Représentations géométriques

E. Le Pennec
École polytechnique

Erwan.Le-Pennec@polytechnique.edu

Novembre 2016

Plan

Plan

- Images et traitement du signal.

Plan

- Images et traitement du signal.
- Représentation creuse et applications.

Plan

- Images et traitement du signal.
- Représentation creuse et applications.
- Représentations classiques :
  - Fourier : JPEG
  - Ondelettes : JPEG 2000

Plan

- Images et traitement du signal.
- Représentation creuse et applications.
- Représentations classiques :
  - Fourier : JPEG
  - Ondelettes : JPEG 2000
- Représentations géométriques :
  - Triangulation adaptatives
  - Curvelets
  - Edgelets

Plan

- Images et traitement du signal.
- Représentation creuse et applications.
- Représentations classiques :
  - Fourier : JPEG
  - Ondelettes : JPEG 2000
- Représentations géométriques :
  - Triangulation adaptatives
  - Curvelets
  - Edgelets

Image et numérisation

Image et numérisation

- Image numérique : $\{c_{k_1,k_2}\}$.

Image et numérisation

- Image numérique : $\{c_{k_1,k_2}\}$.
- Image continue : $f \in L^2$

Image et numérisation

- Image numérique : $\{c_{k_1,k_2}\}$.
- Image continue : $f \in L^2$
- Lien via la numérisation : c_{k_1,k_2} est une moyenne locale de f.

$$c_{k_1,k_2} = \int f(x_1, x_2)\theta(k_1\epsilon - x_1, k_2\epsilon - x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$$

Image et numérisation

- Image numérique : $\{c_{k_1,k_2}\}$.
- Image continue : $f \in L^2$
- Lien via la numérisation : c_{k_1,k_2} est une moyenne locale de f.

$$c_{k_1,k_2} = \int f(x_1, x_2)\theta(k_1\epsilon - x_1, k_2\epsilon - x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$$

- Régularité : régularité de la fonction continue.

Traitement de l'image

Traitement de l'image

- Traitements des images numériques.

Traitement de l'image

- Traitements des images numériques.
- Compression (stockage, transmission) : décrire une image avec la meilleur qualité possible pour une taille donnée.

Traitement de l'image

- Traitements des images numériques.
- Compression (stockage, transmission) : décrire une image avec la meilleur qualité possible pour une taille donnée.
- Restauration (débruitage, déconvolution) : retrouver un signal déformé lors de l'acquisition.

Traitement de l'image

- Traitements des images numériques.
- Compression (stockage, transmission) : décrire une image avec la meilleur qualité possible pour une taille donnée.
- Restauration (débruitage, déconvolution) : retrouver un signal déformé lors de l'acquisition.
- Amélioration de la qualité, analyse. . .

Représentation

Représentation

- Description efficace des images.

Représentation

- Description efficace des images.
- Coordonnées dans une base.

Représentation

- Description efficace des images.
- Coordonnées dans une base.
- Choix de la base.

Représentation

- Description efficace des images.
- Coordonnées dans une base.
- Choix de la base.
- Représentation creuse : peu de paramètres pour une bonne approximation.

Représentation

- Description efficace des images.
- Coordonnées dans une base.
- Choix de la base.
- Représentation creuse : peu de paramètres pour une bonne approximation.
- Important pour le traitement du signal : compression, débruitage,...

Représentation creuse dans une base

Représentation creuse dans une base

- Décomposition dans une base orthonormée $\mathbf{B} = \{g_m\}_{m \in \mathbb{N}}$

$$f = \sum_{m \in \mathbb{N}} \langle f, g_m \rangle \, g_m \ .$$

Représentation creuse dans une base

- Décomposition dans une base orthonormée $\mathbf{B} = \{g_m\}_{m\in\mathbb{N}}$

$$f = \sum_{m\in\mathbb{N}} \langle f, g_m \rangle \, g_m \ .$$

- Approximation avec M vecteurs choisis adaptativement

$$f_M = \sum_{m\in I_M} \langle f, g_m \rangle \, g_m \, .$$

Représentation creuse dans une base

- Décomposition dans une base orthonormée $\mathbf{B} = \{g_m\}_{m\in\mathbb{N}}$

$$f = \sum_{m\in\mathbb{N}} \langle f, g_m\rangle\, g_m \ .$$

- Approximation avec M vecteurs choisis adaptativement

$$f_M = \sum_{m\in I_M} \langle f, g_m\rangle\, g_m \,.$$

- Pour minimiser $\quad \|f - f_M\|^2 = \sum_{m\notin I_M} |\langle f, g_m\rangle|^2,$

Représentation creuse dans une base

- Décomposition dans une base orthonormée $\mathbf{B} = \{g_m\}_{m \in \mathbb{N}}$
$$f = \sum_{m \in \mathbb{N}} \langle f, g_m \rangle \, g_m \; .$$
- Approximation avec M vecteurs choisis adaptativement
$$f_M = \sum_{m \in I_M} \langle f, g_m \rangle \, g_m \, .$$
- Pour minimiser $\quad \|f - f_M\|^2 = \displaystyle\sum_{m \notin I_M} |\langle f, g_m \rangle|^2,$

  sélection des M plus grands produits scalaires :
$$I_M = \{m, |\langle f, g_m \rangle| > T_M\} \text{ : seuillage.}$$

Représentation creuse dans une base

- Décomposition dans une base orthonormée $\mathbf{B} = \{g_m\}_{m\in\mathbb{N}}$

$$f = \sum_{m\in\mathbb{N}} \langle f, g_m\rangle\, g_m \ .$$

- Approximation avec M vecteurs choisis adaptativement

$$f_M = \sum_{m\in I_M} \langle f, g_m\rangle\, g_m \,.$$

- Pour minimiser $\quad \|f - f_M\|^2 = \sum_{m\notin I_M} |\langle f, g_m\rangle|^2,$

  sélection des M plus grands produits scalaires :

$$I_M = \{m, |\langle f, g_m\rangle| > T_M\} \text{ : seuillage.}$$

- **Problème :** Comment choisir la base **B** de sorte que

$$\|f - f_M\|^2 \leqslant C M^{-\alpha} \ \text{ avec un grand } \alpha\,?$$

Fourier

Fourier

- Base la plus utilisée.

Fourier

- Base la plus utilisée.
- $\{\cos(2k\pi), \sin(2k\pi)\}_{k\in\mathbb{Z}}$

Fourier

- Base la plus utilisée.
- $\{\cos(2k\pi), \sin(2k\pi)\}_{k\in\mathbb{Z}}$
- Variantes : DCT, DST, ...

Fourier

- Base la plus utilisée.
- $\{\cos(2k\pi), \sin(2k\pi)\}_{k\in\mathbb{Z}}$
- Variantes : DCT, DST, ...
- Très bonne localisation en fréquence mais délocalisation spatiale.

Fourier

- Base la plus utilisée.
- $\{\cos(2k\pi), \sin(2k\pi)\}_{k\in\mathbb{Z}}$
- Variantes : DCT, DST, ...
- Très bonne localisation en fréquence mais délocalisation spatiale.
- Base 2D par produit tensoriel.

Fourier

- Base la plus utilisée.
- $\{\cos(2k\pi), \sin(2k\pi)\}_{k\in\mathbb{Z}}$
- Variantes : DCT, DST, ...
- Très bonne localisation en fréquence mais délocalisation spatiale.
- Base 2D par produit tensoriel.
- f $\mathbf{C}^{\alpha}$: $\|f - f_M\|^2 \leqslant C\, M^{-\alpha}$.

Fourier

- Base la plus utilisée.
- $\{\cos(2k\pi), \sin(2k\pi)\}_{k\in\mathbb{Z}}$
- Variantes : DCT, DST, ...
- Très bonne localisation en fréquence mais délocalisation spatiale.
- Base 2D par produit tensoriel.
- f $\mathbf{C}^\alpha$: $\|f - f_M\|^2 \leqslant C\, M^{-\alpha}$.
- f $\mathbf{C}^\alpha$ en dehors de contours $\mathbf{C}^\alpha$: $\|f - f_M\|^2 \leqslant C\, M^{-1/2}$.

FFT

FFT

- Algorithme rapide en $O(N \log N)$ proposé par Cooley et Tukey (1965).

FFT

- Algorithme rapide en $O(N \log N)$ proposé par Cooley et Tukey (1965).
- Stratégie : diviser pour régner.

FFT

- Algorithme rapide en $O(N \log N)$ proposé par Cooley et Tukey (1965).
- Stratégie : diviser pour régner.
- Division selon la parité

$$
\begin{aligned}
\hat{f}[n] &= \sum_{k=0}^{2N-1} f[k] e^{-\frac{2i\pi}{2N} nk} \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} f[2k] e^{-\frac{2i\pi}{2N} n(2k)} + \sum_{k=0}^{N-1} f[2k+1] e^{-\frac{2i\pi}{2N} n(2k+1)} \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} f[2k] e^{-\frac{2i\pi}{N} nk} + e^{-\frac{2i\pi}{2N} n} \sum_{k=0}^{N-1} f[2k+1] e^{-\frac{2i\pi}{N} nk}
\end{aligned}
$$

FFT

- Algorithme rapide en $O(N \log N)$ proposé par Cooley et Tukey (1965).
- Stratégie : diviser pour régner.
- Division selon la parité

$$
\begin{aligned}
\hat{f}[n] &= \sum_{k=0}^{2N-1} f[k] e^{-\frac{2i\pi}{2N} nk} \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} f[2k] e^{-\frac{2i\pi}{2N} n(2k)} + \sum_{k=0}^{N-1} f[2k+1] e^{-\frac{2i\pi}{2N} n(2k+1)} \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} f[2k] e^{-\frac{2i\pi}{N} nk} + e^{-\frac{2i\pi}{2N} n} \sum_{k=0}^{N-1} f[2k+1] e^{-\frac{2i\pi}{N} nk}
\end{aligned}
$$

- Passage d'une FFT sur $2N$ points à 2 FFT sur N points plus $C2N$ opérations...

FFT

- Algorithme rapide en $O(N \log N)$ proposé par Cooley et Tukey (1965).
- Stratégie : diviser pour régner.
- Division selon la parité

$$
\begin{aligned}
\hat{f}[n] &= \sum_{k=0}^{2N-1} f[k] e^{-\frac{2i\pi}{2N} nk} \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} f[2k] e^{-\frac{2i\pi}{2N} n(2k)} + \sum_{k=0}^{N-1} f[2k+1] e^{-\frac{2i\pi}{2N} n(2k+1)} \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} f[2k] e^{-\frac{2i\pi}{N} nk} + e^{-\frac{2i\pi}{2N} n} \sum_{k=0}^{N-1} f[2k+1] e^{-\frac{2i\pi}{N} nk}
\end{aligned}
$$

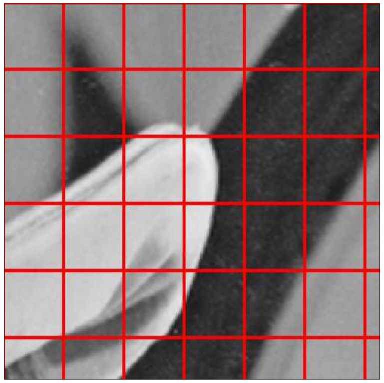
- Passage d'une FFT sur $2N$ points à 2 FFT sur N points plus $C2N$ opérations...
- Récurrence $C(2N) = 2C(N) + 2N \implies C(N) \leqslant CN \log N$.

JPEG

JPEG

- Comité JPEG 1990.

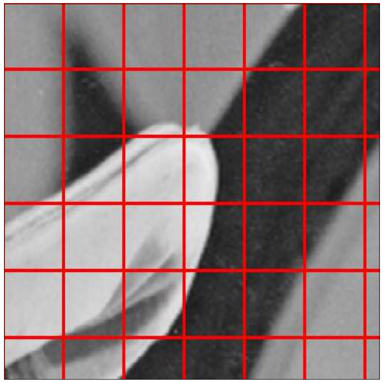
JPEG



- Comité JPEG 1990.
- Utilisation d'une base de DCT-4 par bloc de taille 8×8 :

$$\{\cos(k_1\pi(x_1 + 1/2)) \times \cos(k_2\pi(x_2 + 1/2))\}_{(k_1,k_2)\in[0,7]} \quad .$$

JPEG

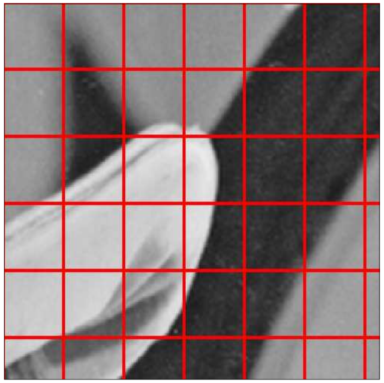


- Comité JPEG 1990.
- Utilisation d'une base de DCT-4 par bloc de taille 8×8 :

$$\{\cos(k_1\pi(x_1+1/2)) \times \cos(k_2\pi(x_2+1/2))\}_{(k_1,k_2)\in[0,7]} \quad .$$

- Décomposition dans la base + quantification + codage d'Huffman.

JPEG

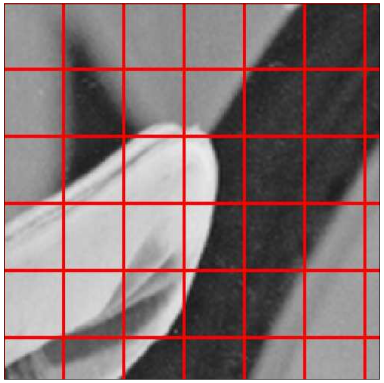


- Comité JPEG 1990.
- Utilisation d'une base de DCT-4 par bloc de taille 8×8 :

$$\{\cos(k_1\pi(x_1 + 1/2)) \times \cos(k_2\pi(x_2 + 1/2))\}_{(k_1,k_2)\in[0,7]} \quad .$$

- Décomposition dans la base + quantification + codage d'Huffman.
- + Masquage perceptuel.

JPEG



- Comité JPEG 1990.
- Utilisation d'une base de DCT-4 par bloc de taille 8×8 :

$$\{\cos(k_1\pi(x_1 + 1/2)) \times \cos(k_2\pi(x_2 + 1/2))\}_{(k_1,k_2)\in[0,7]} \quad .$$

- Décomposition dans la base + quantification + codage d'Huffman.
- + Masquage perceptuel.
- Énorme succès ! ! !

Compression par transformée

Compression par transformée

- Compression par transformée = transformation + quantification + codage entropique.

Compression par transformée

- Compression par transformée = transformation + quantification + codage entropique.
- $f_R = \sum Q(\langle f, g_m \rangle) g_m = \sum_{Q(\langle f, g_m \rangle) \neq 0} Q(\langle f, g_m \rangle)\, g_m \quad .$

Compression par transformée

- Compression par transformée = transformation + quantification + codage entropique.
- $$f_R = \sum Q(\langle f, g_m \rangle) g_m = \sum_{Q(\langle f, g_m \rangle) \neq 0} Q(\langle f, g_m \rangle)\, g_m \quad .$$
- $$\|f - f_R\|^2 = \sum_{Q(\langle f, g_m \rangle) \neq 0} (\langle f, g_m \rangle - Q(\langle f, g_m \rangle))^2 + \sum_{Q(\langle f, g_m \rangle) = 0} \langle f, g_m \rangle^2 \quad .$$

Compression par transformée

- Compression par transformée = transformation + quantification + codage entropique.
- $$f_R = \sum Q(\langle f, g_m \rangle) g_m = \sum_{Q(\langle f, g_m \rangle) \neq 0} Q(\langle f, g_m \rangle)\, g_m \quad .$$
- $$\begin{aligned} \|f - f_R\|^2 = & \sum_{Q(\langle f, g_m \rangle) \neq 0} (\langle f, g_m \rangle - Q(\langle f, g_m \rangle))^2 \\ & + \sum_{Q(\langle f, g_m \rangle) = 0} \langle f, g_m \rangle^2 \quad . \end{aligned}$$
- Erreur de quantification + Erreur d'approximation.

