Oeuvres de Lagrange. T. 1 / publiées par les soins de M. J.-A. Serret [et G. Darboux] ; [précédé d'une notice sur la vie [...]

APPLICATION DE LA MÉTHODE

EXPOSÉE DANS LE MÉMOIRE PRÉCÉDENT

A LA SOLUTION DE

DIFFÉRENTS PROBLÈMES DE DYNAMIQUE.

(*Miscellanea Taurinensia*, t. II, 1760-1761.)

M. Euler, dans une Addition à son excellent ouvrage qui a pour titre : *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes : sive solutio Problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti*, a démontré ce principe que, dans les trajectoires que des corps décrivent par des forces centrales, l'intégrale de la vitesse, multipliée par l'élément de la courbe, fait toujours un maximum ou un minimum.

Je me propose ici de généraliser ce même principe, et d'en faire voir l'usage pour résoudre avec facilité toutes les questions de Dynamique.

Principe général. — *Soient tant de corps qu'on voudra* M, M', M'',..., *qui agissent les uns sur les autres d'une manière quelconque, et qui soient de plus, si l'on veut, animés par des forces centrales proportionnelles à des fonctions quelconques des distances; que* $s, s', s'', \ldots,$ *dénotent les espaces parcourus par ces corps dans le temps* t, *et que* $u, u', u'', \ldots,$ *soient leurs vitesses à la fin de ce temps; la formule*

$$\mathrm{M}\int u\,ds + \mathrm{M}'\int u'\,ds' + \mathrm{M}''\int u''\,ds'' + \ldots$$

sera toujours un maximum ou un minimum.

I.

Problème I. — *Trouver le mouvement d'un corps* M *attiré vers tant de centres fixes qu'on voudra par des forces* P, Q, R,..., *exprimées par des fonctions quelconques des distances.*

Solution. — Comme il n'y a ici qu'un seul corps M, la formule qui doit être un maximum ou un minimum sera simplement $M\int u\,ds$; on aura donc, suivant la méthode expliquée dans le Mémoire précédent, l'équation

$$\delta\left(M\int u\,ds\right)=0,$$

ou, en divisant par M qui est constante,

$$\delta\left(\int u\,ds\right)=0.$$

Or,

$$\delta(u\,ds)=u\,\delta\,ds+\delta u\,ds;$$

donc, changeant l'expression $\delta\left(\int u\,ds\right)$ en son équivalente $\int\delta(u\,ds)$, comme on l'a enseigné (Article I, Mémoire précédent), on aura l'équation

$$\int(u\,\delta\,ds+\delta u\,ds)=0.$$

Soient p, q, r,... les distances du corps M aux centres des forces P, Q, R,..., on aura, comme tous les Géomètres le savent,

$$\frac{u^2}{2}=\text{const}-\int(P\,dp+Q\,dq+R\,dr+\ldots);$$

donc

$$\begin{aligned}u\,\delta u&=-\delta\int(P\,dp+Q\,dq+R\,dr+\ldots)\\&=-\int(\delta P\,dp+P\,\delta\,dp+\delta Q\,dq+Q\,\delta\,dq+\delta R\,dr+R\,\delta\,dr+\ldots)\end{aligned}$$

ou en changeant δdp, δdq, δdr,... en $d\delta p$, $d\delta q$, $d\delta r$,..., et intégrant par parties les termes $P d\delta p$, $Q d\delta q$, $R d\delta r, \ldots$,

$$u\delta u = -P\delta p - Q\delta q - R\delta r - \ldots$$
$$+ \int (\delta P\, dp - dP\, \delta p + \delta Q\, dq - dQ\, \delta q + \delta R\, dr - dR\, \delta r + \ldots).$$

