

Méthode volumes finis pour des équations de Cahn-Hilliard avec surfactants

CANUM 2024

Margherita Castellano¹

¹CMAP - école polytechnique

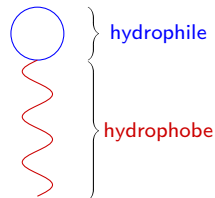
28 mai 2024

Directeurs de thèse : Ludovic Goudenège et Flore Nabet



Les surfactants

- Structure amphipathique
- Exemples de surfactants : savon, membrane cellulaire



Les surfactants

- Structure amphipathique
- Exemples de surfactants : savon, membrane cellulaire

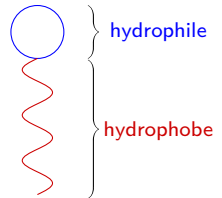
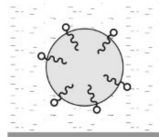
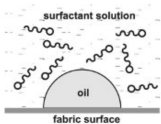


Figure : ESSENTIAL CHEMICAL INDUSTRY 2024

Les surfactants

- Structure amphipathique
- Exemples de surfactants : savon, membrane cellulaire

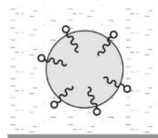
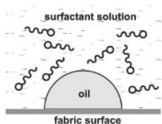


Figure : ESSENTIAL CHEMICAL INDUSTRY 2024

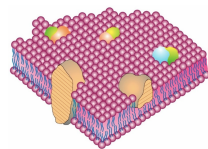
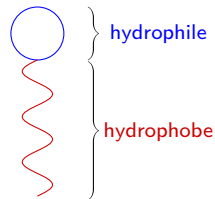


Figure : NICOLSON et
MATOS 2021



Les surfactants

- Structure amphipathique
- Exemples de surfactants : savon, membrane cellulaire

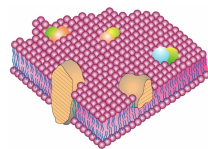
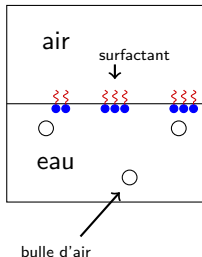
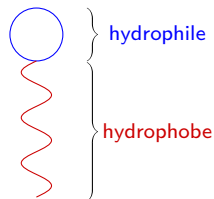


Figure : NICOLSON et
MATOS 2021



Les surfactants

- Structure amphipathique
- Exemples de surfactants : savon, membrane cellulaire

Utilisation des surfactants :

- applications en micro fluidique (LIU et ZHANG 2010)
 - imagerie micro cellulaire
 - administration de médicaments
- libération contrôlée ou protection de certains ingrédients (probiotiques) (ZYCHOWSKI 2015)
- modélisation de la propagation des cellules cancéreuses (Cahn Hilliard + Navier Stokes) (ELBAR et POULAIN 2023)

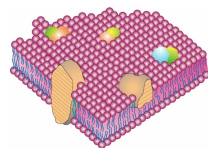
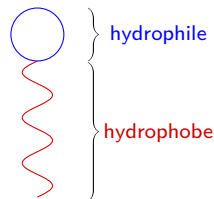
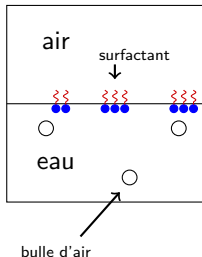


Figure : NICOLSON et MATTOS 2021



Le modèle

On cherche $\phi : (0, T) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ tel que

$$\begin{cases} \partial_t \phi = \Delta \mu \\ \mu = -\epsilon_\phi \Delta \phi + \frac{1}{\epsilon_\phi} f'_\phi(\phi) \\ \nabla \phi \cdot \vec{n} = \nabla \mu \cdot \vec{n} = 0, \quad B.C. \end{cases}$$

Le modèle

On cherche $\phi : (0, T) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ et $c : (0, T) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, telles que

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \phi = \Delta \mu \\ \mu = -\epsilon_\phi \Delta \phi + \frac{1}{\epsilon_\phi} f'_\phi(\phi) \\ \partial_t c = \Delta \eta \\ \eta = -\epsilon_c \Delta c + \frac{1}{\epsilon_c} f'_c(c) \\ \nabla \phi \cdot \vec{n} = \nabla c \cdot \vec{n} = \nabla \mu \cdot \vec{n} = \nabla \eta \cdot \vec{n} = 0, \quad B.C. \end{array} \right.$$

Le modèle

On cherche $\phi : (0, T) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ et $c : (0, T) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, telles que

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \phi = \Delta \mu \\ \mu = -\epsilon_\phi \Delta \phi + \frac{1}{\epsilon_\phi} f'_\phi(\phi) \\ \partial_t c = \Delta \eta \\ \eta = -\epsilon_c \Delta c + \frac{1}{\epsilon_c} f'_c(c) \\ \nabla \phi \cdot \vec{n} = \nabla c \cdot \vec{n} = \nabla \mu \cdot \vec{n} = \nabla \eta \cdot \vec{n} = 0, \quad B.C. \end{array} \right.$$

où f_ϕ et f_c sont les potentiels double puits classiques de Cahn-Hilliard,

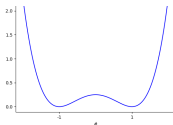


Figure : Potentiel ϕ

$$f_\phi(\phi) = \frac{1}{4}(\phi^2 - 1)^2, \quad f_c(c) = c^2(1-c)^2.$$

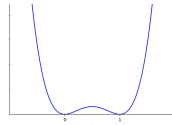


Figure : Potentiel c

Le modèle

On cherche $\phi : (0, T) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ et $c : (0, T) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, telles que