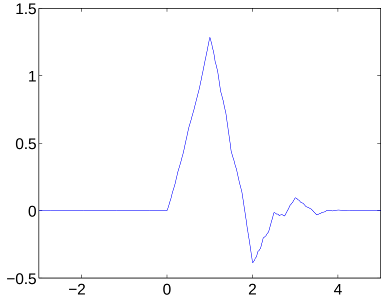
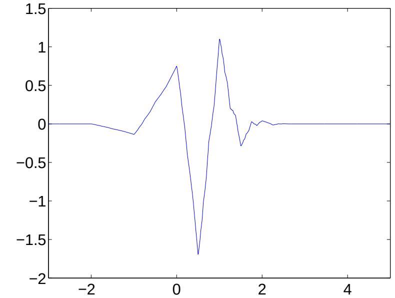
Compression par transformée

- Compression par transformée = transformation + quantification + codage entropique.
- $$f_R = \sum Q(\langle f, g_m \rangle) g_m = \sum_{Q(\langle f, g_m \rangle) \neq 0} Q(\langle f, g_m \rangle)\, g_m \quad .$$
- $$\|f - f_R\|^2 = \sum_{Q(\langle f, g_m \rangle) \neq 0} (\langle f, g_m \rangle - Q(\langle f, g_m \rangle))^2 + \sum_{Q(\langle f, g_m \rangle) = 0} \langle f, g_m \rangle^2 \quad .$$
- Erreur de quantification + Erreur d'approximation.
- Quantification uniforme de pas Δ avec boite 0 de taille double :
  - $\|f - f_R\|^2 = M\Delta^2/12 + \|f - f_M\|\|^2$
  - $R = M(C_1 + C_2 \log(M/N))$.

Base d'ondelettes 1D de $L^2[0,1]$

Base d'ondelettes 1D de $L^2[0, 1]$

- Construite à partir d'une fonction d'échelle $\phi(x)$ et d'une ondelette mère $\psi(x)$

$\phi(x)$   $\psi(x)$

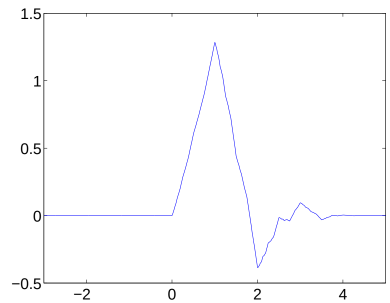
qui sont dilatées par 2^j et translatées de $2^j n$

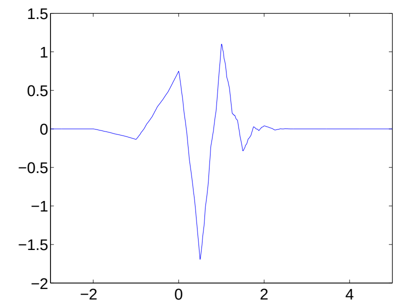
$$\phi_{j,n}(x) = \frac{1}{\sqrt{2^j}}\,\phi\Big(\frac{x - 2^j n}{2^j}\Big) \quad , \quad \psi_{j,n}(x) = \frac{1}{\sqrt{2^j}}\,\psi\Big(\frac{x - 2^j n}{2^j}\Big)$$

Base d'ondelettes 1D de $L^2[0,1]$

- Construite à partir d'une fonction d'échelle $\phi(x)$ et d'une ondelette mère $\psi(x)$

$\phi(x)$



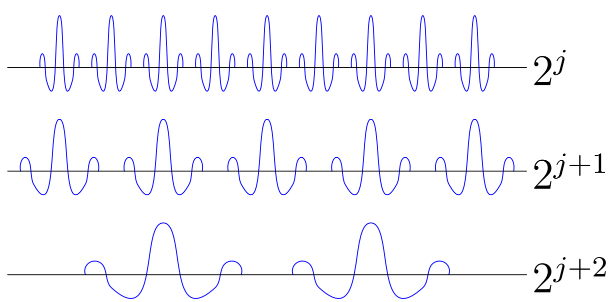


$\psi(x)$

qui sont dilatées par 2^j et translatées de $2^j n$

$$\phi_{j,n}(x) = \frac{1}{\sqrt{2^j}}\,\phi\left(\frac{x - 2^j n}{2^j}\right) \quad , \quad \psi_{j,n}(x) = \frac{1}{\sqrt{2^j}}\,\psi\left(\frac{x - 2^j n}{2^j}\right)$$

- $\mathbf{B} = \left\{\psi_{j,n}\right\}_{j \in \mathbb{N}\,,\, 2^j n \in [0,1)}$ est une base orthonormale de $L^2[0,1]$.



FWT

FWT

- Algorithme rapide proposé par Mallat (89).

FWT

- Algorithme rapide proposé par Mallat (89).
- Récursion et sous-échantillonnage.

FWT

- Algorithme rapide proposé par Mallat (89).
- Récursion et sous-échantillonnage.
- Multirésolution :

$$\phi_{j+1,l}(x) = \sum_k g[-k]\phi_{j,2l+k}(x) \quad \Longrightarrow \langle f, \phi_{j+1,l}\rangle \quad = \sum_k g[-k]\langle f, \phi_{j,2l+k}\rangle$$

$$\psi_{j+1,l}(x) = \sum_k h[-k]\phi_{j,2l+k}(x) \quad \Longrightarrow \langle f, \psi_{j+1,l}\rangle \quad = \sum_k h[-k]\langle f, \phi_{j,2l+k}\rangle$$

FWT

- Algorithme rapide proposé par Mallat (89).
- Récursion et sous-échantillonnage.
- Multirésolution :

$$\phi_{j+1,l}(x) = \sum_k g[-k]\phi_{j,2l+k}(x) \quad \Longrightarrow \langle f, \phi_{j+1,l}\rangle \quad = \sum_k g[-k]\langle f, \phi_{j,2l+k}\rangle$$

$$\psi_{j+1,l}(x) = \sum_k h[-k]\phi_{j,2l+k}(x) \quad \Longrightarrow \langle f, \psi_{j+1,l}\rangle \quad = \sum_k h[-k]\langle f, \phi_{j,2l+k}\rangle$$

- Calcul des 2^{-j} coefficients à l'échelle 2^j = convolution : $K2^{-j}$ opérations où K dépend au support des filtres g et h.

FWT

- Algorithme rapide proposé par Mallat (89).
- Récursion et sous-échantillonnage.
- Multirésolution :

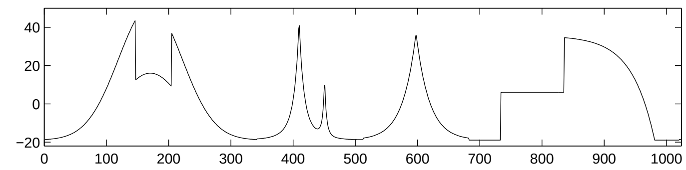
$$\phi_{j+1,l}(x) = \sum_k g[-k]\phi_{j,2l+k}(x) \quad \Longrightarrow \langle f, \phi_{j+1,l}\rangle \quad = \sum_k g[-k]\langle f, \phi_{j,2l+k}\rangle$$
$$\psi_{j+1,l}(x) = \sum_k h[-k]\phi_{j,2l+k}(x) \quad \Longrightarrow \langle f, \psi_{j+1,l}\rangle \quad = \sum_k h[-k]\langle f, \phi_{j,2l+k}\rangle$$

- Calcul des 2^{-j} coefficients à l'échelle 2^j = convolution : $K2^{-j}$ opérations où K dépend au support des filtres g et h.
- Coût total : $O(N)$ (l'échelle fine domine).

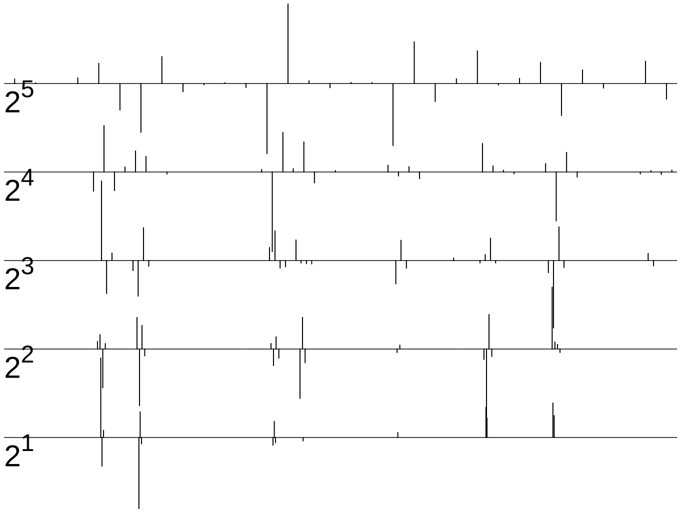
Approximation non linéaire en ondelettes

Approximation non linéaire en ondelettes

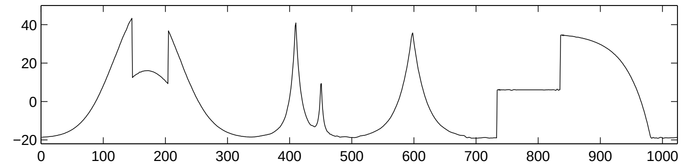
f



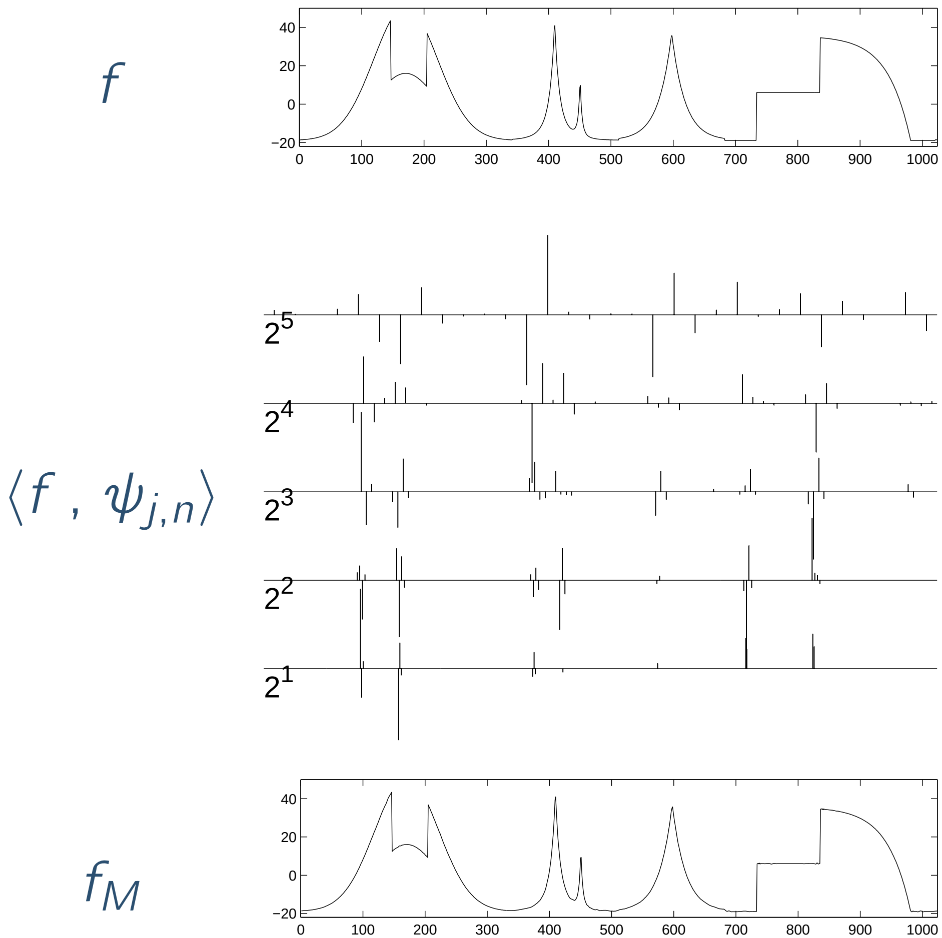
$\langle f \, , \, \psi_{j,n} \rangle$



f_M



Approximation non linéaire en ondelettes



- Si f est $\mathbf{C}^\alpha$ par morceaux et ψ a $p > \alpha$ moments nuls alors

$$\|f - f_M\|^2 = O(M^{-2\alpha}) \, .$$

Base d'ondelettes 2D séparables

Base d'ondelettes 2D séparables

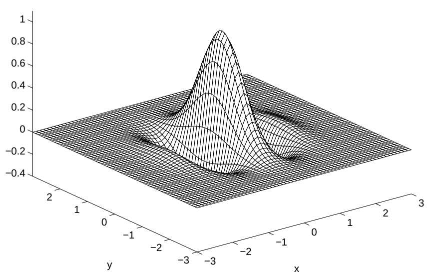
- La famille
$$\left\{ \begin{array}{ccc} \phi_{j,n_1}(x_1)\,\psi_{j,n_2}(x_2) & , & \psi_{j,n_1}(x_1)\,\phi_{j,n_2}(x_2) \\ & , & \psi_{j,n_1}(x_1)\,\psi_{j,n_2}(x_2) \end{array} \right\}_{(j,n_1,n_2)\in\mathbb{Z}^3}$$
forme une base orthonormée de $L^2[0,1]^2$.

Base d'ondelettes 2D séparables

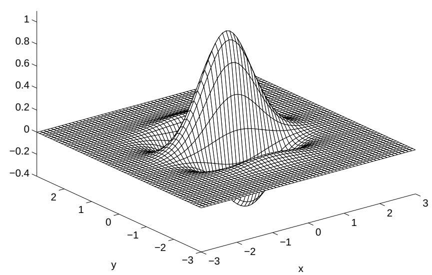
- La famille

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \phi_{j,n_1}(x_1)\,\psi_{j,n_2}(x_2) & , & \psi_{j,n_1}(x_1)\,\phi_{j,n_2}(x_2) \\ & , & \psi_{j,n_1}(x_1)\,\psi_{j,n_2}(x_2) \end{array} \right\}_{(j,n_1,n_2)\in\mathbb{Z}^3}$$

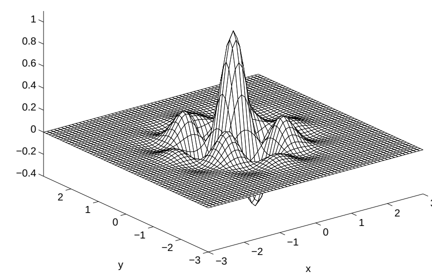
forme une base orthonormée de $L^2[0,1]^2$.



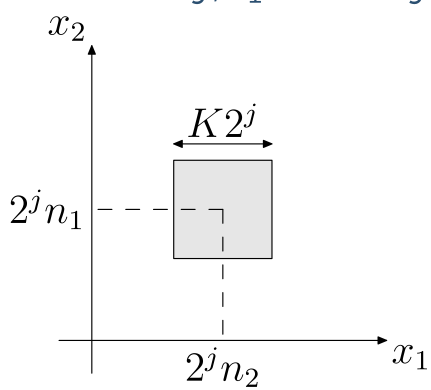
$\phi_{j,n_1}(x_1)\,\psi_{j,n_2}(x_2)$



$\psi_{j,n_1}(x_1)\,\phi_{j,n_2}(x_2)$



$\psi_{j,n_1}(x_1)\,\psi_{j,n_2}(x_2)$



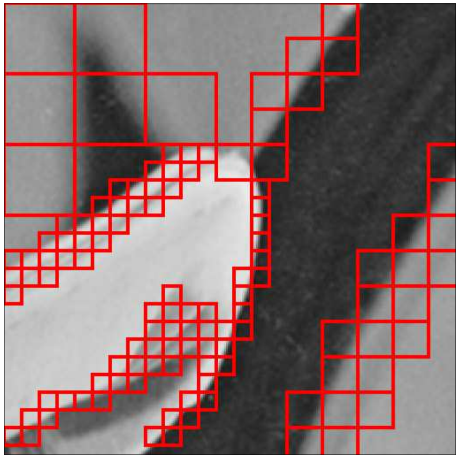
Support
des ondelettes
isotropes

JPEG 2000

JPEG 2000

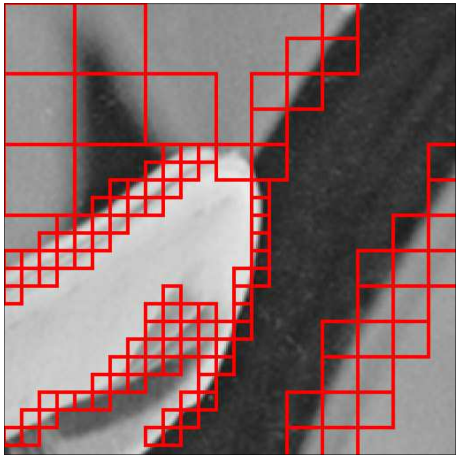
- Comité JPEG 2000 : premier jet (Décembre 2000), version définitive (Août 2002).

