

Analyse des Bifurcations locales.

I. Introduction.

Le but de cette partie est de revenir sur un ensemble de situations que nous avons déjà rencontrées lors des études des parties précédentes dans l'étude des points critiques d'un système dynamique.

Après avoir introduit la notion de point critique hyperbolique, nous avons pu constater que l'on peut obtenir une classification topologique de ces points à travers la C^0 conjugaison des germes (équivalence topologique). La particularité de ces points critiques est d'être structurellement stables, c'est-à-dire stable topologiquement par petite perturbation du système dynamique.

Nous avons déjà envisagé le fait que lorsque la propriété de point critique hyperbolique n'est pas satisfaite, c'est-à-dire lorsque la linéarisée possède un certain nombre de valeurs propres de partie réelle nulle, alors les choses se compliquent et l'on peut alors obtenir des points de "bifurcation". Nous allons nous contenter dans cette partie de donner une aperçu des techniques permettant de comprendre les bifurcations locales d'un point critique lorsque l'on fait varier un paramètre, dit paramètre de bifurcation, en se concentrant sur les bifurcation de codimension 1, voire ponctuellement de codimension deux en illustrant à quel point la complexité peut devenir importante lorsque l'on fait apparaître des bifurcations globales.

II Retour sur les systèmes linéaires, variété centrale et forme normale.

Dans cette partie, nous revenons sur le système dynamique autonome

$$(1) \quad d_t y = Ay \quad , \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

dont on sait que $\forall (y_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, (1) admet une unique solution maximale

$$\begin{cases} \varphi_{y_0, t_0} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \\ \varphi_{y_0, t_0}(t_0) = y_0. \end{cases}$$

de classe C^∞

On note $(\phi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ le groupe à 1 paramètre qui lui est associé

$$\phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \phi(y, t) = \phi_t(y) \quad \phi_0(y) = y.$$

Proposition : L'exponentielle de A notée $\exp(A)$ est définie

$$\text{par} \quad \exp A = R(1, 0) = \phi_1$$

où la solution $R(t, 0)$ et ϕ sont liés par $\phi_t(x) = R(t, 0)x$.

$$\text{On a : } d_t \exp(tA) = A \exp(tA) \quad t \in \mathbb{R}.$$

$$\exp(0 \cdot A) = \exp(0) = \mathbb{I}_{\mathbb{R}^n}$$

$$\exp((t+t_0)A) = \exp(tA) \exp(t_0A).$$

Si $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ commute avec A alors.

$$B \circ \exp(A) = \exp(A) \circ B, \quad \exp(A+B) = \exp(A) \circ \exp(B)$$

Autre définition : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad \exp(A) = \sum_{p \geq 0} \frac{A^p}{p!}$ et cette série converge normalement sur toute partie bornée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Le premier objectif est ici de donner une forme la plus simple possible de $\exp(tA)$ à partir de la forme de JORDAN de l'endomorphisme A . Cette forme va nous permettre d'identifier la forme normale de l'équation (1).

THÉORÈME de JORDAN

Un endomorphisme $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ s'écrit de manière unique $A = S + N$, où S est semi-simple, N est nilpotente et N et S commutent. Tout endomorphisme qui commute avec A , commute aussi avec S et N .

A et S ont même polynôme caractéristique: $P(X)$

$$(2) \quad P(X) = \prod_{j=1}^q (\lambda_j - X)^{n_j} \prod_{j=q+1}^r ((\alpha_j - X)^2 + \beta_j^2)^{n_j/2} \quad \beta_j \neq 0$$

cequel correspond la décomposition de $\mathbb{R}^n$ en sous-espaces stables E_j en somme directe:

$$\mathbb{R}^n = \bigoplus_{j=1}^r E_j \quad \dim E_j = n_j$$

$$E_j = \text{Ker} (S - \lambda_j I_n) = \text{Ker} (A - \lambda_j I_n)^{n_j} \quad j = \{1, \dots, q\}.$$

$$E_j = \text{Ker} ((S - \alpha_j I_n)^2 + \beta_j^2 I_n) = \text{Ker} ((A - \alpha_j I_n)^2 + \beta_j^2 I_n)^{n_j/2} \quad r \geq j \geq q$$

Si l'on note A_j, S_j, N_j les restrictions de A, S, N à E_j

$$A = \bigoplus_{j=1}^r A_j \quad S = \bigoplus_{j=1}^r S_j \quad N = \bigoplus_{j=1}^r N_j$$

$A_j = S_j + N_j$ est la décomposition de A_j en partie semi-simple et nilpotente. $j \leq$

et il existe une base des E_j , $j \geq q$ telle que.

$$S_j = \alpha_j I_{E_j} + \beta_j K_j, \quad K_j = \begin{bmatrix} J_2 & & \\ & J_2 & \\ & & \ddots \\ & & & J_2 \end{bmatrix}$$

avec $J_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ matrice élémentaire de rotation.

Par conséquent en évaluant l'exponentielle de HF , puisque S_j et H_j commutent et comme l'application exponentielle respecte la décomposition en sous-espaces propres.

$$(3) \exp(tA) = \bigoplus_j \exp(tA_j) = \bigoplus_j \exp(tS_j) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} N_j^k$$

• $j \leq q \quad \exp(tS_j) = e^{\alpha_j t} I_{E_j}$

• $j > q$

$$\exp(tS_j) = e^{t\alpha_j} \begin{pmatrix} r_{t\beta_j} & & \\ & r_{t\beta_j} & \\ & & \ddots \\ & & & r_{t\beta_j} \end{pmatrix}$$

avec $r_{t\beta_j} = \begin{pmatrix} \cos t\beta_j & \sin t\beta_j \\ \sin t\beta_j & \cos t\beta_j \end{pmatrix}$

Théorème. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice associée à un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ à valeurs réelles. Alors, modulo un changement de base associé à la forme de Jordan, $y = Px$ où P est une matrice non singulière, on peut mettre (A) sous la forme dite normale, $J = P^{-1}AP$,

$$(4) \quad d_t x = Jx$$

En utilisant les sous-espaces propres et en définissant

$$E^u = \bigoplus_{j \in U} E_j$$

, $U =$ ensemble des indices de valeurs propres dont la partie réelle est strictement positive

$$E^c = \bigoplus_{j \in C} E_j$$

, $C =$ ensemble des indices de valeurs propres dont la partie réelle est nulle

$$E^s = \bigoplus_{j \in S} E_j$$

, $S =$ ensemble des indices de valeurs propres dont la partie réelle est strictement négative

$$\text{on a } \mathbb{R}^n = E^u \oplus E^c \oplus E^s$$

soi chacun des sous-espaces est stable et invariant par $\mathbb{F}$
ce qui permet de définir les variétés stables, centrale et instables pour l'endomorphisme $\mathbb{F}$.

