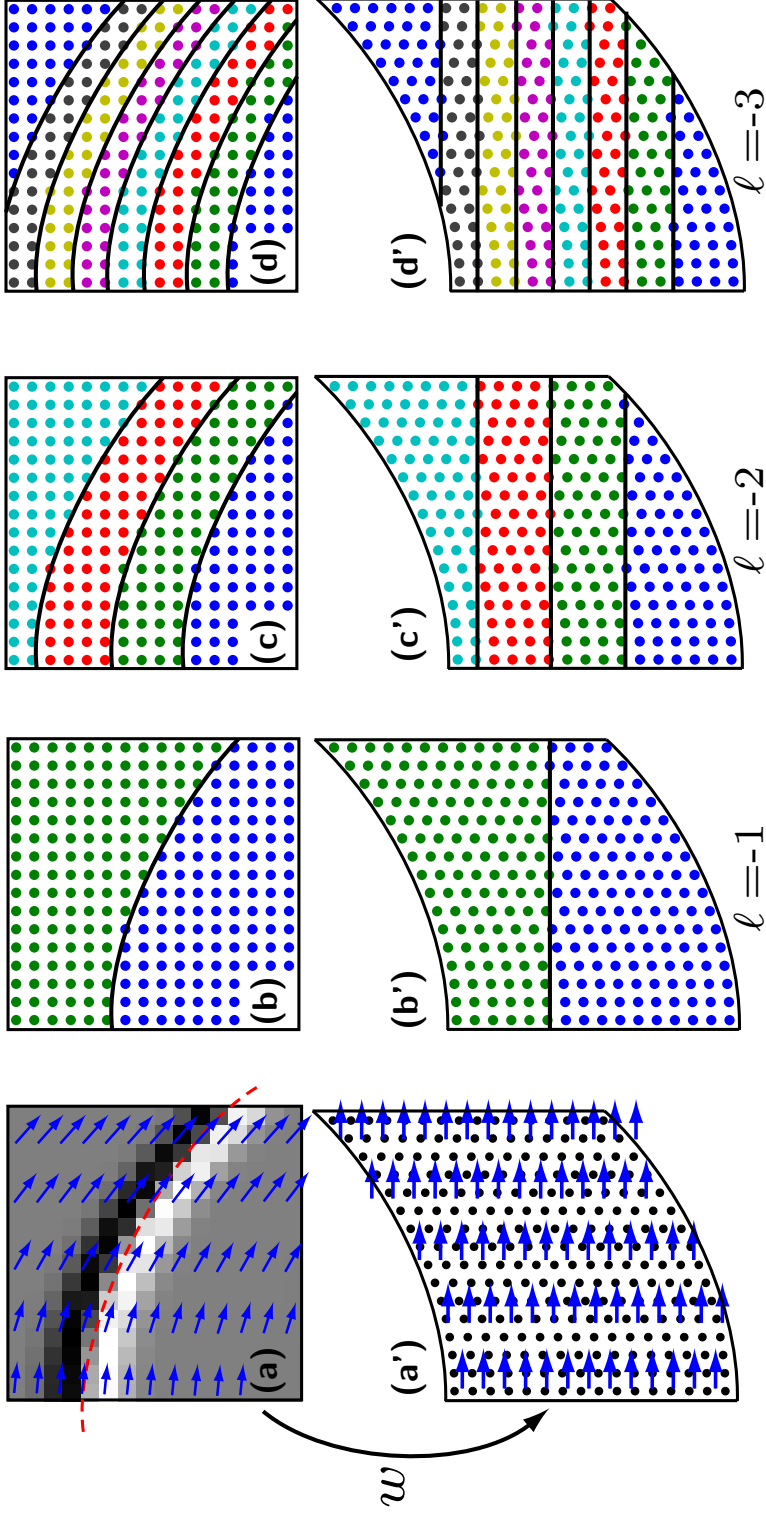
Bandelettes et géométrie multiéchelle



- Bandelettes : géométrie monoéchelle.
- Ondelettes : représentation multiéchelle.
- Comment combiner les deux ?
- Bandelettes sur les coefficients d'ondelettes !
- Analogies avec le système visuel.
- Idées similaires dans JPEG2000, Edgeprint,...

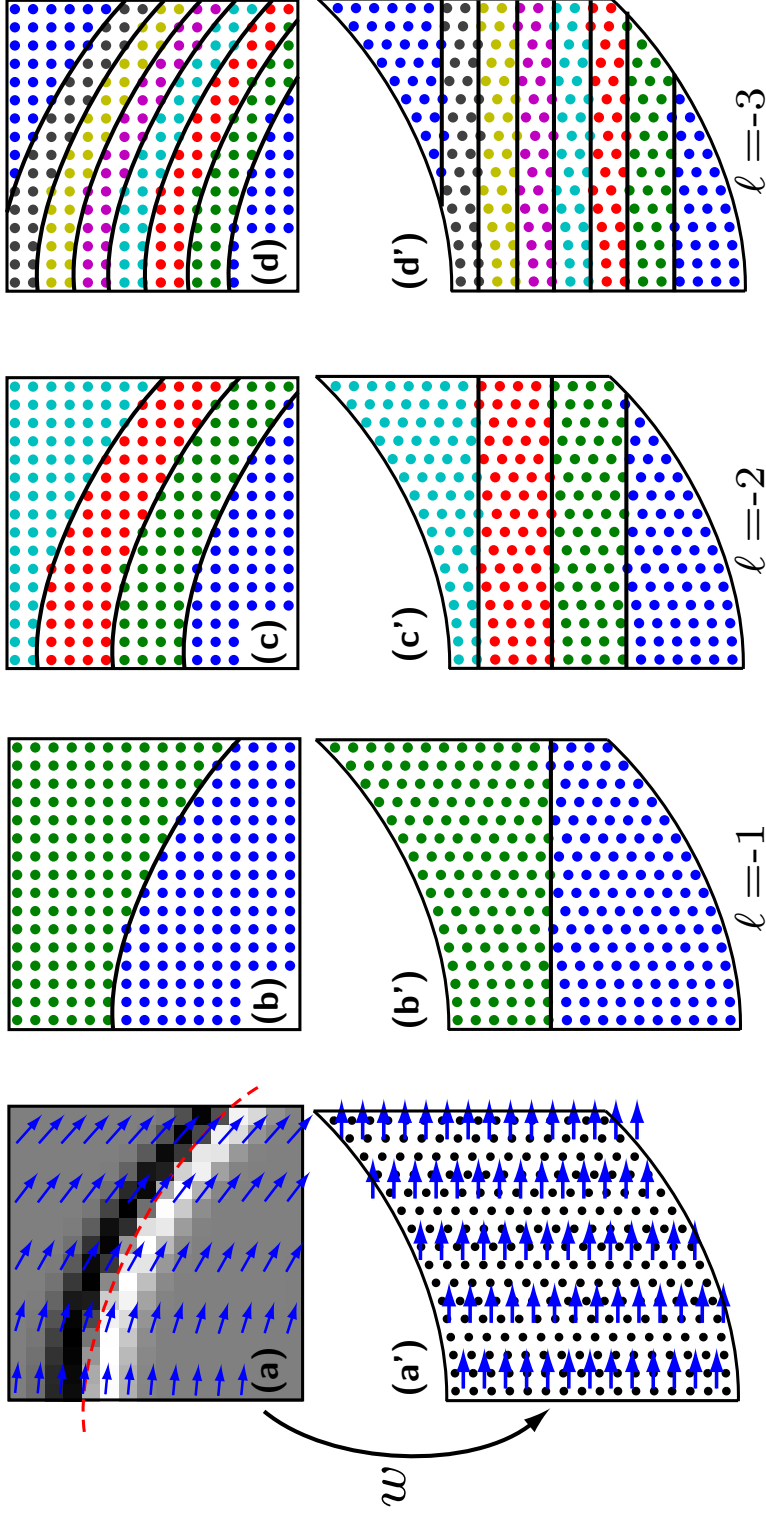
Base locale de bandelettes

Base locale de bandelettes



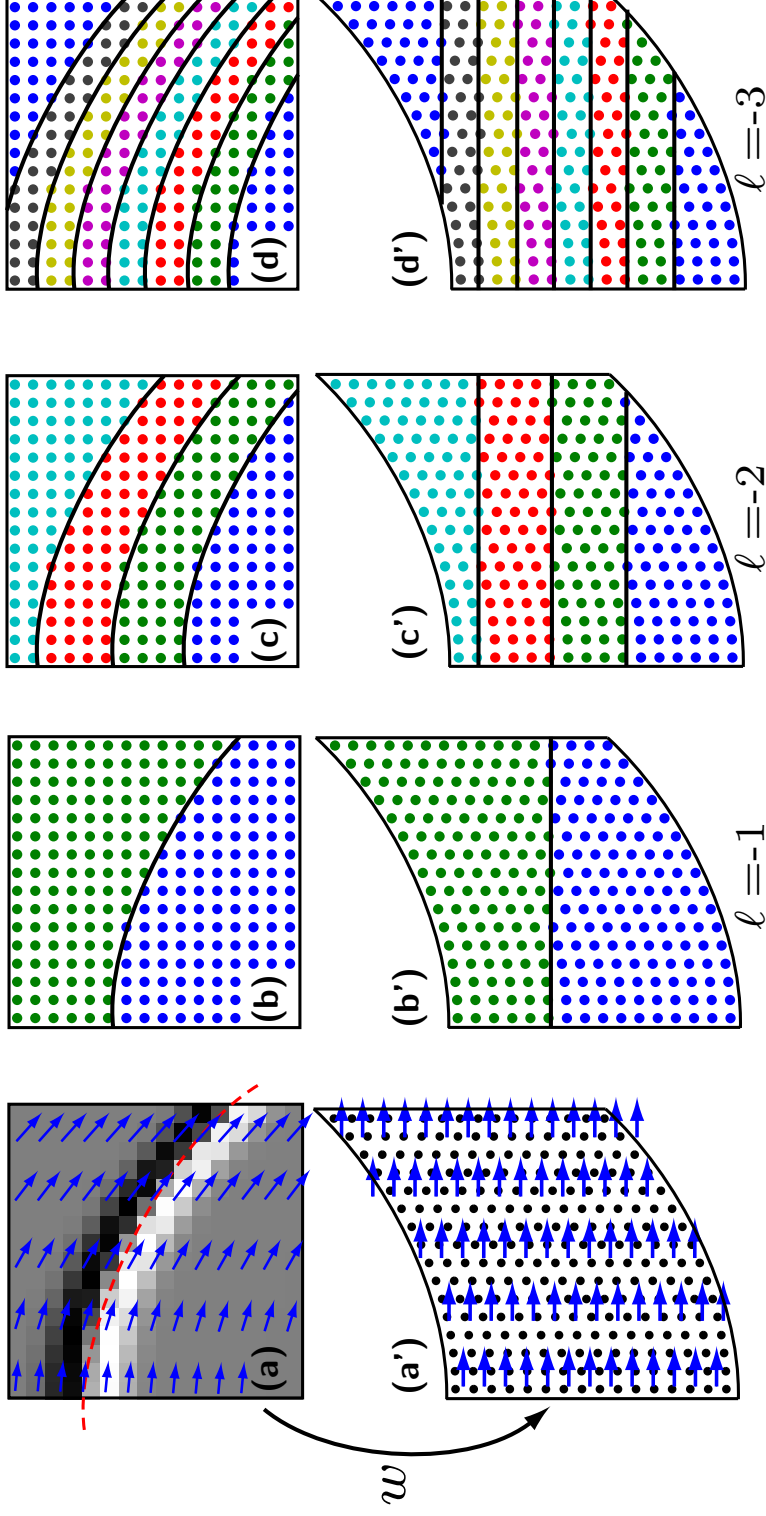
 Bandelettes 2G (Peyré) : Changement de base orthogonale adapté à la géométrie sur les coefficients d'ondelettes.