JPEG 2000



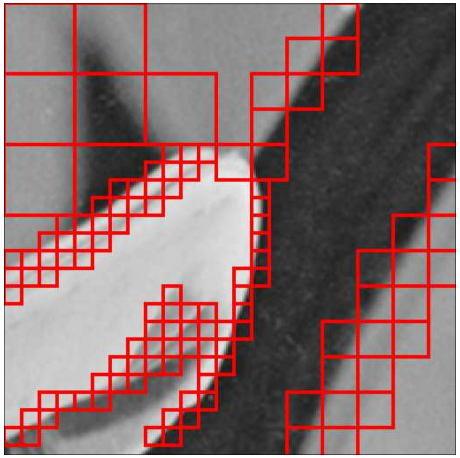
- Comité JPEG 2000 : premier jet (Décembre 2000), version définitive (Août 2002).
- Basé sur le codeur EBCOT (Taubman) : transformée en ondelettes, codage par plan de bits des différentes sous-bandes.

JPEG 2000



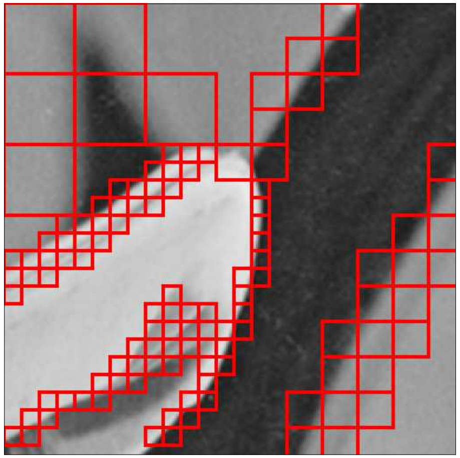
- Comité JPEG 2000 : premier jet (Décembre 2000), version définitive (Août 2002).
- Basé sur le codeur EBCOT (Taubman) : transformée en ondelettes, codage par plan de bits des différentes sous-bandes.
- Beaucoup plus fin que le codeur JPEG avec plus de possibilités (échelonnabilité, région d'intérêt,. . .).

JPEG 2000



- Comité JPEG 2000 : premier jet (Décembre 2000), version définitive (Août 2002).
- Basé sur le codeur EBCOT (Taubman) : transformée en ondelettes, codage par plan de bits des différentes sous-bandes.
- Beaucoup plus fin que le codeur JPEG avec plus de possibilités (échelonnabilité, région d'intérêt,. . .).
- Amélioration en terme de qualité vis à vis de JPEG.

JPEG 2000



- Comité JPEG 2000 : premier jet (Décembre 2000), version définitive (Août 2002).
- Basé sur le codeur EBCOT (Taubman) : transformée en ondelettes, codage par plan de bits des différentes sous-bandes.
- Beaucoup plus fin que le codeur JPEG avec plus de possibilités (échelonnabilité, région d'intérêt,...).
- Amélioration en terme de qualité vis à vis de JPEG.
- Pas encore *grand public*.

Débruitage

Débruitage

- Enlever un bruit gaussien d'une image.

Débruitage

- Enlever un bruit gaussien d'une image.
- Utilisation statistique d'une base d'ondelettes par *Donoho et Jonhnstone* : 1993

Débruitage

- Enlever un bruit gaussien d'une image.
- Utilisation statistique d'une base d'ondelettes par *Donoho et Jonhnstone* : 1993
- Méthode par seuillage $\sim$ approximation non-linéaire.

Débruitage

- Enlever un bruit gaussien d'une image.
- Utilisation statistique d'une base d'ondelettes par *Donoho et Jonhnstone* : 1993
- Méthode par seuillage $\sim$ approximation non-linéaire.
- Erreur d'approximation non-linéaire optimale : erreur d'estimation optimale.

Débruitage

- Enlever un bruit gaussien d'une image.
- Utilisation statistique d'une base d'ondelettes par *Donoho et Jonhnstone* : 1993
- Méthode par seuillage $\sim$ approximation non-linéaire.
- Erreur d'approximation non-linéaire optimale : erreur d'estimation optimale.
- Invariance par translation pour améliorer les résultats.

Estimation et modèle de bruit blanc

Estimation et modèle de bruit blanc

- Modèle de bruit blanc avec un bruit de niveau ϵ

$$Y = f + \epsilon W$$

avec W gaussien.

Estimation et modèle de bruit blanc

- Modèle de bruit blanc avec un bruit de niveau ϵ

$$Y = f + \epsilon W$$

  avec W gaussien.
- Propriétés de f : propriétés dans le domaine continu.

Estimation et modèle de bruit blanc

- Modèle de bruit blanc avec un bruit de niveau ϵ

$$Y = f + \epsilon W$$

  avec W gaussien.
- Propriétés de f : propriétés dans le domaine continu.
- Estimateur F de f : fonction de Y.

Estimation et modèle de bruit blanc

- Modèle de bruit blanc avec un bruit de niveau ϵ
$$Y = f + \epsilon W$$
avec W gaussien.
- Propriétés de f : propriétés dans le domaine continu.
- Estimateur F de f : fonction de Y.
- Critère : risque quadratique
$$E(\|f - F\|^2)$$

Estimation dans une base

Estimation dans une base

- Décomposition de $Y = f + \epsilon W$ dans une base orthonormée

$$Y = \sum_{b_n} \langle Y, b_n \rangle b_n = \sum_{b_n} \left(\langle f, b_n \rangle + \epsilon \langle W, b_n \rangle \right) b_n \quad .$$

Estimation dans une base

- Décomposition de $Y = f + \epsilon W$ dans une base orthonormée

$$Y = \sum_{b_n} \langle Y, b_n \rangle b_n = \sum_{b_n} \left(\langle f, b_n \rangle + \epsilon \langle W, b_n \rangle \right) b_n \quad .$$

- Expression des coefficients de f à partir de ceux de Y :

$$\langle f, b_n \rangle = \langle Y, b_n \rangle - \epsilon \langle W, b_n \rangle$$

avec $\epsilon |\langle W, b_n \rangle| \simeq \epsilon$.

Estimation dans une base

- Décomposition de $Y = f + \epsilon W$ dans une base orthonormée

$$Y = \sum_{b_n} \langle Y, b_n \rangle b_n = \sum_{b_n} \left(\langle f, b_n \rangle + \epsilon \langle W, b_n \rangle \right) b_n \quad .$$

- Expression des coefficients de f à partir de ceux de Y :

$$\langle f, b_n \rangle = \langle Y, b_n \rangle - \epsilon \langle W, b_n \rangle$$

avec $\epsilon |\langle W, b_n \rangle| \simeq \epsilon$.

- Estimateur des coefficients de f à partir de ceux de Y

$$\langle \hat{f}, b_n \rangle = \omega(n, \langle Y, b_n \rangle) \langle Y, b_n \rangle \simeq \langle f, b_n \rangle$$

Estimation dans une base

- Décomposition de $Y = f + \epsilon W$ dans une base orthonormée
$$Y = \sum_{b_n} \langle Y, b_n \rangle b_n = \sum_{b_n} \left(\langle f, b_n \rangle + \epsilon \langle W, b_n \rangle \right) b_n \quad .$$
- Expression des coefficients de f à partir de ceux de Y :
$$\langle f, b_n \rangle = \langle Y, b_n \rangle - \epsilon \langle W, b_n \rangle$$
avec $\epsilon |\langle W, b_n \rangle| \simeq \epsilon$.
- Estimateur des coefficients de f à partir de ceux de Y
$$\langle \hat{f}, b_n \rangle = \omega(n, \langle Y, b_n \rangle) \langle Y, b_n \rangle \simeq \langle f, b_n \rangle$$
- Simplification $\omega(n, x) = 1$ ou $\omega(n, x) = 0$.

Estimation oracle dans une base

Estimation oracle dans une base

- Cas simpliste $\omega(n, x) = \mathbf{1}_{n \in \Gamma}$ (indépendant de x).

Estimation oracle dans une base

- Cas simpliste $\omega(n,x) = \mathbf{1}_{n\in\Gamma}$ (indépendant de x).
- Estimateur F par sélection de coordonnées :

$$F = Y_\Gamma = \sum_{n\in\Gamma} \langle Y, b_n \rangle b_n \quad .$$

Estimation oracle dans une base

- Cas simpliste $\omega(n,x) = \mathbf{1}_{n\in\Gamma}$ (indépendant de x).
- Estimateur F par sélection de coordonnées :

$$F = Y_\Gamma = \sum_{n\in\Gamma} \langle Y, b_n\rangle b_n \quad .$$

- Minimisation du risque quadratique :

$$E(\|f - F\|^2) = \sum_{n\notin\Gamma} |\langle f, b_n\rangle|^2 + \sum_{n\in\Gamma} \epsilon^2 \quad .$$

Estimation oracle dans une base

- Cas simpliste $\omega(n, x) = \mathbf{1}_{n\in\Gamma}$ (indépendant de x).
- Estimateur F par sélection de coordonnées :

$$F = Y_\Gamma = \sum_{n\in\Gamma} \langle Y, b_n \rangle b_n \quad .$$

- Minimisation du risque quadratique :

$$E(\|f - F\|^2) = \sum_{n\notin\Gamma} |\langle f, b_n\rangle|^2 + \sum_{n\in\Gamma} \epsilon^2 \quad .$$

- Solution : $\Gamma_O = \{n, |\langle f, b_n\rangle| \geqslant \epsilon\}$ et $F_O = Y_{\Gamma_0}$.

Estimation oracle dans une base

- Cas simpliste $\omega(n, x) = \mathbf{1}_{n \in \Gamma}$ (indépendant de x).
- Estimateur F par sélection de coordonnées :

$$F = Y_\Gamma = \sum_{n \in \Gamma} \langle Y, b_n \rangle b_n \quad .$$

- Minimisation du risque quadratique :

$$E(\|f - F\|^2) = \sum_{n \notin \Gamma} |\langle f, b_n \rangle|^2 + \sum_{n \in \Gamma} \epsilon^2 \quad .$$

- Solution : $\Gamma_O = \{n, |\langle f, b_n \rangle| \geqslant \epsilon\}$ et $F_O = Y_{\Gamma_0}$.
- Problème : demande la connaissance de f ! (Oracle$\neq$estimateur)

Oracle, risque et approximation

Oracle, risque et approximation

- Risque quadratique de l'estimateur oracle F_O :

$$E(\|f - F_O\|^2) = \sum_{n \notin \Gamma_O} |\langle f, b_n \rangle|^2 + \sum_{n \in \Gamma_O} \epsilon^2$$

$$E(\|f - F_O\|^2) = \|f - f_{\Gamma_O}\|^2 + \epsilon^2 |\Gamma_O| \quad .$$

Oracle, risque et approximation

- Risque quadratique de l'estimateur oracle F_O :

$$E(\|f - F_O\|^2) = \sum_{n \notin \Gamma_O} |\langle f, b_n \rangle|^2 + \sum_{n \in \Gamma_O} \epsilon^2$$

$$E(\|f - F_O\|^2) = \|f - f_{\Gamma_O}\|^2 + \epsilon^2 |\Gamma_O| \quad .$$

- Compromis entre erreur d'approximation et nombre de termes.

Oracle, risque et approximation

- Risque quadratique de l'estimateur oracle F_O :

$$E(\|f - F_O\|^2) = \sum_{n \notin \Gamma_O} |\langle f, b_n \rangle|^2 + \sum_{n \in \Gamma_O} \epsilon^2$$
$$E(\|f - F_O\|^2) = \|f - f_{\Gamma_O}\|^2 + \epsilon^2 |\Gamma_O| \quad .$$

- Compromis entre erreur d'approximation et nombre de termes.
- Théorie de l'approximation :

$$E(\|f - F_O\|^2) = \|f - f_{\Gamma_O}\|^2 + \epsilon^2 |\Gamma_O| \leqslant C \left(\epsilon^2\right)^{\frac{\beta}{\beta+1}}$$
$$\Leftrightarrow \|f - f_M\|^2 \leqslant C M^{-\beta} \Leftrightarrow f \in \mathcal{A}^{\beta} \quad .$$

Oracle, risque et approximation

- Risque quadratique de l'estimateur oracle F_O :

$$E(\|f - F_O\|^2) = \sum_{n \notin \Gamma_O} |\langle f, b_n \rangle|^2 + \sum_{n \in \Gamma_O} \epsilon^2$$
$$E(\|f - F_O\|^2) = \|f - f_{\Gamma_O}\|^2 + \epsilon^2 |\Gamma_O| \quad .$$

- Compromis entre erreur d'approximation et nombre de termes.
- Théorie de l'approximation :

$$E(\|f - F_O\|^2) = \|f - f_{\Gamma_O}\|^2 + \epsilon^2 |\Gamma_O| \leqslant C \left(\epsilon^2\right)^{\frac{\beta}{\beta+1}}$$
$$\Leftrightarrow \|f - f_M\|^2 \leqslant C M^{-\beta} \Leftrightarrow f \in \mathcal{A}^\beta \quad .$$

- Pour Θ, classe de fonctions, quelle base donne $\Theta \subset \mathcal{A}^\beta$ avec β optimal ? ($(\epsilon^2)^{\frac{\beta}{\beta+1}}$ vitesse minimax).

Estimateur par seuillage

Estimateur par seuillage

- Oracle : $\Gamma_O = \{n, |\langle f, b_n \rangle| \geqslant \epsilon\}$ et $F_O = Y_{\Gamma_0}$.

Estimateur par seuillage

- Oracle : $\Gamma_O = \{n, |\langle f, b_n \rangle| \geqslant \epsilon\}$ et $F_O = Y_{\Gamma_0}$.
- Stratégie : garder les grands coefficients.

Estimateur par seuillage

- Oracle : $\Gamma_O = \{n, |\langle f, b_n \rangle| \geqslant \epsilon\}$ et $F_O = Y_{\Gamma_0}$.
- Stratégie : garder les grands coefficients.
- Seuillage : $\Gamma_S = \{n, |\langle Y, b_n \rangle| \geqslant T(\epsilon)\}$ et $F_S = Y_{\Gamma_S}$.