Définition: Un système dynamique linéaire tel que (1) est dit structuralement stable si tout système suffisamment proche, au sens d'une norme de matrice, est topologiquement équivalent

THEOREME (1) est structuralement stable si 0 est un point critique hyperbolique.

Le lecteur remarquera que toute perturbation d'un système dynamique, par exemple en dimension 2, qui possède deux valeurs propres imaginaires pures, amènera un changement important qualitatif de comportement.

Dans le cas de systèmes linéaires, les choses sont bien comprises et il s'agit alors de voir dans quelle mesure ces notions de variété centrale et de formes normales vont s'étendre au cas des systèmes non linéaires.

III Théorie de la variété centrale dans le cadre non linéaire.

L'objectif est ici de pouvoir commencer l'étude des points critiques non hyperboliques en travaillant sur une forme réduite du système non linéaire dans un voisinage du point critique en se concentrant sur la variété centrale, invariante par le système dynamique.

THÉORÈME Soit $dy = f(y)$ un champ de vecteur C^r $r \geq 1$ sur $\mathbb{R}^n$ tel que 0 est un point critique. Soit $A = D_y f|_{y=0}$ la matrice Jacobienne à l'origine.

Supposons que les valeurs propres se répartissent en trois groupes U, C, S

$$\operatorname{Re} \lambda \begin{cases} < 0 & \lambda \in S \\ = 0 & \lambda \in C \\ > 0 & \lambda \in U \end{cases}$$

et E^S, E^C et E^U les sous espaces associés. Alors il existe deux variétés W^U et W^S , instable et stable de classe C^r invariantes par le système dynamique tangente à E^U et E^S en zéro, à l'origine; et il existe une variété centrale W^C de classe C^{r-1} elle aussi invariante par le flot, tangente à E^C en zéro. Habituellement W^U et W^S sont uniques, autant W^C ne l'est pas forcément.

Remarque: Les points critiques de ce théorème sont les potentiels points de singularité et les points d'unité.

Exercice Koenig [1963] et Guckenheimer et Holmes [1983].

Étudier le système $dy = \begin{pmatrix} x^2 \\ -y \end{pmatrix}$ autour de l'origine et montrer que la variété centrale n'est pas unique. (Voir PC).

Exercice : On considère le système

$$d \begin{pmatrix} x \\ y \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p x - x^2 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{où l'on a rajouté une équation triviale pour le paramètre.}$$

Montrer qu'en $(0,0,0)^t$, l'axe des y est la variété nœudale et que le plan (x,p) est la variété centrale pour le linéarisé. Les équilibres de ce système sont constitués de l'axe des y et de la parabole $p = x^2$ dans le plan $(x,p)/p \geq 0$.

Montrer que la variété centrale est le plan (x,p) pour le système non linéaire.

Remarque : On peut montrer, si la seconde équation est modifiée en $d_y = y + x^4$, que la variété centrale reste la même mais on observe une perte de régularité. [Guckenheimer - Holmes 83].

L'idée est alors de trouver la dynamique réduite sur la variété centrale et de voir si l'on peut en déduire le comportement du système de départ. La théorie de la variété centrale suggère que la dynamique du système initial serait topologiquement équivalente à

$$d \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{f}(\tilde{x}) \\ -\tilde{y} \\ +\tilde{z} \end{pmatrix} \quad (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \in W^c \times W^s \times W^u$$

et il faut alors identifier la non linéarité $\tilde{f}$ sur la variété centrale.

Plaçons nous pour simplifier l'étude dans le cas où la variété instable est vide et où l'on a mis le système central sous la forme.

$$(4) \quad d_t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Bx \\ Cy \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix} \quad (x,y) \in \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{R}^m$$

où les valeurs propres de B ont une partie réelle nulle et celles de C une partie réelle négative strictement. On suppose que f et g s'annulent en zéro ainsi que leurs matrices jacobennes.

Comme la variété centrale est tangente à $y=0$, qui définit E^c on peut en trouver une représentation locale

$$W^c = \{ (x,y) \mid y = h(x) \} \quad h(0) = 0 \quad \partial_x h|_{x=0} = 0$$

$$h: U \rightarrow \mathbb{R}^{m-m} \text{ où } U \text{ est un voisinage de l'origine dans } \mathbb{R}^n$$

La dynamique réduite du système est donc donnée par.

$$(5) \quad d_t x = Bx + f(x, h(x)).$$

THEOREME: Si l'origine $x=0$ est localement asymptotiquement stable (resp. instable) alors l'origine pour (4) est aussi localement asymptotiquement stable (resp. instable).

Le problème se ramène alors au calcul, à l'évaluation de h .

Si l'on injecte $y = h(x)$ dans la seconde équation de (4), on obtient:

$$\begin{aligned} d_t y = \partial_x h(x) d_t x &= \partial_x h(x) [Bx + f(x, h(x))] \\ &= Ch(x) + g(x, h(x)). \end{aligned}$$

que l'on reformule sous la forme:

$$(6) \quad \begin{cases} N(h(x)) = \partial_x h(x) [Bx + f(x, h(x))] - Ch(x) - g(x, h(x)) = 0 \\ h(0) = 0 \quad \partial_x h(0) = 0 \end{cases}$$

Il s'agit d'une équation sur h ,
 qu'il est difficile en général de résoudre exactement, on
 dont la résolution est du même niveau de difficulté que
 résoudre l'équation de départ. Par contre on peut en
 proposer une approximation en séries près de zéro
 qui donne les informations essentielles.

THEOREME Si l'on trouve une fonction $\phi(x)$
 avec $\phi(0)=0$ $\partial_x \phi(0)=0$ telle que
 $N(\phi(x)) = O(|x|^p)$ $p > 1$
 alors $h(x) = \phi(x) + O(|x|^p)$ quand $|x| \rightarrow 0$.

Une extension de cette approche, en présence de paramètres,
 permet de traiter l'apparition de bifurcations:

$$(7) \quad d_\mu \begin{pmatrix} x \\ y \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_\mu x + f_\mu(x, y) \\ K_\mu y + g_\mu(x, y) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} (x, y) \in \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{R}^m \\ \mu \in \mathbb{R}^k \end{matrix}$$

En posant $(0, 0, 0)^T = (x, y, \mu)^T$, (7) admet une variété centrale
 de dimension $m+k$ tangente au plan (x, μ) qui peut
 être approximée en séries de x et μ : $h: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$.
 En particulier, la propriété d'invariance de la variété centrale
 (d'une variété centrale car elle n'est pas forcément unique)
 garantit que les solutions locales autour du point de
 bifurcation restent dans cette variété. On peut ainsi suivre
 l'évolution d'une famille de solutions qui bifurquent dans
 famille de variétés centrales.