Or, par hypothèse,

$$P = \text{fonct. } p, \quad Q = \text{fonct. } q, \quad R = \text{fonct. } r, \ldots;$$

on trouvera donc, en différentiant,

$$\frac{\delta P}{\delta p} = \frac{dP}{dp}, \quad \frac{\delta Q}{\delta q} = \frac{dQ}{dq}, \quad \frac{\delta R}{\delta r} = \frac{dR}{dr}, \ldots,$$

et par conséquent

$$\delta P\, dp - dP\, \delta p = 0, \quad \delta Q\, dq - dQ\, \delta q = 0, \quad \delta R\, dr - dR\, \delta r = 0, \ldots;$$

donc

$$u\delta u = -P\delta p - Q\delta q - R\delta r - \ldots \quad \text{et} \quad \delta u\, ds = -P\, dt\, \delta p - Q\, dt\, \delta q - R\, dt\, \delta r - \ldots,$$

en mettant au lieu de $\frac{ds}{u}$ son égale dt; donc l'équation ci-dessus se changera en celle-ci

$$\text{(A)} \qquad \int (u\delta\, ds - P\, dt\, \delta p - Q\, dt\, \delta q - R\, dt\, \delta r - \ldots) = 0.$$

Il faut maintenant chercher le rapport que les différences δp, δq, $\delta r, \ldots$, δds ont entre elles, ce qui se fera différemment selon les différentes sortes de coordonnées qu'on emploiera pour représenter la trajectoire. Et, premièrement, soient prises trois coordonnées rectangles x, y, z: on aura

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2};$$

par conséquent,

$$\delta ds = \frac{dx\, \delta dx + dy\, \delta dy + dz\, \delta dz}{ds} = \frac{dx\, d\delta x + dy\, d\delta y + dz\, d\delta z}{ds},$$

en changeant $\delta dx, \ldots$ en $d\delta x, \ldots$; donc

$$\int u\delta\, ds = \int \left(\frac{u\, dx}{ds} d\delta x + \frac{u\, dy}{ds} d\delta y + \frac{u\, dz}{ds} d\delta z \right).$$

Qu'on fasse disparaître dans cette expression les différentielles de δx, δy, δz par la méthode des intégrations par parties, pratiquée dans le Mémoire précédent, on aura la transformée suivante :

$$\int u\delta\, ds = -\int\left(d\frac{u\,dx}{ds}\delta x + d\frac{u\,dy}{ds}\,dy + d\frac{u\,dz}{ds}\delta z\right)$$
$$+\frac{u\,dx}{ds}\delta x + \frac{u\,dy}{ds}\delta y + \frac{u\,dz}{ds}\delta z.$$

Il ne s'agit plus que d'exprimer les différences δp, δq, δr,... par les δx, δy, δz. Pour cela, on cherchera les valeurs analytiques des lignes p, q, r,..., rapportées aux coordonnées x, y, z, et on prendra leurs différentielles en mettant δ pour d. Soit supposé, en général,

$$\begin{aligned} dp &= \mathrm{L}\,dx + l\,dy + \lambda\,dz,\\ dq &= \mathrm{M}\,dx + m\,dy + \mu\,dz,\\ dr &= \mathrm{N}\,dx + n\,dy + \nu\,dz; \end{aligned}$$

il est clair qu'on aura aussi

$$\begin{aligned} \delta p &= \mathrm{L}\,\delta x + l\,\delta y + \lambda\,\delta z,\\ \delta q &= \mathrm{M}\,\delta x + m\,\delta y + \mu\,\delta z,\\ \delta r &= \mathrm{N}\,\delta x + n\,\delta y + \nu\,\delta z. \end{aligned}$$

Donc, si on fait, pour abréger,

$$\begin{aligned} \mathrm{PL} + \mathrm{QM} + \mathrm{RN} &= \Pi,\\ \mathrm{P}l + \mathrm{Q}m + \mathrm{R}n &= \varpi,\\ \mathrm{P}\lambda + \mathrm{Q}\mu + \mathrm{R}\nu &= \Psi, \end{aligned}$$

on aura

$$\mathrm{P}\delta p + \mathrm{Q}\delta q + \mathrm{R}\delta r + \ldots = \Pi\delta x + \varpi\delta y + \Psi\delta z.$$

Faisant toutes ces différentes substitutions dans l'équation (A), elle deviendra

$$(\mathrm{B})\quad\left\{\begin{aligned} &-\int\left[\left(d\frac{u\,dx}{ds} + \Pi\,dt\right)\delta x + \left(d\frac{u\,dy}{ds} + \varpi\,dt\right)\delta y + \left(d\frac{u\,dz}{ds} + \Psi\,dt\right)\delta z\right]\\ &\qquad\qquad + \frac{u\,dx}{ds}\delta x + \frac{u\,dy}{ds}\delta y + \frac{u\,dz}{ds}\delta z = 0, \end{aligned}\right.$$

équation qui doit avoir lieu, quelques valeurs qu'on suppose aux différences δx, δy, δz; c'est pourquoi l'on fera les trois équations suivantes :

$$d\frac{u\,dx}{ds}+\Pi\,dt=0,$$

$$d\frac{u\,dy}{ds}+\varpi\,dt=0,$$

$$d\frac{u\,dz}{ds}+\Psi\,dt=0.$$

Ce sont ces équations qui serviront à déterminer la courbe décrite par le corps M et sa vitesse à chaque instant.

