# Cours MAP 551 - J. Massot. L. Séries - Cours N°6.

## Points singuliers hyperboliques.

### I Introduction.

Soit $X$ un champ de vecteur de classe $C^r$, $r \geq 1$, sur un voisinage de $a \in \mathbb{R}^n$. Lorsque $X(a) \neq 0$, le théorème de redressement du flot décrit complètement le flot $\phi$ de $X$ au voisinage de $a$. Il a pour modèle $x \mapsto x + t X(a)$. Lorsque $a$ est un point singulier, $X(a) = 0$, nous aimerions disposer d'un "modèle simple" au voisinage de $a$ qui représente le flot. Pour cela nous allons introduire la notion de germe et de $C^r$ conjugaison. Quand les valeurs propres de $DX(a)$ ont toute une partie réelle non nulle, on dit que la singularité en $a$ est hyperbolique. Nous allons montrer d'une part que dans le cas d'une singularité hyperbolique, le linéarisé de $X$ en $a$ : $X_1(x) = DX(a)(x-a)$ est un bon modèle topologique de $X$ au voisinage de $a$, et d'autre part que les problème commencent lorsque les valeurs propres passe par une partie réelle nulle, pour laquelle on voit apparaître les bifurcations. Nous en profiterons aussi pour définir les notions de variétés stables et instables et étudierons les champs de vecteur en dimension 2 d'espace pour lesquels des résultats théoriques permettent de classifier les ensembles $\omega$ et $\alpha$-limites en fonction des points singuliers présents.

# I. $C^r$ conjugaison des germes.

Deux champs de vecteurs $X$ et $X'$ définis sur des voisinages $U$ et $U'$ d'un point $a \in \mathbb{R}^n$ ont le même GERME en $a$ s'il existe un voisinage $U''$ de $a$ contenu dans $U'$ et $U$, tel que la restriction de $X$ à $U''$ est égale à la restriction de $X'$ à $U''$ $X/U'' = X'/U''$. "Avoir le même germe en $a$" est une relation d'équivalence sur l'ensemble des champs de vecteurs définis dans un voisinage de $a$. La classe d'équivalence d'un champ de vecteur $X$ est notée $(X, a)$ et s'appelle le germe de $X$ en $a$.

**Remarque :** Si $X$ est $C^r$ sur le voisinage $U$ de $a$, $(X, a)$ possède un représentant $X'$ de classe $C^r$ sur $\mathbb{R}^n$ qui est complet. Soit $\rho > 0$ tel que $U$ contient la boule de centre $a$ et de rayon $\rho$ et soit $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+^*$ (fonction plateau) de classe $C^\infty$ telle que $g(x) = 1$ si $\|x-a\| \leq \rho/2$ et $g(x) = 0$ si $\|x-a\| \geq \rho$
Le champ $gX$ est complet (cf chapitre 2 du cours) et $gX$ et $X$ ont le même germe en $a$

**Définition :** Soit $X$ et $X'$ deux champs de vecteurs de classe $C^r$, $r \geq 1$ sur des ouverts $U$ et $U'$ de $\mathbb{R}^n$. On dit que $X$ et $X'$ sont $C^s$-conjugués, $1 \leq s \leq r$, s'il existe un $C^s$-difféomorphisme $h$ de $U$ sur $U'$ tel que $h_* X = X'$.
Si $\phi$ et $\phi'$ sont les flots de $X$ et $X'$ cette relation s'écrit

$$\phi'(h(x), t) = h \circ \phi(x, t) \quad \forall x \in U, \ \forall t \text{ assez petit.}$$

Une telle égalité garde un sens quand $h$ est un homéomorphisme de $U$ sur $U'$ et nous dirons alors que $X$ et $X'$ sont $C^0$-conjugués par $h$.

Deux germes de champs de vecteurs $(X,a)$ et $(X',a')$ sont dit $C^s$-conjugués s'ils possèdent des représentants qui sont $C^s$-conjugués par un $h$ tel que $h(a)=a'$. En utilisant ces définitions, le théorème de redressement s'écrit : Le germe $(X,a)$ d'un champ de classe $C^r$ est $C^r$-conjugué au germe $(e_1, 0)$ si $X(a) \neq 0$.
Il est clair que le germe $(X,a)$ d'un champ $C^r$ est $C^r$-conjugué au germe $(X',0)$ avec $X'(x) = X(x-a)$ et nous n'étudierons donc que des germes en zéro par la suite pour simplifier l'écriture.