Exercice : On considère l'équation de Duffing quadratique

$$(8) \quad d_t \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V \\ \beta U - U^2 - \delta V \end{pmatrix} \quad \delta \text{ fini}, \delta > 0. \text{ et}$$

β est le paramètre de bifurcation.

1- Montrer qu'un changement de base adéquat permet de réécrire (8) sous la forme :

$$d_t \begin{pmatrix} x \\ y \\ \beta \end{pmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\delta \end{bmatrix} + \frac{\beta}{\delta} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{\delta} \begin{pmatrix} -(x+y)^2 \\ + (x-y)^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2- En cherchant la forme de la variété centrale

$$h(x, \beta) = ax^2 + bx\beta + c\beta^2 + O(\text{ordre } 3).$$

identifier les trois coefficients a, b et c .

3- Montrer alors que la dynamique dans la variété centrale prend la forme :

$$\begin{cases} d_t x = \frac{\beta}{\delta} \left(1 - \frac{\beta}{\delta^2} \right) x - \frac{1}{\delta} \left(1 - \frac{\beta}{\delta^2} \right) x^2 + O(3) \\ d_t \beta = 0 \end{cases}$$

pour β petit ($|\beta| < \delta^2$) et montrer que l'on obtient un diagramme de type bifurcation transcritical et représenter la famille de variétés centrales paramétrées par β . dans l'espace $(\beta, x, y) \in \mathbb{R}^3$ autour de $(0, 0, 0)$

IV Formes normales.

Nous poursuivons ici le développement des outils et techniques permettant d'avoir une base solide pour comprendre les bifurcations. Après avoir identifié la forme du linéarisé et s'être restreint à la dynamique sur la variété centrale, nous allons chercher à trouver de nouveaux changements de coordonnées de manière à simplifier la forme du champ de vecteurs sur la variété centrale. Cette forme simplifiée, appelée "forme normale" fait apparaître clairement les "résonances" non linéaires et permet une classification en différents types de bifurcations et un lien agréable avec les symétries du système.

II.1. Retour sur la linéarisation de Hartman-Grobman autour d'un point critique hyperbolique

Afin de saisir ce qui se passe en un point non hyperbolique, nous revenons au cas particulier hyperbolique afin de saisir la notion de non résonance (formellement!) relative au théorème de Sternberg.

Pour tout d'un système dynamique : $d_t x = f(x)$ (9)
on va chercher un changement de variable $x = h(y)$
tel que $h(0) = 0$ dans l'optique de simplifier (9).

$$(10) \quad d_t y = \left(dy h(y) \right)^{-1} f(h(y))$$

L'idéal serait que (10) soit linéaire (cf. C-conjugaison). Formellement, c'est à dire en travaillant en série de puissances on peut chercher une suite de $h_1, h_2, \dots$ qui éliminent

successivement les termes de degré successifs dans (10).

En supposant que $\partial_x f|_0$ admet un ensemble de valeurs propres distinctes de partie réelle non nulle, on peut supposer que

$$(11) \quad d_{\mathbb{C}} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1 \\ \vdots \\ \lambda_n x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1(x_1 - x_n) \\ \vdots \\ g_n(x_1 - x_n) \end{pmatrix}; \quad d_{\mathbb{C}} x = \lambda x + g(x)$$

où les fonctions g_i , $i = \{1, \dots, n\}$ s'annulent ainsi que leur Jacobienne en $0 \in \mathbb{R}^n$. Notons k le plus petit degré des dérivées des g_i , $i \in [1, n]$, qui ne s'annulent pas.

On cherche $x = h(y) = y + P(y)$

où P est un polynôme de degré k .

$$d_{\mathbb{C}} y = (I + \partial_y P(y))^{-1} f(y + P(y))$$

et on va développer cette expression en ne retenant que les termes de degré inférieur ou égal à k . En notant g_i^k le terme d'ordre k de $g_i(x)$ on obtient

$$d_{\mathbb{C}} y_i = \lambda_i y_i + \lambda_i P_i(y) + g_i^k(y) - \sum_{j=1}^n \frac{\partial y_i P_i}{\partial y_j} \lambda_j y_j$$

et l'on cherche dont P tel que

$$\lambda_i P_i(y) - \sum_{j=1}^n \frac{\partial y_i P_i}{\partial y_j} \lambda_j y_j = -g_i^k(y).$$

Le membre de gauche est linéaire en P et si P_i est un monôme $P_i = y_1^{a_1} \dots y_n^{a_n}$, $\sum_{i=1}^n a_i = k$, $\frac{\partial y_i P_i}{\partial y_j} \lambda_j y_j = a_j \lambda_j P_i$

et on obtient $(\lambda_i - \sum_{j=1}^n a_j \lambda_j) P_i$ comme membre de gauche.

On en conclut que l'on peut trouver les g_i^k à condition que aucune des sommes $\lambda_i - \sum_{j=1}^n a_j \cdot i_j$ ne s'annule quand les $a_1, \dots, a_n$ sont des entiers tels que $\sum_{j=1}^n a_j = k$.

En particulier, si l'on ne peut pas trouver d'entiers positifs ou nuls a_j , $\sum_{j=1}^n a_j \geq 1$, tels que $\lambda_i - \sum_{j=1}^n a_j \cdot i_j \neq 0$, alors on peut linéariser à n'importe quel ordre algébrique.

Remarque : Le but de ce qui précède est juste d'apporter une illustration fautive de ce qui pourrait empêcher une C^∞ linéarisation mais la théorie qui mène au théorème de Sternberg est beaucoup plus complexe. Lorsque toutes les valeurs propres ont des parties réelles négatives, Poincaré avait réussi à résoudre le problème analytique. Quand on a des valeurs propres de chaque côté de l'axe imaginaire, on rentre apparemment le problème des petits diviseurs et des conditions d'arithmétique diophantienne résolues par Sternberg en 1958.

II.2 Retour sur les points critiques non hyperboliques.