Si on met dt au lieu de $\frac{ds}{u}$, qu'on multiplie la première équation par $\frac{dx}{dt}$, la seconde par $\frac{dy}{dt}$, la troisième par $\frac{dz}{dt}$, et qu'ensuite on les intègre, on aura

$$\frac{dx^2}{2dt^2}=a^2-\int\Pi\,dx,\quad \frac{dy^2}{2dt^2}=b^2-\int\varpi\,dy,\quad \frac{dz^2}{2dt^2}=c^2-\int\Psi\,dz;$$

d'où l'on tire, en chassant dt et extrayant la racine carrée,

$$\frac{dx}{\sqrt{a^2-\int\Pi\,dx}}=\frac{dy}{\sqrt{b^2-\int\varpi\,dy}},$$
$$\frac{dx}{\sqrt{a^2-\int\Pi\,dx}}=\frac{dz}{\sqrt{c^2-\int\Psi\,dz}},$$

équations où les indéterminées seront séparées si $\Pi=$ fonct. x, $\varpi=$ fonct. y, $\Psi=$ fonct. z.

II.

Remarque. — Quant aux termes

$$\frac{u\,dx}{ds}\delta x+\frac{u\,dy}{ds}\delta y+\frac{u\,dz}{ds}\delta z,$$

on pourra se dispenser d'y avoir égard, en supposant que les deux extrémités de la trajectoire soient données de position, car cette supposition fera évanouir les premiers et les derniers δx, δy, δz, et par conséquent aussi tous les termes en question. (*Voyez* l'Article IV du Mémoire précédent.)

III.

Corollaire. — Imaginons que le mobile M sollicité par les mêmes forces P, Q, R,... soit contraint de se mouvoir sur une surface courbe donnée par l'équation $dz = p dx + q dy$; en changeant d en δ, on aura $\delta z = p\delta x + q\delta y$; substituant cette valeur de δz dans l'équation (B), et faisant les deux coefficients de δx et de δy chacun égal à zéro, on aura deux équations

$$d\frac{u\,dx}{ds} + \Pi\,dt + \left[d\frac{u\,dz}{ds} + \Psi dt\right]p = 0,$$

$$d\frac{u\,dy}{ds} + \varpi\,dt + \left[d\frac{u\,dz}{ds} + \Psi dt\right]q = 0,$$

qui, avec l'équation donnée

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$

suffiront pour résoudre le Problème.

IV.

Autre solution. — Qu'on prenne, à la place des deux coordonnées rectangles x, y, un rayon variable x qui tourne autour d'un point fixe dans le même plan des x et des y, et dont la position à chaque instant soit déterminée par un angle φ. Conservant la troisième coordonnée z, qu'on imaginera élevée de l'extrémité du rayon x perpendiculairement au plan de l'angle φ, il est facile de trouver que l'élément ds de la courbe sera

$$\sqrt{x^2 d\varphi^2 + dx^2 + dz^2};$$

ainsi on aura, en différentiant,

$$\begin{aligned}\delta ds &= \frac{x^2 d\varphi\,\delta d\varphi + x d\varphi^2 \delta x + dx\,\delta dx + dz\,\delta dz}{ds}\\ &= \frac{x^2 d\varphi\, d\delta\varphi + x d\varphi^2 \delta x + dx\, d\delta x + dz\, d\delta z}{ds};\end{aligned}$$