Estimateur par seuillage

- Oracle : $\Gamma_O = \{n, |\langle f, b_n\rangle| \geqslant \epsilon\}$ et $F_O = Y_{\Gamma_0}$.
- Stratégie : garder les grands coefficients.
- Seuillage : $\Gamma_S = \{n, |\langle Y, b_n\rangle| \geqslant T(\epsilon)\}$ et $F_S = Y_{\Gamma_S}$.
- **Théorème (Donoho, Johnstone) :** Si $T(\epsilon) = \lambda\sqrt{|\log \epsilon|}\epsilon$, alors

$$E(\|f - F_S\|^2) \leqslant C|\log \epsilon| E(\|f - F_O\|^2)$$

$$E(\|f - F_S\|^2) \leqslant C \min_{\Gamma} \|f - f_\Gamma\|^2 + \lambda^2 |\log \epsilon| \epsilon^2 |\Gamma| \quad \text{plus fin.}$$

Estimateur par seuillage

- Oracle : $\Gamma_O = \{n, |\langle f, b_n\rangle| \geqslant \epsilon\}$ et $F_O = Y_{\Gamma_0}$.
- Stratégie : garder les grands coefficients.
- Seuillage : $\Gamma_S = \{n, |\langle Y, b_n\rangle| \geqslant T(\epsilon)\}$ et $F_S = Y_{\Gamma_S}$.
- **Théorème (Donoho, Johnstone) :** Si $T(\epsilon) = \lambda\sqrt{|\log\epsilon|}\epsilon$, alors

$$E(\|f - F_S\|^2) \leqslant C|\log\epsilon|E(\|f - F_O\|^2)$$

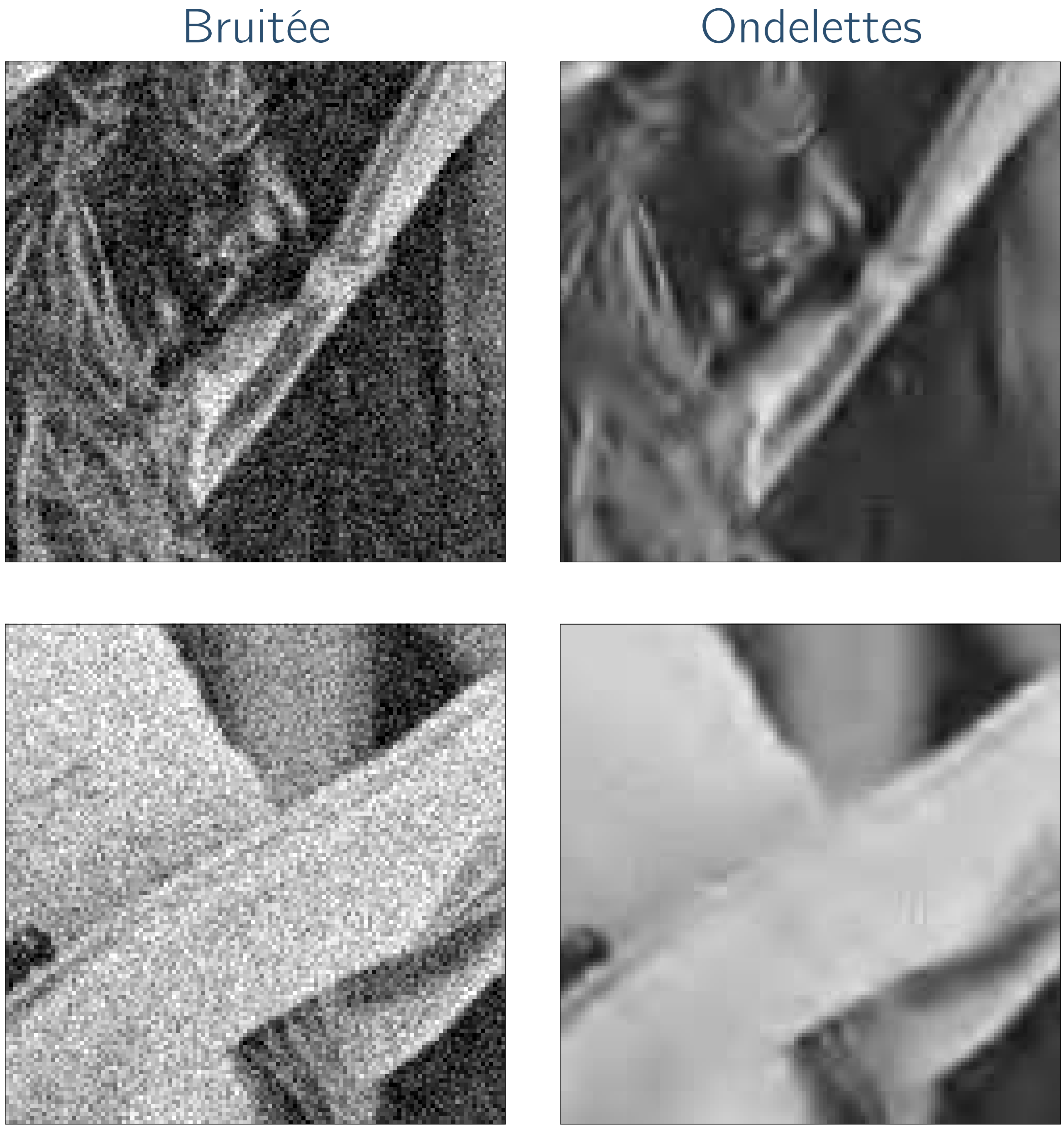
$$E(\|f - F_S\|^2) \leqslant C\min_{\Gamma}\|f - f_\Gamma\|^2 + \lambda^2|\log\epsilon|\epsilon^2|\Gamma| \quad \text{plus fin.}$$

- Importance du choix de la base et de l'approximation non linéaire !

Originale

Bruitée (20,19 dB)

Ondelettes (28,21 dB)

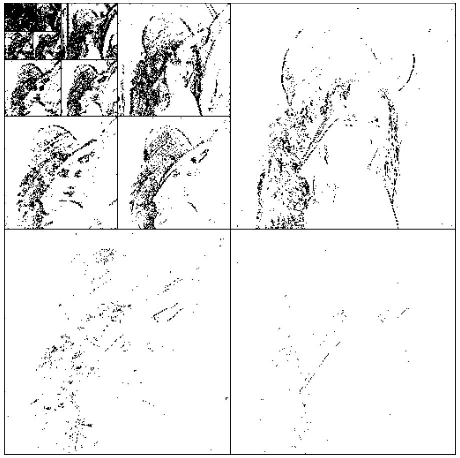

Bruitée
Ondelettes

Succès et échecs des bases d'ondelettes

Succès et échecs des bases d'ondelettes

- Les images sont décomposées dans une base d'ondelettes 2D et les coefficients les plus grands sont conservés (JPEG-2000).

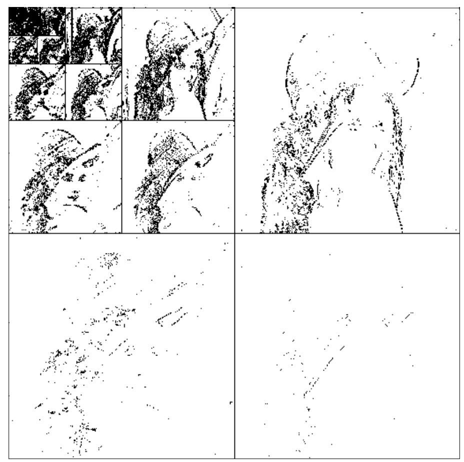
f M plus grands coeff. f_M



Succès et échecs des bases d'ondelettes

- Les images sont décomposées dans une base d'ondelettes 2D et les coefficients les plus grands sont conservés (JPEG-2000).

f | M plus grands coeff. | f_M

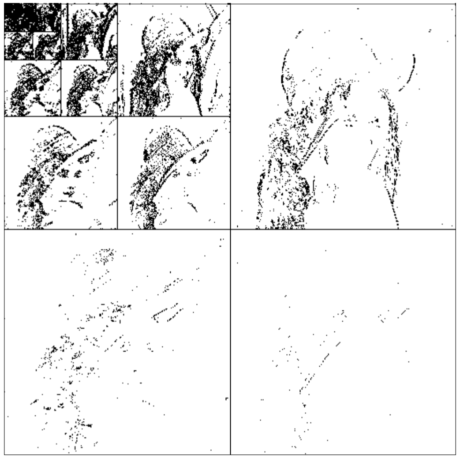


- *(Cohen, DeVore, Petrushev, Xue)* : Optimal pour les fonctions à variation bornée : $\|f - f_M\|^2 \leqslant C \, \|f\|_{TV} \, M^{-1}$.

Succès et échecs des bases d'ondelettes

- Les images sont décomposées dans une base d'ondelettes 2D et les coefficients les plus grands sont conservés (JPEG-2000).

f | M plus grands coeff. | f_M

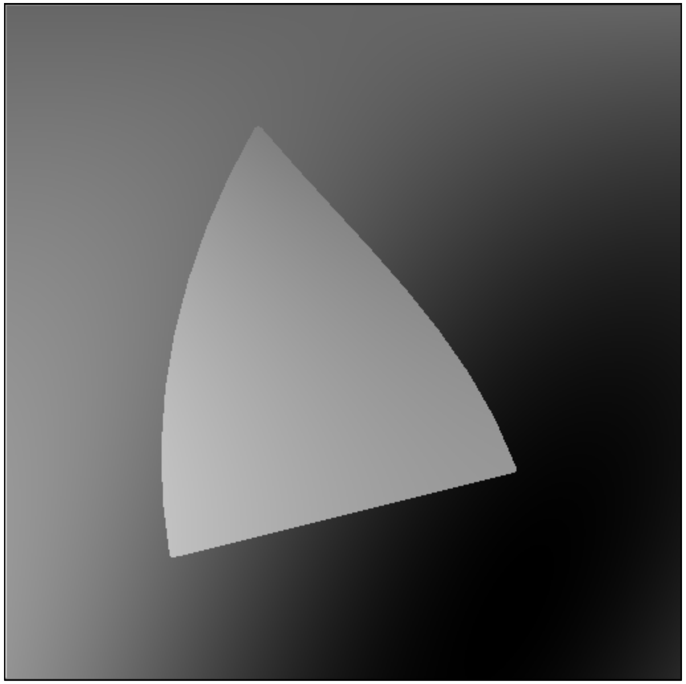


- *(Cohen, DeVore, Petrushev, Xue)* : Optimal pour les fonctions à variation bornée : $\|f - f_M\|^2 \leqslant C \, \|f\|_{TV} \, M^{-1}$.
- Mais ne prend avantage d'aucune sorte de régularité géométrique.

Ondelettes et géométrie

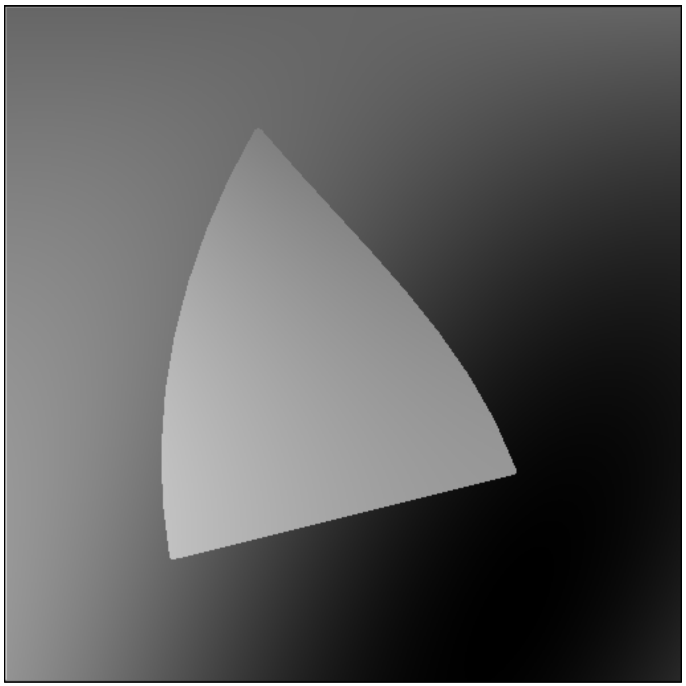
Ondelettes et géométrie

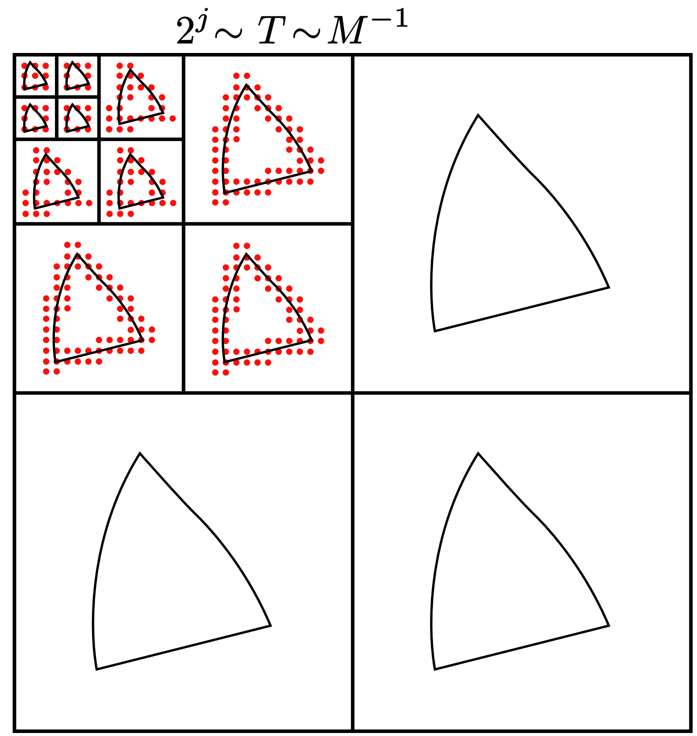
- Approximation de f $\mathbf{C}^\alpha$ en dehors de *contours* $\mathbf{C}^\alpha$:



Ondelettes et géométrie

- Approximation de f $\mathbf{C}^\alpha$ en dehors de *contours* $\mathbf{C}^\alpha$:



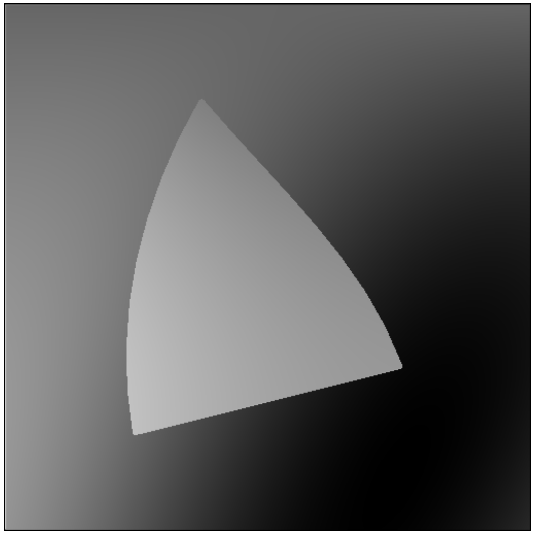


- Avec M ondelettes : $\|f - f_M\|^2 \leqslant C\, M^{-1}$.

Éléments géométriques et contours

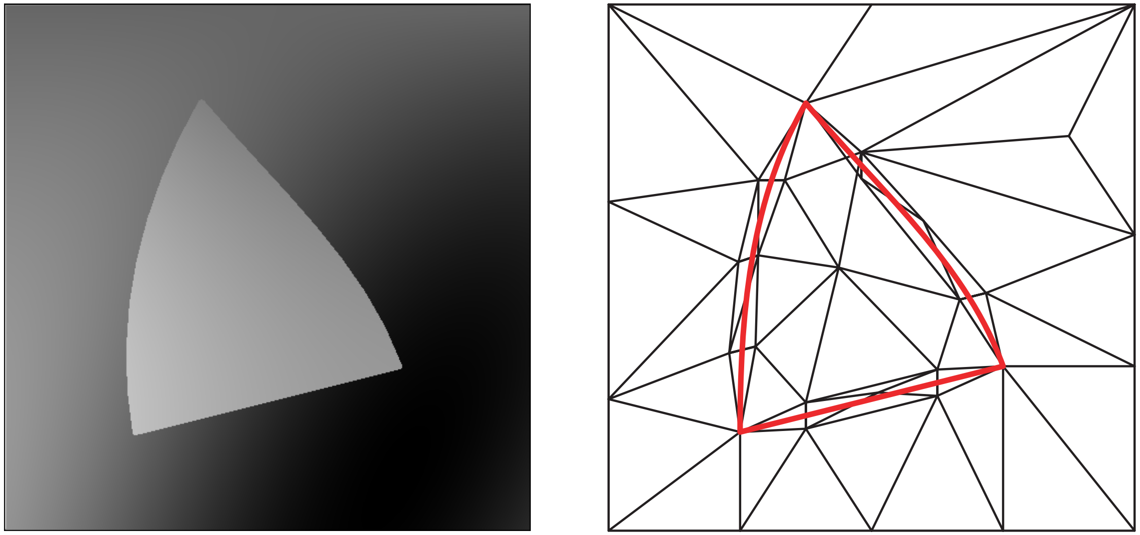
Éléments géométriques et contours

- Approximation de f $\mathbf{C}^\alpha$ en dehors de *contours* $\mathbf{C}^\alpha$.

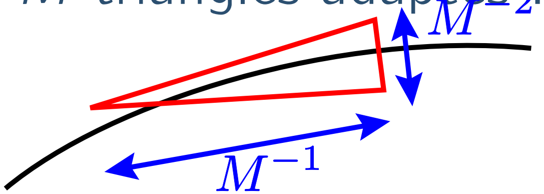


Éléments géométriques et contours

- Approximation de f $\mathbf{C}^\alpha$ en dehors de *contours* $\mathbf{C}^\alpha$.