## II Théorèmes de linéarisation

Soient deux champs $X$, et $X'$ tels que $(X,0)$ et $(X',0)$ sont $C^1$-conjugués par un $C^1$-difféomorphisme $h$. La relation "être liés" $X' = h_* X$ ou relation de conjugaison s'exprime par

$$Dh(x)\, X(x) = X'(h(x))$$

et en identifiant les termes d'ordre 1 dans cette relation ; on obtient.

$$Dh(0) \cdot DX(0) = DX'(0) \circ Dh(0).$$

c'est-à-dire que les linéarisés de $X$ et $X'$ en zéro sont linéairement conjugués par $Dh(0) \in GL_n(\mathbb{R})$. En particulier, deux champs de vecteurs linéaires $x \mapsto Ax$ et $x \mapsto A'x$ sont $C^1$-conjugués si et seulement si $A$ et $A'$ sont semblables.

Ceci nous amène naturellement à comparer un germe $(X,0)$ de classe $C^r$, $r \geq 1$ à son linéarisé $x \mapsto DX(0)x$

**Définition :** On dit que $(X,0)$ est $C^s$-linéarisable, $X$ champ de vecteur $C^r$, $r \geq 1$, $0 \leq s \leq r$, si $(X,0)$ est $C^s$-conjugué au germe en $0$ de son linéarisé $x \mapsto DX(0)x$.

**Remarque :** Si $DX(0)$ n'est pas un isomorphisme, il est peu probable que $(X,0)$ soit $C^s$-linéarisable, mais la condition $DX(0) \in Gl_n(\mathbb{R})$ n'est pas suffisante pour assurer la $C^0$-linéarisation. On étudiera par exemple le cas proposé en PC :

$$X(x_1,x_2) = \left(-x_2 - x_1(x_1^2+x_2^2),\ x_1 - x_2(x_1^2+x_2^2)\right).$$

Les germes singuliers $(X,0)$ tels que $DX(0)$ possède une valeur propre imaginaire pure ne sont pas en général $C^0$-linéarisables et, en ces points, le linéarisé ne donne pas une information suffisante à l'étude de la topologie des trajectoires dans un voisinage de $0$. Cela motive la définition suivante.

**Définition :** $(X,0)$ est un germe singulier hyperbolique si toutes les valeurs propres de $DX(0)$ ont des parties réelles non nulles.

**Théorème de HARTMAN-GROBMAN :** Un germe singulier $(X,0)$ hyperbolique est $C^0$-linéarisable.

Nous allons démontrer ce résultat dans le cas particulier où toutes les valeurs propres ont des parties réelles négatives (ou sont de même signe). La $C^0$-linéarisation et la classification des germes hyperboliques se ramène donc d'après ce théorème à celle des champs de vecteurs linéaires hyperboliques

Théorème de classification topologique : Deux champs de vecteurs linéaires hyperboliques $x \mapsto Ax$ et $x \mapsto A'x$ sont $C^0$-conjugués si et seulement si $A$ et $A'$ ont le même nombre de valeurs propres de partie réelle négative.

Ainsi un germe singulier hyperbolique $(X, 0)$ tel que $DX(0)$ possède $p$ valeurs propres de partie réelle négative est $C^0$-conjugué de

$$R_p(x) = (-x_1 \text{ --- } -x_p, x_{p+1}, \text{ --- } x_n).$$

autrement dit l'ensemble des germes singuliers hyperboliques possède $(n+1)$ classes d'équivalence pour la relation de $C^0$-conjugaison représentées par les $(R_p, 0)$ pour $p = 0, \text{---}, n$.