Dans le cas des points critiques pour lesquels la matrice Jacobienne admet des valeurs propres à partie réelle nulle, la linéarisation précédente ne peut pas être menée à cause de résonances non linéaires que l'on ne peut pas éliminer par changement de coordonnées. L'idée est alors de trouver une formulation permettant d'éliminer tout ce qui peut l'être et de ne garder que les termes résonants afin d'obtenir une forme normale. Il est important de noter que : 1- les conditions de résolubilité ne dépendent que de la partie linéaire du champ de vecteur au point critique sur la variété centrale. 2- que le problème se ramène à la

résolution d'une série de problèmes linéaires. Le résultat va consister en un développement en séries de Taylor qui ne contient que les termes résonants.

Notons $L = \partial_x f(0)x$ la partie linéaire du champ de vecteur. Ce champ de vecteur génère une application notée $\text{ad } L$ (notion d'opérateur adjoint - VARADARAJAN 1974 Lie Groups, Lie Algebras and their representations) sur l'espace linéaire H_k des champs de vecteur dont les coefficients sont des polynômes homogènes de degré k :

$$\text{ad } L(Y) = [Y, L] = \partial_x L Y - \partial_x Y L$$

où $[\cdot, \cdot]$ est appelé crochet de Lie.

En prenant les composantes:

$$[Y, L]_i = \sum_{j=1}^n \left(\partial_{x_j} L^i Y^j - \partial_{x_i} Y^j L^j \right).$$

THEOREME Si $d_x x = f(x)$ est un système de classe C^r $r \geq 1$ vérifiant $f(0) = 0$ $\partial_x f(0) = L$. On choisit un complément G_k dans H_k de $\text{ad } L(H_k)$ tel que $H_k = \text{ad } L(H_k) + G_k$. Alors il existe un changement de variable analytique dans un voisinage de l'origine qui transforme le système $d_x x = f(x)$ en $d_x y = g(y) = g^{(1)}(y) + g^{(2)}(y) + \dots + g^{(r)}(y) + R_r$ avec $L = g^{(1)}(y)$ et $g^{(k)} \in G_k$ pour $2 \leq k \leq r$ et $R_r = o(|y|^r)$

Esquisse de la preuve constructive :

on reprend les notations précédentes. $x = h(y) = y + P(y)$

$$(I + \partial_y P(y)) \partial_t y = f^{(1)}(y) + f^{(2)}(y) + \dots + f^{(s)}(y) - \partial_x f^{(0)}(0) P(y) + o(|y|^s)$$

si l'on suppose que l'opération s'est faite à l'ordre s , et avec P un polynôme homogène de degré s .

Les termes de degré inférieur à s ne sont pas affectés et on obtient

$$f^{(s)}(y) + \text{ad } L(P)(y) = \dots, \quad L(y) = f^{(1)}(y).$$

où un choix de P permettant fera que $f^{(s)}(y) + \text{ad } L(P)(y)$ se trouve dans G_s comme souhaité. ■

Illustrons cette démarche dans un cas particulier: un système dynamique dans le plan qui possède un équilibre avec comme valeurs propres de la matrice jacobienne $\pm i$.

$$\partial_x L = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ +1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } L = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \quad x = (x, y)^t \in \mathbb{R}^2$$

Évaluons l'action de $\text{ad } L$ sur $\mathcal{H}_2$. Pour chaque vecteur de base de $\mathcal{H}_2$, Y_i ,

$$\text{ad } L(Y_i) = \partial_x L Y_i - \partial_y Y_i L$$

$$\text{ad } L(Y_i) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} Y_i^1 \\ Y_i^2 \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} \partial_x Y_i^1 & \partial_y Y_i^1 \\ \partial_x Y_i^2 & \partial_y Y_i^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

d'où par exemple $\text{ad } L \begin{pmatrix} x^2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 \end{pmatrix}$

$$\text{ad } L \begin{pmatrix} 0 \\ xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -xy \\ y^2 - x^2 \end{pmatrix} \dots$$

En utilisant la notation pour les champs de vecteur vus comme des générateurs infinitésimaux dans l'espace tangent (OLVER - 1991 Applications des Groupes à différentielles équations)

$$\begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 \end{pmatrix} \text{ est noté } 2xy \partial_x + x^2 \partial_y$$

en prenant comme base x^2, xy, y^2 pour chaque composante ∂_x et ∂_y on obtient pour $\mathbb{H}_2$ la table.

	x^2	xy	y^2
∂_x	$2xy \partial_x + x^2 \partial_y$	$(y^2 - x^2) \partial_x + xy \partial_y$	$-2xy \partial_x + y^2 \partial_y$
∂_y	$-x^2 \partial_x + 2xy \partial_y$	$-xy \partial_x + (y^2 - x^2) \partial_y$	$-y^2 \partial_x - 2xy \partial_y$

Si bien que dans la base $(x^2 \partial_x, xy \partial_x, y^2 \partial_x, x^2 \partial_y, xy \partial_y, y^2 \partial_y)$ la matrice de ad $\mathbb{L}$ s'écrit

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ +2 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ +1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & +2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & +1 & 0 & +1 & 0 \end{bmatrix}$$

Cette matrice est non singulière ce qui signifie que l'on peut éliminer tous les termes d'ordre

Pour la partie cubique:

	x^3	x^2y	xy^2	y^3
∂_x	$3x^2y \partial_x + x^3 \partial_y$	$(2xy^2 - x^3) \partial_x + x^2y \partial_y$	$(y^3 - 2x^2y) \partial_x + xy^2 \partial_y$	$-3x^2y \partial_x + y^3 \partial_y$
∂_y	$-x^3 \partial_x + 3x^2y \partial_y$	$-x^2y \partial_x + (2xy^2 - x^3) \partial_y$	$-xy^2 \partial_x + (y^3 - 2x^2y) \partial_y$	$-y^3 \partial_x - 3x^2y \partial_y$

adL sur H_3 :

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ +3 & 0 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & +2 & 0 & -3 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 & +3 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & +2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & +1 & 0 \end{bmatrix}$$

pour lequel $(3, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 3)$ et $(0, 1, 0, 3, -3, 0, -1, 0)$ sont des vecteurs propres à gauche pour la valeur propre zéro. On peut montrer que $\text{adL}(H_3)$ a une dimension de 6. Une base pour le supplémentaire G'_3 est

$$\begin{pmatrix} x(x^2+y^2) \\ y(x^2+y^2) \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} -y(x^2+y^2) \\ x(x^2+y^2) \end{pmatrix}$$

La forme normale devient donc:

$$\dot{\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} av-bv \\ av-bu \end{pmatrix} (u^2+v^2) + \text{termes d'ordre et elevé.}$$

qui jouera un rôle clef dans l'analyse de la bifurcation de Hopf. Remarquons que le choix de base précédents n'est pas unique. Dans ce qui précède, montrons que l'on aurait aussi pu prendre.

$$\begin{pmatrix} (3x^2+y^2)x \\ (x^2+3y^2)y \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} (x^2+3y^2)y \\ -(3x^2+y^2)x \end{pmatrix}$$

ce qui correspond pour G_3 aux vecteurs propres à gauche mais sera moins pratique pour l'analyse de la bifurcation.