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \phi = \Delta \mu \\ \mu = -\epsilon_\phi \Delta \phi + \frac{1}{\epsilon_\phi} f'_\phi(\phi) + \partial_\phi F(\phi, c) \\ \partial_t c = \Delta \eta \\ \eta = -\epsilon_c \Delta c + \frac{1}{\epsilon_c} f'_c(c) + \partial_c F(\phi, c) \\ \nabla \phi \cdot \vec{n} = \nabla c \cdot \vec{n} = \nabla \mu \cdot \vec{n} = \nabla \eta \cdot \vec{n} = 0, \quad B.C. \end{array} \right.$$

où f_ϕ et f_c sont les potentiels double puits classiques de Cahn-Hilliard,

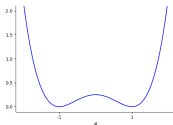


Figure : Potentiel ϕ

$$f_\phi(\phi) = \frac{1}{4}(\phi^2 - 1)^2, \quad f_c(c) = c^2(1 - c)^2.$$

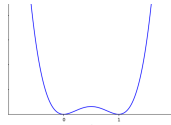


Figure : Potentiel c

Le modèle

On cherche $\phi : (0, T) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ et $c : (0, T) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, telles que

$$\begin{cases} \partial_t \phi = \Delta \mu \\ \mu = -\epsilon_\phi \Delta \phi + \frac{1}{\epsilon_\phi} f'_\phi(\phi) + \partial_\phi F(\phi, c) \\ \partial_t c = \Delta \eta \\ \eta = -\epsilon_c \Delta c + \frac{1}{\epsilon_c} f'_c(c) + \partial_c F(\phi, c) \end{cases}$$

où F est le potentiel de couplage,

$$F(\phi, c) = \beta \phi^2 c - \gamma \phi^3 c - \alpha |\nabla \phi|^2 c + \delta |\nabla \phi|^4.$$

$$\hookrightarrow \partial_\phi F(\phi, c) = 2\beta \phi c - 3\gamma \phi^2 c + 2\alpha \nabla \cdot (c \nabla \phi) - \delta \nabla \cdot (\nabla \phi)^3,$$

$$\hookrightarrow \partial_c F(\phi, c) = -\alpha |\nabla \phi|^2 + \beta \phi^2 - \gamma \phi^3.$$

Le modèle

On cherche $\phi : (0, T) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ et $c : (0, T) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, telles que

$$\begin{cases} \partial_t \phi = \Delta \mu \\ \mu = -\epsilon_\phi \Delta \phi + \frac{1}{\epsilon_\phi} f'_\phi(\phi) + \partial_\phi F(\phi, c) \\ \partial_t c = \Delta \eta \\ \eta = -\epsilon_c \Delta c + \frac{1}{\epsilon_c} f'_c(c) + \partial_c F(\phi, c) \end{cases}$$

où F est le potentiel de couplage,

$$F(\phi, c) = \beta \phi^2 c - \gamma \phi^3 c - \alpha |\nabla \phi|^2 c + \delta |\nabla \phi|^4.$$

$$\hookrightarrow \partial_\phi F(\phi, c) = 2\beta \phi c - 3\gamma \phi^2 c + 2\alpha \nabla \cdot (c \nabla \phi) - \delta \nabla \cdot (\nabla \phi)^3,$$

$$\hookrightarrow \partial_c F(\phi, c) = -\alpha |\nabla \phi|^2 + \beta \phi^2 - \gamma \phi^3.$$

Le modèle

On cherche $\phi : (0, T) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ et $c : (0, T) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, telles que

$$\begin{cases} \partial_t \phi = \Delta \mu \\ \mu = -\epsilon_\phi \Delta \phi + \frac{1}{\epsilon_\phi} f'_\phi(\phi) + \partial_\phi F(\phi, c) \\ \partial_t c = \Delta \eta \\ \eta = -\epsilon_c \Delta c + \frac{1}{\epsilon_c} f'_c(c) + \partial_c F(\phi, c) \end{cases}$$

où F est le potentiel de couplage,

$$F(\phi, c) = \beta \phi^2 c - \gamma \phi^3 c - \alpha |\nabla \phi|^2 c + \delta |\nabla \phi|^4.$$

$$\hookrightarrow \partial_\phi F(\phi, c) = 2\beta \phi c - 3\gamma \phi^2 c + 2\alpha \nabla \cdot (c \nabla \phi) - \delta \nabla \cdot (\nabla \phi)^3,$$

$$\hookrightarrow \partial_c F(\phi, c) = -\alpha |\nabla \phi|^2 + \beta \phi^2 - \gamma \phi^3.$$

Le modèle

On cherche $\phi : (0, T) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ et $c : (0, T) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, telles que

$$\begin{cases} \partial_t \phi = \Delta \mu \\ \mu = -\epsilon_\phi \Delta \phi + \frac{1}{\epsilon_\phi} f'_\phi(\phi) + \partial_\phi F(\phi, c) \\ \partial_t c = \Delta \eta \\ \eta = -\epsilon_c \Delta c + \frac{1}{\epsilon_c} f'_c(c) + \partial_c F(\phi, c) \end{cases}$$

où F est le potentiel de couplage,

$$F(\phi, c) = \beta \phi^2 c - \gamma \phi^3 c - \alpha |\nabla \phi|^2 c + \delta |\nabla \phi|^4.$$

$$\hookrightarrow \partial_\phi F(\phi, c) = 2\beta \phi c - 3\gamma \phi^2 c + 2\alpha \nabla \cdot (c \nabla \phi) - \delta \nabla \cdot (\nabla \phi)^3,$$

$$\hookrightarrow \partial_c F(\phi, c) = -\alpha |\nabla \phi|^2 + \beta \phi^2 - \gamma \phi^3.$$

Le modèle

On cherche $\phi : (0, T) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ et $c : (0, T) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, telles que

$$\begin{cases} \partial_t \phi = \Delta \mu \\ \mu = -\epsilon_\phi \Delta \phi + \frac{1}{\epsilon_\phi} f'_\phi(\phi) + \partial_\phi F(\phi, c) \\ \partial_t c = \Delta \eta \\ \eta = -\epsilon_c \Delta c + \frac{1}{\epsilon_c} f'_c(c) + \partial_c F(\phi, c) \end{cases}$$

où F est le potentiel de couplage,

$$F(\phi, c) = \beta \phi^2 c - \gamma \phi^3 c - \alpha |\nabla \phi|^2 c + \delta |\nabla \phi|^4.$$

$$\hookrightarrow \partial_\phi F(\phi, c) = 2\beta \phi c - 3\gamma \phi^2 c + 2\alpha \nabla \cdot (c \nabla \phi) - \delta \nabla \cdot (\nabla \phi)^3,$$

$$\hookrightarrow \partial_c F(\phi, c) = -\alpha |\nabla \phi|^2 + \beta \phi^2 - \gamma \phi^3.$$

L'énergie du système

On définit l'énergie libre comme suit,

$$\mathcal{E} : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(\phi, c) \longmapsto \int_{\Omega} \left(\frac{\epsilon_{\phi}}{2} |\nabla \phi|^2 + \frac{\epsilon_c}{2} |\nabla c|^2 \right) + \int_{\Omega} \left(\frac{1}{\epsilon_{\phi}} f_{\phi}(\phi) + \frac{1}{\epsilon_c} f_c(c) \right) + \int_{\Omega} F(\phi, c).$$