Base locale de bandelettes



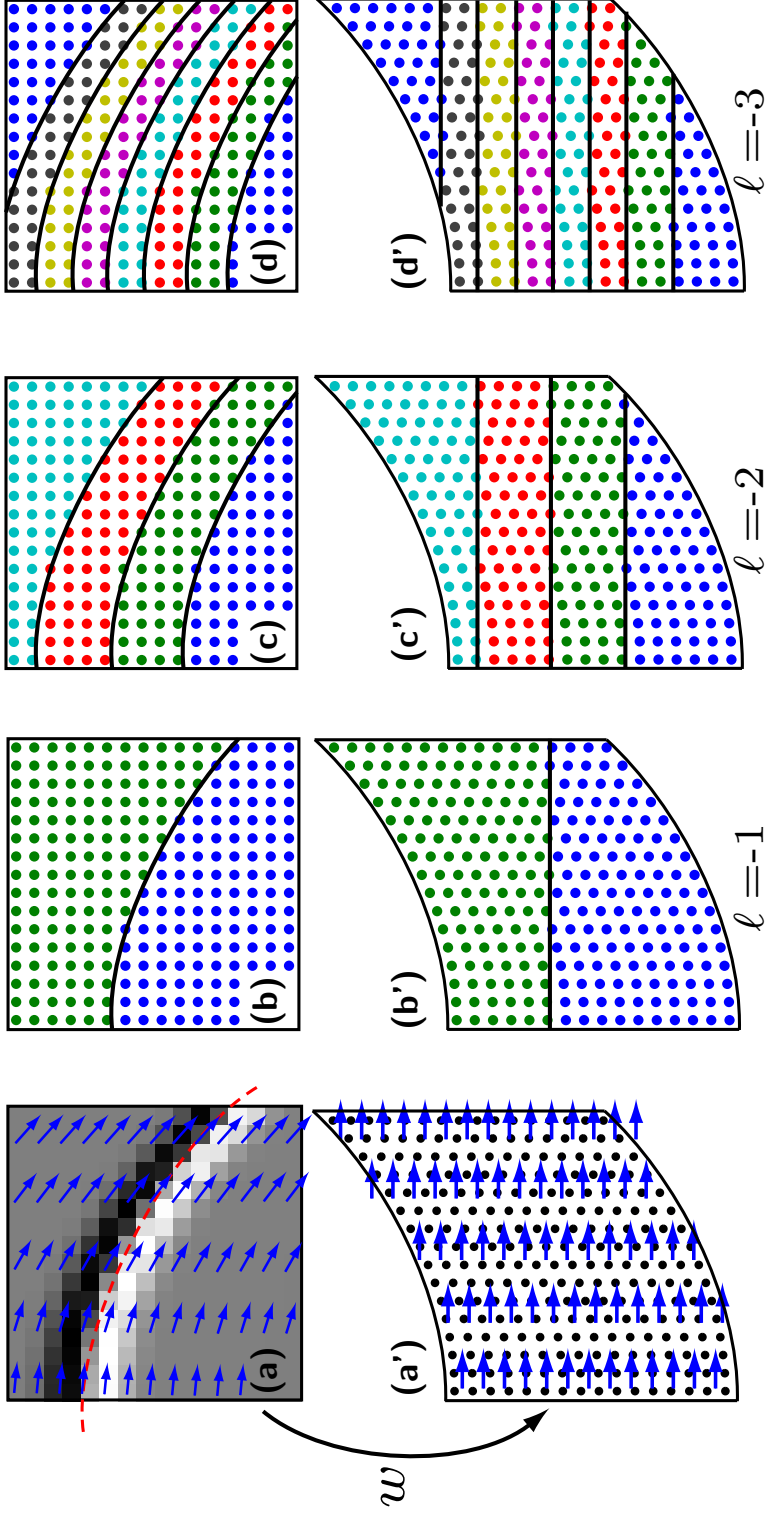
- Bandelettes 2G (Peyré) : Changement de base orthogonale adapté à la géométrie sur les coefficients d'ondelettes.
- Multirésolution d'espaces d'approximations polynomiales par morceaux.

Base locale de bandelettes



- Bandelettes 2G (Peyré) : Changement de base orthogonale adapté à la géométrie sur les coefficients d'ondelettes.
- Multirésolution d'espaces d'approximations polynomiales par morceaux.
- Base des compléments orthogonaux de ces espaces (A/pert).

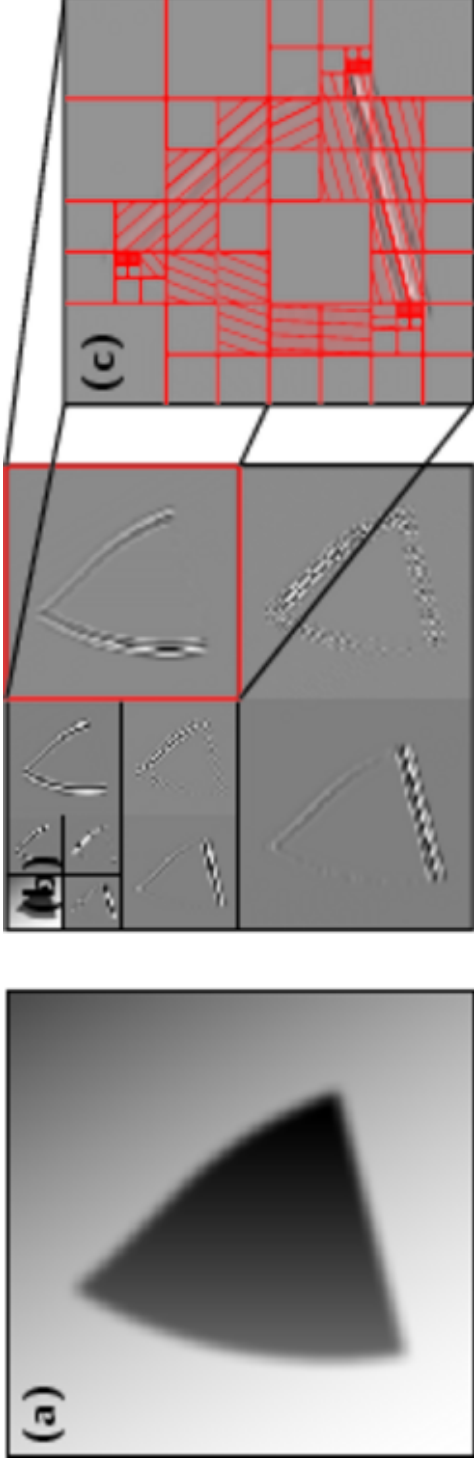
Base locale de bandelettes



- Bandelettes 2G (Peyré) : Changement de base orthogonale adapté à la géométrie sur les coefficients d'ondelettes.
- Multirésolution d'espaces d'approximations polynomiales par morceaux.
- Base des compléments orthogonaux de ces espaces (*A/pert*).
- Image des ondelettes par ce changement de bases : bandelettes 2G.

Base de bandelettes 2G

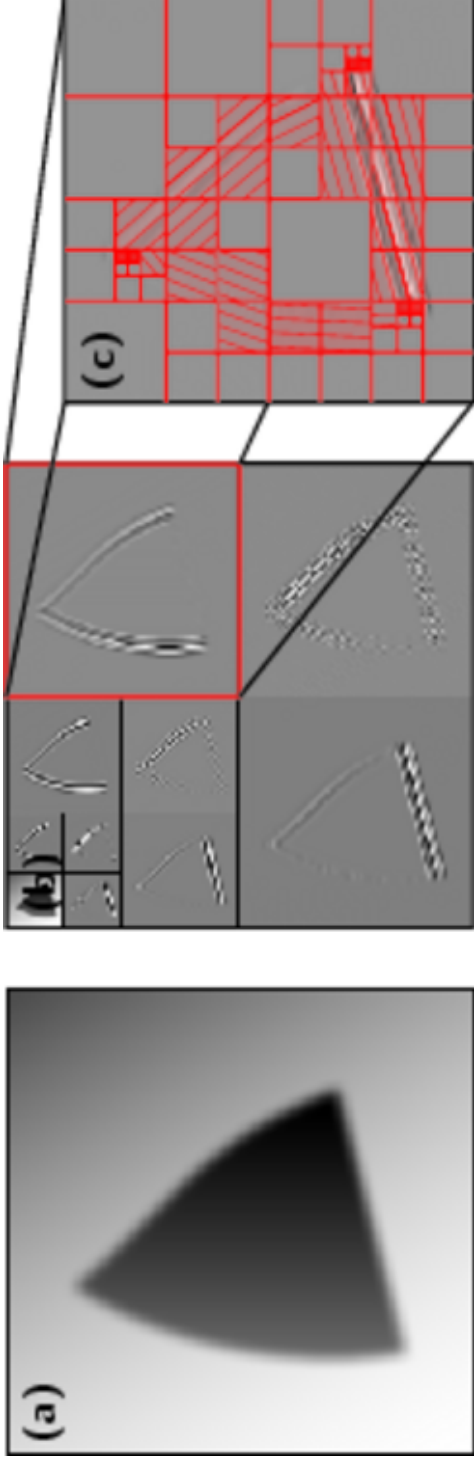
Base de bandelettes 2G



● Base de bandelettes :

- segmentation dyadique des sous-bandes,
- géométrie dans chaque carré.

Base de bandelettes 2G



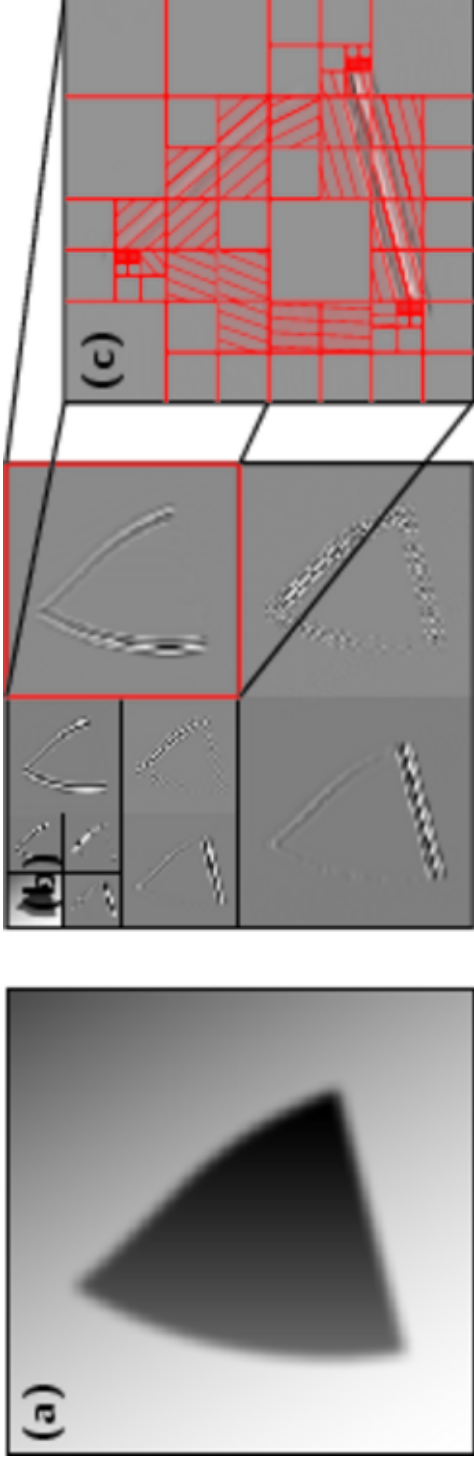
• Base de bandelettes :

- segmentation dyadique des sous-bandes,
- géométrie dans chaque carré.

• Algorithme d'optimisation par programmation dynamique (CART) de

$$\|f - f_M\|^2 + T^2 M \quad .$$

Base de bandelettes 2G



• Base de bandelettes :

- segmentation dyadique des sous-bandes,
- géométrie dans chaque carré.

• Algorithme d'optimisation par programmation dynamique (CART) de

$$\|f - f_M\|^2 + T^2 M \quad .$$

• **Théorème** : Si f est $\mathbf{C}^\alpha - \mathbf{C}^\alpha$, alors, dans la meilleure base,

$$\|f - f_M\|^2 \leqslant CM^{-\alpha}$$

Bandelettes et estimation géométrique

Bandelettes et estimation géométrique



Estimation dans le cadre du bruit blanc

$$Y = f + \epsilon W$$

avec W un bruit blanc gaussien standard et ϵ l'écart type supposé connu.

Bandelettes et estimation géométrique

- Estimation dans le cadre du bruit blanc

$$Y = f + \epsilon W$$

avec W un bruit blanc gaussien standard et ϵ l'écart type supposé connu.

- Question : comment trouver un estimateur F de f à partir de Y tel que le risque quadratique $E(\|f - F\|^2)$ soit petit ?

Bandelettes et estimation géométrique

- Estimation dans le cadre du bruit blanc

$$Y = f + \epsilon W$$

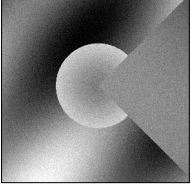
avec W un bruit blanc gaussien standard et ϵ l'écart type supposé connu.

- Question : comment trouver un estimateur F de f à partir de Y tel que le risque quadratique $E(\|f - F\|^2)$ soit petit ?

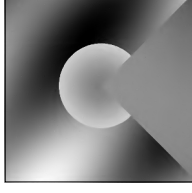
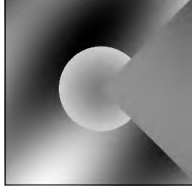
- Réponse : en approchant Y avec l'algorithme de meilleur base de bandelettes et un seuil $T = \lambda \sqrt{|\log \epsilon|} \epsilon$!