V Bifurcation des équilibres de codimension 1.

Dans cette partie, nous allons décrire les principales bifurcations de codimension 1, c'est à dire pour les quels l'espace des paramètres μ est de dimension 1. Ce sont les plus simples et les plus connues.

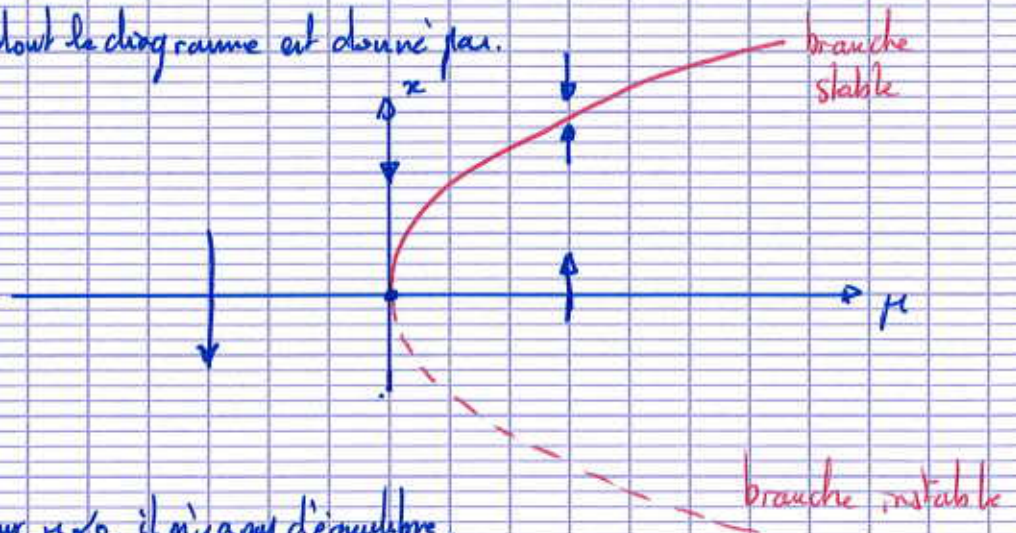
Après une présentation de ces diverses bifurcations nous allons montrer qu'elles constituent les formes normales d'un ensemble de bifurcations locales pour des systèmes plus généraux.

V.1 Point limite (Saddle node) Bifurcation transcritique, fourche et de Hopf

Le paramètre est encore noté μ . On considère la "bifurcation" mais en fait certains auteurs ne parlent pas de bifurcation mais de point limite. (Limit point) (Saddle node)

$$d_\mu x = \mu - x^2$$

dont le diagramme est donné par.

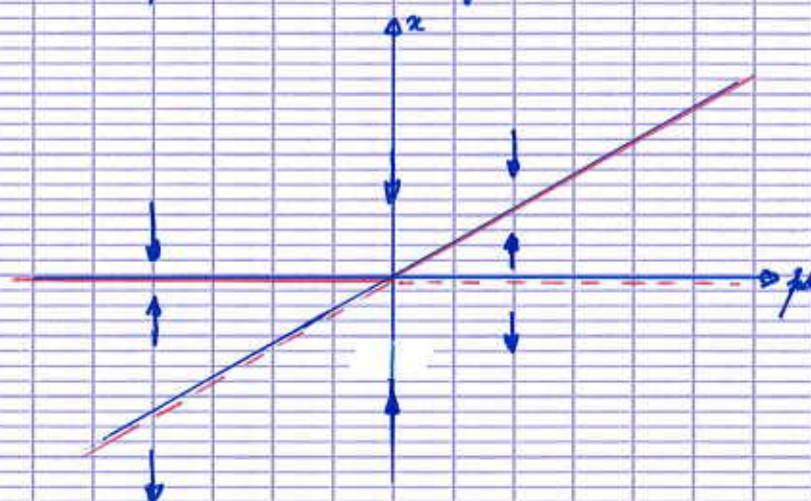


Pour $\mu < 0$, il n'y a pas d'équilibre.
pour $\mu > 0$, il y a deux équilibres, l'un stable et l'autre instable.

Remarque: c'est la "bifurcation" que nous avons étudiée pour l'explosion thermique.

$$d_t x = \mu x - x^2$$

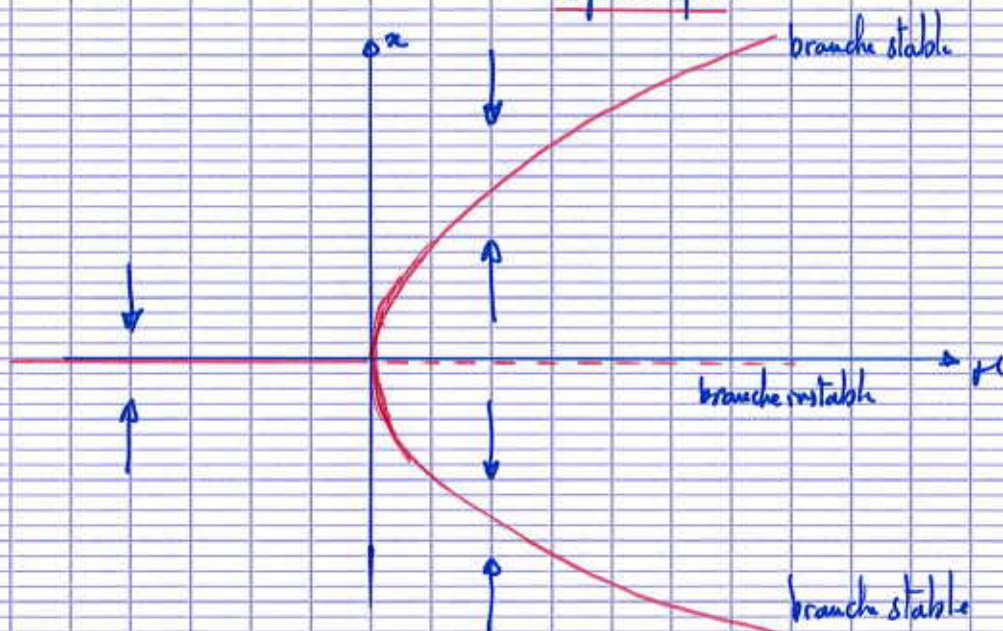
bifurcation transcritique.