Dissipation en temps de l'énergie

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}(\phi, c) = -M_0 \int_{\Omega} |\nabla \mu|^2 - N_0 \int_{\Omega} |\nabla \eta|^2 \leq 0$$

L'énergie du système

On définit l'énergie libre comme suit,

$$\mathcal{E} : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} (\phi, c) \longmapsto & \int_{\Omega} \left(\frac{3\epsilon_{\phi}}{4} |\nabla \phi|^2 + \frac{\theta\epsilon_c}{2} |\nabla c|^2 \right) + \int_{\Omega} \left(\frac{12}{\epsilon_{\phi}} f_{\phi}(\phi) + \frac{1}{\epsilon_c} f_c(c) \right) \\ & + \int_{\Omega} (-\alpha |\nabla \phi|^2 c + \beta \phi^2 c - \gamma \phi^3 c + \delta |\nabla \phi|^4). \end{aligned}$$

L'énergie du système

On définit l'énergie libre comme suit,

$$\mathcal{E} : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} (\phi, c) \longmapsto & \int_{\Omega} \left(\frac{3\epsilon_{\phi}}{4} |\nabla \phi|^2 + \frac{\theta \epsilon_c}{2} |\nabla c|^2 \right) + \int_{\Omega} \left(\frac{12}{\epsilon_{\phi}} f_{\phi}(\phi) + \frac{1}{\epsilon_c} f_c(c) \right) \\ & + \int_{\Omega} (-\alpha |\nabla \phi|^2 c + \beta \phi^2 c - \gamma \phi^3 c + \delta |\nabla \phi|^4). \end{aligned}$$

Le terme de stabilisation permet de minorer l'énergie,

$$-\alpha |\nabla \phi|^2 c + \delta |\nabla \phi|^4 = \delta (|\nabla \phi|^2 - \frac{\alpha}{\delta} c)^2 - \frac{\alpha^2 c^2}{\delta}$$

L'énergie du système

On définit l'énergie libre comme suit,

$$\mathcal{E} : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} (\phi, c) \longmapsto & \int_{\Omega} \left(\frac{3\epsilon_{\phi}}{4} |\nabla \phi|^2 + \frac{\theta \epsilon_c}{2} |\nabla c|^2 \right) + \int_{\Omega} \left(\frac{12}{\epsilon_{\phi}} f_{\phi}(\phi) + \frac{1}{\epsilon_c} f_c(c) \right) \\ & + \int_{\Omega} (-\alpha |\nabla \phi|^2 c + \beta \phi^2 c - \gamma \phi^3 c + \delta |\nabla \phi|^4). \end{aligned}$$

Le terme de stabilisation permet de minorer l'énergie,

$$-\alpha |\nabla \phi|^2 c + \delta |\nabla \phi|^4 = \delta (|\nabla \phi|^2 - \frac{\alpha}{\delta} c)^2 - \frac{\alpha^2 c^2}{\delta}$$

Hypothèse de dissipativité :

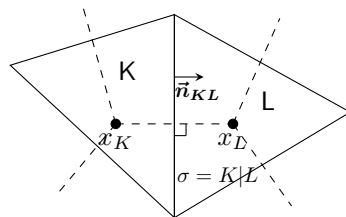
$$f_c(c) \geq \tau_1 c^2 - \tau_2, \quad \tau_1 > 0, \tau_2 \geq 0.$$

Les volumes finis VF4 en 2D

Nous considérons un maillage $\mathcal{M}$ tel que la *condition d'orthogonalité* soit vérifiée : $[x_K, x_L] \perp \sigma = K|L$.

Notations :

- Ensemble d'arêtes intérieures de Ω , appartenant au volume K : $\mathcal{E}_K^{int}$
- Distance entre les centres de K et L : $d_{K,L} = d(x_K, x_L)$
- Vecteur normal sortant à K : $\vec{n}_{KL}$
- Longueur de σ : m_σ
- Mesure de K : m_K

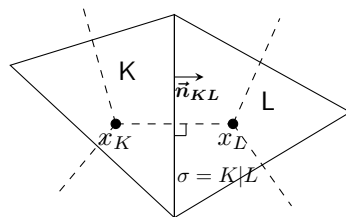


Les volumes finis VF4 en 2D

Nous considérons un maillage $\mathcal{M}$ tel que la *condition d'orthogonalité* soit vérifiée : $[x_K, x_L] \perp \sigma = K|L$.

Notations :

- Ensemble d'arêtes intérieures de Ω , appartenant au volume K : $\mathcal{E}_K^{int}$
- Distance entre les centres de K et L : $d_{K,L} = d(x_K, x_L)$
- Vecteur normal sortant à K : $\vec{n}_{KL}$
- Longueur de σ : m_σ
- Mesure de K : m_K



Inconnues aux centres : pour chaque maille $K \in \mathcal{M}$, on cherche $u_K \approx u(x_K)$. On note le vecteur d'inconnues $u_{\mathcal{M}} = (u_K)_{K \in \mathcal{M}} \in \mathbb{R}^N$, N le nombre de mailles dans $\mathcal{M}$.

Discrétisation du problème

$$\sigma = K|L \in \mathcal{E}^{int}.$$

$$\int_K \partial_t \phi = \int_K \Delta \mu = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K^{int}} - \int_{\sigma} \nabla \mu \cdot \vec{n}_{KL} \quad \forall K \in \mathcal{M}$$

Discrétisation du problème

$$\sigma = K|L \in \mathcal{E}^{int}.$$

$$\int_K \partial_t \phi = \int_K \Delta \mu = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K^{int}} - \int_{\sigma} \nabla \mu \cdot \vec{n}_{KL} \quad \forall K \in \mathcal{M}$$

Condition d'orthogonalité : $x_L - x_K = d_{K,L} \vec{n}_{KL}$.

$$\text{Pour } x \in \sigma, \quad \nabla \mu(x) \cdot \vec{n}_{KL} = \frac{\mu(x_L) - \mu(x_K)}{d_{K,L}} + \mathcal{O}(|x_L - x_K|)$$

Discretisation du problème

$$\sigma = K|L \in \mathcal{E}^{int}.$$

$$\int_K \partial_t \phi = \int_K \Delta \mu = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K^{int}} - \int_{\sigma} \nabla \mu \cdot \vec{n}_{KL} \quad \forall K \in \mathcal{M}$$

Condition d'orthogonalité : $x_L - x_K = d_{K,L} \vec{n}_{KL}$.