Bandelettes et estimation géométrique

Bruitée



Estimation Ondelettes Bandelettes



Estimation dans le cadre du bruit blanc

$$Y = f + \epsilon W$$

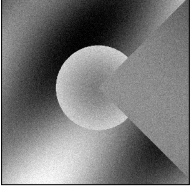
avec W un bruit blanc gaussien standard et ϵ l'écart type supposé connu.

Question : comment trouver un estimateur F de f à partir de Y tel que le risque quadratique $E(\|f - F\|^2)$ soit petit ?

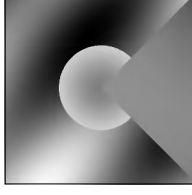
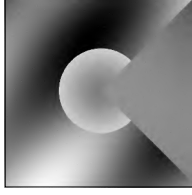
Réponse : en approchant Y avec l'algorithme de meilleur base de bandelettes et un seuil $T = \lambda \sqrt{|\log \epsilon|} \epsilon$!

Bandelettes et estimation géométrique

Bruitée



Estimation Ondelettes Bandelettes



- Estimation dans le cadre du bruit blanc

$$Y = f + \epsilon W$$

avec W un bruit blanc gaussien standard et ϵ l'écart type supposé connu.

- Question : comment trouver un estimateur F de f à partir de Y tel que le risque quadratique $E(\|f - F\|^2)$ soit petit ?

- Réponse : en approchant Y avec l'algorithme de meilleur base de bandelettes et un seuil $T = \lambda \sqrt{|\log \epsilon|} \epsilon$!

- Principes théoriques : extension du seuillage dans une base à l'aide de technique de sélections de modèles.

Sélection de modèles

Sélection de modèles

- Collection de modèles $\mathcal{M}_\epsilon$: ensemble d'espace m engendrés par des vecteurs choisis par κ vecteurs différents.

Sélection de modèles

- Collection de modèles $\mathcal{M}_\epsilon$: ensemble d'espace m engendrés par des vecteurs choisis par κ vecteurs différents.
- Recherche de F sous la forme $P_m Y$ (analogie avec le seuillage).

Sélection de modèles

- Collection de modèles $\mathcal{M}_\epsilon$: ensemble d'espace m engendrés par des vecteurs choisis par κ vecteurs différents.
- Recherche de F sous la forme $P_m Y$ (analogie avec le seuillage).
- Comment choisir m ?

Sélection de modèles

- Collection de modèles $\mathcal{M}_\epsilon$: ensemble d'espace m engendrés par des vecteurs choisis par κ vecteurs différents.
- Recherche de F sous la forme $P_m Y$ (analogie avec le seuillage).
- Comment choisir m ?
- Moindre carré pénalisé :

$$F_S = \underset{P_m Y, m \in \mathcal{M}_\epsilon}{\operatorname{argmin}} \quad \|Y - P_m Y\|^2 + \lambda^2 \log(\kappa) \epsilon^2 \dim(m)$$

Sélection de modèles

- Collection de modèles $\mathcal{M}_\epsilon$: ensemble d'espace m engendrés par des vecteurs choisis par κ vecteurs différents.
- Recherche de F sous la forme $P_m Y$ (analogie avec le seuillage).
- Comment choisir m ?
- Moindre carré pénalisé :

$$F_S = \underset{P_m Y, m \in \mathcal{M}_\epsilon}{\operatorname{argmin}} \|Y - P_m Y\|^2 + \lambda^2 \log(\kappa) \epsilon^2 \dim(m)$$

- **Théorème (Barron, Birgé, Massart) :** F_S vérifie pour λ assez grand
$$E(\|f - F_S\|^2) \leq C \min_{m \in \mathcal{M}_\epsilon} \|f - P_m f\|^2 + \lambda^2 \log(\kappa) \epsilon^2 \dim(m) \quad .$$

Sélection de modèles

- Collection de modèles $\mathcal{M}_\epsilon$: ensemble d'espace m engendrés par des vecteurs choisis par κ vecteurs différents.
- Recherche de F sous la forme $P_m Y$ (analogie avec le seuillage).
- Comment choisir m ?
- Moindre carré pénalisé :

$$F_S = \underset{P_m Y, m \in \mathcal{M}_\epsilon}{\operatorname{argmin}} \|Y - P_m Y\|^2 + \lambda^2 \log(\kappa) \epsilon^2 \dim(m)$$

- **Théorème (Barron, Birgé, Massart) :** F_S vérifie pour λ assez grand

$$E(\|f - F_S\|^2) \leq C \min_{m \in \mathcal{M}_\epsilon} \|f - P_m f\|^2 + \lambda^2 \log(\kappa) \epsilon^2 \dim(m) \quad .$$

- Théorie de l'approximation :

$$\min_{m \in \mathcal{M}_\epsilon} \|f - P_m f\|^2 + \lambda^2 \log(\kappa) \epsilon^2 \dim(m) \leq C(\log(\kappa) \epsilon^2)^{\frac{\beta}{\beta+1}} \\ \Leftrightarrow \min_{m \in \mathcal{M}_\epsilon, \dim(m) \leq M} \|f - P_m f\|^2 \leq M^{-\beta}$$

Sélection de modèles de bandelettes

Sélection de modèles de bandelettes

- $\mathcal{M}_\epsilon$: collection des sous-espaces engendrés par certains des ϵ^{-2} premiers vecteurs de base d'une collection de bases de bandelettes
 $\implies \log(\kappa) \propto |\log(\epsilon)|$.

Sélection de modèles de bandelettes

- $\mathcal{M}_\epsilon$: collection des sous-espaces engendrés par certains des ϵ^{-2} premiers vecteurs de base d'une collection de bases de bandelettes
 $\implies \log(\kappa) \propto |\log(\epsilon)|$.
- Contrôle polynomial sur le nombre total κ de bandelettes différentes en fonction de ϵ^{-2} .

Sélection de modèles de bandelettes

- $\mathcal{M}_\epsilon$: collection des sous-espaces engendrés par certains des ϵ^{-2} premiers vecteurs de base d'une collection de bases de bandelettes
 $\implies \log(\kappa) \propto |\log(\epsilon)|$.
- Contrôle polynomial sur le nombre total κ de bandelettes différentes en fonction de ϵ^{-2} .
- Sélection de modèles de bandelettes :

$$F_S = \operatorname{argmin}_{m \in \mathcal{M}} \|Y - P_m Y\|^2 + \lambda^2 |\log(\epsilon)| \epsilon^2 \dim(m)$$

Sélection de modèles de bandelettes

- $\mathcal{M}_\epsilon$: collection des sous-espaces engendrés par certains des ϵ^{-2} premiers vecteurs de base d'une collection de bases de bandelettes
 $\implies \log(\kappa) \propto |\log(\epsilon)|$.
- Contrôle polynomial sur le nombre total κ de bandelettes différentes en fonction de ϵ^{-2} .
- Sélection de modèles de bandelettes :
$$F_S = \operatorname{argmin}_{m \in \mathcal{M}} \|Y - P_m Y\|^2 + \lambda^2 |\log(\epsilon)| \epsilon^2 \dim(m)$$
- Exactement le même algorithme que pour l'approximation.

Sélection de modèles de bandelettes

- $\mathcal{M}_\epsilon$: collection des sous-espaces engendrés par certains des ϵ^{-2} premiers vecteurs de base d'une collection de bases de bandelettes
 $\implies \log(\kappa) \propto |\log(\epsilon)|$.
- Contrôle polynomial sur le nombre total κ de bandelettes différentes en fonction de ϵ^{-2} .
- Sélection de modèles de bandelettes :

$$F_S = \operatorname{argmin}_{m \in \mathcal{M}} \|Y - P_m Y\|^2 + \lambda^2 |\log(\epsilon)| \epsilon^2 \dim(m)$$

- Exactement le même algorithme que pour l'approximation.
- **Théorème (Quasi optimalité minimax)** : Si $f \in \mathbf{C}^\alpha - \mathbf{C}^\alpha$ alors

$$E(\|f - F_S\|^2) \leq C \left(|\log(\epsilon)| \epsilon^2 \right)^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} .$$

Sélection de modèles de bandelettes

- $\mathcal{M}_\epsilon$: collection des sous-espaces engendrés par certains des ϵ^{-2} premiers vecteurs de base d'une collection de bases de bandelettes
 $\implies \log(\kappa) \propto |\log(\epsilon)|$.
- Contrôle polynomial sur le nombre total κ de bandelettes différentes en fonction de ϵ^{-2} .
- Sélection de modèles de bandelettes :

$$F_S = \operatorname{argmin}_{m \in \mathcal{M}} \|Y - P_m Y\|^2 + \lambda^2 |\log(\epsilon)| \epsilon^2 \dim(m)$$

- Exactement le même algorithme que pour l'approximation.
- **Théorème (Quasi optimalité minimax)** : Si $f \in \mathbf{C}^\alpha - \mathbf{C}^\alpha$ alors

$$E(\|f - F_S\|^2) \leqslant C \left(|\log(\epsilon)| \epsilon^2 \right)^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} .$$

- Meilleure vitesse possible au factor $|\log(\epsilon)|$ près. (minimax)

Sélection de modèles de bandelettes

- $\mathcal{M}_\epsilon$: collection des sous-espaces engendrés par certains des ϵ^{-2} premiers vecteurs de base d'une collection de bases de bandelettes
 $\implies \log(\kappa) \propto |\log(\epsilon)|$.
- Contrôle polynomial sur le nombre total κ de bandelettes différentes en fonction de ϵ^{-2} .
- Sélection de modèles de bandelettes :

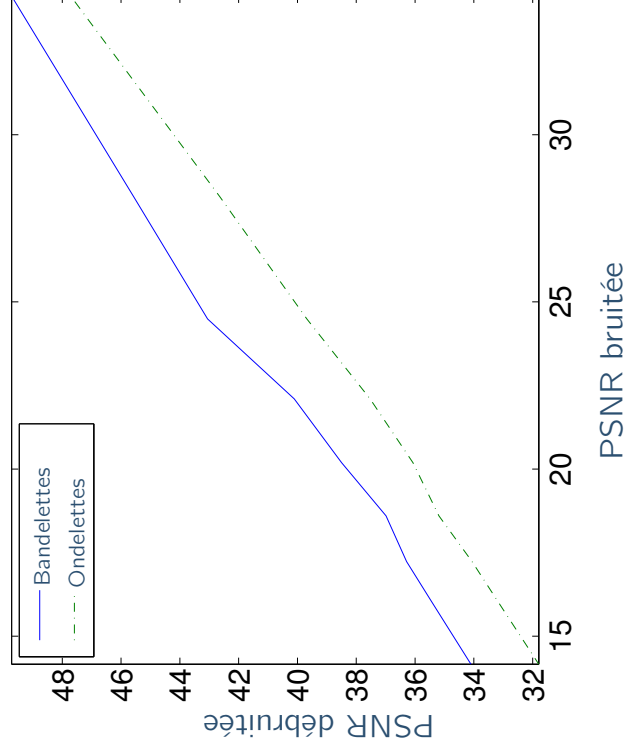
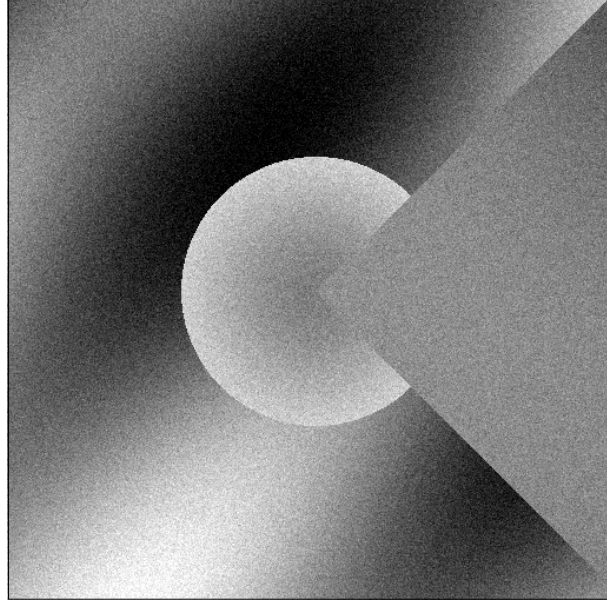
$$F_S = \operatorname{argmin}_{m \in \mathcal{M}} \|Y - P_m Y\|^2 + \lambda^2 |\log(\epsilon)| \epsilon^2 \dim(m)$$

- Exactement le même algorithme que pour l'approximation.
- **Théorème (Quasi optimalité minimax)** : Si $f \in \mathbf{C}^\alpha - \mathbf{C}^\alpha$ alors

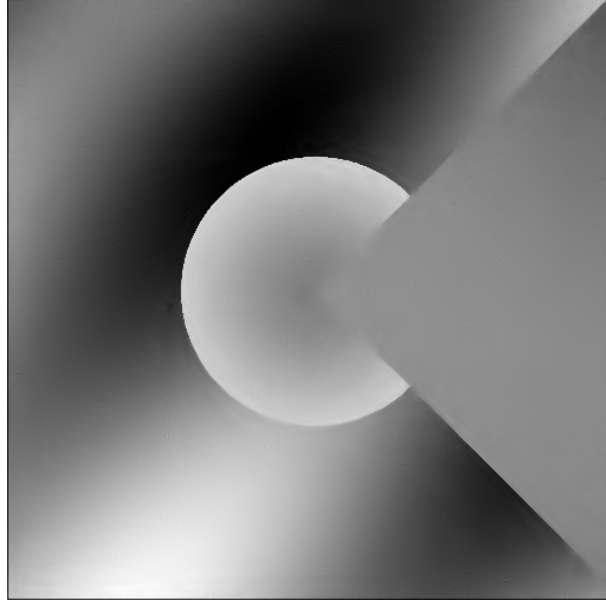
$$E(\|f - F_S\|^2) \leq C \left(|\log(\epsilon)| \epsilon^2 \right)^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} .$$

- Meilleure vitesse possible au factor $|\log(\epsilon)|$ près. (minimax)
- Adaptivité : pas besoin de connaître α !

