

ONDES PROGRESSIVES

TRAVELING WAVES

17. FASSOT Cours 7
MAP 551

1. Formulation à la "GRAY-SCOTT" - autocatalyse cubique... un exemple.

Nous considérons un système de deux équations de réactions-diffusion avec autocatalyse cubique pour le réactif A et B, le catalyseur.

$$\begin{cases} \partial_t a - D_A \partial_{xx} a = -k_1 a b^2 \\ \partial_t b - D_B \partial_{xx} b = +k_1 a b^2 \end{cases}$$

Nous allons travailler sur $\mathbb{R}$ entre $a(t, x) \in \mathbb{R}_+$, $t \geq 0$, $t \in \mathbb{R}_+$ et $x \in \mathbb{R}$, $b(t, x) \in \mathbb{R}_+$. On doit se donner deux conditions initiales $a_0(x)$ et $b_0(x)$

$$\begin{cases} a(0, x) = a_0(x) \\ b(0, x) = b_0(x) \end{cases}$$

et des conditions à l'infini :

$$\begin{cases} x \rightarrow +\infty : & a = \bar{a}, \quad b = 0 \\ x \rightarrow -\infty : & a = 0, \quad b = \bar{a} \end{cases}$$

ce qui vérifie par la donnée initiale.

L'objectif du cours n'est pas l'étude de l'existence et l'unicité, voire la régularité de solutions pour ces EDP posés sur un ensemble non compact qui posent des difficultés mathématiques spécifiques, mais l'étude de solutions auto-similaires de type onde progressive qui deviennent alors des EDO d'un type particulier.

En supposant que $D_A = D_B = D$, on peut montrer que

$$a + b = \bar{a} \quad \forall (t, x) \text{ à partir du moment où}$$

et cela est compatible avec les conditions à l'infini. $a_0 + b_0 = \bar{a}$

(2)

On peut donc se ramener à une seule équation:

$$\partial_z b - D \partial_{zz} b = k_1 b^2 (\bar{a} - b) \quad (1)$$

En adimensionnant l'équation (1)

$$\beta = \frac{b}{\bar{a}}, \quad z = k_1 \bar{a}^2 t$$

$$z = \left(\frac{k_1 \bar{a}^2}{D} \right)^{1/2} x$$

$\hookrightarrow$ 1/longueur de diffusion dans un temps chimique.

On obtient:

$$\partial_z \beta - \partial_{zz} \beta = \beta^2 (1 - \beta).$$

avec des conditions aux limites

$$\left| \begin{array}{l} \beta = 1 \quad z \rightarrow -\infty \\ \beta = 0 \quad z \rightarrow +\infty \end{array} \right.$$

$\beta(0, x) = \beta_0(x)$
qui vérifie
les conditions à l'infini.

On cherche des solutions auto-similaires

se propageant à vitesse constante c et on introduit la variable

$$y = z - cz.$$

On cherche donc $\beta(t, z) = \bar{\beta}(y)$ un profil spatial.
tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} dy \bar{\beta} + c dy \bar{\beta} + \bar{\beta}^2 (1 - \bar{\beta}) = 0 \\ \text{avec } \left| \begin{array}{ll} \bar{\beta} \rightarrow 1 & \bar{y} \rightarrow -\infty \\ \bar{\beta} \rightarrow 0 & \bar{y} \rightarrow +\infty \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Il s'agit bien d'une équation différentielle ordinaire d'un type un peu particulier.

Remarquons dans un premier temps que le profil de l'onde est tel que la limite du gradient de la solution à l'infini doit être zéro, pour que la solution reste bornée entre 0 et 1.

Procédant comme précédemment dans le cours, posant $\bar{\delta}(y) = \frac{d}{dy} \bar{\beta}$, on peut réécrire l'équation du second ordre sous la forme.