Exo : obtenir les éléments du diagramme de bifurcation.

$$d_t x = \mu x - x^3$$

Bifurcation fourche (Pitchfork)
supercritique.

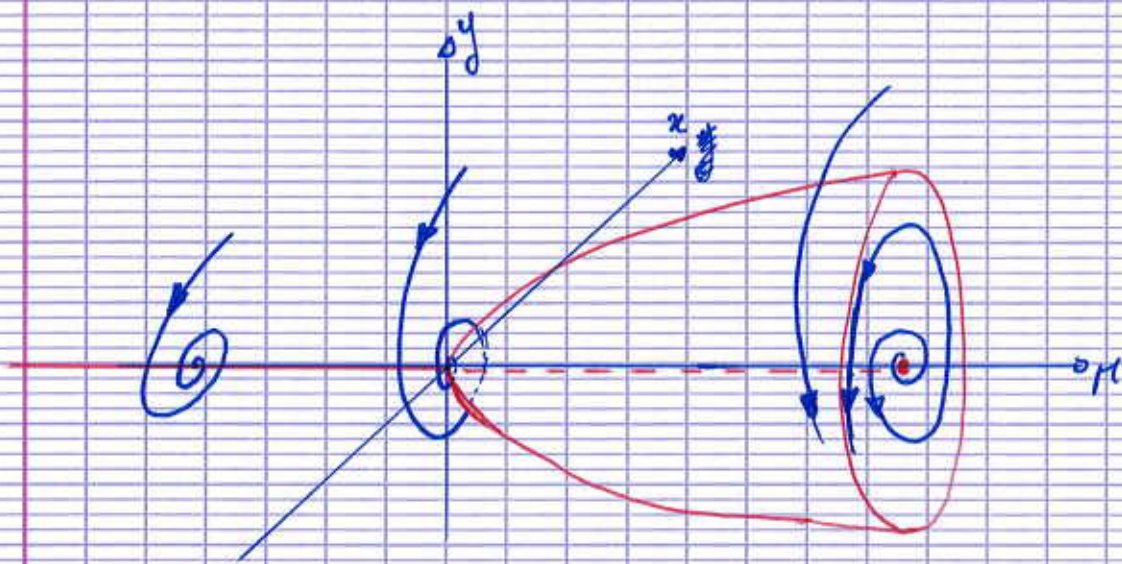


Un équilibre stable devient instable avec une valeur propre qui passe par zéro et crée deux branches stables d'équilibres.

Remarque : Il s'agit de la bifurcation étudiée dans le problème de la perte sur le cerceau tournant.

$$d_t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x(1 - (x^2 + y^2)) \\ y(1 - (x^2 + y^2)) \end{pmatrix}$$

Bifurcation de Hopf



Un équilibre stable (focus) se déstabilise lorsqu'une paire de valeurs propres imaginaires traverse l'axe imaginaire et leur partie réelle passe de négative à positive rendant l'équilibre instable et générant l'apparition d'un cycle limite.

V.2 Lien avec le cas général.

On part d'un système sous forme générique $d_t x = f_\mu(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\mu \in \mathbb{R}$, f_μ suffisamment régulier. On suppose qu'à un point x_0 et pour la valeur μ_0 le système admet un point d'équilibre avec une seule valeur propre nulle dans la matrice Jacobienne. On peut alors trouver une variété centrale de dimension 2 $\Sigma \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ passant par (x_0, μ_0) telle que.

- (1) L'espace tangent à Σ en (x_0, μ_0) est engendré par le vecteur propre de $D_x f_{\mu_0}(0)$ associé à la vp 0 et un vecteur parallèle à l'axe des μ .
- (2) pour tout r , Σ est C^r dans un voisinage assez petit de (x_0, μ_0) .

(3) le champ de vecteur est tangent à Σ

(4) Il existe un voisinage V de (x_0, p_0) dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ tel que toutes les trajectoires contenues dans V pour tout temps se trouvent dans Σ .

En restreignant la dynamique à Σ , on obtient un ensemble de courbes monodimensionnelles paramétrées par μ .

PROPOSITION: Si l'on suppose que l'on a aussi deux conditions de transversalité:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial \mu} \right|_{p_0} x_0 \neq 0$$

$$\left. \frac{\partial x}{\partial \mu} \right|_{p_0} (x_0) \neq 0$$

alors le portrait de phase local est topologiquement équivalent au système d'avant un point limite (saddle node). $dx = \pm(\mu - p_0) \pm (x - x_0)^2$

La formulation d'un théorème précis sur les conditions nécessaires et suffisantes (les précédentes sont suffisantes) ainsi que l'explication que les points limites représentent un ensemble ouvert et dense dans l'espace des C^∞ champs de vecteur à un paramètre ayant un équilibre avec une seule valeur propre nulle, se trouve dans Guckenheimer et Holmes.

On peut alors comprendre que la "saddle node bifurcation", le point limite générique est qualitativement identique topologiquement à la famille $dx = \mu - x^2$ dans la direction du vecteur propre associé à la p.nulle et avec un comportement hyperbolique dans les autres directions.

Remarque: On pourra penser à la formulation semi discrète de type EDP de l'équation thermique proposée en PC 7.

Remarque: Ce sont ces conditions de transversalité que l'on aura besoin de vérifier lorsque l'on effectue de la continuation d'équilibres numériquement et que l'on traverse un point limite.

- Si la condition précédente $\partial_{\mu} f_{\mu} / r_0(x_0) \neq 0$ sur la variété centrale est remplacée par $\partial_{x\mu}^2 f_{\mu} / r_0(x_0) \neq 0$ et que l'on suppose que l'on a un équilibre au moins pour tout μ dans un voisinage de μ_0 alors on obtient le même type de résultat pour la bifurcation transcritique.

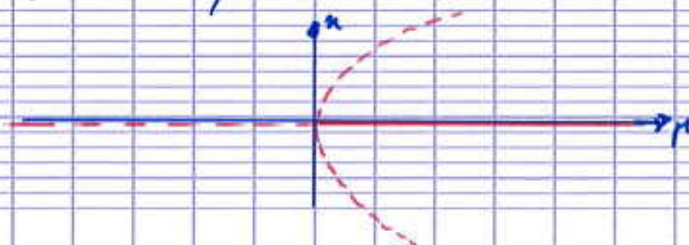
- En présence de symétrie. (on dit que l'équation différentielle est équivariante $x \mapsto -x$: c'est à dire $f_{\mu}(-x) = -f_{\mu}(x)$). On ne peut pas avoir la condition de type point limite car ce type de champ de vecteur a un équilibre pour tout μ et pour ailleurs, du fait de la symétrie, on va avoir $\partial_{x\mu}^2 f_{\mu} / r_0(x_0) = 0$.