La question naturelle qui se pose alors est reliée au fait de pouvoir passer à la $C^s$-linéarisation. De même que la présence de valeurs propres imaginaires pures est un obstacle à la $C^0$-linéarisation, il existe un obstacle à la $C^\infty$-linéarisation d'un germe singulier hyperbolique : l'existence de résonances entre les valeurs propres de $DX(0)$.
On dit que l'endomorphisme $A$ est résonnant si ses valeurs propres $\lambda_1, \text{---} \lambda_n$ sont liées par une relation du type :

$$\begin{cases} \lambda_k = p_1\lambda_1 + \text{---} + p_n\lambda_n & p_1, \text{---} p_n \in \mathbb{N} \\ p_1 + p_2 + \text{---} + p_n \geq 2 & \end{cases}$$

Prenons un exemple : Supposons que la matrice $A$ soit diagonale et que ses valeurs propres soient liées par une résonance de type particulier. $p_1\lambda_1 + \text{---} + p_n\lambda_n = 0$ $p_1, \text{---} p_n \in \mathbb{N}$ et $p_1 + p_2 + \text{---} + p_n \geq 1$. Si $x = (x_1, \text{---} x_n)$ dans la base canonique, $Q(x) = x_1^{p_1} x_2^{p_2} \text{---} x_n^{p_n}$ est une intégrale première du champ

de vecteur linéaire : $X_1(x) = (\lambda_1 x_1, \ldots, \lambda_n x_n)$.
Maintenant, si $(X,0)$ est un germe singulier dont la partie linéaire est $X_1(x)$, et si $(X,0)$ est $C^\infty$-conjugué à $(X_1,0)$ par le $C^\infty$ difféomorphisme $h$ alors la fonction $Q \circ h$ est une intégrale première de $X$ au voisinage de $0$. Or en général, les champs de vecteurs ayant une partie linéaire résonnante ne possèdent pas d'intégrale première $C^\infty$ non constante.
C'est par exemple le cas du champ :

$$X(x_1, x_2) = \left(x_1(1 + x_1 x_2), -x_2\right).$$

**THEOREME de $C^\infty$-linéarisation de Sternberg :**

> Un germe singulier hyperbolique $(X,0)$ de classe $C^\infty$ est $C^\infty$-linéarisable si $DX(0)$ n'est pas résonnant.

## III Attracteurs et fonctions de Lyapounov.

Soit $X$ un champ de vecteur de classe $C^r$, $r \geq 1$ sur un voisinage $U$ de $\mathbb{R}^n$ en $0$, et dont $0$ est le seul point singulier. On dit que $0$ est attracteur de $X$ si $0$ est un point singulier asymptotiquement stable de $d_t x = X(x)$.

<u>Définition</u> : Pour l'équation $d_t x = X(x)$, un point singulier $x_0$ est dit Lyapounov-stable si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta, \tau$ tq si $\varphi$ est une solution de l'équation de condition initiale $(x_0', t_0)$ avec $\|x_0 - x_0'\| \leq \eta$ et $t_0 \geq \tau$ alors $\varphi$ est définie sur $[t_0, +\infty[$ et

$$\|\varphi(t) - x_0\| < \varepsilon \quad \text{pour} \quad t \in [t_0, +\infty[.$$

Si de plus $\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = x_0$ on dit que $x_0$ est asymptotiquement stable

Il est clair que si $(X', 0)$ est $C^0$-conjugué à $(X, 0)$ et $0$ est un attracteur pour $X$, alors $0$ est attracteur pour $X'$. Nous dirons que $0$ est un repulseur pour $X$ s'il est un attracteur de $-X$. Par exemple, si $A$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont toutes les valeurs propres sont de partie réelle strictement négative, alors $0$ est un attracteur du champ de vecteur linéaire $x \mapsto Ax$. puisque l'on peut montrer alors que
$$\|\exp(tA)(x)\| \leq e^{-ta}\|x\| \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$$

Définition :

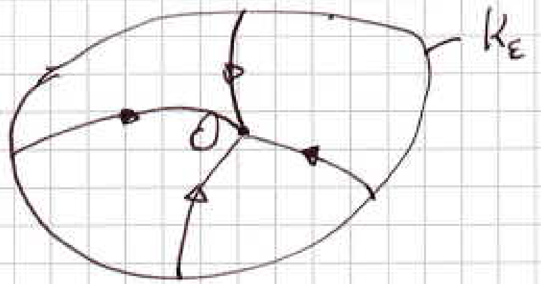
Une fonction de Lyapounov $f$ pour $(X, 0)$ est une fonction continue sur un voisinage $U'$ de $0$ contenu dans $U$ telle que

(i) • $f(0) = 0$ et $f(x) > 0 \quad \forall x \in U' - \{0\}$.