$$\text{Pour } x \in \sigma, \quad \nabla \mu(x) \cdot \vec{n}_{KL} = \frac{\mu(x_L) - \mu(x_K)}{d_{K,L}} + \mathcal{O}(|x_L - x_K|)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow - \int_{\sigma} \nabla \mu \cdot \vec{n}_{\sigma} &= -m_{\sigma} \frac{\mu(x_L) - \mu(x_K)}{d_{K,L}} + \mathcal{O}(|x_L - x_K|^2) \\ &\approx - \frac{m_{\sigma}}{d_{K,L}} (\mu(x_L) - \mu(x_K)) \end{aligned}$$

Le problème discret

Connaissant $(\phi_{\mathcal{M}}^n, c_{\mathcal{M}}^n) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$, trouver

$(\phi_{\mathcal{M}}^{n+1}, \mu_{\mathcal{M}}^{n+1}, c_{\mathcal{M}}^{n+1}, \eta_{\mathcal{M}}^{n+1}) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$, tels que, pour tout $K \in \mathcal{M}$, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} m_K \frac{(\phi_K^{n+1} - \phi_K^n)}{\Delta t} = - \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K^{int}} \frac{m_\sigma}{d_{K,L}} (\mu_K^{n+1} - \mu_L^{n+1}), \\ \\ m_K \mu_K^{n+1} = \epsilon_\phi \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K^{int}} \frac{m_\sigma}{d_{K,L}} (\phi_K^{n+1} - \phi_L^{n+1}) + \frac{1}{\epsilon_\phi} m_K d_\phi^{f_\phi}(\phi_K^n, \phi_K^{n+1}) \\ \quad + m_K d_\phi^F(\phi_K^n, \phi_K^{n+1}, c_K^n, c_K^{n+1}), \\ \\ m_K \frac{(c_K^{n+1} - c_K^n)}{\Delta t} = - \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K^{int}} \frac{m_\sigma}{d_{K,L}} (\eta_K^{n+1} - \eta_L^{n+1}) \\ \\ m_K \eta_K^{n+1} = \epsilon_c \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K^{int}} \frac{m_\sigma}{d_{K,L}} (c_K^{n+1} - c_L^{n+1}) + \frac{1}{\epsilon_c} m_K d_c^{f_c}(c_K^n, c_K^{n+1}) \\ \quad + m_K d_c^F(\phi_K^n, \phi_K^{n+1}), \end{array} \right.$$

Estimation d'énergie discrète

Proposition (Estimation d'énergie discrète)

Soit $\phi_{\mathcal{M}}^n \in \mathbb{R}^N$, $c_{\mathcal{M}}^n \in \mathbb{R}^N$. Supposons qu'il existe une solution $(\phi_{\mathcal{M}}^{n+1}, \mu_{\mathcal{M}}^{n+1}, c_{\mathcal{M}}^{n+1}, \eta_{\mathcal{M}}^{n+1}) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ au problème discret. L'égalité suivante est alors vérifiée, pour tout pas de temps Δt ,

$$\begin{aligned} & \Delta t |\mu_{\mathcal{M}}^{n+1}|_{1,\mathcal{M}}^2 + \Delta t |\eta_{\mathcal{M}}^{n+1}|_{1,\mathcal{M}}^2 + \mathcal{F}(\phi_{\mathcal{M}}^{n+1}, c_{\mathcal{M}}^{n+1}) - \mathcal{F}(\phi_{\mathcal{M}}^n, c_{\mathcal{M}}^n) \\ & + \frac{\epsilon_{\phi}}{2} |\phi_{\mathcal{M}}^{n+1} - \phi_{\mathcal{M}}^n|_{1,\mathcal{M}}^2 + \frac{\epsilon_c}{2} |c_{\mathcal{M}}^{n+1} - c_{\mathcal{M}}^n|_{1,\mathcal{M}}^2 \\ & + \sum_{K \in \mathcal{M}} m_K \left(\frac{1}{\epsilon_{\phi}} \left[d_{\phi}^{f\phi}(\phi_K^n, \phi_K^{n+1})(\phi_K^{n+1} - \phi_K^n) - f_{\phi}(\phi^{n+1}) + f_{\phi}(\phi^n) \right] \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{\epsilon_c} \left[d_c^{fc}(c_K^n, c_K^{n+1})(c_K^{n+1} - c_K^n) - f_c(c^{n+1}) + f_c(c^n) \right] \right. \\ & \quad \left. + d_{\phi}^F(\phi_K^n, \phi_K^{n+1}, c_K^n, c_K^{n+1})(\phi_K^{n+1} - \phi_K^n) \right. \\ & \quad \left. + d_c^F(\phi_K^n, \phi_K^{n+1})(c_K^{n+1} - c_K^n) - F(\phi^{n+1}, c^{n+1}) + F(\phi^n, c^n) \right) = 0. \end{aligned}$$

Estimation d'énergie discrète

Proposition (Estimation d'énergie discrète)

Soit $\phi_{\mathcal{M}}^n \in \mathbb{R}^N$, $c_{\mathcal{M}}^n \in \mathbb{R}^N$. Supposons qu'il existe une solution $(\phi_{\mathcal{M}}^{n+1}, \mu_{\mathcal{M}}^{n+1}, c_{\mathcal{M}}^{n+1}, \eta_{\mathcal{M}}^{n+1}) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ au problème discret. L'égalité suivante est alors vérifiée, pour tout pas de temps Δt ,

$$\begin{aligned} & \Delta t |\mu_{\mathcal{M}}^{n+1}|_{1,\mathcal{M}}^2 + \Delta t |\eta_{\mathcal{M}}^{n+1}|_{1,\mathcal{M}}^2 + \mathcal{F}(\phi_{\mathcal{M}}^{n+1}, c_{\mathcal{M}}^{n+1}) - \mathcal{F}(\phi_{\mathcal{M}}^n, c_{\mathcal{M}}^n) \\ & + \frac{\epsilon_{\phi}}{2} |\phi_{\mathcal{M}}^{n+1} - \phi_{\mathcal{M}}^n|_{1,\mathcal{M}}^2 + \frac{\epsilon_c}{2} |c_{\mathcal{M}}^{n+1} - c_{\mathcal{M}}^n|_{1,\mathcal{M}}^2 \\ & + \sum_{K \in \mathcal{M}} m_K \left(\frac{1}{\epsilon_{\phi}} \left[d_{\phi}^{f\phi}(\phi_K^n, \phi_K^{n+1})(\phi_K^{n+1} - \phi_K^n) - f_{\phi}(\phi^{n+1}) + f_{\phi}(\phi^n) \right] \right. \\ & \quad + \frac{1}{\epsilon_c} \left[d_c^{fc}(c_K^n, c_K^{n+1})(c_K^{n+1} - c_K^n) - f_c(c^{n+1}) + f_c(c^n) \right] \\ & \quad + d_{\phi}^F(\phi_K^n, \phi_K^{n+1}, c_K^n, c_K^{n+1})(\phi_K^{n+1} - \phi_K^n) \\ & \quad \left. + d_c^F(\phi_K^n, \phi_K^{n+1})(c_K^{n+1} - c_K^n) - F(\phi^{n+1}, c^{n+1}) + F(\phi^n, c^n) \right) = 0. \end{aligned}$$