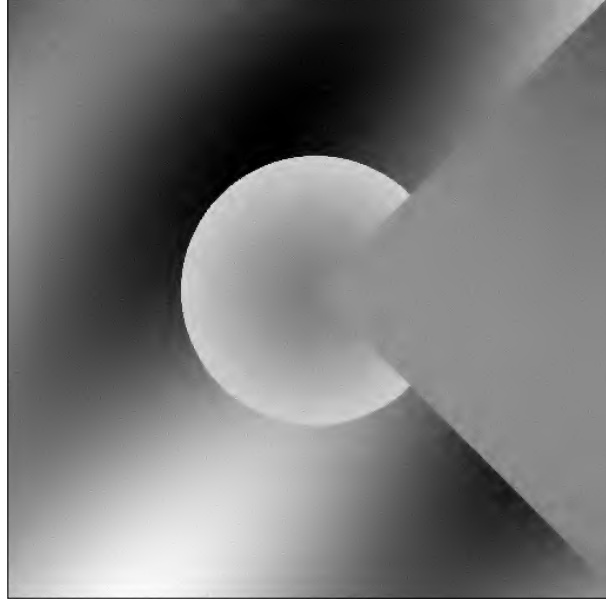
Bruitée (20,19 dB)



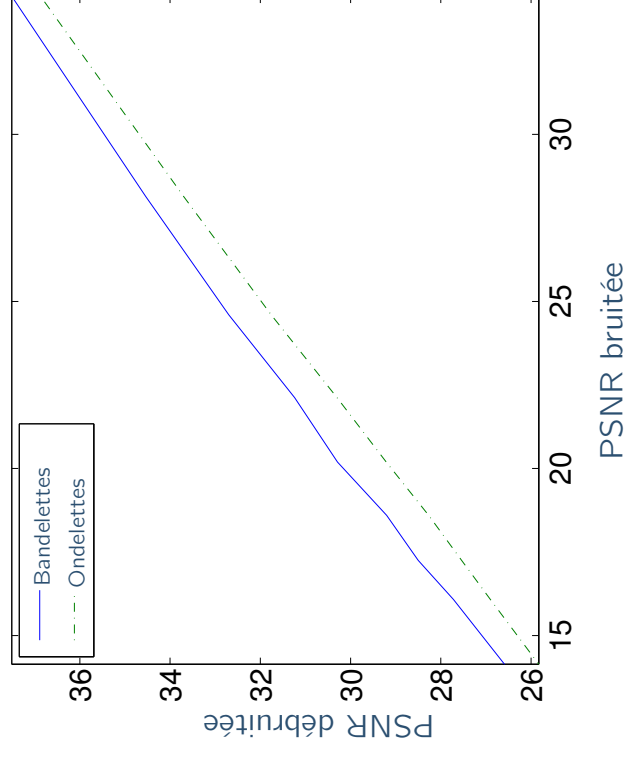
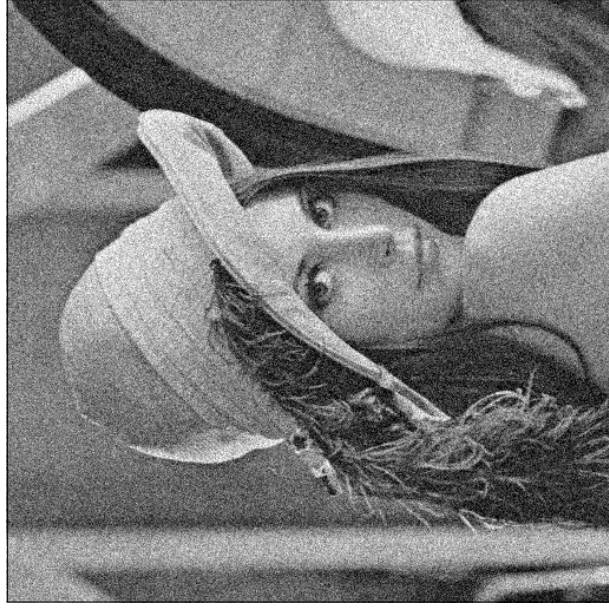
Bandelettes (30,29 dB)



Ondelettes (28,21 dB)



Bruitée (20,19 dB)



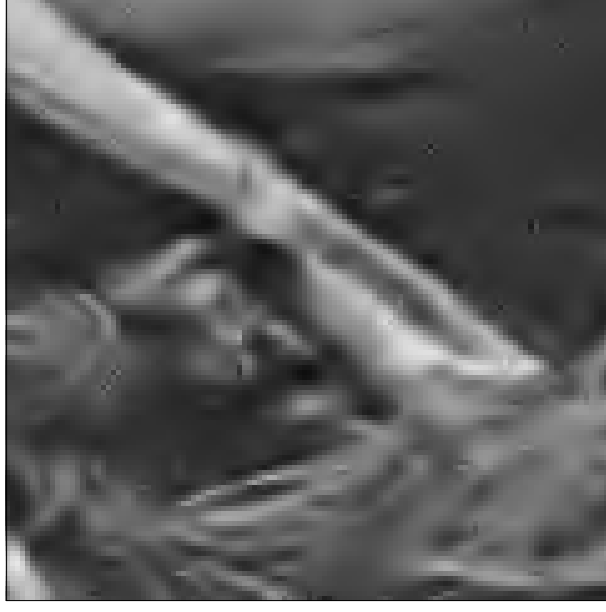
Bandelettes (30,29 dB)



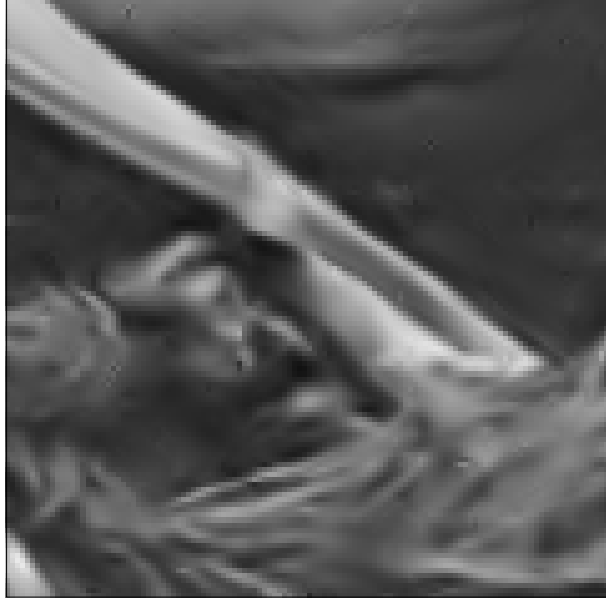
Ondelettes (28,21 dB)



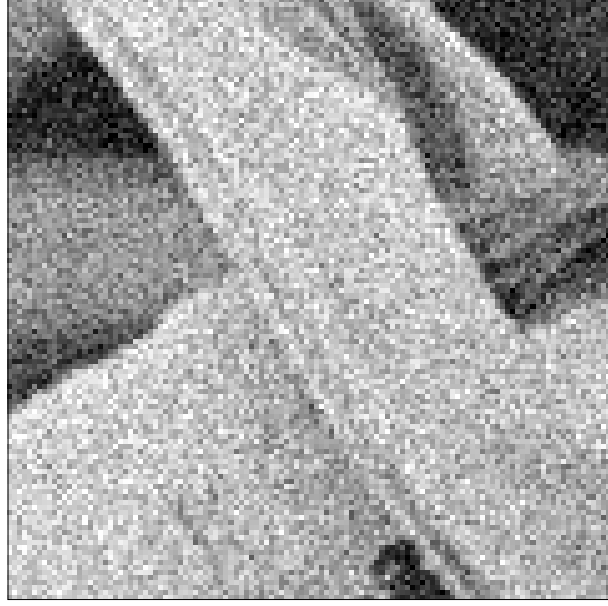
Ondelettes



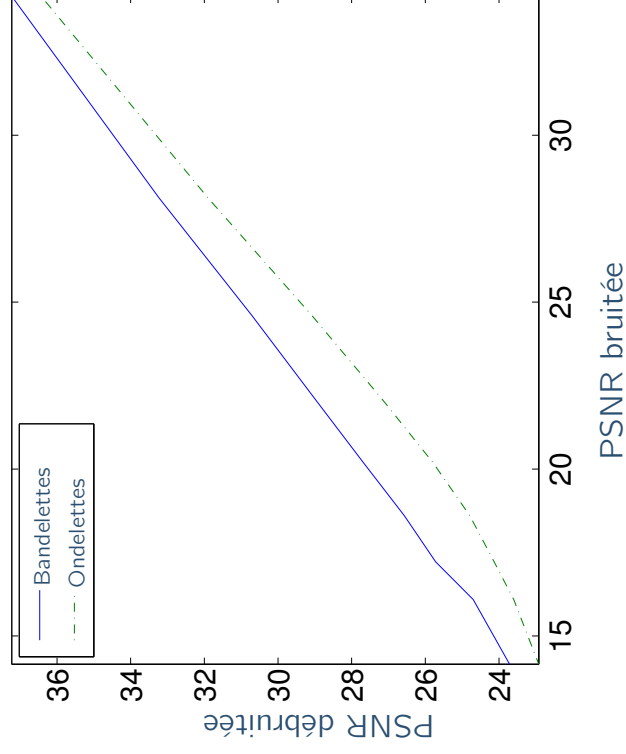
Bandelettes



Bruitée



Bruitée (20,19 dB)



Bandelettes (27,68 dB)



Ondelettes (25,79 dB)



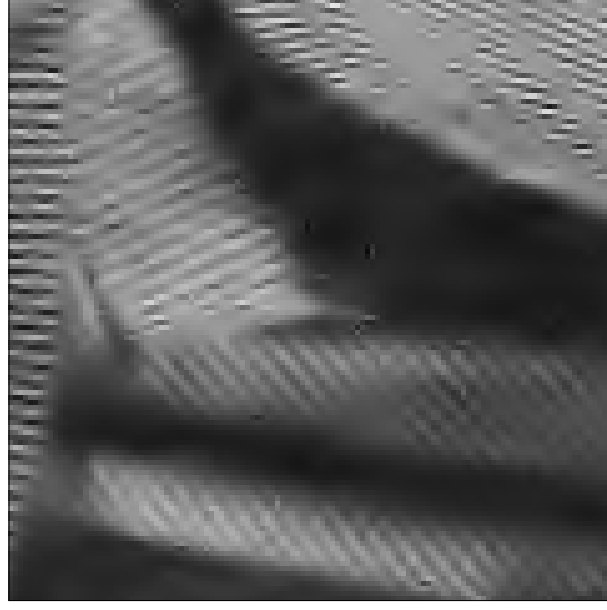
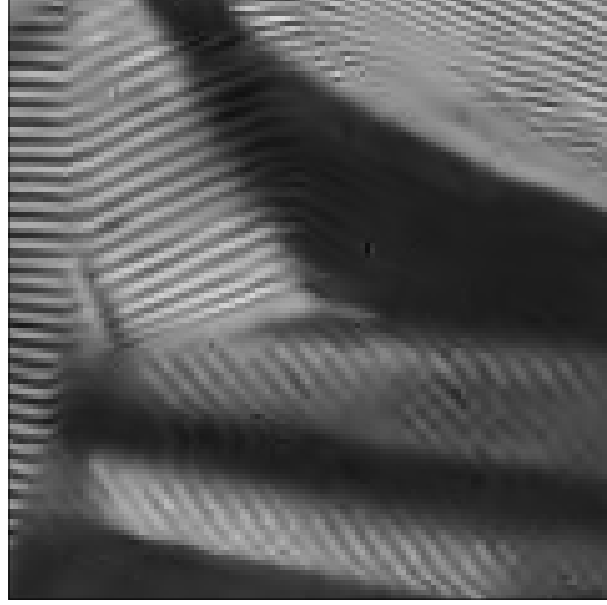
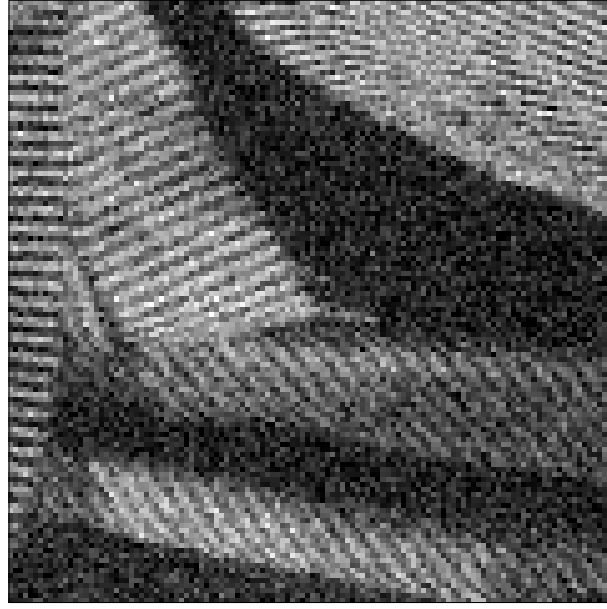
Bruitée