(ii) • $f$ est $C^1$ sur $U' - \{0\}$. et il existe $a > 0$, $a \in \mathbb{R}$. tel que
$$df(x)(X(x)) = L_X f(x) \leq -a f(x). \quad x \in U' - \{0\}$$

La condition i) signifie que $0$ est un minimum stricte de $f$. Elle s'interprète topologiquement par le fait que : $\forall W$ voisinage ouvert de $0$, $\exists \varepsilon > 0$ tq $U_\varepsilon = \{x \mid x \in U' \ f(x) < \varepsilon\} \subset W$, i.e. les $U_\varepsilon$ forment un système fondamental de voisinages ouverts de $0$ et compte tenu de la continuité en zéro, une suite $x_n \to 0$ ssi $f(x_n) \to 0$. La condition ii) implique que le bord de $U_\varepsilon$ est une section compacte de $X$ et que les

trajectoires qui en sont issues "rentrent" dans $U_\varepsilon$.
($\mathcal{L}$o 1/2 orbite positive).




THEORÈME :

Si $(X,0)$ possède une fonction de Lyapounov $f$ alors $O$ est un attracteur de $X$. Plus précisément, si ii) est satisfait alors il existe $U''$ un voisinage de $O$ tq $\forall (x,t) \in U'' \times \mathbb{R}_+$, $\phi(t,x)$ est défini et $f(\phi(x,t)) \leq e^{-at} f(x)$.

Preuve : Soit $\varepsilon > 0$ tel que $K_\varepsilon = f^{-1}([0,\varepsilon[)$ soit un voisinage de $O$ contenu dans le voisinage $U'$ de la définition précédente.
Pour $x \in K_\varepsilon$ $\quad t \mapsto \phi(t,x)$ vérifie.

$$d_t\, f(\phi(t,x)) = df(\phi(t,x))\, X(\phi(t,x)) \leq -a\, f(\phi(t,x))$$

et donc $\quad d_t\left(e^{at} f(\phi(t,x))\right) \leq 0.$

Ainsi dès que $\phi(t,x)$ est défini $\quad f(\phi(t,x)) \leq f(x) e^{-at}$
En particulier pour $t \geq 0$ $f(\phi(t,x)) \leq \varepsilon$ et la 1/2 orbite positive $\gamma_x^+$ est contenue dans le compact $K_\varepsilon$ et ainsi $\phi(t,x)$ est défini pour tout $t \geq 0$. Comme $f(\phi(t,x)) \to 0$ quand $t \to +\infty$ alors $\forall x \in K_\varepsilon$ $\phi(t,x) \to 0$ quand $t \to +\infty$.

# IV Champs de vecteurs hyperboliques contractants

Il s'agit ici de proposer une preuve du théorème de HARTMAN - GROBMAN pour un germe $(X, 0)$ singulier tel que les valeurs propres de $A = DX(0)$ aient toutes des parties réelles strictement négatives. Cette démonstration s'articule en quatre parties : 1- Construction d'une norme euclidienne $\| \ \|_A$ 2- La norme $\| \ \|_A$ est une fonction de Lyapounov pour $X$, 3- $C^1$-conjugaison en dehors de $0$ de $X$ et du champ $R_0 : x \mapsto -x$, 4- fin de la preuve.

PROPOSITION : $\exists q$ forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ définie positive telle que

$$\langle x, Ax \rangle \leq -a\, q(x)$$

où $\langle , \rangle$ désigne la forme bilinéaire associée à $q$.

et où $a$ est un réel positif tel que $\forall \lambda_i$ valeur propre de $A$, $\operatorname{Re} \lambda_i < a$.

Preuve : Nous devons construire une matrice symétrique telle que $\forall x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$.

$${}^t x B x > 0 \quad \text{et} \quad {}^t x B . A x \leq -a\, {}^t x B x$$

Notons $P_0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $T_0 = P_0 A P_0^{-1}$ triangulaire. Les éléments diagonaux sont les v.p. de $A$, donc $\exists \varepsilon > 0$ tq $\forall i \in [1, n]$ $\operatorname{Re} t_{i,i} \leq -a - \varepsilon$

Soient $D$ la matrice diagonale $D = \operatorname{diag}(1, \eta, \dots, \eta^n)$ et $N_0$ la partie nilpotente de $T_0$. On peut choisir $\eta > 0$ tq les éléments $n_{ij}$ de $N = DN_0$ vérifient $|n_{ij}| < \frac{\varepsilon}{n^3}$. En posant $P = DP_0$, les coefficients $t_{ij}$ de $T = PAP^{-1}$ vérifient $t_{ij} = 0$ $i > j$, $\operatorname{Re}(t_{ii}) < -a - \varepsilon$ et $|t_{ij}| < \frac{\varepsilon}{n^3}$ si $i < j$. Montrons $B = \operatorname{Re}({}^t \bar{P} . P)$ satisfait aux conditions requises.