Discretisation des différentielles des potentiels

On construit les discrétisations semi-implicites de sorte à avoir

$$d_{\phi}^{f_{\phi}}(\phi_K^n, \phi_K^{n+1}) = \frac{f_{\phi}(\phi_K^{n+1}) - f_{\phi}(\phi_K^n)}{(\phi_K^{n+1} - \phi_K^n)}, \quad d_c^{f_c}(c_K^n, c_K^{n+1}) = \frac{f_c(c_K^{n+1}) - f_c(c_K^n)}{(c_K^{n+1} - c_K^n)},$$

$$\rightsquigarrow d_{\phi}^{f_{\phi}}(\phi_K^n, \phi_K^{n+1})(\phi_K^{n+1} - \phi_K^n) - f_{\phi}(\phi_K^{n+1}) + f_{\phi}(\phi_K^n) = 0$$

$$\rightsquigarrow d_c^{f_c}(c_K^n, c_K^{n+1})(c_K^{n+1} - c_K^n) - f_c(c_K^{n+1}) + f_c(c_K^n) = 0.$$

Discretisation des différentielles des potentiels

On construit les discrétisations semi-implicites de sorte à avoir

$$d_{\phi}^{f_{\phi}}(\phi_K^n, \phi_K^{n+1}) = \frac{f_{\phi}(\phi_K^{n+1}) - f_{\phi}(\phi_K^n)}{(\phi_K^{n+1} - \phi_K^n)}, \quad d_c^{f_c}(c_K^n, c_K^{n+1}) = \frac{f_c(c_K^{n+1}) - f_c(c_K^n)}{(c_K^{n+1} - c_K^n)},$$

On rappelle $F(\phi, c) = \beta\phi^2c - \gamma\phi^3c - \alpha|\nabla\phi|^2c + \delta|\nabla\phi|^4$

Discretisation des différentielles des potentiels

On construit les discrétisations semi-implicites de sorte à avoir

$$d_{\phi}^{f_{\phi}}(\phi_K^n, \phi_K^{n+1}) = \frac{f_{\phi}(\phi_K^{n+1}) - f_{\phi}(\phi_K^n)}{(\phi_K^{n+1} - \phi_K^n)}, \quad d_c^{f_c}(c_K^n, c_K^{n+1}) = \frac{f_c(c_K^{n+1}) - f_c(c_K^n)}{(c_K^{n+1} - c_K^n)},$$

On rappelle $F(\phi, c) = \underbrace{\beta\phi^2c - \gamma\phi^3c - \alpha|\nabla\phi|^2c}_{F_1} + \underbrace{\delta|\nabla\phi|^4}_{F_2},$

Discrétisation des différentielles des potentiels

On construit les discrétisations semi-implicites de sorte à avoir

$$d_{\phi}^{f_{\phi}}(\phi_K^n, \phi_K^{n+1}) = \frac{f_{\phi}(\phi_K^{n+1}) - f_{\phi}(\phi_K^n)}{(\phi_K^{n+1} - \phi_K^n)}, \quad d_c^{f_c}(c_K^n, c_K^{n+1}) = \frac{f_c(c_K^{n+1}) - f_c(c_K^n)}{(c_K^{n+1} - c_K^n)},$$

On rappelle $F(\phi, c) = \underbrace{\beta\phi^2c - \gamma\phi^3c - \alpha|\nabla\phi|^2c}_{F_1} + \underbrace{\delta|\nabla\phi|^4}_{F_2},$

$$d_{\phi}^{F_1}(\phi_K^n, \phi_K^{n+1}, c_K^n, c_K^{n+1})(\phi_K^{n+1} - \phi_K^n) + d_c^{F_1}(\phi_K^n, \phi_K^{n+1})(c_K^{n+1} - c_K^n) - F_1(\phi_K^{n+1}, c_K^{n+1}) + F_1(\phi_K^n, c_K^n) = 0.$$

Discretisation des différentielles des potentiels

On construit les discrétisations semi-implicites de sorte à avoir

$$d_{\phi}^{f_{\phi}}(\phi_K^n, \phi_K^{n+1}) = \frac{f_{\phi}(\phi_K^{n+1}) - f_{\phi}(\phi_K^n)}{(\phi_K^{n+1} - \phi_K^n)}, \quad d_c^{f_c}(c_K^n, c_K^{n+1}) = \frac{f_c(c_K^{n+1}) - f_c(c_K^n)}{(c_K^{n+1} - c_K^n)},$$

On rappelle $F(\phi, c) = \underbrace{\beta\phi^2 c - \gamma\phi^3 c - \alpha|\nabla\phi|^2 c}_{F_1} + \underbrace{\delta|\nabla\phi|^4}_{F_2},$

$$d_{\phi}^{F_1}(\phi_K^n, \phi_K^{n+1}, c_K^n, c_K^{n+1})(\phi_K^{n+1} - \phi_K^n) + d_c^{F_1}(\phi_K^n, \phi_K^{n+1})(c_K^{n+1} - c_K^n) - F_1(\phi_K^{n+1}, c_K^{n+1}) + F_1(\phi_K^n, c_K^n) = 0.$$

$$\begin{aligned} & d_{\phi}^{F_2}(\phi_K^{n+1})(\phi_K^{n+1} - \phi_K^n) - F_2(\phi_K^{n+1}) + F_2(\phi_K^n) \\ &= \frac{\delta}{4} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}^{int}} \frac{m_{\sigma}}{d_{K,L}^3} \left((\phi_K^{n+1} - \phi_L^{n+1})^2 - (\phi_K^n - \phi_L^n)^2 \right)^2 \\ &+ \frac{\delta}{2} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}^{int}} \frac{m_{\sigma}}{d_{K,L}^3} (\phi_K^{n+1} - \phi_L^{n+1})^2 (\phi_K^{n+1} - \phi_L^{n+1} - \phi_K^n + \phi_L^n)^2. \end{aligned}$$