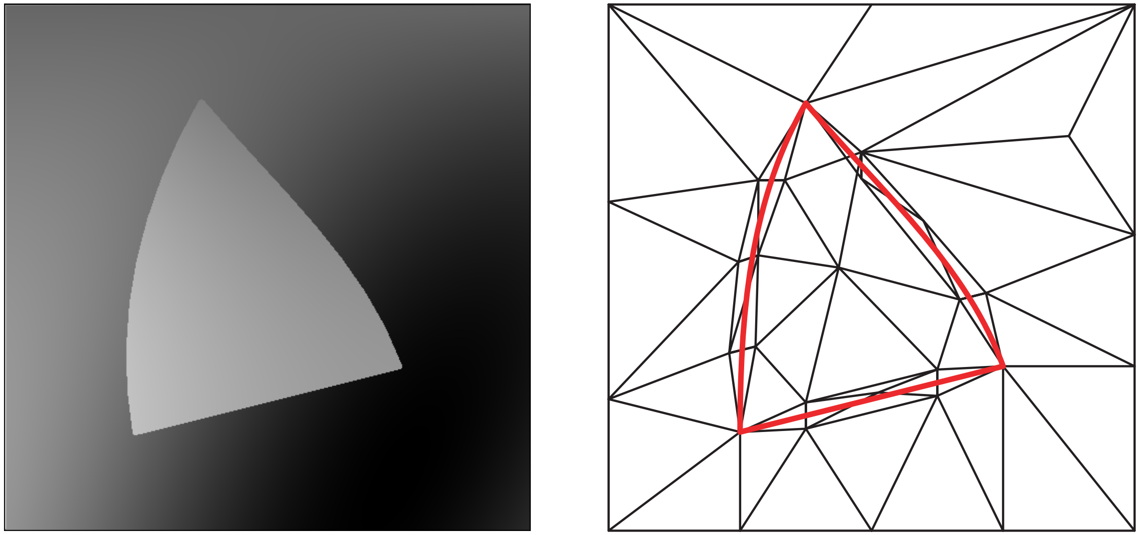


- Approximation linéaire par morceaux avec M triangles adaptés :
si $\alpha \geqslant 2$ alors $\|f - f_M\|^2 \leqslant C\, M^{-2}$,

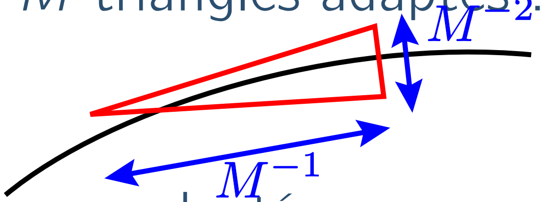


Éléments géométriques et contours

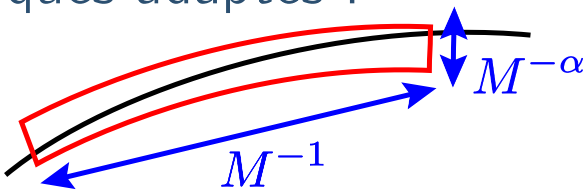
- Approximation de f $\mathbf{C}^\alpha$ en dehors de *contours* $\mathbf{C}^\alpha$.



- Approximation linéaire par morceaux avec M triangles adaptés :
  si $\alpha \geqslant 2$ alors $\|f - f_M\|^2 \leqslant C\, M^{-2}$,



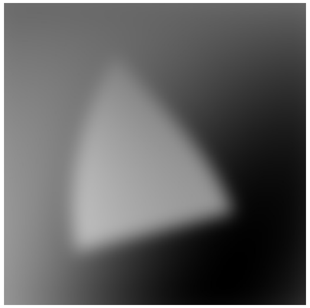
- Approximation avec M éléments géométriques adaptés :
  $\|f - f_M\|^2 \leqslant C\, M^{-\alpha}$.



Triangulation adaptative

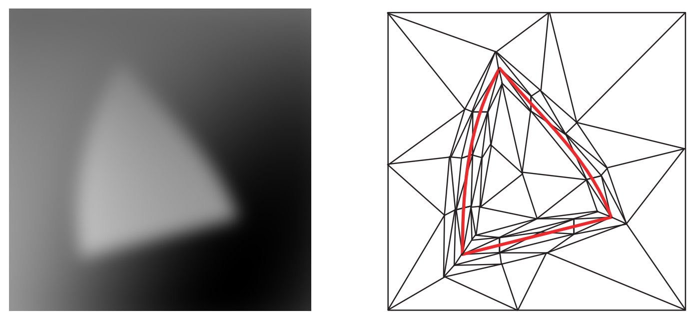
Triangulation adaptative

- Approximations de $f = \tilde{f} \star h_s$ avec :
  - f $\mathbf{C}^\alpha$ en dehors de contours $\mathbf{C}^\alpha$ $(\alpha \geqslant 2)$:
  - h_s un noyau régularisant de taille s

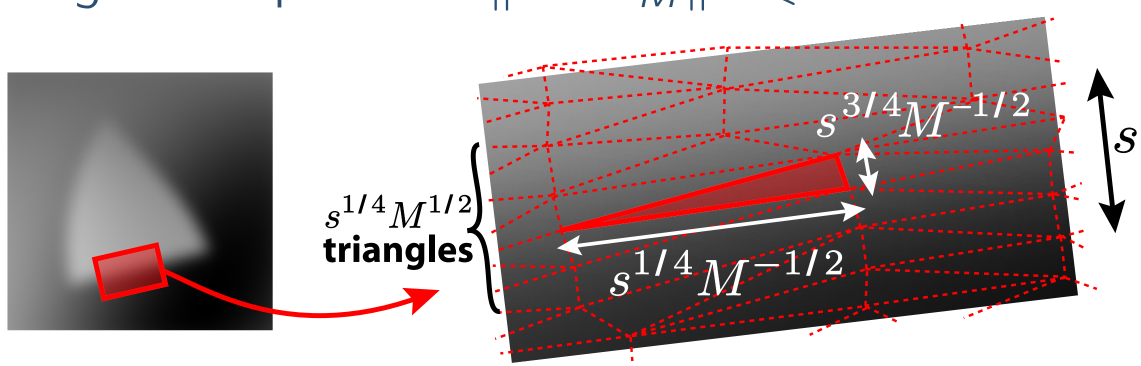


Triangulation adaptative

- Approximations de $f = \tilde{f} \star h_s$ avec :
  - f $\mathbf{C}^\alpha$ en dehors de contours $\mathbf{C}^\alpha$ $(\alpha \geqslant 2)$:
  - h_s un noyau régularisant de taille s

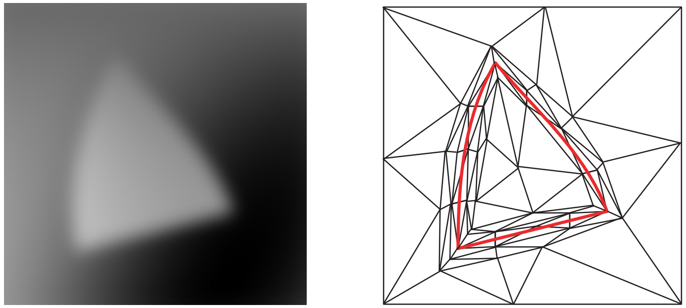


- Avec M triangles adaptatifs : $\|f - f_M\|^2 \leqslant C\, M^{-2}$.

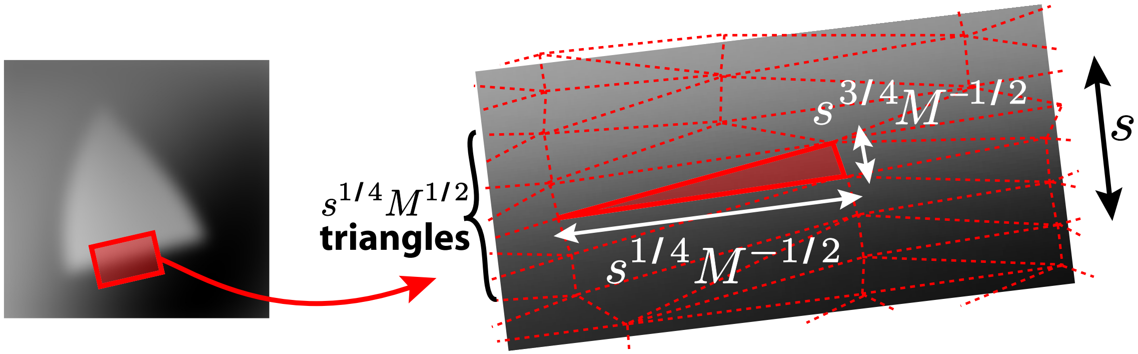


Triangulation adaptative

- Approximations de $f = \tilde{f} \star h_s$ avec :
  - f $\mathbf{C}^\alpha$ en dehors de contours $\mathbf{C}^\alpha$ $(\alpha \geqslant 2)$:
  - h_s un noyau régularisant de taille s



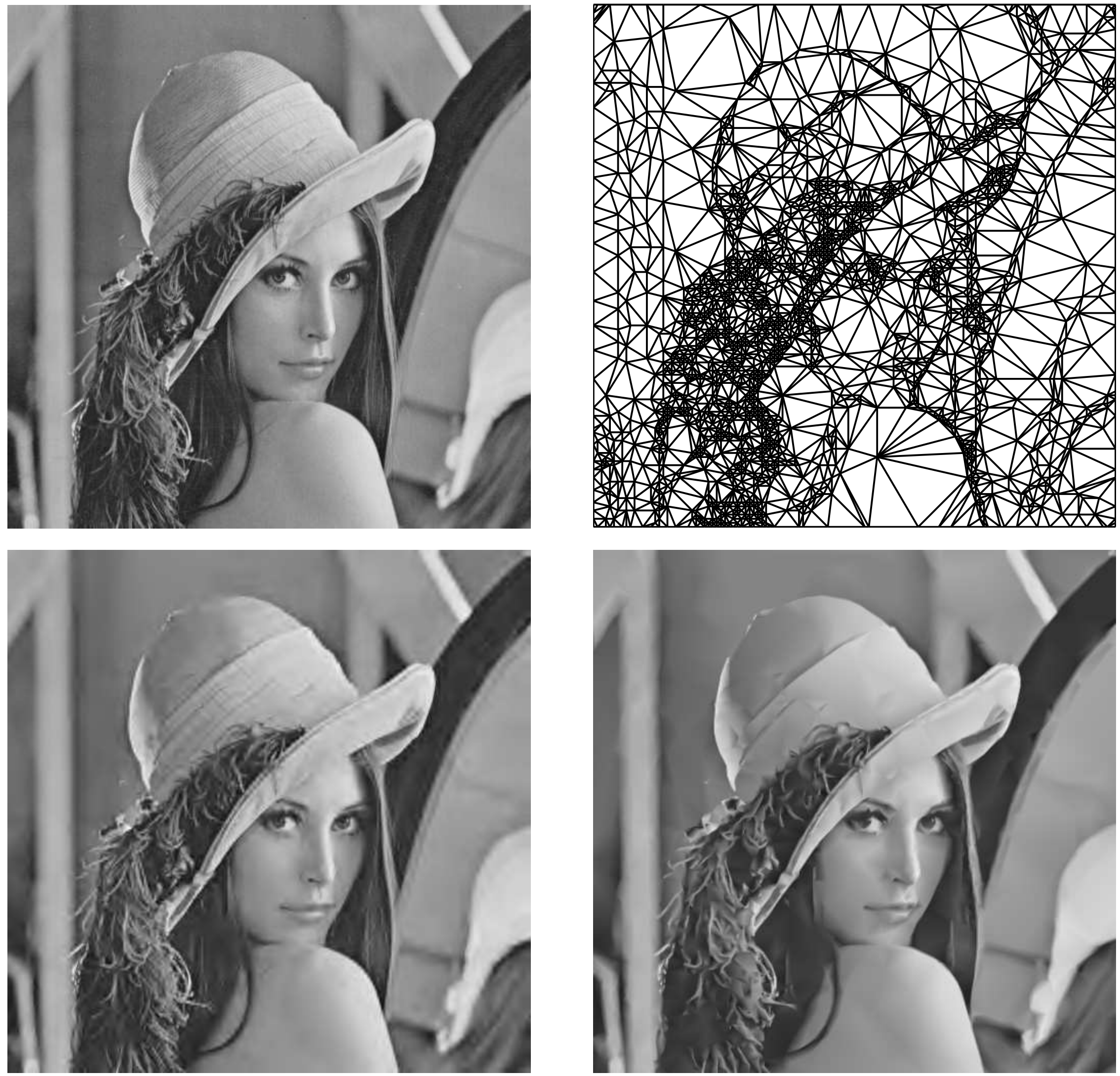
- Avec M triangles adaptatifs : $\|f - f_M\|^2 \leqslant C\, M^{-2}$.



- Difficile d'obtenir une approximation optimale mais bonnes solutions avec des algorithmes gloutons (*Dekel,Demaret, Dyn, Iske, Cohen, Mirebeau*).

Résultats

Original Triangulation



Ondelettes Triangulation

0.15 bits par pixel

Curvelets

Curvelets

- Curvelets forment un *tight frame* de $L^2[0,1]^2$ avec des éléments allongés et orientés (*Candes, Donoho*) : $\{c_j(R_\theta x - \eta)\}_{j,\theta,\eta}$

Curvelets

- Curvelets forment un *tight frame* de $L^2[0,1]^2$ avec des éléments allongés et orientés (*Candes, Donoho*) : $\{c_j(R_\theta x - \eta)\}_{j,\theta,\eta}$

- Si f est $\mathbf{C}^\alpha$ en dehors de contours $\mathbf{C}^\alpha$ avec M curvelets :

$$\text{si} \quad \alpha \geqslant 2 \quad \text{alors} \quad \|f - f_M\|^2 \leqslant C\,(\log M)^3\, M^{-2}.$$

Curvelets

- Curvelets forment un *tight frame* de $L^2[0,1]^2$ avec des éléments allongés et orientés (*Candes, Donoho*) : $\{c_j(R_\theta x - \eta)\}_{j,\theta,\eta}$

- Si f est $\mathbf{C}^\alpha$ en dehors de contours $\mathbf{C}^\alpha$ avec M curvelets :

$$\text{si} \quad \alpha \geqslant 2 \quad \text{alors} \quad \|f - f_M\|^2 \leqslant C\,(\log M)^3\, M^{-2}.$$

- Optimal pour $\alpha = 2$.

Curvelets

- Curvelets forment un *tight frame* de $L^2[0,1]^2$ avec des éléments allongés et orientés (*Candes, Donoho*) : $\{c_j(R_\theta x - \eta)\}_{j,\theta,\eta}$

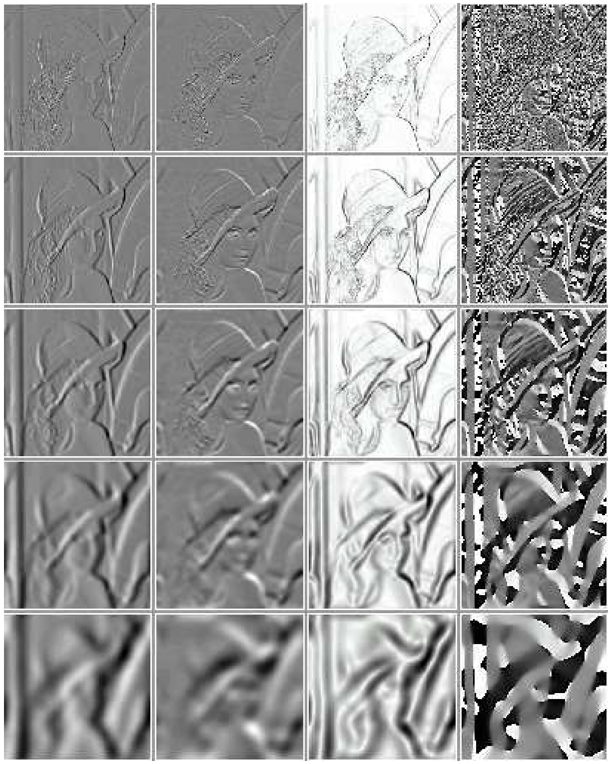
- Si f est $\mathbf{C}^\alpha$ en dehors de contours $\mathbf{C}^\alpha$ avec M curvelets :

$$\text{si} \quad \alpha \geqslant 2 \quad \text{alors} \quad \|f - f_M\|^2 \leqslant C\,(\log M)^3\, M^{-2}.$$

- Optimal pour $\alpha = 2$.
- Difficile de construire des bases (*Vetterli & Minh Do*).