Il est clair que ${}^tB = B$ et $x^tBx = {}^t\overline{P_x}P_x > 0$ si $x \neq 0$.

$$x^tBAx = R_e\left({}^t\overline{P_x}\,T_0\,P_x\right).$$

en notant $(y_1, \ldots, y_n) = {}^tP_x$

$$x^tBAx = R_e\left(\sum_{i=1}^{n} t_{ii}|y_i|^2\right) + \sum_{i\neq j} R_e\left(t_{ij}\,y_i\bar{y}_j\right).$$

donc $x^tBAx \geq -a \sum_i |y_i|^2 = -a\,{}^tx\,Bx$. ∎

En munissant $\mathbb{R}^n$ de la norme $\| \ \|_A$ définie par $q$, la fonction $\| \ \|_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ est une fonction de Lyapounov pour le champ linéaire $X_1 : x \mapsto Ax$.

car. $$\mathcal{L}_{X_1} q(x) = 2\langle Ax, x\rangle \leq -2a\,q(x).$$

et comme $q(x) = \|x\|_A^2$
$$\mathcal{L}_{X_1} \|x\|_A \leq -a\|x\|_A.$$

Proposition: $\| \ \|_A$ est une fonction de Lyapounov pour $(X, 0)$. Plus précisément soit $\phi$ le flot de $X$ et $b < a$, il existe $\rho > 0$ tel que si $(x, t) \in B_\rho \times \mathbb{R}_+$ avec $B_\rho = \{x \in \mathbb{R}^n \,/\, \|x\|_A \leq \rho\}$. on a
$$\|\phi(x,t)\|_A \leq e^{-bt}\|x\|_A.$$

Preuve: Soit $\varepsilon = b - a$, $X$ de classe $C^r$ $r \geq 1$ en $0$, donc $\exists \rho > 0$ tq
$$\|X(x) - Ax\|_A \leq \varepsilon\|x\|_A \quad \forall x \in B_\rho$$
$$\langle X(x), x\rangle \leq \langle Ax, x\rangle + \varepsilon\|x\|_A^2 \leq -b\|x\|_A^2$$
Puisque $\mathcal{L}_X \|x\|_A^2 = 2\cdot\langle X(x), x\rangle$, $\forall x \in B_\rho$.
$$\mathcal{L}_X \|x\|_A \leq -b\|x\|_A$$ □

Remarque : Ce résultat s'interprète géométriquement : Les orbites de $X$ coupent transversalement les sphères $S_r = \partial B_r$ suivant un angle qui est uniformément minoré.

Nous admettrons la proposition suivante :

PROPOSITION : La restriction $\psi$ de $\phi$ à $S_\rho \times \mathbb{R}_+$ est un $C^1$ difféomorphisme sur $B_\rho - \{0\}$.

THEOREME : Le germe $(X, 0)$ est $C^0$-conjugué au germe de $R_n(x) = -x$ en $0$. Plus précisément, soient respectivement $\psi$ et $\psi'$ les $C^1$-difféomorphismes de $S_\rho \times \mathbb{R}^+ \to B_\rho - \{0\}$. et $(x,t) \mapsto xe^{-t}$. Alors $h = \psi \circ \psi'^{-1}$ s'étend en un homéomorphisme de $B_\rho$, en posant $h(0)=0$, qui conjugue les restrictions à $\mathring{B}_\rho \times \mathbb{R}_+$ des flots $\phi$ de $X$ et $\phi'$ de $R_n$, où $\mathring{B}_\rho$ est l'intérieur de $B_\rho$.