Mettant donc cette valeur dans la formule intégrale $\int u\delta\, ds$, et faisant disparaître les différentielles de $\delta\varphi$, δx, δz par la voie ordinaire des intégrations par parties, on aura

$$\int u\delta ds = -\int\left[d\frac{ux^2 d\varphi}{ds}\delta\varphi + \left(d\frac{u\,dx}{ds} - \frac{ux\,d\varphi^2}{ds}\right)\delta x + d\frac{u\,dz}{ds}\delta z\right]$$
$$+\frac{ux^2\,d\varphi}{ds}\delta\varphi + \frac{u\,dx}{ds}\delta x + \frac{u\,dz}{ds}\delta z.$$

Après la substitution de cette valeur de $\int u\delta\, ds$ dans l'équation (A) de l'Article I, il n'y aura plus qu'à réduire les différences δp, δq, δr,... aux différences δx, δy, δz. Pour cela soit supposé, en général,

$$\begin{aligned} dp &= \mathrm{L}\,dx + l\,d\varphi + \lambda\,dz, \\ dq &= \mathrm{M}\,dx + m\,d\varphi + \mu\,dz, \\ dr &= \mathrm{N}\,dx + n\,d\varphi + \nu\,dz, \end{aligned}$$

on aura de même

$$\begin{aligned} \delta p &= \mathrm{L}\delta x + l\,\delta\varphi + \lambda\delta z, \\ \delta q &= \mathrm{M}\delta x + m\,\delta\varphi + \mu\delta z, \\ \delta r &= \mathrm{N}\delta x + n\,\delta\varphi + \nu\delta z. \end{aligned}$$

Donc, si on fait les mêmes suppositions que dans la solution précédente, on aura aussi

$$\mathrm{P}\delta p + \mathrm{Q}\delta q + \mathrm{R}\delta r + \ldots = \Pi\delta x + \varpi\delta\varphi + \psi\delta z,$$

et l'équation (A) deviendra enfin

$$(\mathrm{C})\quad \left\{\begin{aligned} &-\int\left[\left(d\frac{ux^2 d\varphi}{ds} + \varpi\,dt\right)\delta\varphi + \left(d\frac{u\,dx}{ds} - \frac{ux\,d\varphi^2}{ds} + \Pi\,dt\right)\delta x\right. \\ &\qquad\qquad\qquad\left. + \left(d\frac{u\,dz}{ds} + \Psi\,dt\right)\delta z\right] \\ &\qquad\qquad + \frac{ux^2\,d\varphi}{ds}\delta\varphi + \frac{u\,dx}{ds}\delta x + \frac{u\,dz}{ds}\delta z = 0. \end{aligned}\right.$$

Maintenant, si on suppose, comme dans l'Article II, que le premier et le dernier point de la trajectoire sont donnés, il est clair que les $\delta\varphi$, δx, δz qui y répondent seront nulles d'elles-mêmes, et que par conséquent les trois premiers termes de cette équation le seront aussi. Donc, pour satisfaire au reste de l'équation, indépendamment des différences indéterminées $\delta\varphi$, δx, δz, on fera chacun de leurs coefficients égal à zéro, et l'on aura pour les équations générales du mouvement du corps

$$d\frac{ux^2 d\varphi}{ds} + \varpi\, dt = 0,$$

$$d\frac{u\,dx}{ds} - \frac{ux\,d\varphi^2}{ds} + \Pi\, dt = 0,$$

$$d\frac{u\,dz}{ds} + \Psi\, dt = 0.$$

Qu'on mette dans ces équations dt pour $\frac{ds}{u}$, et qu'on intègre la première, après l'avoir multipliée par $\frac{x^2 d\varphi}{dt}$, on aura

$$\frac{1}{2}\left(\frac{x^2 d\varphi}{dt}\right)^2 = a^2 - \int \varpi x^2 d\varphi,$$

d'où l'on tire

$$dt = \frac{x^2 d\varphi}{\sqrt{2a^2 - 2\int \varpi x^2 d\varphi}};$$

substituant cette valeur dans la seconde équation et faisant, pour abréger,

$$\sqrt{2a^2 - 2\int \varpi x^2 d\varphi} = \mathrm{U},$$

on aura

$$d\frac{\mathrm{U}\,dx}{x^2 d\varphi} - \frac{\mathrm{U}\,d\varphi}{x} + \frac{\Pi x^2 d\varphi}{\mathrm{U}} = 0,$$

ou, en mettant y pour $\frac{1}{x}$,

$$-d\frac{\mathrm{U}\,dy}{d\varphi} - \mathrm{U}y\,d\varphi + \frac{\Pi\, d\varphi}{\mathrm{U}y^2} = 0,$$