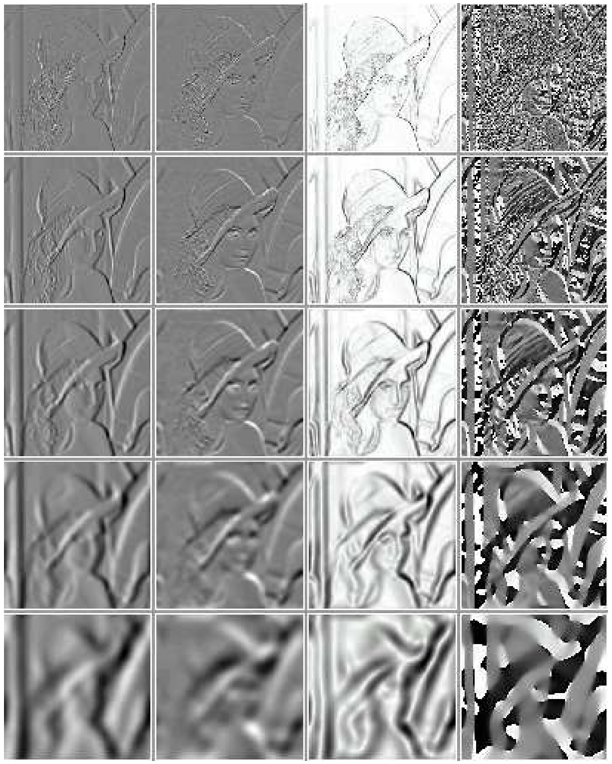
Ondelettes dyadiques

Ondelettes dyadiques



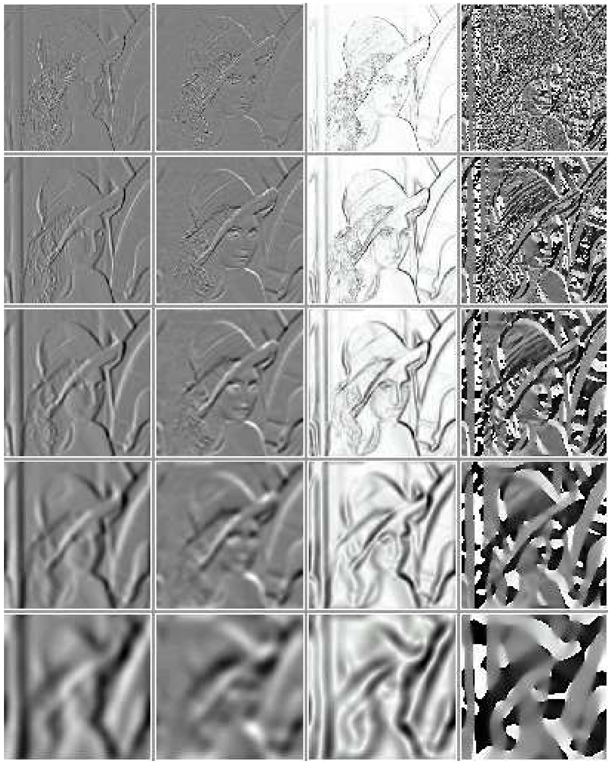
- Compression : redondance est un problème.

Ondelettes dyadiques



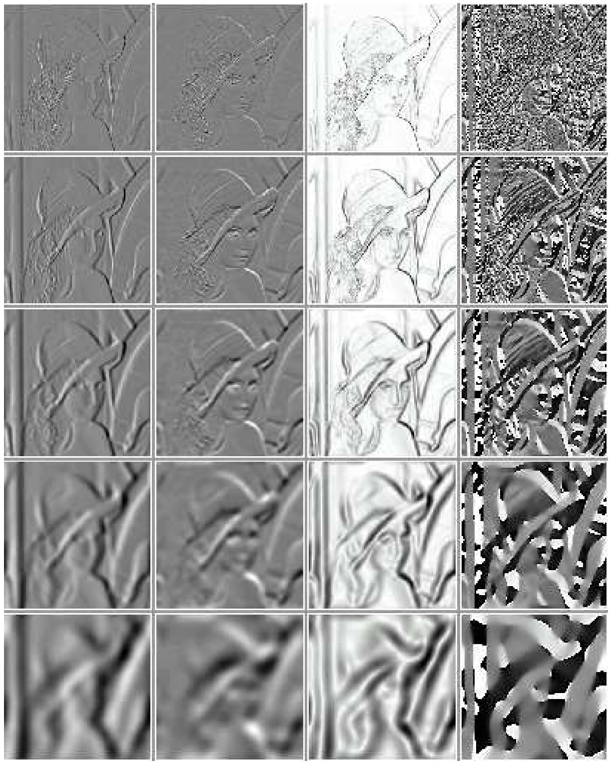
- Compression : redondance est un problème.
- Débruitage : redondance n'est pas un problème mais seulement la concentration de l'énergie du signal sur une faible portion des coefficients.

Ondelettes dyadiques



- Compression : redondance est un problème.
- Débruitage : redondance n'est pas un problème mais seulement la concentration de l'énergie du signal sur une faible portion des coefficients.
- Ondelettes dyadiques : suppression de la phase de sous-échantillonage des ondelettes.

Ondelettes dyadiques



- Compression : redondance est un problème.
- Débruitage : redondance n'est pas un problème mais seulement la concentration de l'énergie du signal sur une faible portion des coefficients.
- Ondelettes dyadiques : suppression de la phase de sous-échantillonage des ondelettes.
- Opérateur de filtrage classique ($f_j = f \star \psi_j$) / Algorithme *à trous*.

Algorithme à trous

Algorithme à trous

- Algorithme rapide en $O(N \log N)$ proposé par Bijaoui, Starck et Murtagh (1993)

Algorithme à trous

- Algorithme rapide en $O(N \log N)$ proposé par Bijaoui, Starck et Murtagh (1993)
- Suppression du sous-échantillonnage mais conservation du principe de la FWT.

Algorithme à trous

- Algorithme rapide en $O(N \log N)$ proposé par Bijaoui, Starck et Murtagh (1993)
- Suppression du sous-échantillonnage mais conservation du principe de la FWT.
- Sous échantillonnage se transforme en des ajouts de zéros dans les filtres :

$$\phi_{j+1}(x) = \sum_k g_j[-k]\phi_j(x-k) \quad \Longrightarrow \quad f \star \phi_{j+1}(x) = \sum_k g_j[-k] f \star \phi_j(x+k)$$

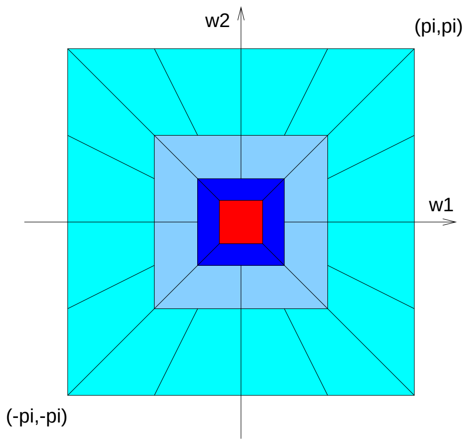
$$\psi_{j+1}(x) = \sum_k h_j[-k]\phi_j(x-k) \quad \Longrightarrow \quad f \star \psi_{j+1}(x) = \sum_k h_j[-k] f \star \phi_j(x+k)$$

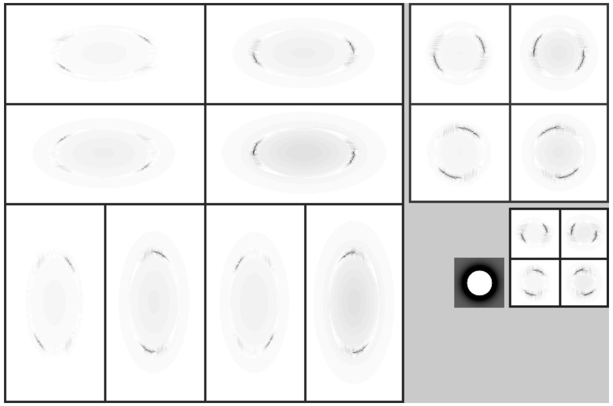
avec

$$g_j[k] = \begin{cases} g[l] & \text{si } k = l2^j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Filtres orientés

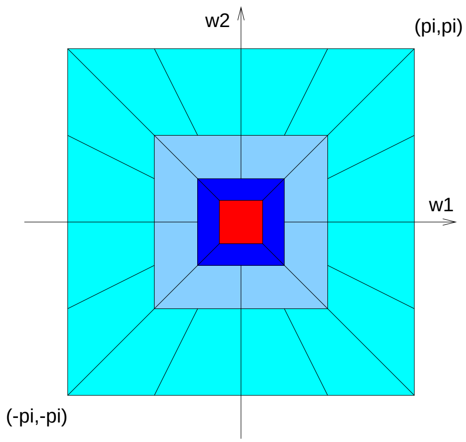
Filtres orientés

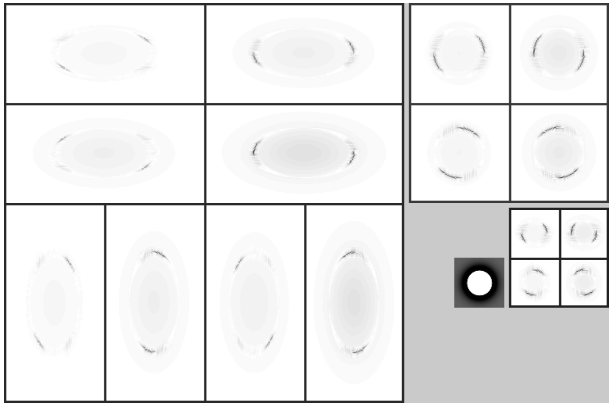




- Redondance = liberté accrue pour la représentation.

Filtres orientés

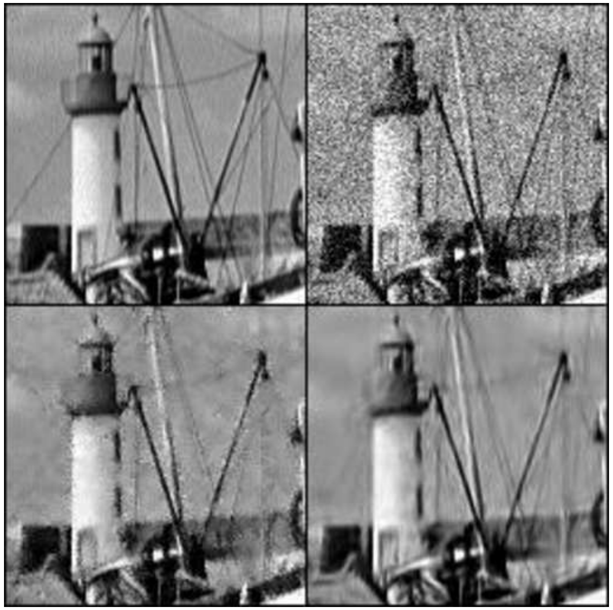


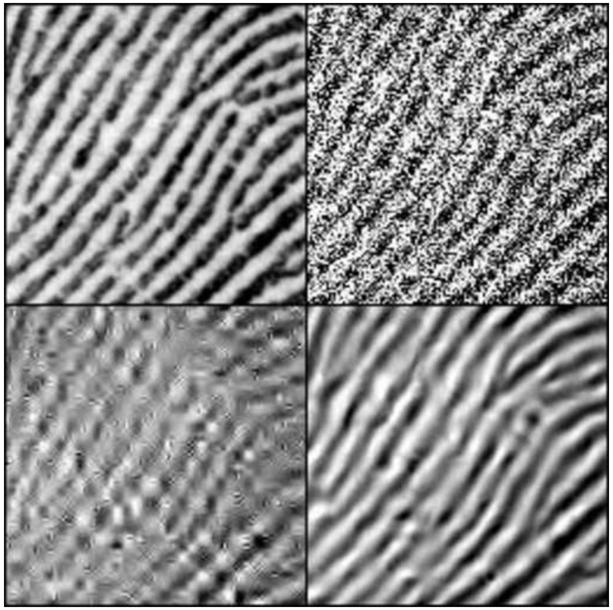


- Redondance = liberté accrue pour la représentation.
- Représentation géométrique par filtrage orienté : curvelets, contourlets, pyramide orientée, ...

Débruitage

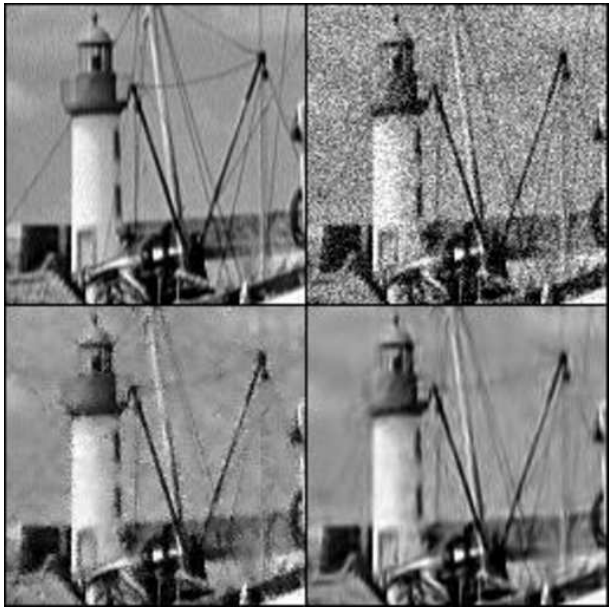
Débruitage

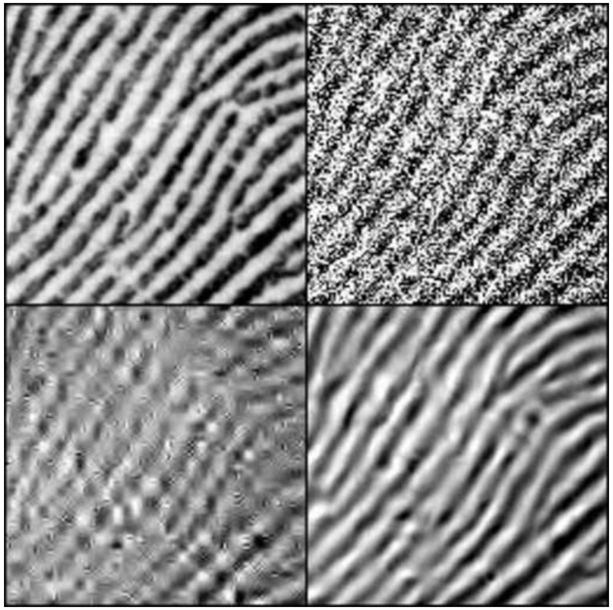




- *Portilla, Simonccelli et al.* : steerable pyramid.

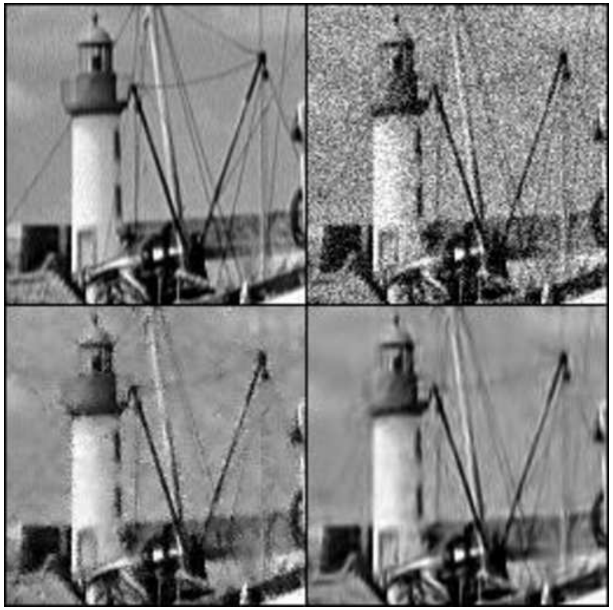
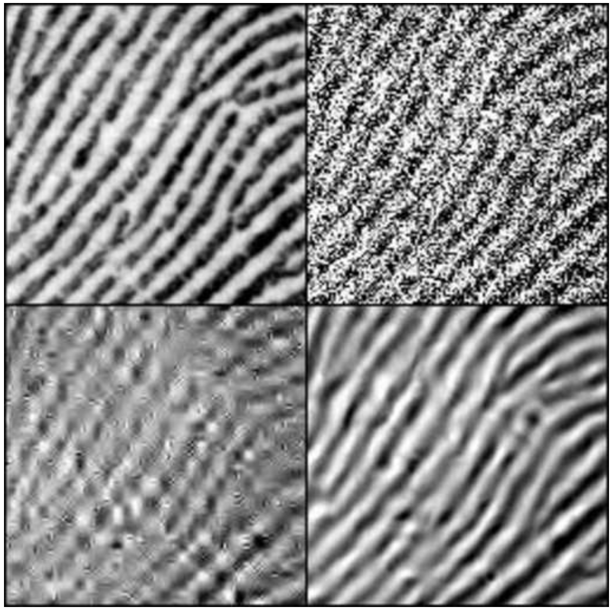
Débruitage





- *Portilla, Simonccelli et al.* : steerable pyramid.
- Modélisation des coefficients par mélanges de gaussiennes.