Discrétisation des différentielles des potentiels

On construit les discrétisations semi-implicites de sorte à avoir

$$d_{\phi}^{f_{\phi}}(\phi_K^n, \phi_K^{n+1}) = \frac{f_{\phi}(\phi_K^{n+1}) - f_{\phi}(\phi_K^n)}{(\phi_K^{n+1} - \phi_K^n)}, \quad d_c^{f_c}(c_K^n, c_K^{n+1}) = \frac{f_c(c_K^{n+1}) - f_c(c_K^n)}{(c_K^{n+1} - c_K^n)},$$

On rappelle $F(\phi, c) = \underbrace{\beta\phi^2 c - \gamma\phi^3 c - \alpha|\nabla\phi|^2 c}_{F_1} + \underbrace{\delta|\nabla\phi|^4}_{F_2},$

$$d_{\phi}^{F_1}(\phi_K^n, \phi_K^{n+1}, c_K^n, c_K^{n+1})(\phi_K^{n+1} - \phi_K^n) + d_c^{F_1}(\phi_K^n, \phi_K^{n+1})(c_K^{n+1} - c_K^n) - F_1(\phi_K^{n+1}, c_K^{n+1}) + F_1(\phi_K^n, c_K^n) = 0.$$

$$\begin{aligned} & d_{\phi}^{F_2}(\phi_K^{n+1})(\phi_K^{n+1} - \phi_K^n) - F_2(\phi_K^{n+1}) + F_2(\phi_K^n) \\ &= \frac{\delta}{4} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}^{int}} \frac{m_{\sigma}}{d_{K,L}^3} \left((\phi_K^{n+1} - \phi_L^{n+1})^2 - (\phi_K^n - \phi_L^n)^2 \right)^2 \\ &+ \frac{\delta}{2} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}^{int}} \frac{m_{\sigma}}{d_{K,L}^3} (\phi_K^{n+1} - \phi_L^{n+1})^2 (\phi_K^{n+1} - \phi_L^{n+1} - \phi_K^n + \phi_L^n)^2 = \delta(T_1 + T_2). \end{aligned}$$

Estimation d'énergie discrète

Proposition (Estimation d'énergie discrète)

Soit $\phi_{\mathcal{M}}^n \in \mathbb{R}^N$, $c_{\mathcal{M}}^n \in \mathbb{R}^N$. Supposons qu'il existe une solution $(\phi_{\mathcal{M}}^{n+1}, \mu_{\mathcal{M}}^{n+1}, c_{\mathcal{M}}^{n+1}, \eta_{\mathcal{M}}^{n+1}) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ au problème discret. L'égalité suivante est alors vérifiée, pour tout pas de temps Δt ,

$$\begin{aligned} & \Delta t |\mu_{\mathcal{M}}^{n+1}|_{1,\mathcal{M}}^2 + \Delta t |\eta_{\mathcal{M}}^{n+1}|_{1,\mathcal{M}}^2 + \mathcal{F}(\phi_{\mathcal{M}}^{n+1}, c_{\mathcal{M}}^{n+1}) - \mathcal{F}(\phi_{\mathcal{M}}^n, c_{\mathcal{M}}^n) \\ & + \frac{\epsilon_{\phi}}{2} |\phi_{\mathcal{M}}^{n+1} - \phi_{\mathcal{M}}^n|_{1,\mathcal{M}}^2 + \frac{\epsilon_c}{2} |c_{\mathcal{M}}^{n+1} - c_{\mathcal{M}}^n|_{1,\mathcal{M}}^2 \\ & + \sum_{K \in \mathcal{M}} m_K \left(\frac{1}{\epsilon_{\phi}} \left[d_{\phi}^{f\phi}(\phi_K^n, \phi_K^{n+1})(\phi_K^{n+1} - \phi_K^n) - f_{\phi}(\phi^{n+1}) + f_{\phi}(\phi^n) \right] \right. \\ & \quad + \frac{1}{\epsilon_c} \left[d_c^{fc}(c_K^n, c_K^{n+1})(c_K^{n+1} - c_K^n) - f_c(c^{n+1}) + f_c(c^n) \right] \\ & \quad + d_{\phi}^F(\phi_K^n, \phi_K^{n+1}, c_K^n, c_K^{n+1})(\phi_K^{n+1} - \phi_K^n) \\ & \quad \left. + d_c^F(\phi_K^n, \phi_K^{n+1})(c_K^{n+1} - c_K^n) - F(\phi^{n+1}, c^{n+1}) + F(\phi^n, c^n) \right) = 0. \end{aligned}$$

Estimation d'énergie discrète

Proposition (Estimation d'énergie discrète)

Soit $\phi_{\mathcal{M}}^n \in \mathbb{R}^N$, $c_{\mathcal{M}}^n \in \mathbb{R}^N$. Supposons qu'il existe une solution $(\phi_{\mathcal{M}}^{n+1}, \mu_{\mathcal{M}}^{n+1}, c_{\mathcal{M}}^{n+1}, \eta_{\mathcal{M}}^{n+1}) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ au problème discret. L'égalité suivante est alors vérifiée, pour tout pas de temps Δt ,

$$\begin{aligned} \Delta t |\mu_{\mathcal{M}}^{n+1}|_{1,\mathcal{M}}^2 + \Delta t |\eta_{\mathcal{M}}^{n+1}|_{1,\mathcal{M}}^2 + \mathcal{F}(\phi_{\mathcal{M}}^{n+1}, c_{\mathcal{M}}^{n+1}) - \mathcal{F}(\phi_{\mathcal{M}}^n, c_{\mathcal{M}}^n) \\ + \frac{\epsilon_{\phi}}{2} |\phi_{\mathcal{M}}^{n+1} - \phi_{\mathcal{M}}^n|_{1,\mathcal{M}}^2 + \frac{\epsilon_c}{2} |c_{\mathcal{M}}^{n+1} - c_{\mathcal{M}}^n|_{1,\mathcal{M}}^2 + \delta(T_1 + T_2) = 0. \end{aligned}$$

On a noté $|\cdot|_{1,\mathcal{M}}$ la semi-norme H^1 discrète.