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{d}{dy} \bar{\beta} = \bar{\delta} \\ \frac{d}{dy} \bar{\delta} = -(c \bar{\delta} + \bar{\beta}^2 (1 - \bar{\beta})) \end{cases} \quad \begin{aligned} \begin{pmatrix} \bar{\beta} \\ \bar{\delta} \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ en } y \rightarrow -\infty \\ \begin{pmatrix} \bar{\beta} \\ \bar{\delta} \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ en } y \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

On cherche une solution sous la forme $\bar{\delta} = -k \bar{\beta} (1 - \bar{\beta})$, par conséquent:

$$\frac{d}{dy} \bar{\delta} = -k(1 - \bar{\beta}) + k \bar{\beta} \bar{\delta} = -(c \bar{\delta} + \bar{\beta}^2 (1 - \bar{\beta}))$$

$$\text{d'où} \quad (c - k) \bar{\delta} + \left(2k - \frac{1}{k}\right) \bar{\beta} \bar{\delta} = 0$$

ce qui est vrai en tout point si $k = \frac{1}{12} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $c = k$.

Nous avons donc trouvé une onde progressive qui se propage à vitesse $c = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et dont le gradient s'annule

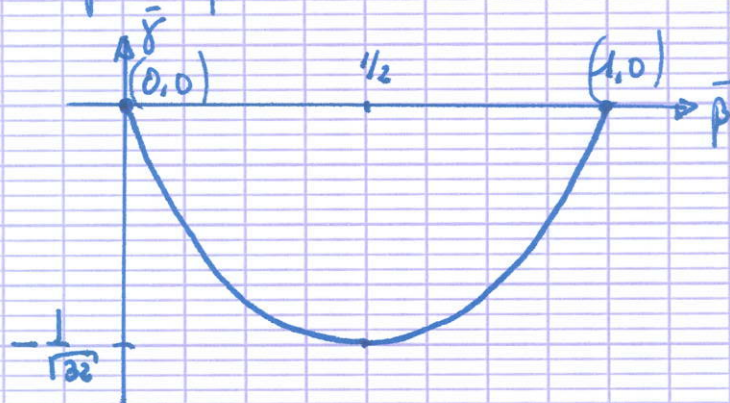
$$(3) \quad \bar{\delta} = -\frac{1}{12} \bar{\beta} (1 - \bar{\beta})$$

On peut alors trouver le profil déterminé à une translation près:

$$(4) \quad \bar{\beta}(y) = \frac{\exp\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}(y + y_0)\right)}{1 + \exp\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}(y + y_0)\right)} \quad \text{qui satisfait bien}$$

les conditions à l'infini

Dans le plan de phase:



Il s'agit d'une orbite hétérocline (joignant deux points différents) de l'espace des phases paramétrée par la coordonnée spatiale y .

Exercice: Montrer,

qu'en fait la vitesse de l'onde est proportionnelle à $(Dk)^{1/2}$ et le gradient maximal en valeur absolue à $(\frac{k}{D})^{1/2}$ si l'on réécrit l'équation sous la forme

$$\partial_z \beta - D \partial_{zz} \beta = k \beta^2 (1 - \beta).$$

et que l'on peut "raccourcir" l'onde en maintenant sa vitesse de propagation constante.

Exercice: Montrer que la matrice Jacobienne aux points "infini" s'écrit:

$$J_{-\infty} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

et admet deux valeurs propres réelles de signe opposé dont la valeur propre positive $\frac{1}{\sqrt{2}}$ admet comme direction propre: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ qui permettra d'identifier la raie.

instable en $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Faire le lien avec l'orbite hétérocline.

$$J_{\text{top}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \text{ en } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

admet une valeur propre nulle et une valeur propre négative $-1/2$
dont le vecteur propre est $\begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \end{pmatrix}$ et définit la variété stable
en $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Faire le lien avec la trajectoire hétérocline.

En fait ce type de non linéarité cubique est un cas limite de la non linéarité de Nagumo et de ce que l'on appelle un terme non linéaire de type bistable. Une autre non linéarité de type monostable est donnée dans la partie II, alors que le cas de la combustion proposée au PC est du même type que ce que nous venons d'étudier, pour lequel il existe un seul profil d'onde et une seule vitesse.

II

KPP ou Fisher. Le cas monostable.