En remplaçant cette hypothèse par $\partial_{\mu\mu\mu}^3 f_{\mu} / r_0(x_0) \neq 0$ on peut montrer que l'on obtient la bifurcation fourche.

Notons que le signe de $\partial_{\mu\mu\mu}^3 f_{\mu} / r_0(x_0)$ va décider

du caractère supercritique ou sous-critique de la bifurcation.

Remarque: Dans le cas sous-critique l'unique état d'équilibre était instable et devient stable, en l'absence de deux branches de solution instable.



Dans le cas de la bifurcation de Hopf, on peut énoncer un théorème.

THEOREME HOPF 1942. Si le système $\dot{x} = f_\mu(x)$ $x \in \mathbb{R}^n, \mu \in \mathbb{R}$ admet un équilibre (x_0, μ_0) tel que

H1 : $\partial_x f_\mu|_{\mu_0}(x_0)$ admet une seule paire de valeurs propres imaginaires pures et aucune autre valeur propre de partie réelle nulle.

Alors il existe une courbe d'équilibre régulière $(x^{\text{eq}}(\mu), \mu)$ avec $x^{\text{eq}}(\mu_0) = x_0$. Les valeurs propres $\lambda(\mu), \bar{\lambda}(\mu)$ de $\partial_x f_\mu|_{x^{\text{eq}}(\mu)}$ qui sont imaginaires en $\mu = \mu_0$ varient de manière régulière en fonction de μ . Si de plus

H2 : $d_\mu(\text{Re } \lambda(\mu))|_{\mu=\mu_0} = d \neq 0$

alors il existe une unique variété centrale de dimension 3 qui passe par $(x_0, \mu_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ et un système de coordonnées régulières préservant les plans $\mu = \text{cte}$ pour lequel le développement de Taylor à l'ordre 3 sur la variété centrale est donné par.

$$d_t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (d\mu + a(x^2 + y^2))x - (w - c\mu + b(x^2 + y^2))y \\ (w + c\mu + b(x^2 + y^2))x + (d\mu + a(x^2 + y^2))y \end{pmatrix}$$

qui s'exprime en coordonnées polaires:

$$d_t \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (d\mu + ar^2)r \\ w + c\mu + br^2 \end{pmatrix}$$

Famille de solutions périodiques réelles, si $a \neq 0, d \neq 0$ ces solutions se trouvent sur la parabole $\mu = -ar^2/d$

Si $a \neq 0$ il y a une surface de solutions périodiques dans la variété centrale qui a une tangente quadratique avec le paraboloïde

$\mu = -\frac{a}{d}(x^2 + y^2)$. Si $a < 0$ les solutions ^{périodiques} sont stables sinon elles sont instables.

VI Conclusion

VI.1 Bilan.

Pour terminer ce chapitre, il semble tout d'abord important de présenter une synthèse de ce que nous avons présenté. Dans les premiers cours nous nous étions focalisés sur l'étude du flot et de son comportement aux points réguliers, puis sur l'étude des points critiques hyperboliques dont on peut mener une classification topologique sur la base de la C^0 -conjugaison. Nous avons identifié que les théorèmes de linéarisation sont inefficaces autour des points critiques non hyperboliques où l'on observe les bifurcations. Dans cette partie du cours, nous avons pu dans un premier temps identifier la notion de variété centrale invariante, notion complémentaire de celle de variétés stables et instables. Son intérêt réside dans le fait que l'on peut "réduire" la dynamique complète dans un voisinage du point critique à la dynamique sur la variété centrale. L'idée est ensuite de simplifier cette dynamique ~~sur~~ sur la variété centrale et de trouver une forme normale, pour laquelle ne subsiste que les termes du développement en série responsables de la résonance non linéaire au point de bifurcation. Sous des conditions de transversalité, cette forme normale permet une classification des bifurcations de codimension 1 et donne des critères pour l'utilisation de technique de continuation numérique (PCG).

VI.2 Bifurcation de co-dimension 2.

Le cas de ce type de bifurcation dépasse le cadre de ce cours, mais il nous paraît utile de faire le lien entre bifurcation locale de codimension deux et bifurcation globale afin de montrer en quoi le niveau de complexité augmente nettement ici. Pour cela nous allons simplement aborder la bifurcation de type Podgor-Takens.

On seurt de $d_x f(x) = f_r(x)$ $x \in \mathbb{R}^n, r \in \mathbb{R}^2$
 avec $f_0(x)$ admet un point critique en zéro, $x=0$.

On suppose que $\partial_x f_r|_{r=0}$ admet la valeur propre zéro

avec une multiplicité géométrique algébrique de 2 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

On note $A_0 = \partial_x f_r|_{r=0}(0)$.

$$A_0^T q_0 = 0, \quad A_0 q_1 = q_0 \quad \text{vecteurs propres à gauche:}$$

$$A_0^T p_1 = 0, \quad A_0^T p_0 = p_1$$

$$\text{normalisés: } \begin{cases} \langle p_0, q_0 \rangle = \langle p_1, q_1 \rangle = 1 \\ \langle p_0, q_1 \rangle = \langle p_1, q_0 \rangle = 0 \end{cases}$$

En développant $f_0(x)$ en zéro $f_0(x) = A_0 x + \frac{1}{2} B(x, x) + o(|x|)$

$$\text{on note } \begin{cases} a_0 = \frac{1}{2} \langle p_1, B(q_0, q_0) \rangle \\ b_0 = \langle p_0, B(q_0, q_0) \rangle + \langle p_1, B(q_0, q_1) \rangle \end{cases}$$

La seule quantité qui nous intéresse sera le signe de $a_0 b_0 = \sigma$

THEOREME En supposant que A_0 admet la valeur propre zéro
 avec une multiplicité algébrique exactement deux
 et toutes les autres valeurs propres (n_s) ont des
 parties réelles négatives ou (n_0) parties strictement.

Sous des hypothèses de non dégénérescence:

$$(1) \quad a_0 b_0 = \sigma \neq 0$$

$$(2) \quad (x, r) \mapsto [f(x, r), \text{Tr}(\partial_x f(x, r)), \det(\partial_x f(x, r))]$$

est régulière au point $(x, r) = (0, 0)$.