Existence de solutions discrètes

Proposition (Existence de solutions discrètes)

Soit $(\phi_{\mathcal{M}}^n, c_{\mathcal{M}}^n) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$. Supposons que $f_{\phi}(\phi)$ et $f_c(c)$ satisfont l'hypothèse de dissipativité suivante

$$\lim_{|\phi| \rightarrow \infty} \inf f_{\phi}''(\phi) > 0, \quad \lim_{|c| \rightarrow \infty} \inf f_c''(c) > 0$$

et que les discrétisations semi-implicites $d_{\phi}^{f_{\phi}}$, $d_c^{f_c}$, d_{ϕ}^F et d_c^F satisfont l'hypothèse de croissance polynomiale. De plus, supposons que la condition suivante est aussi vérifiée,

$$\frac{\tau_1 \rho}{\epsilon_c} - \frac{\alpha^2 \rho}{\delta} \left(1 + \max_{\sigma \in \mathcal{E}^{int}} \left(\frac{d(x_L, \sigma)}{d(x_K, \sigma)}, \frac{d(x_K, \sigma)}{d(x_L, \sigma)} \right) \right) \geq 0.$$

Alors, il existe au moins une solution

$(\phi_{\mathcal{M}}^{n+1}, \mu_{\mathcal{M}}^{n+1}, c_{\mathcal{M}}^{n+1}, \eta_{\mathcal{M}}^{n+1}) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ au problème discret.

Degré topologique

$\mathcal{P}$: Trouver $\mathbf{u} \in \mathcal{W}$ tel que $\mathcal{F}(\mathbf{u}) = 0$.

Pour tout $\rho \in [0, 1]$, soit $\mathcal{P}_\rho$ tel que

- 1 $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}$;
- 2 pour $\rho = 0$ le problème $\mathcal{P}_0$ admet une solution dans $\mathcal{W}$;
- 3 $\exists R > 0$ tel que, pour tout $\rho \in [0, 1]$,

$\mathbf{w}$ solution de $\mathcal{P}_\rho$ et $\|\mathbf{w}\|_{\mathcal{W}} < R \Rightarrow \|\mathbf{w}\|_{\mathcal{W}} \neq R$.

$\rightsquigarrow$ Estimations *a priori*.

Alors, il existe au moins une solution au problème $\mathcal{P}_1$.

Estimations des solutions à priori

Pour borner les solutions, on a besoin du terme de stabilisation,

$$\begin{aligned}
 & -\alpha\rho \sum_{\sigma \in \mathcal{E}^{int}} \frac{m_\sigma}{d_{K,L}} c_\sigma^{n+1} |\phi_K^{n+1} - \phi_L^{n+1}|^2 + \frac{\delta\rho}{4} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}^{int}} \frac{m_\sigma}{d_{K,L}^3} |\phi_K^{n+1} - \phi_L^{n+1}|^4 \\
 & = \frac{\delta\rho}{4} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}^{int}} m_\sigma d_{K,L} \left[\left(\frac{|\phi_K^{n+1} - \phi_L^{n+1}|^2}{d_{K,L}^2} - \frac{2\alpha c_\sigma^{n+1}}{\delta} \right)^2 - \frac{4\alpha^2 (c_\sigma^{n+1})^2}{\delta^2} \right],
 \end{aligned}$$

et on utilise le fait que $\exists \tau_1 > 0$, $\tau_2 \geq 0$, tels que $f_c(c) \geq \tau_1 c^2 - \tau_2$ pour borner le deuxième terme quadratique. Ce qui donne la condition

$$\frac{\tau_1 \rho}{\epsilon_c} - \frac{\alpha^2 \rho}{\delta} \left(1 + \max_{\sigma \in \mathcal{E}^{int}} \left(\frac{d(x_L, \sigma)}{d(x_K, \sigma)}, \frac{d(x_K, \sigma)}{d(x_L, \sigma)} \right) \right) \geq 0.$$

Convergence

Proposition (Existence des limites)

- 1 Il existe des fonctions $\phi, \mu, c, \eta \in L^2(\Omega)$ telles que (à sous-suite près) on a $\phi_{\mathcal{M}} \rightarrow \phi, \mu_{\mathcal{M}} \rightharpoonup \mu, c_{\mathcal{M}} \rightarrow c$ et $\eta_{\mathcal{M}} \rightharpoonup \eta$.
- 2 De plus, ces fonctions sont $H^1(\Omega)$ et on a convergence faible pour les gradients, $\nabla \phi_{\mathcal{M}} \rightharpoonup \nabla \phi, \nabla \mu_{\mathcal{M}} \rightharpoonup \nabla \mu, \nabla c_{\mathcal{M}} \rightharpoonup \nabla c, \nabla \eta_{\mathcal{M}} \rightharpoonup \nabla \eta$, dans $(L^2(\Omega))^d$.

Convergence

Proposition (Existence des limites)

- 1 Il existe des fonctions $\phi, \mu, c, \eta \in L^2(\Omega)$ telles que (à sous-suite près) on a $\phi_{\mathcal{M}} \rightarrow \phi, \mu_{\mathcal{M}} \rightharpoonup \mu, c_{\mathcal{M}} \rightarrow c$ et $\eta_{\mathcal{M}} \rightharpoonup \eta$.
- 2 De plus, ces fonctions sont $H^1(\Omega)$ et on a convergence faible pour les gradients, $\nabla \phi_{\mathcal{M}} \rightharpoonup \nabla \phi, \nabla \mu_{\mathcal{M}} \rightharpoonup \nabla \mu, \nabla c_{\mathcal{M}} \rightharpoonup \nabla c, \nabla \eta_{\mathcal{M}} \rightharpoonup \nabla \eta$, dans $(L^2(\Omega))^d$.

Passage à la limite :

- ↪ Pour les termes du Cahn-Hilliard classique (NABET 2016).
- ↪ Difficulté : termes de couplage

Convergence des termes de couplage vers la solution continue

Passage à la limite pour les termes de couplage :

$$\partial_\phi F(\phi, c) = 2\beta\phi c - 3\gamma\phi^2 c + 2\alpha\nabla \cdot (c\nabla\phi) - \delta\nabla \cdot (\nabla\phi|\nabla\phi|^2),$$

$$\partial_c F(\phi, c) = -\alpha|\nabla\phi|^2 + \beta\phi^2 - \gamma\phi^3.$$

Convergence des termes de couplage vers la solution continue

Passage à la limite pour les termes de couplage :

$$\partial_\phi F(\phi, c) = 2\beta\phi c - 3\gamma\phi^2 c + \boxed{2\alpha \nabla \cdot (c \nabla \phi)} - \delta \nabla \cdot (\nabla \phi |\nabla \phi|^2),$$

$$\partial_c F(\phi, c) = -\alpha |\nabla \phi|^2 + \beta\phi^2 - \gamma\phi^3.$$