Une autre équation qui admet une solution de type onde progressive est l'équation de KPP (voir référence - article de 1938 - PC 7)
Kolmogorov Petrowsky Piskounov, que l'on appelle aussi équation de Fisher dans la communauté anglosaxonne !

$$\partial_t \beta - \partial_{yy} \beta = \beta(1-\beta) \quad (6)$$

En utilisant les mêmes notations, on cherche une onde progressive de vitesse c , vérifiant :

$$\begin{cases} \partial_{yy} \bar{\beta} + c \partial_y \bar{\beta} + \bar{\beta}(1-\bar{\beta}) = 0 \\ \bar{\beta} \rightarrow 1 \text{ en } -\infty \text{ et } \bar{\beta} \rightarrow 0 \text{ en } +\infty \end{cases}$$

En transformant cela en deux équations du premier ordre:

$$\begin{cases} dy \bar{\beta} = \bar{\gamma} \\ dy \bar{\gamma} = -c \bar{\gamma} - \bar{\beta}(1 - \bar{\beta}) \end{cases} \quad \begin{aligned} \begin{pmatrix} \bar{\beta} \\ \bar{\gamma} \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ en } -\infty \\ \begin{pmatrix} \bar{\beta} \\ \bar{\gamma} \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ en } +\infty \end{aligned}$$

Il se trouve que l'on ne dispose pas d'une expression analytique dans l'espace des phases. On peut chercher la stabilité des points critiques:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 + 2\bar{\beta} & -c \end{pmatrix}$$

$$J_{-\infty} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -c \end{pmatrix}$$

$$J_{+\infty} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -c \end{pmatrix}$$

- en $-\infty$: 2 valeurs propres de signes opposés $-\frac{c \pm \sqrt{c^2 + 4}}{2}$

et on se retrouve dans le même cas que précédemment pour $c > 0$.

- en $+\infty$: On ne peut pas avoir de V imaginaire, par conséquent on doit avoir $c \geq c_{\min} = 2$ dans ce cas 2 valeurs propres $-\frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4}}{2}$ de même signe négative, donc le point est attracteur.

Par conséquent, comme on doit se rappeler que c est une inconnue, pour chaque $c \geq c_{\min} = 2$ on va pouvoir construire une trajectoire partant de $(0, 0)^t$ et allant à $(1, 0)^t$ et l'approchant de manière tangente à la direction propre instable et il y a une infinité de couple (orbite, c) permettant de joindre les deux points "infini".

STRUCTURES DE TURING.

Thierry Tasso
TAPSSI Cours 7

I Contexte des structures de Turing.

À la fin de l'année 1952 paraît une publication dans la revue "Philosophical Transactions of the Royal Society of London" (série B consacrée à la Biologie) "The chemical basis of MORPHOGENESIS" d'A. M. TURING. Cette publication pose les bases de l'apparition de motifs en biologie, alors que l'état initial local semble stable et symétrique; quelle forme d'instabilité peut créer ces formes nouvelles? Alan Turing se suicide deux ans plus tard et le fait qu'il ait choisi la section de Biologie fait qu'il ne sera redécouvert par les mathématiciens que 20 ans plus tard et que les biologistes ne percevront pas immédiatement la portée de ses résultats. Le papier original est fourni pour les élèves intéressés.

II Obtention des conditions d'instabilité d'un état d'équilibre de la source

Nous allons nous placer dans le cadre du cas le plus simple d'un système de 2 équations de réaction-diffusion à deux inconnues.

$$(1) \begin{cases} \partial_t y_1 - D_1 \partial_{xx} y_1 = f(y_1, y_2) \\ \partial_t y_2 - D_2 \partial_{xx} y_2 = g(y_1, y_2) \end{cases}$$

L'hypothèse de base est de se placer dans un voisinage d'un point critique du système d'EDO: $(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} d_t \tilde{y}_1 = f(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2) \\ d_t \tilde{y}_2 = g(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2) \end{cases}$$

$$f(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2) = 0 = g(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2)$$

(2)

$$\text{Si l'on note } J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial y_1}(\bar{y}_1, \bar{y}_2) & \frac{\partial f}{\partial y_2}(\bar{y}_1, \bar{y}_2) \\ \frac{\partial g}{\partial y_1}(\bar{y}_1, \bar{y}_2) & \frac{\partial g}{\partial y_2}(\bar{y}_1, \bar{y}_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

la matrice Jacobienne au point critique,
on suppose que le point d'équilibre est stable :

$$\text{Tr}(J) = a_{11} + a_{22} < 0 \quad \text{et} \quad \det(J) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0.$$

On va donc considérer le système de réaction diffusion (1)
dans un voisinage de la solution d'équilibre, sur un ouvert Ω , un intervalle
compact et on va linéariser le problème.