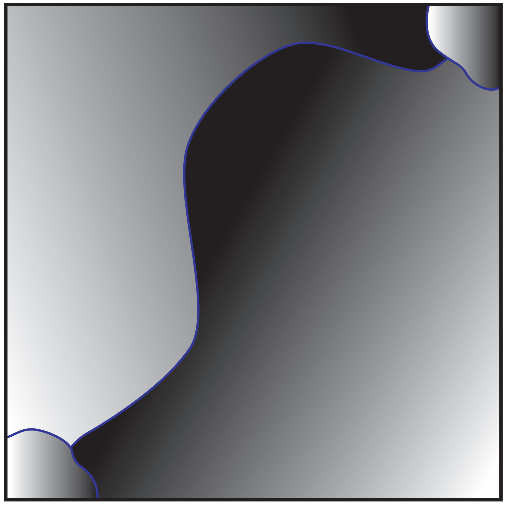
Débruitage

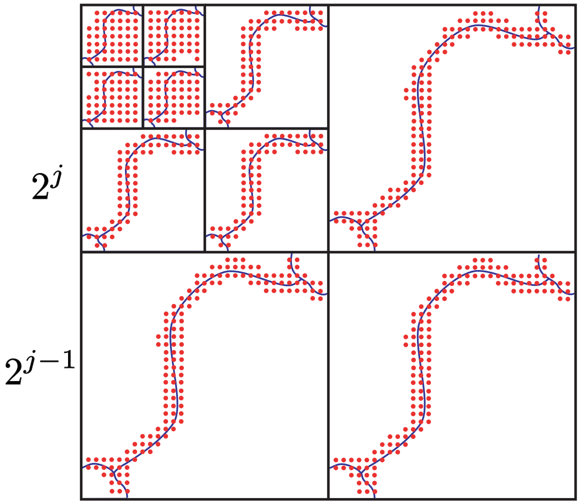



- *Portilla, Simonccelli et al.* : steerable pyramid.
- Modélisation des coefficients par mélanges de gaussiennes.
- Estimation locale des variables cachées.

Retour vers les ondelettes

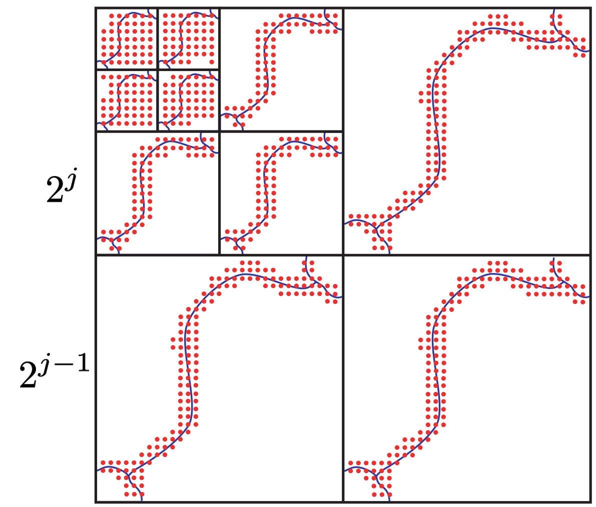
Retour vers les ondelettes





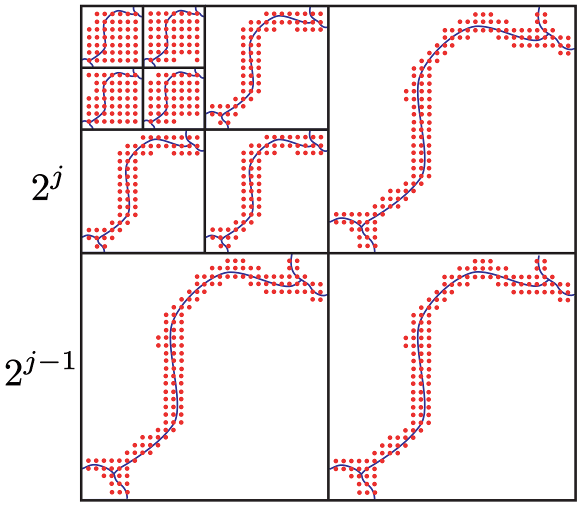
- À chaque échelle, comment approcher les coefficients non nuls (comportement chaotique) ?

Retour vers les ondelettes



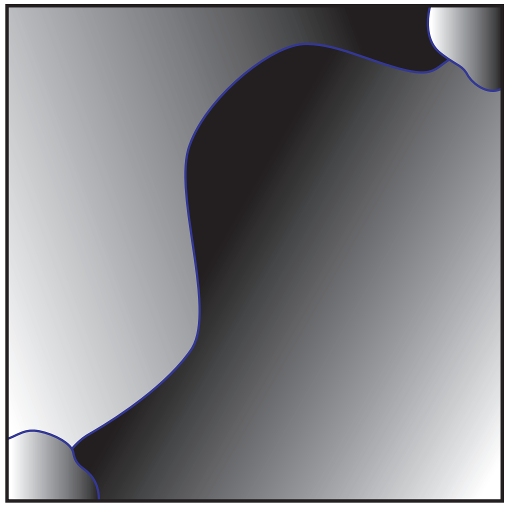
- À chaque échelle, comment approcher les coefficients non nuls (comportement chaotique) ?
- Utilisation de modèles paramétrés projetés sur les ondelettes : "wedgelets" et "wedgeprints" de *Baraniuk, Romberg, Wakin* et *Dragotti, Vetterli* (discontinuités le long de courbes).

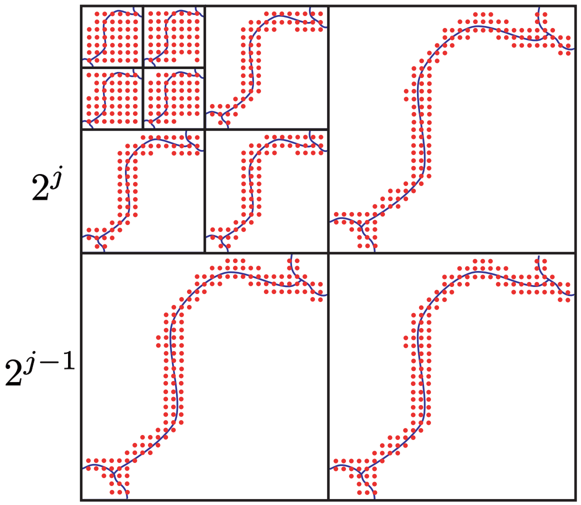
Retour vers les ondelettes



- À chaque échelle, comment approcher les coefficients non nuls (comportement chaotique) ?
- Utilisation de modèles paramétrés projetés sur les ondelettes : “wedgelets” et “wedgeprints” de *Baraniuk, Romberg, Wakin* et *Dragotti, Vetterli* (discontinuités le long de courbes).
- Problème avec les contours flous : $f = \tilde{f} \star h_s$.

Retour vers les ondelettes

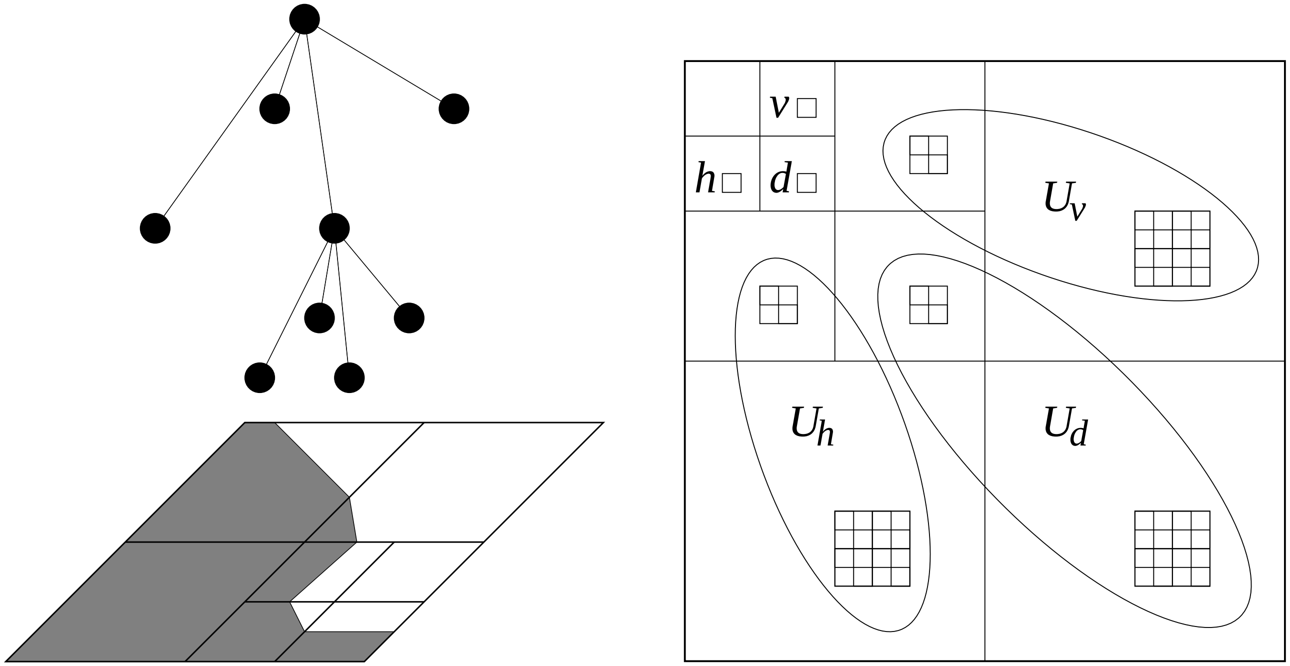




- À chaque échelle, comment approcher les coefficients non nuls (comportement chaotique) ?
- Utilisation de modèles paramétrés projetés sur les ondelettes : "wedgelets" et "wedgeprints" de *Baraniuk, Romberg, Wakin* et *Dragotti, Vetterli* (discontinuités le long de courbes).
- Problème avec les contours flous : $f = \tilde{f} \star h_s$.
- Modification de la transformée en ondelettes (*Cohen*).

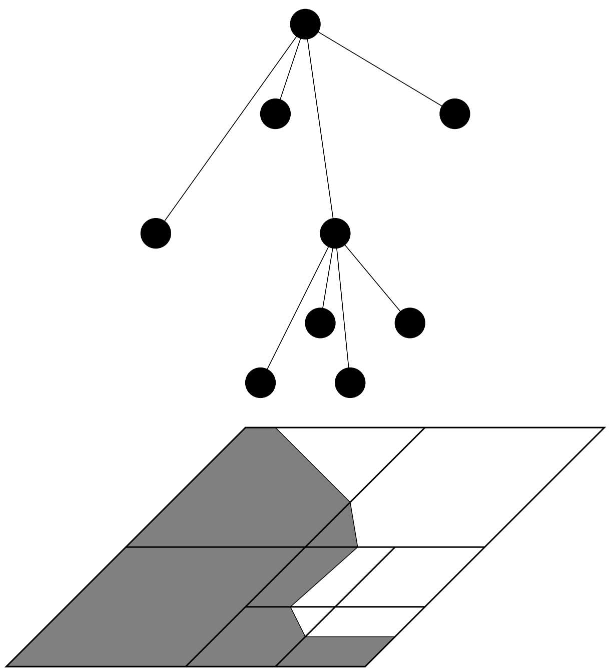
Compression

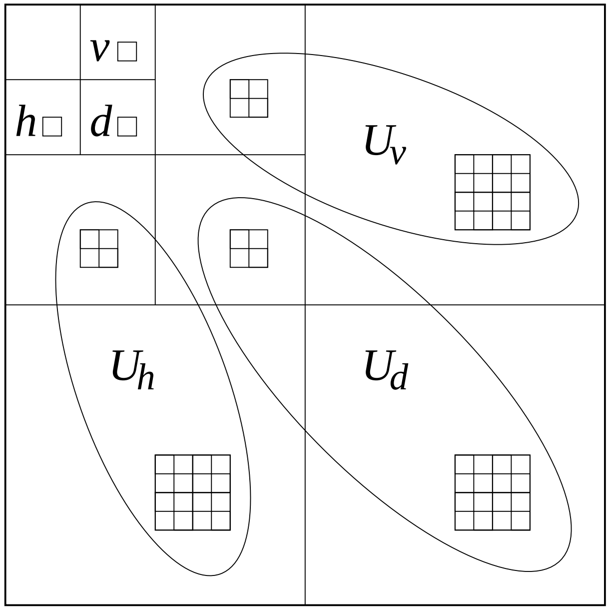
Compression



- Wedgelets : carrés dyadiques avec une discontinuité le long d'un segment.

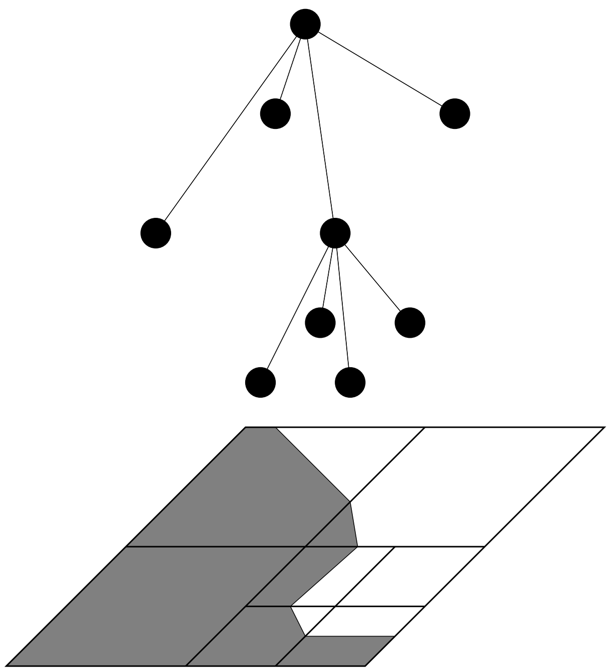
Compression

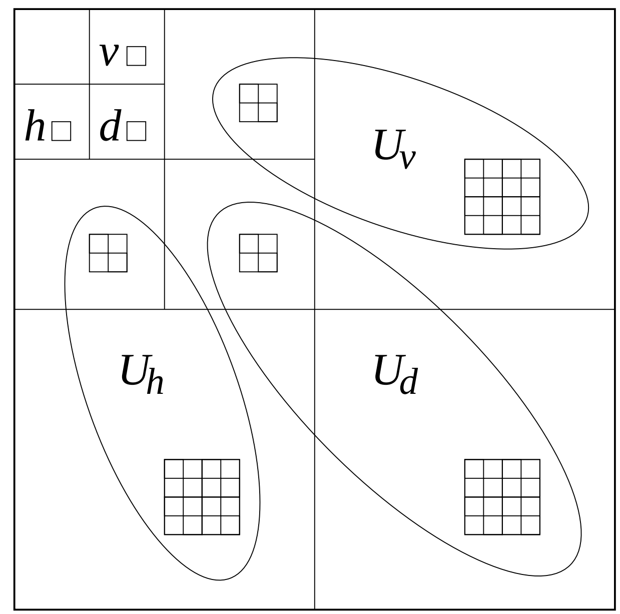




- Wedgelets : carrés dyadiques avec une discontinuité le long d'un segment.
- Décomposition en ondelettes et codage : coefficients, zerotree + wedgelets.