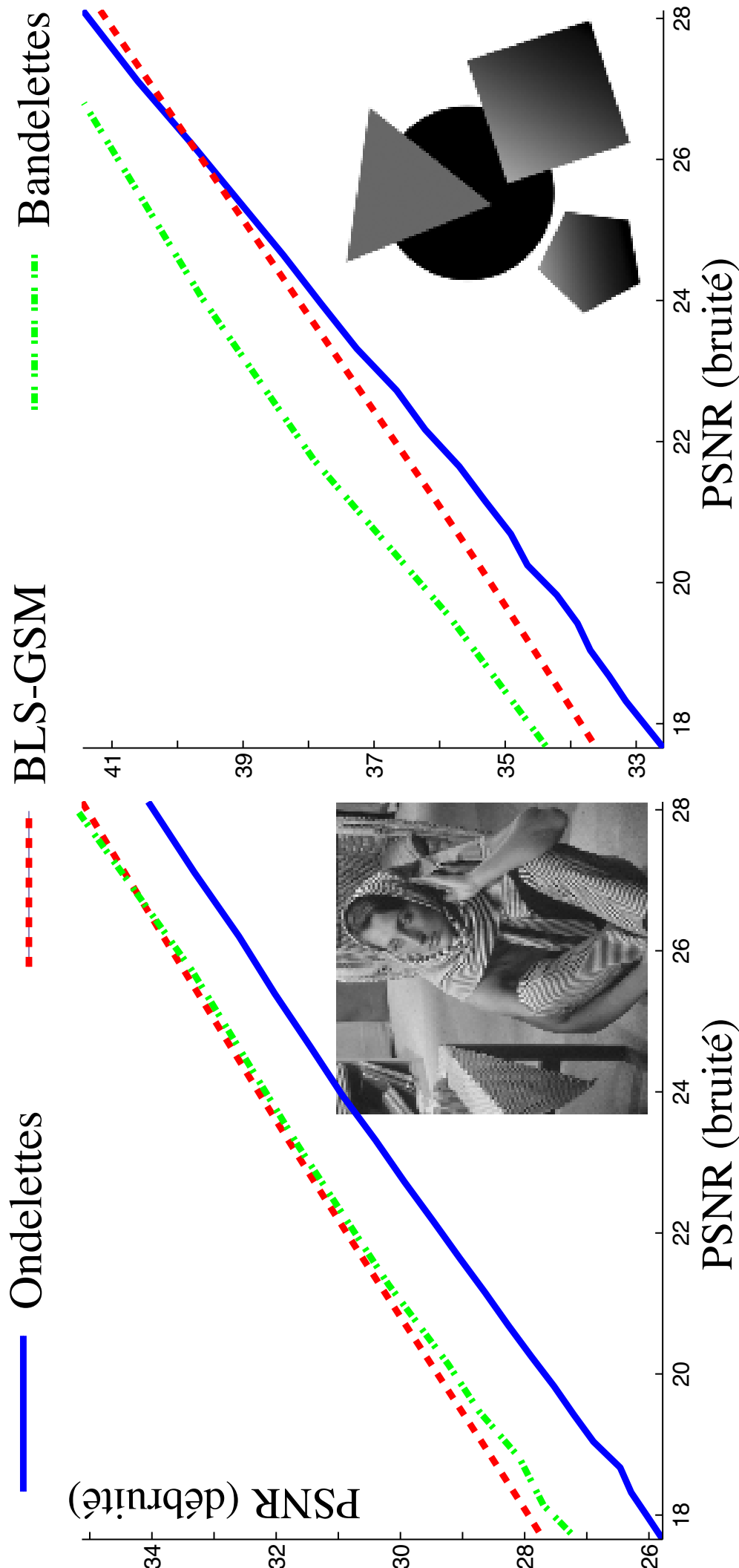
Bandelettes



Ondelettes



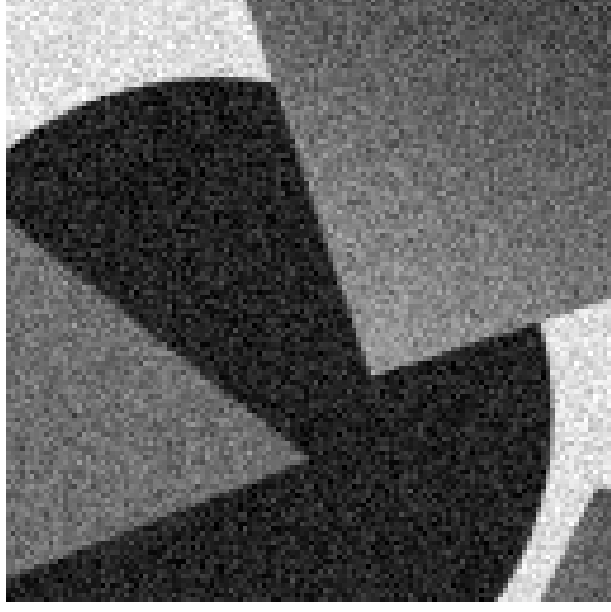
Résultats numériques



Originale



Bruitée



Bandelettes



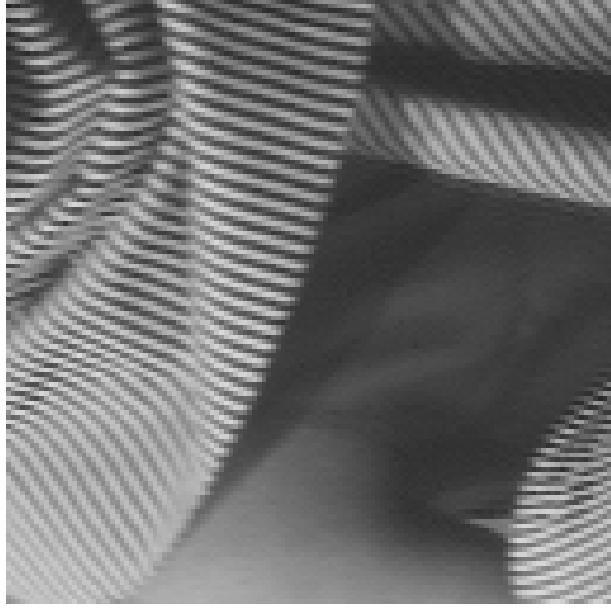
Ondelettes



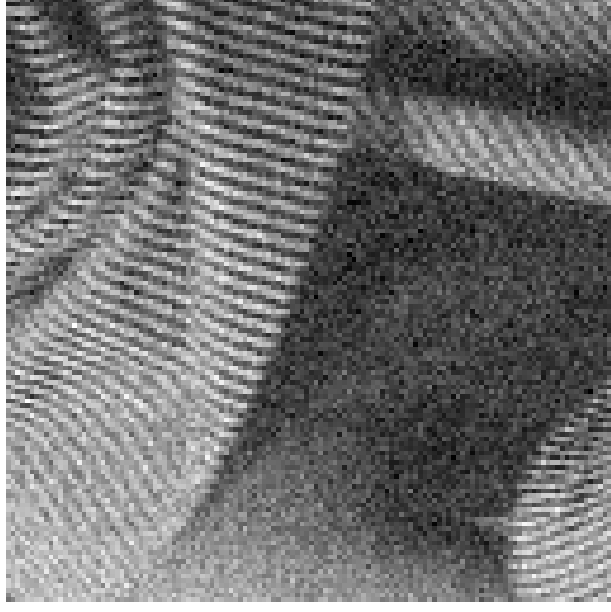
BLS-GSM



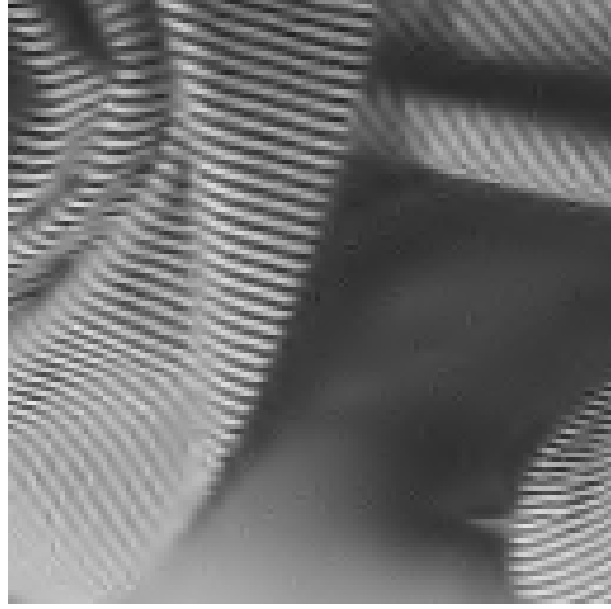
Originale



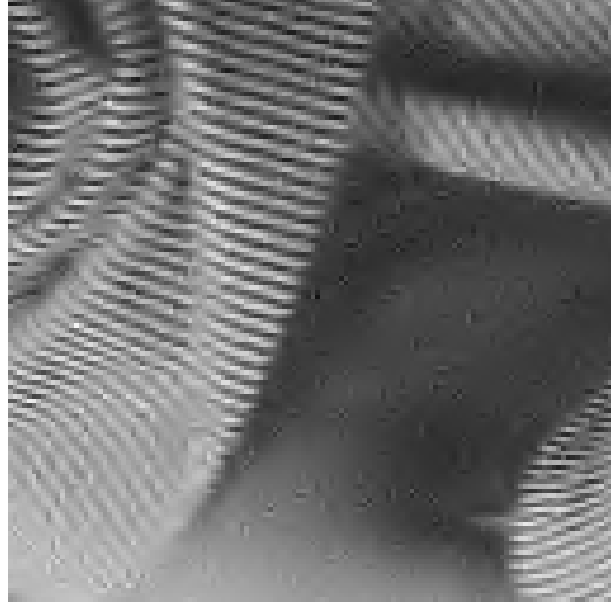
Bruitée



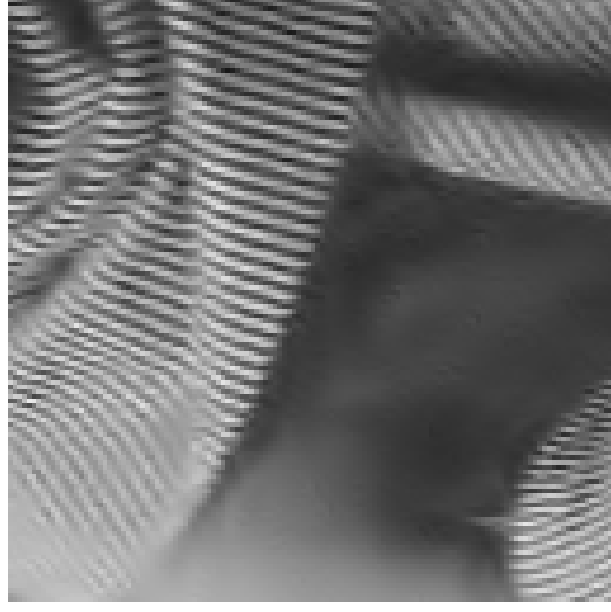
Bandelettes



Ondelettes

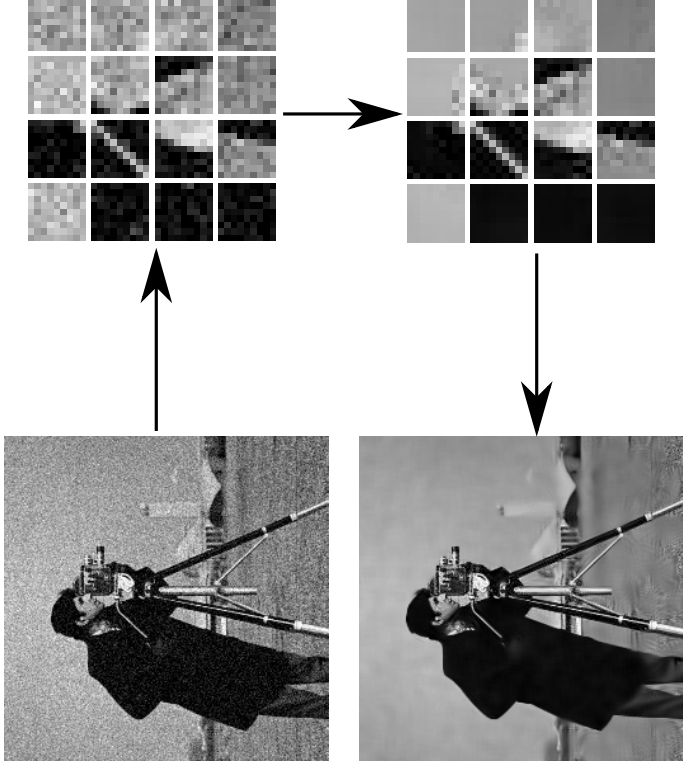


BLS-GSM



Patch

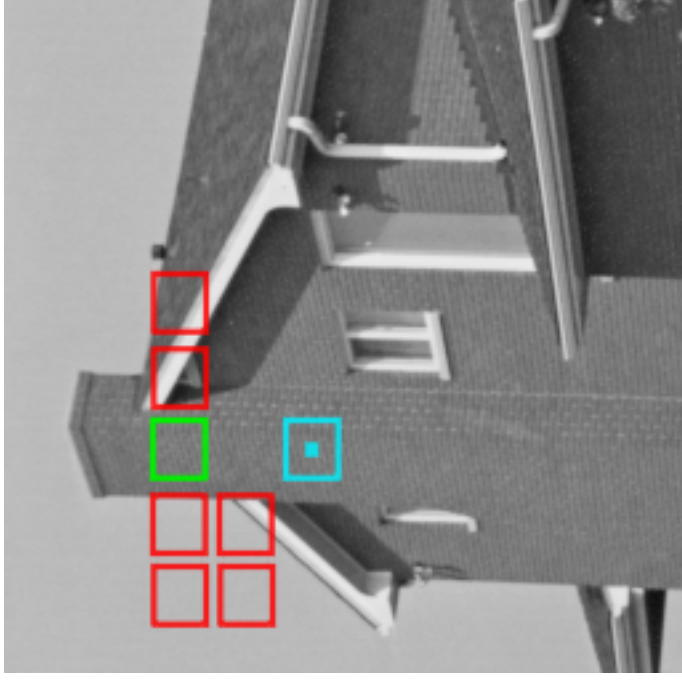
Patch



- Approche simple basée sur la redondance dans les images.
- Estimation en 3 étapes : Patchisation,
 - *Patchisation*,
 - Estimation,
 - Reprojection

NL-Means

NL-Means



- Moyenne *non locale* des patches similaires.
- Méthode à noyaux dans l'espace des patches....

Bases/Dictionnaires

Bases/Dictionnaires

- Approche de type parcimonie dans l'espace des patches.
- Deux grands directions :
 - Dictionnaire *linéaire/non linéaire* de type PCA/Ondelettes
 - Dictionnaire *adapté* appris par des techniques de type parcimonie.

TV

TV

- Approche de type régularisation :

$$\hat{I} = \operatorname{argmin} \|I - Y\|^2 + \lambda \|\nabla I\|_1$$

- Norme TV ($\|\nabla I\|_1$) adaptée à des régularités par morceaux (correspond à l'intégrale des longueurs des lignes de niveaux).
- Réinterprétation possible en terme de régularisation analyse dans un dictionnaire dans le cas discret...
- Optimisation *simple* car problème convexe.

ID Codec (Let It Wave)

ID Codec (Let It Wave)