$$(2) \quad \begin{cases} \partial_t y_1 - D_1 \partial_{xx} y_1 = a_{11}(y_1 - \bar{y}_1) + a_{12}(y_2 - \bar{y}_2) \\ \partial_t y_2 - D_2 \partial_{xx} y_2 = a_{21}(y_1 - \bar{y}_1) + a_{22}(y_2 - \bar{y}_2) \end{cases}$$

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{pmatrix} \quad \text{on écrit:}$$

$$(3) \quad \partial_t y - D \partial_{xx} y = J^a(y - \bar{y}).$$

L'idée est alors de considérer, pour simplifier un intervalle adapté
pour lequel on dispose d'une base hilbertienne des fonctions propres
du Laplacien sous la forme de fonctions $\cos(nx)$ (Neumann
aux bords) et d'étudier la stabilité de (3) sur chaque mode
en profitant de la linéarité de (3) sous la forme

$$y_n(t, x) = \bar{y} + \varphi_n(t) \cos(nx)$$

Cela nous permet de construire une équation différentielle ordinaire sur chaque mode.

$$(4) \quad d_t \underline{\Psi}_n = -n^2 \underline{D} \underline{\Psi}_n + \underline{J}^{eq} \underline{\Psi}_n = \underline{T}_n \underline{\Psi}_n$$

qui n'est rien d'autre qu'une équation différentielle linéaire.

$$\underline{T}_n = \begin{pmatrix} a_{11} - n^2 D_1 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - n^2 D_2 \end{pmatrix}.$$

On se rappelle que $a_{11} + a_{22} < 0$

$$\text{donc } \text{Tr}(\underline{T}_n) < 0$$

La seule possibilité pour que l'état d'équilibre $\tilde{y}^{eq}$ devienne l'origine ici soit instable est que l'on ait deux valeurs propres réelles de signes opposés : $\det(\underline{T}_n) < 0$

$$\underline{V}(n^2) = D_1 D_2 n^4 - (a_{11} D_2 + a_{22} D_1) n^2 + a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} < 0$$

Une condition nécessaire, comme $a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} \geq 0$ et que

$$(5) \quad \underline{a_{11} D_2 + a_{22} D_1} > 0$$

et cela a pour conséquence que les deux éléments a_{11} et a_{22} ne peuvent pas être tous les deux négatifs.

On choisit $a_{11} > 0$ (y_1 est donc un activateur et y_2 un inhibiteur). et $a_{22} < 0$. On a donc $|a_{22}| > |a_{11}|$.

$$(5) \text{ implique } \underline{\frac{D_1}{D_2} < \frac{a_{11}}{-a_{22}} < 1}$$

L'inhibiteur doit donc diffuser plus rapidement que l'activateur.

(4)

On termine alors en imposant que l'on a deux valeurs propres réelles

$$(a_{11} D_2 + a_{22} D_1)^2 - 4 D_1 D_2 (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}) > 0$$

$$\underline{a_{11} D_2 + a_{22} D_1 > 2 \left(D_1 D_2 (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}) \right)^{1/2} > 0}$$

Si l'on récapitule :

On part d'un équilibre stable tel que $\begin{cases} a_{11} + a_{22} < 0 \\ a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} > 0 \end{cases}$

$$\text{Si } \begin{cases} a_{11} > 0 \text{ (ce qui implique } a_{22} < 0) \\ \frac{D_1}{D_2} < 1 \\ a_{11} D_2 + a_{22} D_1 > 2 \left(D_1 D_2 (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}) \right)^{1/2} > 0 \\ \text{et finalement.} \\ H(n^2) < 0 \end{cases}$$

alors le mode n est instable et une petite perturbation de l'état d'équilibre $\tilde{y}^n$ va croître et évoluer vers un état stationnaire inhomogène que l'on appelle Structure de Turing. Nous proposons un exemple de ce type de structure en 1D dans la PC 7.

Exercice : représenter, en fonction de n^2 la valeur propre réelle la plus grande qui est responsable de l'instabilité. Montrer que pour une longueur de domaine L le motif qui apparaît, s'il en a la place, a une période qui est l'entier le plus proche de $\frac{L}{2\pi} \arctan \frac{n_x}{n_y}$ où n_x est le maximum de cette courbe.