On peut montrer que le système original est topologiquement équivalent à

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = \beta_1 + \beta_2 y_1 + y_1^2 + \sigma y_1 y_2 \\ \dot{y}_3 = -y_3 \\ \dot{y}_4 = +y_4 \end{cases}$$

où les deux premières équations représentent la forme normale $\beta = (\beta_1, \beta_2)^T \in \mathbb{R}^2$. On choisit le cas $\sigma = -1$ pour la représentation du diagramme de bifurcation (Figure 1)

Le point $\beta = 0$ sépare deux branches de "saddle node bifurcation" c'est-à-dire de point limites

$$T_+ = \left\{ (\beta_1, \beta_2) ; \beta_1 = \frac{1}{4} \beta_2^2, \beta_2 > 0 \right\}.$$

$$T_- = \left\{ (\beta_1, \beta_2) ; \beta_1 = \frac{1}{4} \beta_2^2, \beta_2 < 0 \right\}.$$

La demi droite

$$H = \left\{ (\beta_1, \beta_2) ; \beta_1 = 0, \beta_2 < 0 \right\}.$$

correspond à la bifurcation de Hopf qui génère un cycle limite stable. Ce cycle limite reste hyperbolique entre H et la courbe P :

$$P = \left\{ (\beta_1, \beta_2) ; \beta_1 = -\frac{6}{25} \beta_2^2 + O(\beta_2^3) ; \beta_2 < 0 \right\}.$$

où une bifurcation homoclinique limite se produit, le cycle limite devenant une trajectoire homoclinique avec une période qui devient infinie. Dans la zone (L) On voit alors apparaître l'existence d'une trajectoire hétérocline joignant un focus instable à un point selle.

L'apparition de bifurcations globales impliquant des trajectoires homoclines indique que l'étude locale touche à ses limites ici et que des outils plus puissants doivent être mis en place.
On consultera GUCKENHEIMER et HOLMES. 1983.

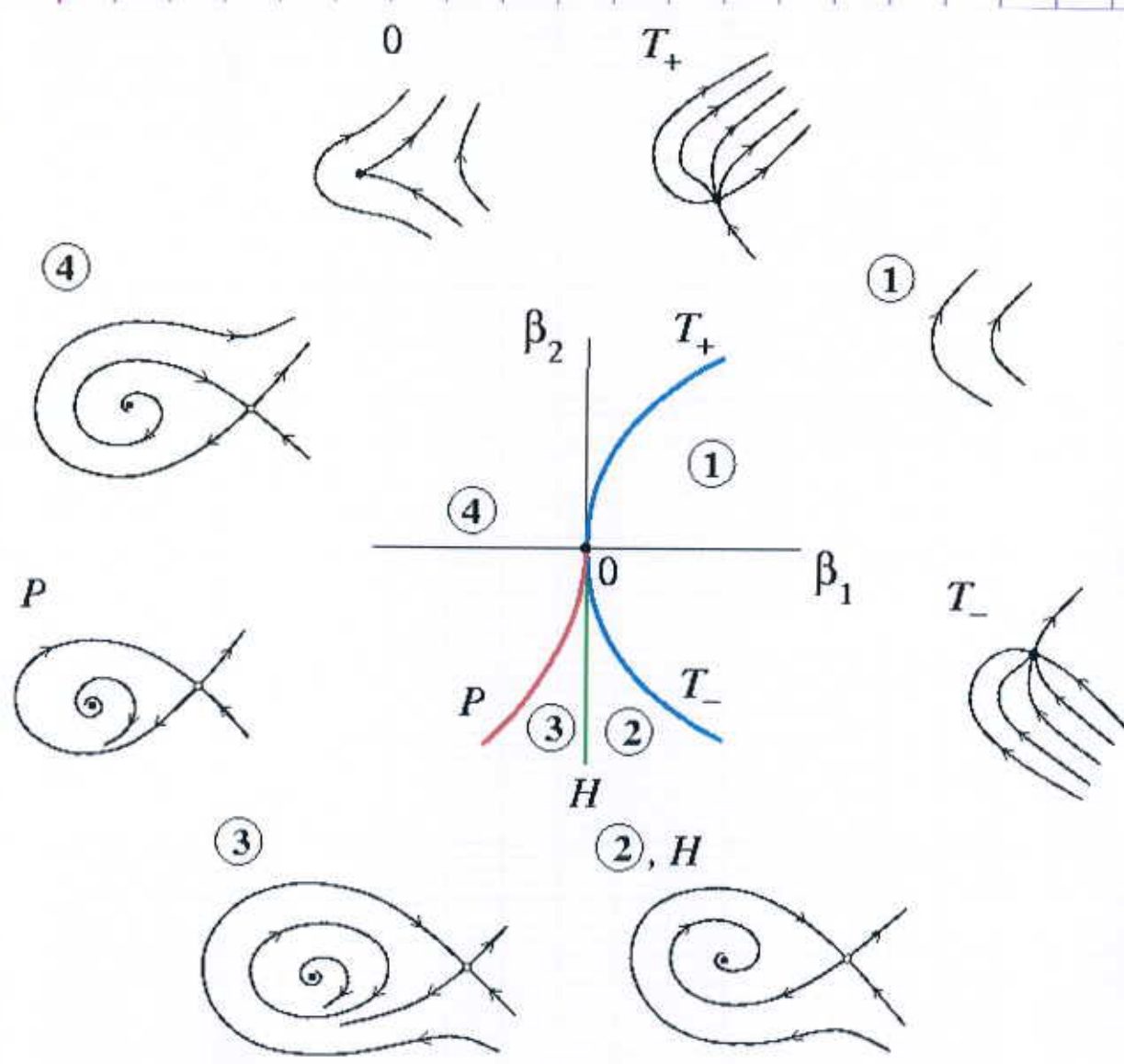


Figure 1: Diagramme de bifurcation. Bogdanov-Takens.

- Cours n°8 Bibliographie

- Guckenheimer - Holmes - Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcation of vector fields - SPRINGER 1983
- Wiggins - Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos - 2000 - Text in Applied Mathematics - SPRINGER
- Varadarajan - Lie Groups, Lie Algebras and their representation 1984 SPRINGER Graduate texts in Mathematics.
- Oliver - Application of Lie groups to differential equations. 2nd Edition 1993 - SPRINGER - Graduate texts in Mathematics
- Holmes Lupton Berkoze Rowley, Turbulence, Coherent structures, Dynamical systems and Symmetry - 1996 - CAMBRIDGE.
- Glen Dinning - Stability, Instability and Chaos - 1994 CAMBRIDGE Cambridge Texts in Applied Mathematics
- Kirsch - Siale - Devaney - Differential equations, dynamical systems and an introduction to chaos - 2004 ELSEVIER ACADEMIC PRESS.
- Arnold - Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations 1983 - SPRINGER.