- Solution de compression de photo d'identité à fort taux de compression (500-1000 octets) pour la sécurisation de documents.

ID Codec (Let It Wave)

- Solution de compression de photo d'identité à fort taux de compression (500-1000 octets) pour la sécurisation de documents.
- Système complet : de la prise de vue à la compression en passant par un recadrage.

ID Codec (Let It Wave)



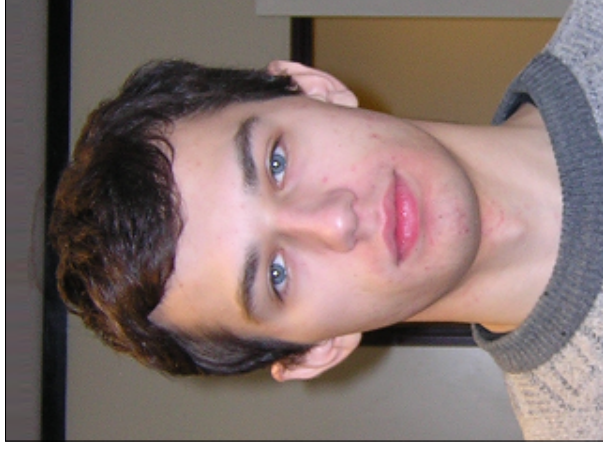
- Solution de compression de photo d'identité à fort taux de compression (500-1000 octets) pour la sécurisation de documents.
- Système complet : de la prise de vue à la compression en passant par un recadrage.

ID Codec (Let It Wave)



- Solution de compression de photo d'identité à fort taux de compression (500-1000 octets) pour la sécurisation de documents.
- Système complet : de la prise de vue à la compression en passant par un recadrage.

ID Codec (Let It Wave)



- Solution de compression de photo d'identité à fort taux de compression (500-1000 octets) pour la sécurisation de documents.
- Système complet : de la prise de vue à la compression en passant par un recadrage.

ID Codec (Let It Wave)



- Solution de compression de photo d'identité à fort taux de compression (500-1000 octets) pour la sécurisation de documents.
- Système complet : de la prise de vue à la compression en passant par un recadrage.

Photo d'identité

Photo d'identité

500 octets

Photo d'identité

500 octets

JPEG

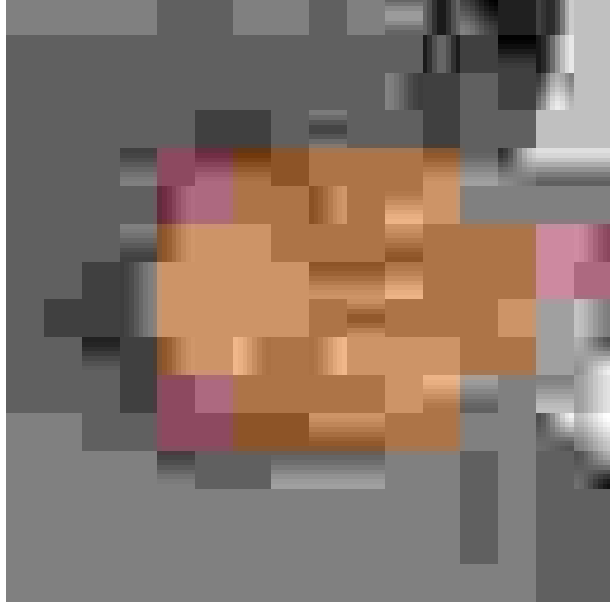
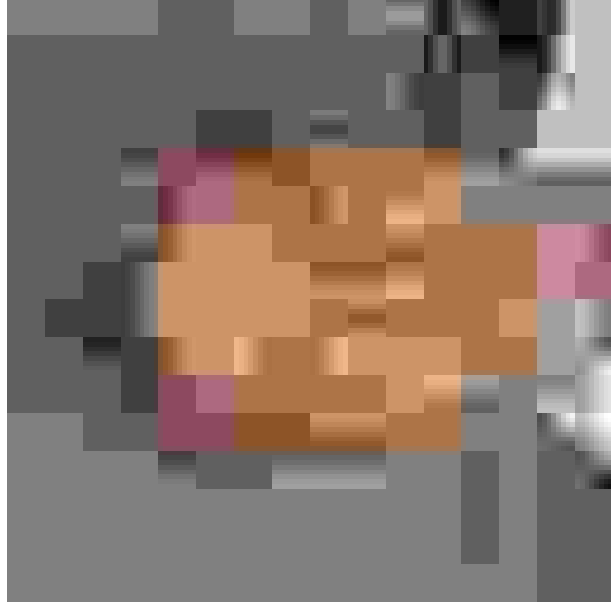


Photo d'identité

JPEG



500 octets

JPEG-2000

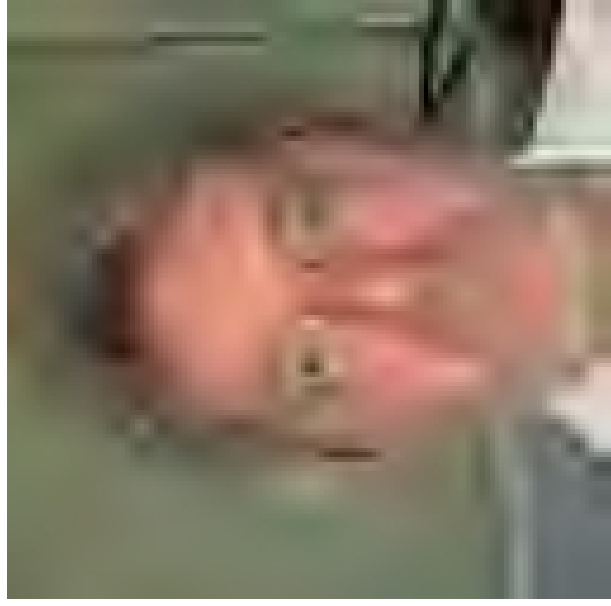
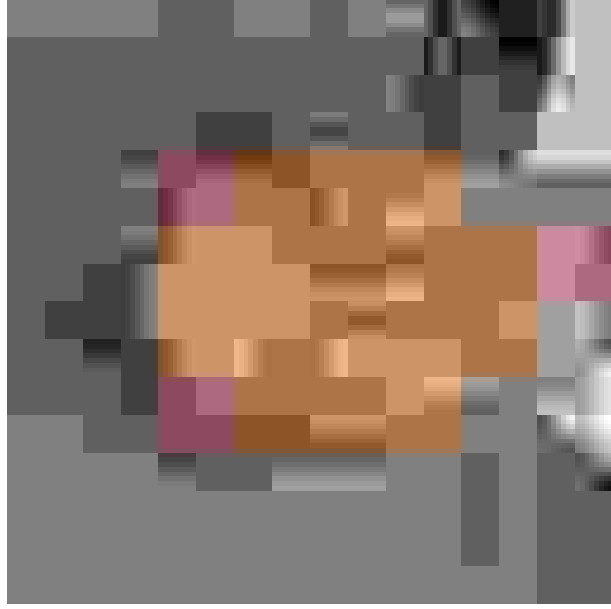