Element de preuve : soit $y \in \mathring{B}_\rho$ : $y = \psi'(x,t) = xe^{-t}$ avec $(x,t) \in S_\rho \times \mathbb{R}_+^*$

$\forall s \quad -t \leq s \leq t$

$$\phi'(y,s) = \phi'(\phi'(x,t), s) = \phi'(x, t+s)$$

$$h(\phi'(y,s)) = \phi \circ \phi'^{-1}(\phi'(x,t+s)) = \psi(x, t+s).$$

$$= \phi(x, t+s) = \phi(\phi(x,t), s).$$

ou encore $\quad h(\phi'(y,s)) = \phi(h(y), s)$

et d'autre part $h$ se prolonge en $0$ par continuité puisque

$$\|h(y)\| = \|\phi(x,t)\| \leq \rho e^{-bt} \leq \rho^{1-b} \|y\|^b$$

Le même type d'argument appliqué à $\psi' \circ \psi^{-1}$ prouve que $h^{-1}$ est continue $\square$

<u>Remarque:</u> Soit $X(x) = Ax$ un champ de vecteurs linéaire. Notons $\Psi, \Psi'$ les $C^\infty$ difféomorphismes de $S_1 \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n - \{0\}$ définis par

$$\begin{cases} \Psi(x,t) = \exp(tA)\,x \\ \Psi'(x,t) = x\,e^{-t} \end{cases}$$

Le raisonnement précédent montre que $h = \Psi \circ \Psi'^{-1}$ s'étend encore en un homéomorphisme de $\mathbb{R}^n$ tel que

$$h \circ \exp(tA) = \exp(-t\,I_{\mathbb{R}^n}) \circ h.$$

## V Champs de vecteurs hyperboliques

Dans cette partie, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne un endomorphisme dont les valeurs propres ont une partie réelle non nulle. Nous noterons $\Lambda^+$ (respectivement $\Lambda^-$) l'ensemble des valeurs propres $\lambda_i$ telles que $Re(\lambda_i) > 0$ (resp. $Re(\lambda_i) < 0$) et $n_i$ l'ordre de $\lambda_i$. Le polynôme caractéristique s'exprime alors

$$P(X) = P^+(X) \cdot P^-(X) \quad \text{avec} \quad P^\varepsilon(X) = \prod_{\lambda_i \in \Lambda^\varepsilon} (X - \lambda_i)^{n_i} \quad \varepsilon = \pm$$

Nous notons aussi $E^s$ et $E^i$ <u>les sous espaces stables et instables</u>:

$$E^s(A) = Ker(P^-(A)) \qquad E^i(A) = Ker(P^+(A))$$

<u>PROPOSITION:</u> Les sous espaces $E^s(A)$ et $E^i(A)$ sont supplémentaires et invariants par $A$.

La restriction $A_s$ (resp $A_i$) de $A$ à $E^s(A)$ (resp $E^i(A)$) a pour valeurs propres les $\lambda_i \in \Lambda^+$ (resp $\lambda_i \in \Lambda^-$). On a:

$$E^s(A) = \bigoplus_{\lambda_i \in \Lambda^-} E\lambda_i \qquad E^i(A) = \bigoplus_{\lambda_i \in \Lambda^+} E\lambda_i$$

où

$$\begin{cases} E\lambda_i = Ker(A - \lambda_i I_{\mathbb{R}^n})^{n_i} & \text{si } \lambda_i \in \mathbb{R} \\ E\lambda_i = Ker(A^2 - (\lambda_i + \bar{\lambda}_i)A + \lambda_i\bar{\lambda}_i)^{n\lambda} & \text{si } \lambda \notin \mathbb{R}. \end{cases}$$

La preuve de cette proposition est une conséquence immédiate de la mise sous forme JORDAN de la matrice $A$.

A la décomposition $A = A_s \oplus A_i$ correspond la décomposition :

$$\exp(tA) = \exp(tA_s) \oplus \exp(tA_i) : E^s(A) + E^i(A) \mapsto E^s(A) + E^i(A).$$

En utilisant la remarque en fin de partie précédente, on voit que l'on peut trouver des homéomorphisme $h_s$ et $h_i$ de $E^s(A)$ et $E^i(A)$ resp. tels que

$$h \circ \exp(tA) = \left(\exp\left(-tI_{\mathbb{R}^n} \circ h_s\right), \exp\left(+tI_{\mathbb{R}^n} \circ h_i\right)\right)$$

Si l'on note $p = \dim E^s(A)$, $I$ un isomorphisme envoyant $E^s(A)$ sur $\mathbb{R}^p \times \{0\}$ et $E^i(A)$ sur $\mathbb{R}^{n-p} \times \{0\}$, On note aussi comme précédemment :

$$R_p : (x_1 - x_n) \mapsto (-x_1 - -x_p, x_{p+1}, - x_n)$$

la conjugaison précédente s'écrit aussi

$$(I \circ h) \circ \exp(tA) = \exp tR_p \circ I \circ h.$$

ce qui prouve une des implications du théorème suivant :