Pour $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty$

$$\int_{\Omega} 2\alpha \nabla \cdot (c_{\mathcal{M}} \nabla \phi_{\mathcal{M}}) \psi = - \int_{\Omega} \underbrace{2\alpha c_{\mathcal{M}}}_{\downarrow c} \underbrace{\nabla \phi_{\mathcal{M}}}_{\downarrow \nabla \phi} \cdot \nabla \psi.$$

Convergence des termes de couplage vers la solution continue

Passage à la limite pour les termes de couplage :

$$\partial_\phi F(\phi, c) = 2\beta\phi c - 3\gamma\phi^2 c + 2\alpha\nabla \cdot (c\nabla\phi) - \delta\nabla \cdot (\nabla\phi|\nabla\phi|^2),$$

$$\partial_c F(\phi, c) = \boxed{-\alpha|\nabla\phi|^2} + \beta\phi^2 - \gamma\phi^3.$$

Pour $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty$

$$\int_{\Omega} -\alpha \nabla \phi_{\mathcal{M}} \cdot \nabla \phi_{\mathcal{M}} \psi = \int_{\Omega} 2\alpha \underset{\downarrow \phi}{\phi_{\mathcal{M}}} \nabla \cdot \underset{\downarrow \nabla \phi}{(\nabla \phi_{\mathcal{M}} \psi)}.$$

Convergence des termes de couplage vers la solution continue

Passage à la limite pour les termes de couplage :

$$\begin{aligned}\partial_\phi F(\phi, c) &= 2\beta\phi c - 3\gamma\phi^2 c + 2\alpha\nabla \cdot (c\nabla\phi) \boxed{-\delta\nabla \cdot (\nabla\phi|\nabla\phi|^2)}, \\ \partial_c F(\phi, c) &= -\alpha|\nabla\phi|^2 + \beta\phi^2 - \gamma\phi^3.\end{aligned}$$

Pour $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty$

$$\int_{\Omega} -\delta\nabla \cdot (\nabla\phi_{\mathcal{M}}|\nabla\phi_{\mathcal{M}}|^2)\psi = \int_{\Omega} \delta|\nabla\phi_{\mathcal{M}}|^2 \underset{\nabla\phi}{\nabla\phi_{\mathcal{M}}} \cdot \nabla\psi.$$

Convergence faible du gradient pour VF4

Définition du gradient discret

$$\nabla^\sigma u_{\mathcal{M}} := \begin{cases} d \frac{u_L - u_K}{d_{K,L}} & \text{pour } \sigma \in \mathcal{E}^{int} \\ 0 & \text{pour } \sigma \in \mathcal{E}^{ext}. \end{cases}$$

$$\nabla^\sigma u_{\mathcal{M}} \rightharpoonup \nabla u \quad \text{dans } (L^2(\Omega))^d.$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|\nabla^\sigma u_{\mathcal{M}}\|_{L^2(\Omega)}^2 \neq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Convergence faible du gradient pour VF4

Définition du gradient discret

$$\nabla^\sigma u_{\mathcal{M}} := \begin{cases} d \frac{u_L - u_K}{d_{K,L}} & \text{pour } \sigma \in \mathcal{E}^{int} \\ 0 & \text{pour } \sigma \in \mathcal{E}^{ext}. \end{cases}$$

$$\nabla^\sigma u_{\mathcal{M}} \rightharpoonup \nabla u \quad \text{dans } (L^2(\Omega))^d.$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|\nabla^\sigma u_{\mathcal{M}}\|_{L^2(\Omega)}^2 \neq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Pour le problème de Poisson :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|\nabla^\sigma u_{\mathcal{M}}\|_{L^2(\Omega)}^2 = d \int_{\Omega} f(x)u(x) = -d \int_{\Omega} \Delta u(x)u(x) = d \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2$$

Potentielles approches alternatives pour prouver la convergence

- 1 (BRADJI et HERBIN 2008) convergence de $\int_{\Omega} |\nabla \phi_{\mathcal{M}}|^2$

Potentielles approches alternatives pour prouver la convergence

- ① (BRADJI et HERBIN 2008) convergence de $\int_{\Omega} |\nabla \phi_{\mathcal{M}}|^2$
- ② Discrétisation en DDFV
 - reconstruction totale du gradient
 - maillages non conformes
 - plus de condition d'orthogonalité
 - utile pour le couplage avec Navier - Stokes plus tard

Simulations numériques - décomposition spinodale

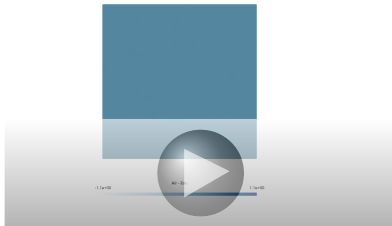


Figure : Séparation eau - air, modèle sans surfactants



Figure : Séparation eau - air, modèle avec surfactants



Figure : Séparation eau - air, modèle avec surfactants



Figure : Distribution des surfactants

Simulations numériques - une bulle d'air dans l'eau

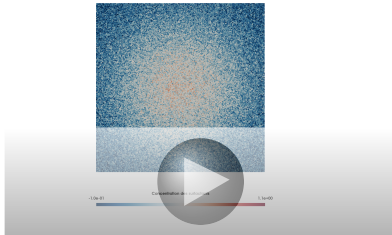


Figure : Dynamique des surfactants autour d'une bulle d'air

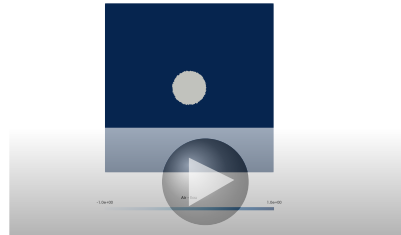


Figure : Une bulle d'air dans l'eau

Simulations numériques - des bulles d'air dans l'eau

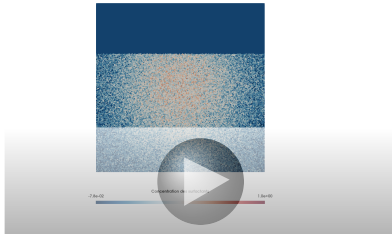


Figure : Dynamique des surfactants dans de l'eau avec des bulles

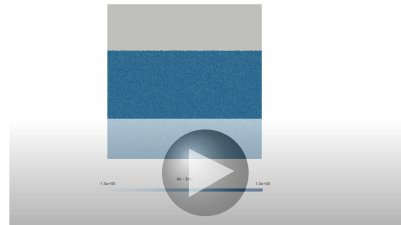


Figure : Séparation de phases, eau avec des bulles