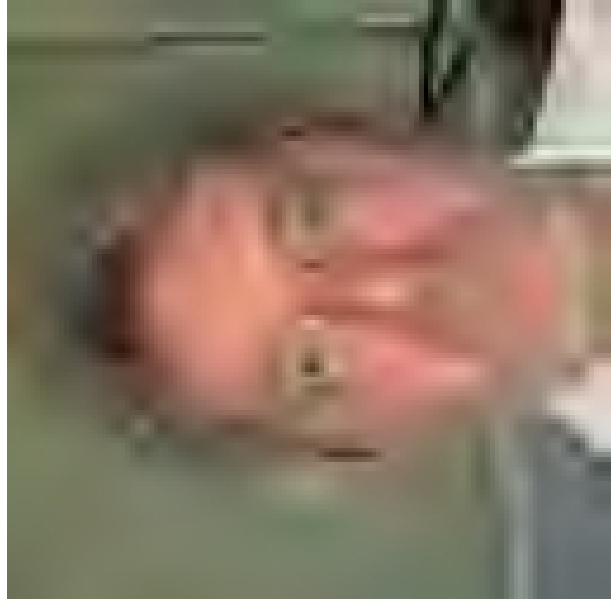
Photo d'identité

JPEG



500 octets

JPEG-2000



Bandelettes
Let It Wave

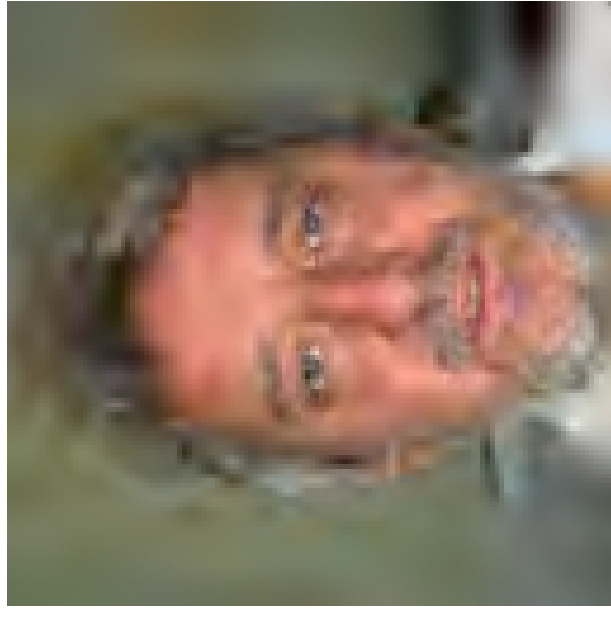
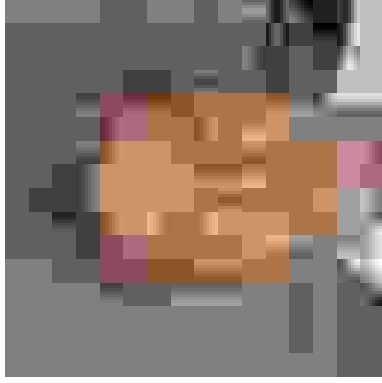


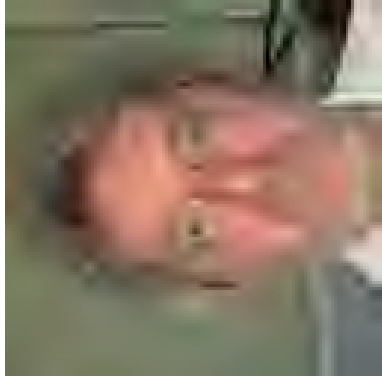
Photo d'identité

Photo d'identité

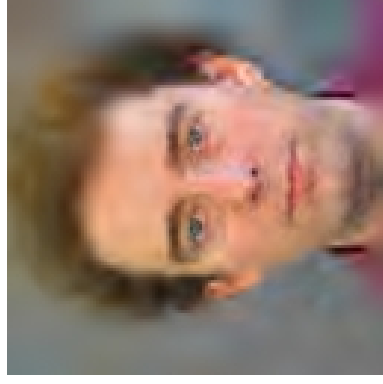
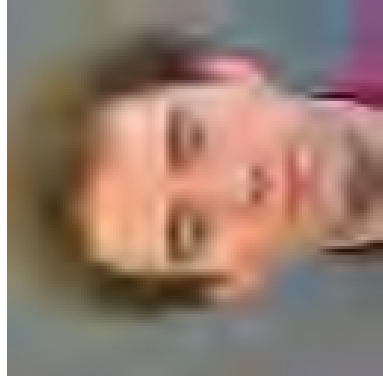
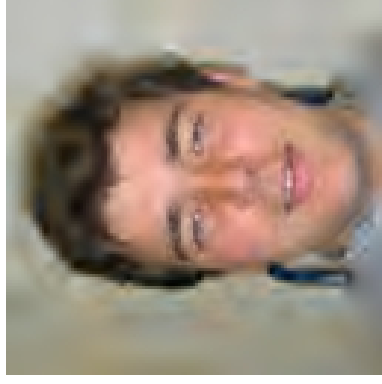
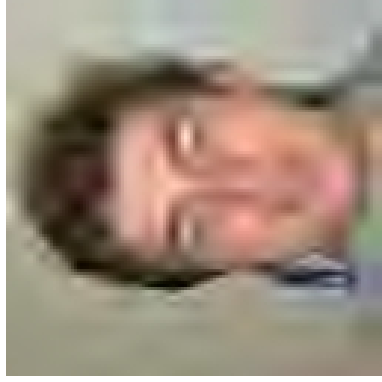
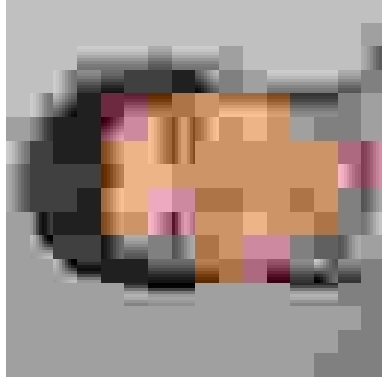
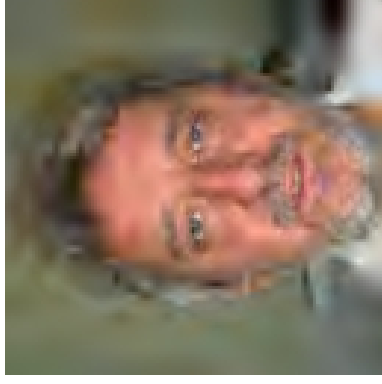
JPEG



JPEG-2000



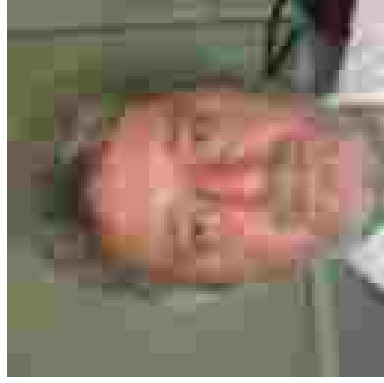
LIW



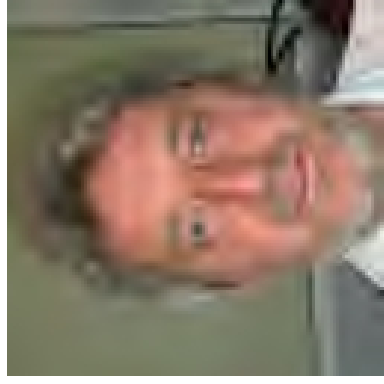
500 octets

Photo d'identité

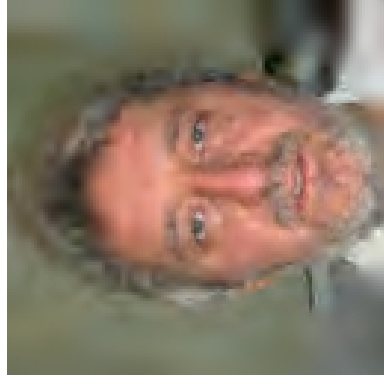
JPEG



JPEG-2000



LIW



800 octets

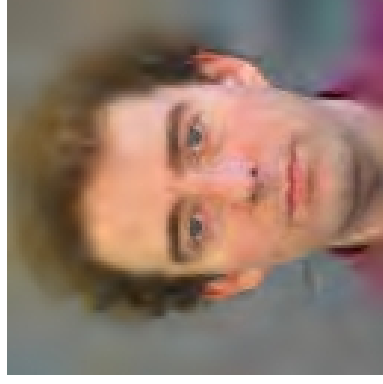
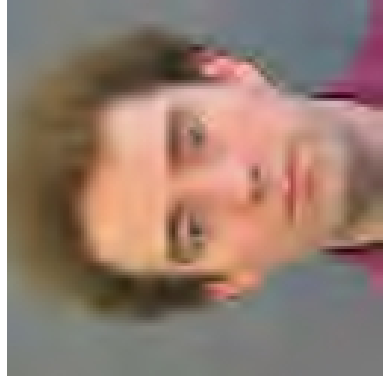
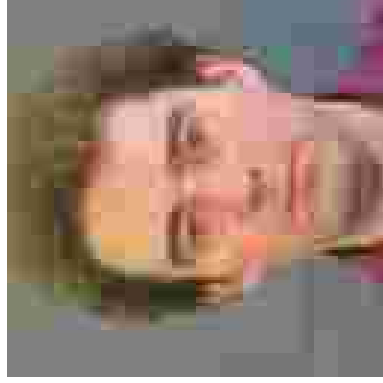
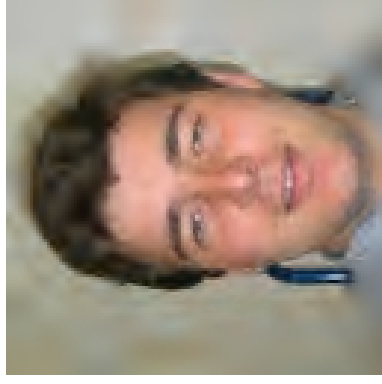
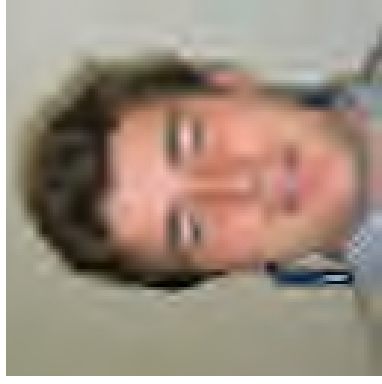
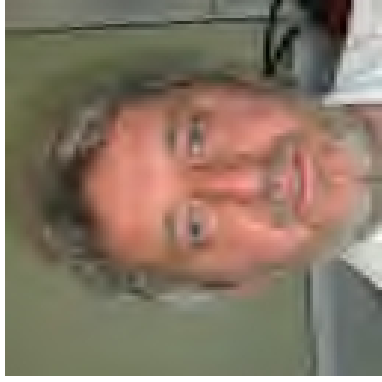


Photo d'identité

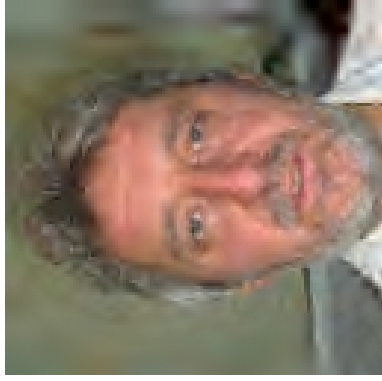
JPEG



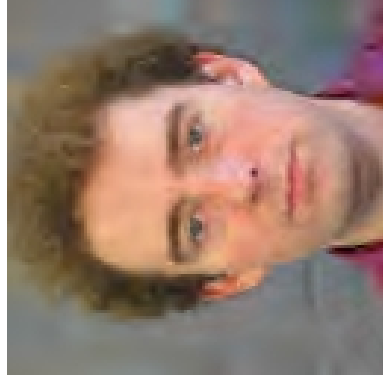
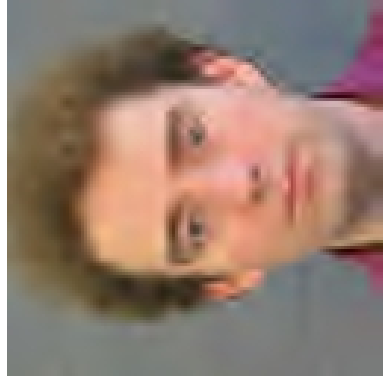
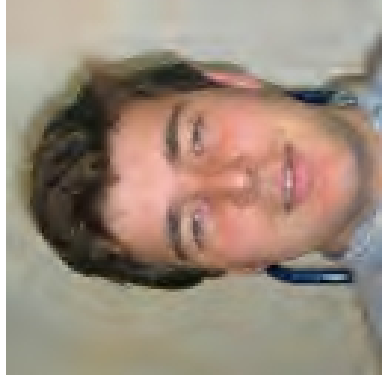
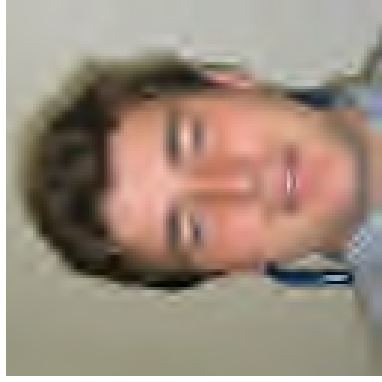
JPEG-2000