THEOREME DE CLASSIFICATION DES CHAMPS LINEAIRES HYPERBOLIQUES

Soient $A$ et $A'$ deux endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ dont toutes les valeurs propres sont de partie réelle non nulle. Les champs de vecteurs $X : x \mapsto Ax$ et $X' : x \mapsto A'x$ linéaires hyperboliques sont $C^0$ conjugués ssi $A$ et $A'$ ont le même nombre de valeurs propres de partie réelle négative.

**Preuve:** Il suffit de montrer que si $h \circ \exp tA = \exp tA' \circ h$ alors $\dim E^s(A) = \dim E^s(A')$

Le sous espace $E^s(A)$ est caractérisé par $x \in E^s(A)$ si $\exp tA(x) \to 0$ lorsque $t \to +\infty$

Puisque $h(0) = 0$, si $x \in E^s(A)$

$$0 = \lim_{t \to +\infty} h \circ \exp(tA)(x) = \lim_{t \to +\infty} \exp(tA')(h(x))$$

ainsi $h(E^s(A))$ est contenu dans $E^s(A')$. On montre de même l'inclusion opposée et donc $h(E^s(A)) = E^s(A')$. Un argument de topologie algébrique, admis, montre que deux variété homéomorphes ont même dimension. $\square$

Les résultats obtenus jusqu'ici sont les prémices de la démonstration du résultat général suivant qui sera admis :

**THEOREME DE CLASSIFICATION TOPOLOGIQUE DES SINGULARITE HYPERBOLIQUES.**

Soit $X$ un champ de vecteur de classe $C^r$, $r \geq 1$ sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$; soit $a$ un point singulier hyperbolique de $X$ et soit $p$ le nombre de valeurs propres de partie réelle négative de $A = DX(a)$. Il existe un homéomorphisme $h$ d'un voisinage $V_0$ de $0 \subset \mathbb{R}^n$ et un voisinage $U' \subset U$ de $a$ tel que.

$$\phi(h(x), t) = h \circ \exp(t R_p)(x)$$

$\forall x \in U'$, $\phi$ désignant le flot de $X$ sur $U$.

## Notions de variété stables et instables LOCALES.

Nous pouvons toujours choisir $U_0$ et $h$ tel que.

$U_0 = D^p \times D^{m-p}$ où $D^k = \{x \in \mathbb{R}^k \mid \|x\| < 1\}$. Puisque $h$ conjugue les flots $\phi$ sur $U$ et $\exp(tR_p)$ sur $U_0$, l'ensemble

$$V^S_{U'}(a) = \{x \in U' \mid \lim_{t \to +\infty} \phi(x,t) = a\}$$

est l'image par $h$ de $D^p \times \{0\}$. Il s'agit de l'ensemble des $x$ dont l'ensemble $\omega$-limite pour $X$ sur $U'$ est le point $a$. On l'appelle la variété stable en $a$ de $X'$ défini sur $U'$. On peut définir de même la variété instable $V^i_{U'}(a)$ comme étant la variété stable en $a$ de $-X$. Le théorème suivant, qui sera admis, montre que le germe en $a$ du champ linéaire $x \mapsto a + DX(a)x$ est un bon modèle topologique pour $(X, a)$.

### THEOREME DES VARIETES STABLES et INSTABLES.

$V^S_{U'}(a)$ et $V^i_{U'}(a)$ sont des sous variétés de $U'$ telles que.

$$T_a\left(V^s_{U'}(a)\right) = E^S\left(DX(a)\right)$$

$$T_a\left(V^i_{U'}(a)\right) = E^i\left(DX(a)\right)$$

Remarque : Il est important de bien saisir le caractère local des résultats précédents. Si l'on note $V^S_U(a)$ l'ensemble des $x \in U$ tq $\phi(x,t)$ existe $\forall t \in \mathbb{R}_+$ et $\omega(x) = \lim_{t \to +\infty} \phi(x,t)$, $\omega(x) = a$. En général $V^S_U(a)$ n'est pas une sous variété de $U$. Voir exemple de la PC 6.