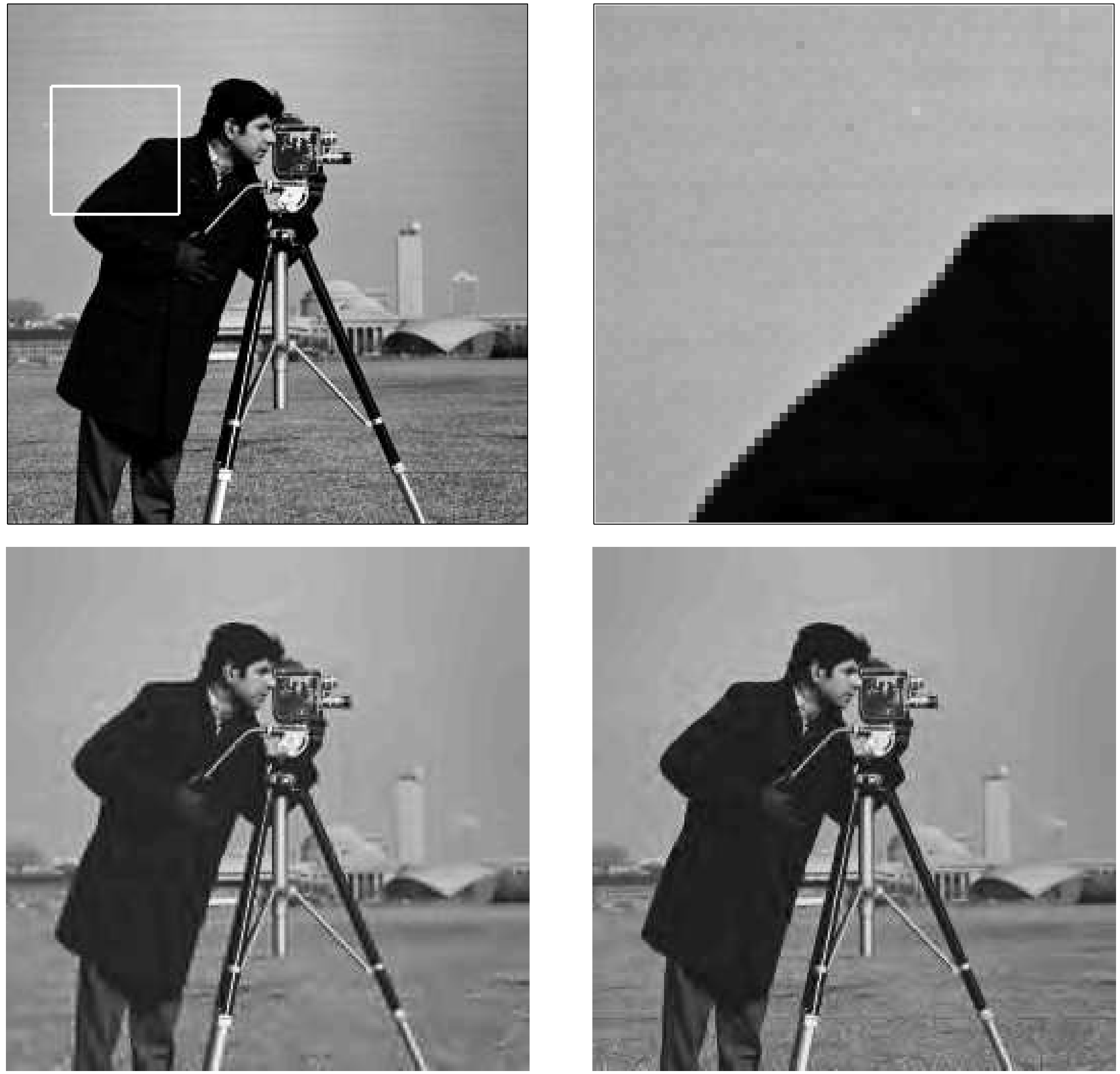
Compression





- Wedgelets : carrés dyadiques avec une discontinuité le long d'un segment.
- Décomposition en ondelettes et codage : coefficients, zerotree + wedgelets.
- Algorithme rapide d'optimisation.

Résultats



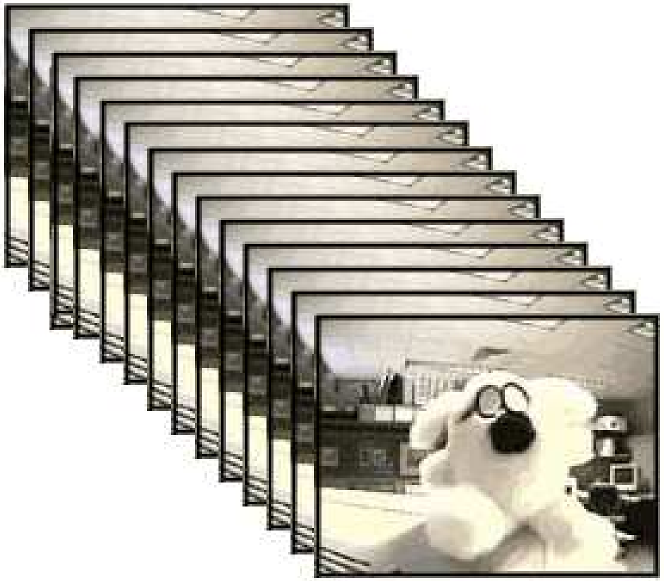
Ondelettes
28.8 dB

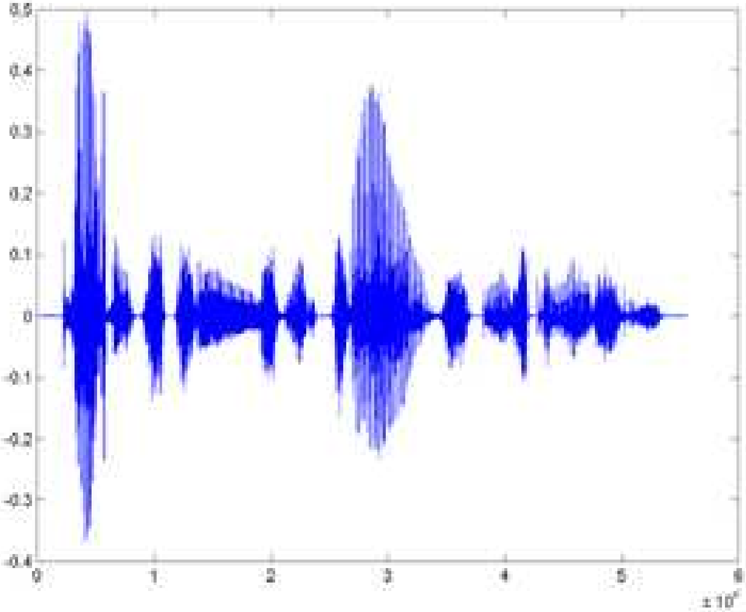
Wedgelets
30.2 dB

0.2 bits par pixel

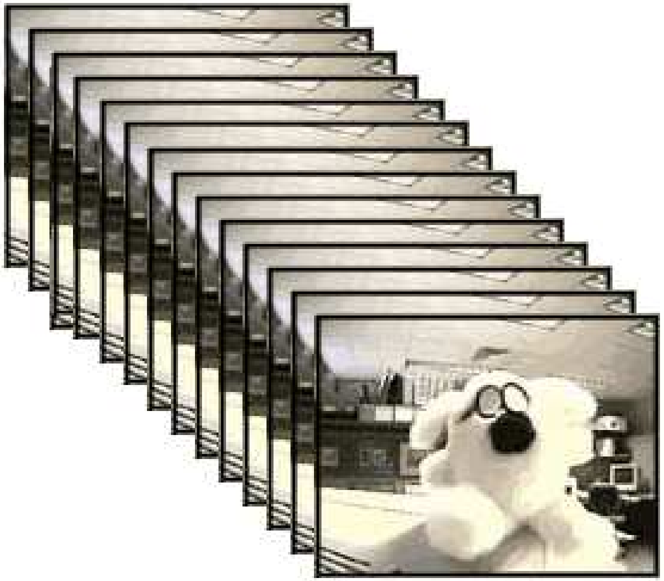
Vidéos et sons

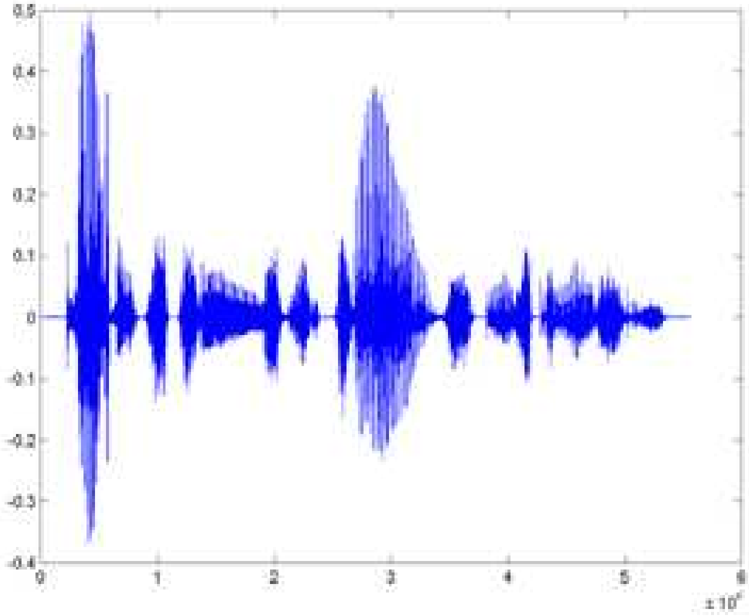
Vidéos et sons





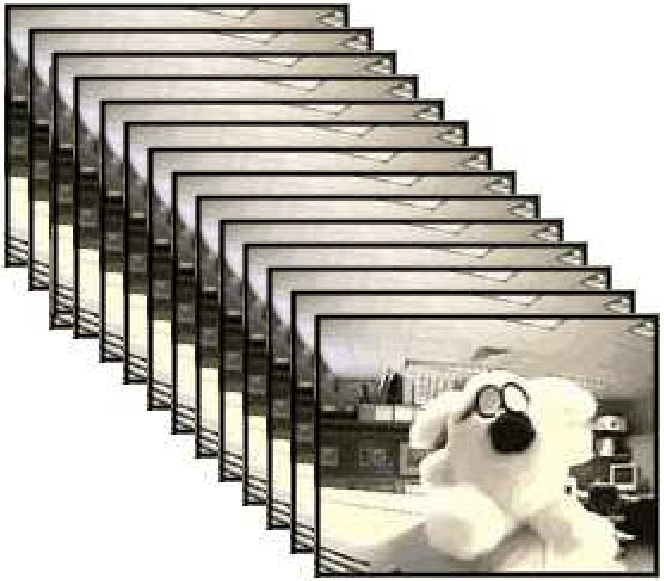
Vidéos et sons

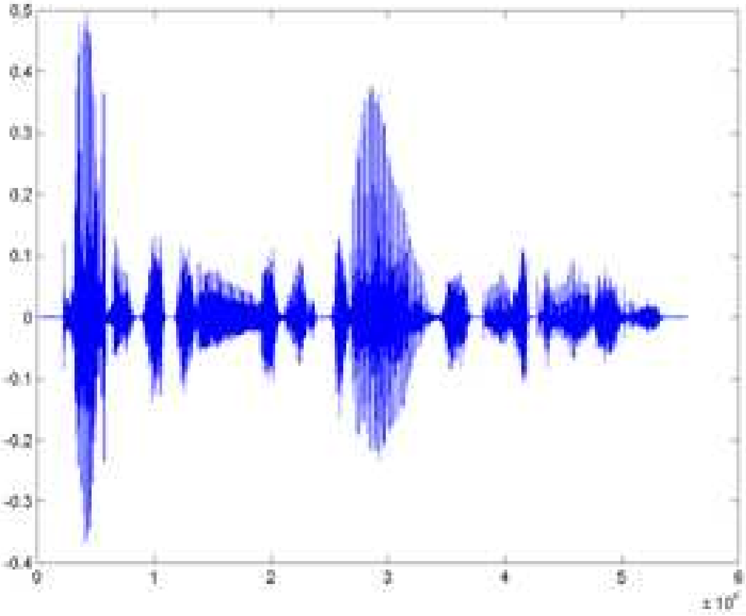




- Mêmes principes s'appliquent !

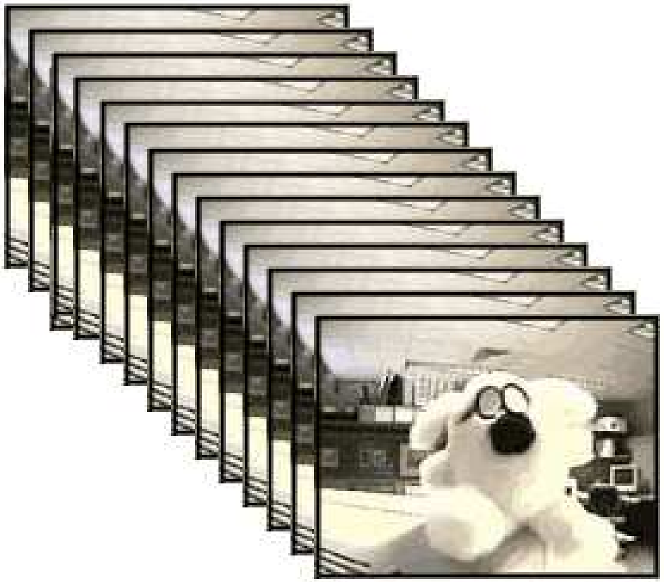
Vidéos et sons

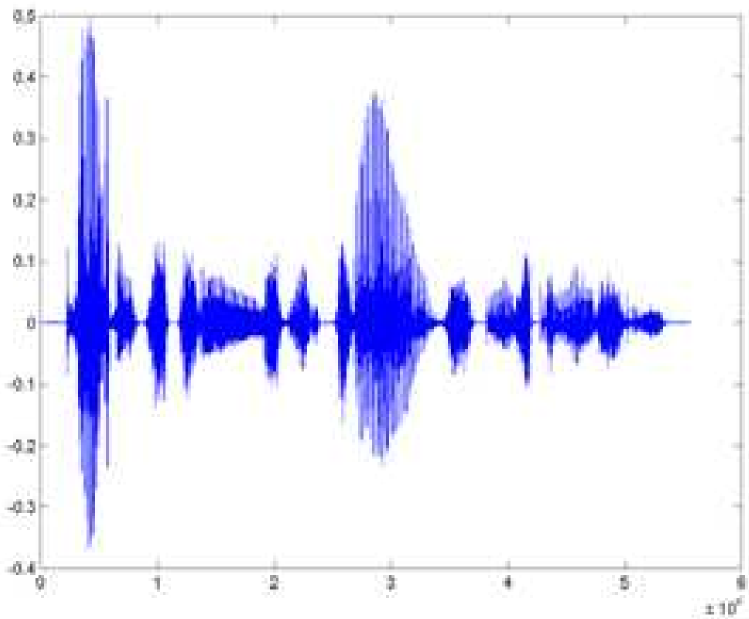




- Mêmes principes s'appliquent !
- Vidéos : utilisation de la redondance temporelle (MPEG2, MPEG4,. . .).

Vidéos et sons





- Mêmes principes s'appliquent !
- Vidéos : utilisation de la redondance temporelle (MPEG2, MPEG4,. . .).
- Sons : utilisation de modèles auditifs (MP3,. . .).

Conclusion

- Importance de la représentation pour le traitement du signal.

Conclusion

- Importance de la représentation pour le traitement du signal.
- Parcimonie !

Conclusion

- Importance de la représentation pour le traitement du signal.
- Parcimonie ! Mais pas toujours...

Conclusion

- Importance de la représentation pour le traitement du signal.
- Parcimonie ! Mais pas toujours...
- Importance de la géométrie pour le traitement de l'image.

Conclusion

- Importance de la représentation pour le traitement du signal.
- Parcimonie ! Mais pas toujours...
- Importance de la géométrie pour le traitement de l'image.
- En général, nécessité d'une représentation adaptée au problème et au signal.

Conclusion

- Importance de la représentation pour le traitement du signal.
- Parcimonie ! Mais pas toujours...
- Importance de la géométrie pour le traitement de l'image.
- En général, nécessité d'une représentation adaptée au problème et au signal.
- Encore beaucoup de travail. . .

Conclusion

- Importance de la représentation pour le traitement du signal.
- Parcimonie ! Mais pas toujours...
- Importance de la géométrie pour le traitement de l'image.
- En général, nécessité d'une représentation adaptée au problème et au signal.
- Encore beaucoup de travail. . .
- Plus d'infos :
  - `Erwan.Le_Pennec@polytechnique.edu`
  - `http://www.cmap.polytechnique.fr/~lepennec`