LIW

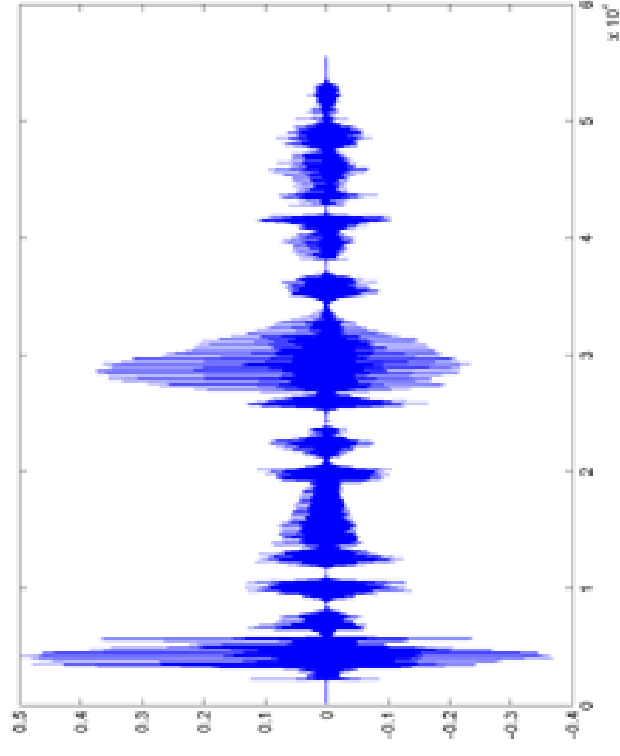
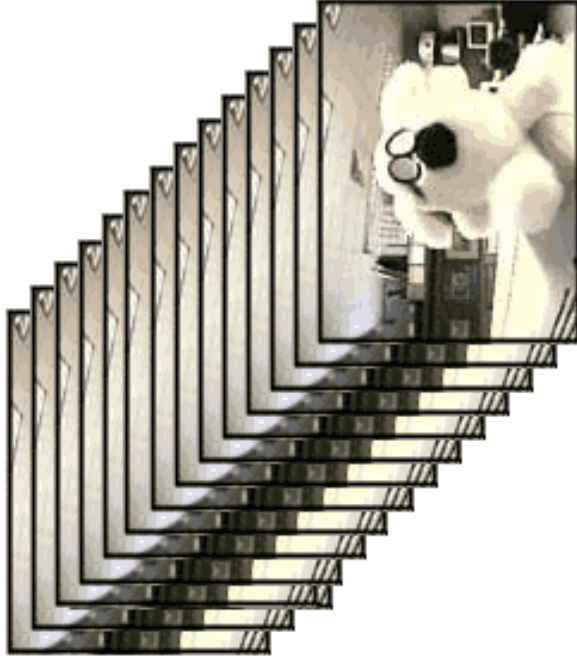


1000 octets

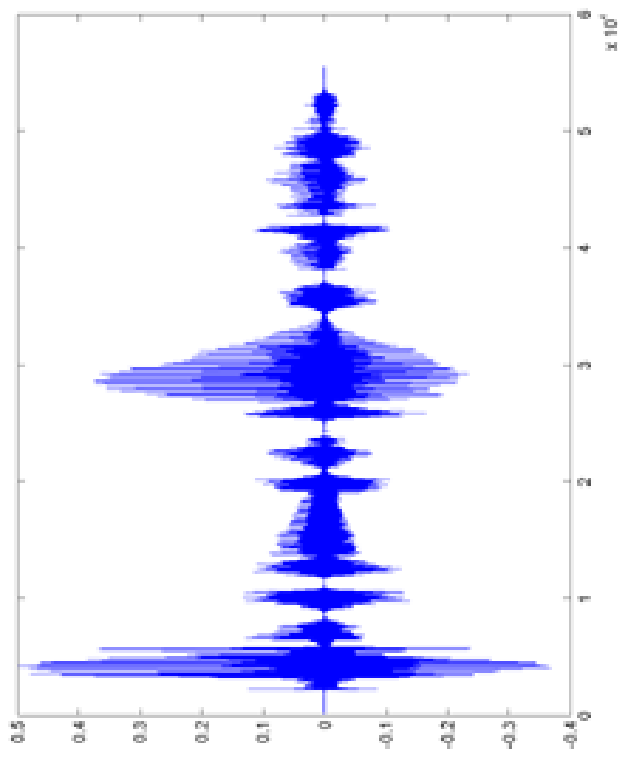
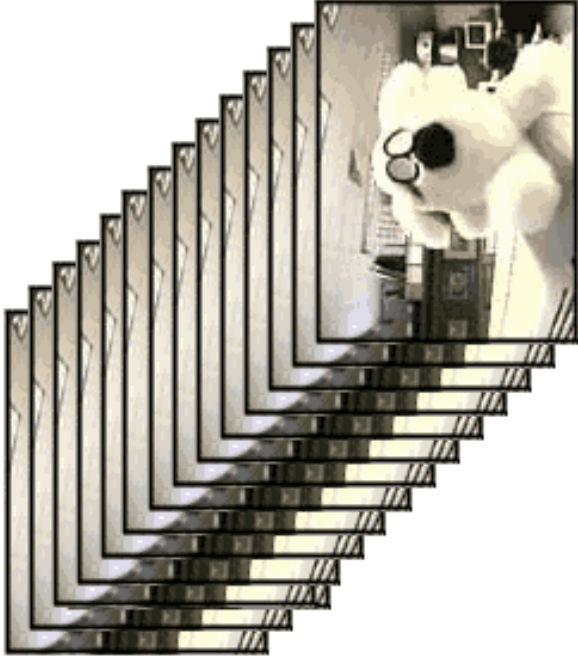


Vidéos et sons

Vidéos et sons

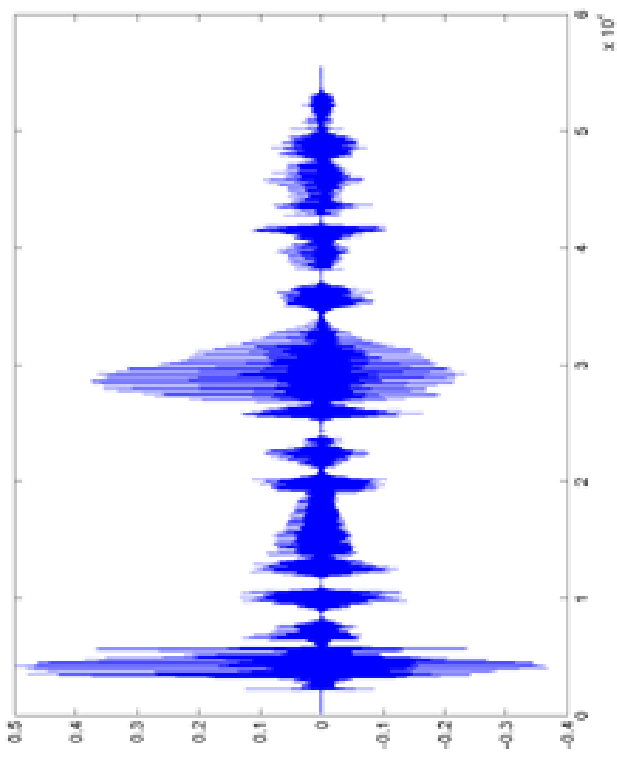
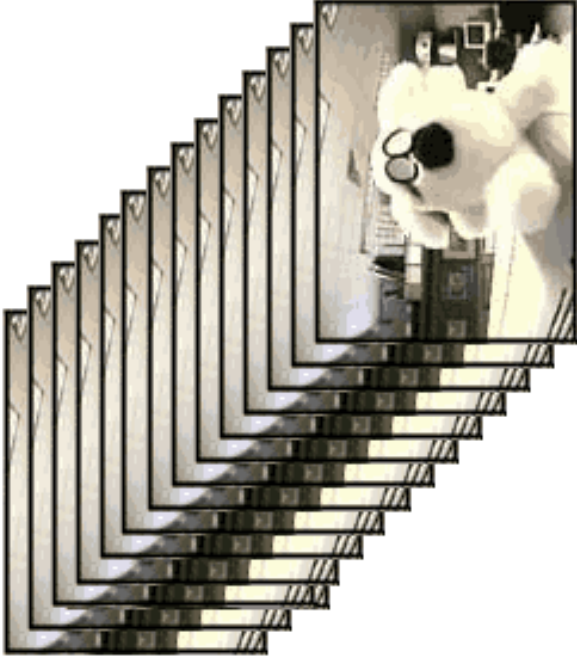


Vidéos et sons



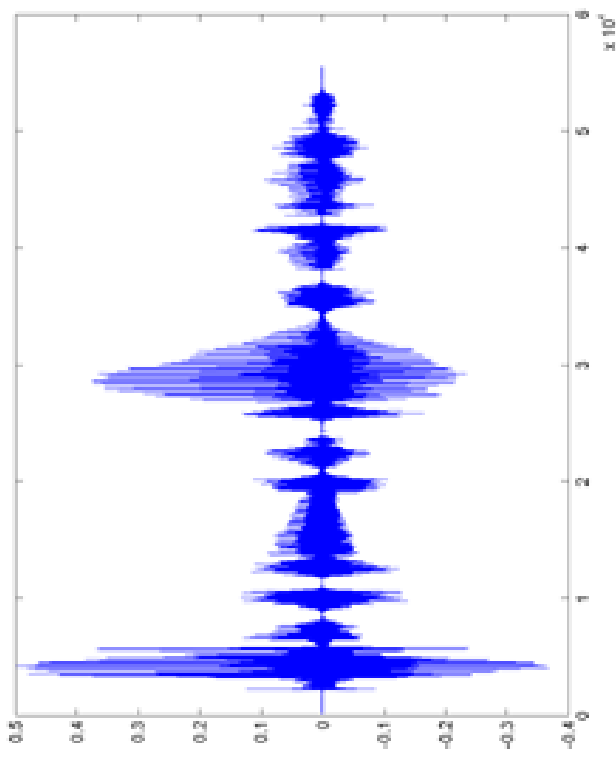
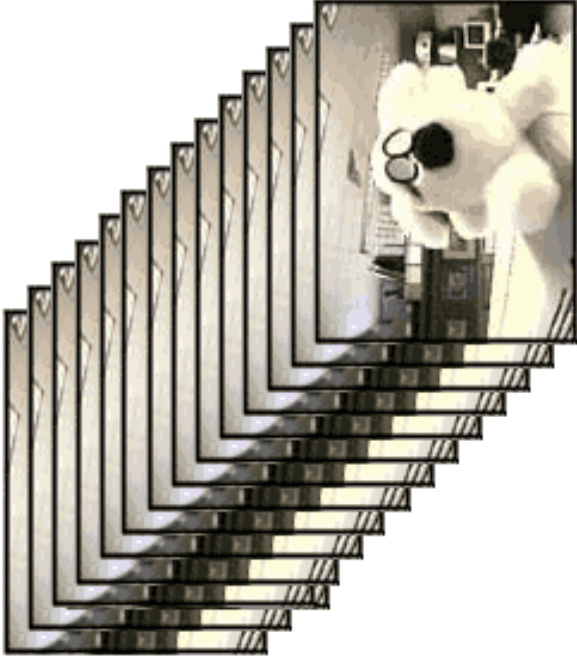
● Mêmes principes s'appliquent !

Vidéos et sons



- Mêmes principes s'appliquent !
- Vidéos : utilisation de la redondance temporelle (MPEG2, MPEG4, ...).

Vidéos et sons



- Mêmes principes s'appliquent !
- Vidéos : utilisation de la redondance temporelle (MPEG2, MPEG4, ...).
- Sons : utilisation de modèles auditifs (MP3, ...).

Conclusion

- Importance de la représentation pour le traitement du signal.

Conclusion

- Importance de la représentation pour le traitement du signal.
- Parcimonie !

Conclusion

- Importance de la représentation pour le traitement du signal.
- Parcimonie ! Mais pas toujours...

Conclusion

- 🔴 Importance de la représentation pour le traitement du signal.
- 🔴 Parcimonie ! Mais pas toujours...
- 🔴 Importance de la géométrie pour le traitement de l'image.

Conclusion

- 🔴 Importance de la représentation pour le traitement du signal.
- 🔴 Parcimonie ! Mais pas toujours...
- 🔴 Importance de la géométrie pour le traitement de l'image.
- 🔴 En général, nécessité d'une représentation adaptée au problème et au signal.

Conclusion

- 🔴 Importance de la représentation pour le traitement du signal.
- 🔴 Parcimonie ! Mais pas toujours...
- 🔴 Importance de la géométrie pour le traitement de l'image.
- 🔴 En général, nécessité d'une représentation adaptée au problème et au signal.
- 🔴 Encore beaucoup de travail...

Conclusion

- 🔴 Importance de la représentation pour le traitement du signal.
- 🔴 Parcimonie ! Mais pas toujours...
- 🔴 Importance de la géométrie pour le traitement de l'image.
- 🔴 En général, nécessité d'une représentation adaptée au problème et au signal.
- 🔴 Encore beaucoup de travail...
- 🔴 Plus d'infos :
 - 🟢 Erwan.Le_Pennec@polytechnique.edu
 - 🟢 <http://www.cmap.polytechnique.fr/~lepenne>