ce qui donnera par la différentiation, en regardant $d\varphi$ comme constante et multipliant par $\frac{d\varphi}{\mathrm{U}}$,

$$-d^2y - \frac{d\mathrm{U}}{\mathrm{U}}dy - y\,d\varphi^2 + \frac{\Pi\, d\varphi^2}{\mathrm{U}^2 y^2} = 0,$$

savoir, à cause de $\frac{dU}{U} = -\frac{\varpi x^2 d\varphi}{U^2} = -\frac{\varpi d\varphi}{U^2 y^2}$,

$$-d^2y - y\,d\varphi^2 + \frac{\Pi + \frac{\varpi\,dy}{d\varphi}}{U^2 y^2}\,d\varphi^2 = 0,$$

équation constructible dans plusieurs cas particuliers.

Enfin, la troisième équation étant multipliée par $\frac{dz}{dt}$, et ensuite intégrée, deviendra

$$\frac{2\,dz^2}{dt^2} = b^2 - \int \Psi\,dz,$$

d'où l'on tirera la valeur de dt, laquelle étant comparée à celle qu'on a trouvée plus haut fournira l'équation

$$\frac{dz}{\sqrt{2b^2 - 2\int \Psi dz}} = \frac{d\varphi}{Uy^2}.$$

V.

Corollaire. — Si le corps était obligé de se mouvoir sur une surface courbe donnée, alors rapportant cette surface aux trois variables x, φ, z, et la supposant exprimée par l'équation

$$dz = p\,d\varphi + q\,dx,$$

on mettrait dans l'équation (C) $p\,\delta\varphi + q\,\delta x$ au lieu de δz, ensuite on égalerait à zéro les coefficients de δx et de $\delta\varphi$, et l'on aurait

$$d\frac{ux^2 d\varphi}{ds} + \varpi\,dt + \left(d\frac{u\,dz}{ds} + \Psi dt\right) p = 0,$$

$$d\frac{u\,dx}{ds} - \frac{ux\,d\varphi^2}{ds} + \Pi\,dt + \left(d\frac{u\,dz}{ds} + \Psi dt\right) q = 0.$$

VI.

Remarque I. — Nous avons supposé que les forces P, Q, R,... étaient comme des fonctions quelconques des distances p, q, r,...; cependant il est facile de démontrer, par les principes de Dynamique, que les équations trouvées sont générales pour toutes sortes de forces accélératrices, et l'on peut d'ailleurs s'en convaincre par cette seule raison que les équations dont il s'agit ne renferment point la loi suivant laquelle les forces P, Q, R,... croissent ou décroissent, mais seulement les quantités et les directions instantanées de ces forces, comme il est aisé de le voir en substituant pour Π, ϖ et Ψ leurs valeurs. Au reste, à examiner les solutions précédentes, il est évident que l'hypothèse de

$$P = \text{fonct.}\, p, \quad Q = \text{fonct.}\, q, \quad R = \text{fonct.}\, r, \ldots$$

ne sert qu'à rendre égale à zéro la formule intégrale

$$\int (\delta P\, dp - dP\, \delta p + \delta Q\, dq - dQ\, \delta q + \delta R\, dr - dR\, \delta r \ldots).$$

Or, pour cela, il suffirait que les quantités P, Q, R,... eussent entre elles un rapport tel que

$$\delta P\, dp - dP\, \delta p + \delta Q\, dq - dQ\, \delta q + \delta R\, dr - dR\, \delta r + \ldots = 0;$$

soient donc P, Q, R,... des fonctions quelconques de p, q, r,..., de sorte que l'on ait par la différentiation

$$\begin{aligned} dP &= A\,dp + B\,dq + C\,dr + \ldots, \\ dQ &= D\,dp + E\,dq + F\,dr + \ldots, \\ dR &= G\,dp + H\,dq + I\,dr + \ldots; \end{aligned}$$

il est clair qu'on aura également

$$\begin{aligned} \delta P &= A\,\delta p + B\,\delta q + C\,\delta r + \ldots, \\ \delta Q &= D\,\delta p + E\,\delta q + F\,\delta r + \ldots, \\ \delta R &= G\,\delta p + H\,\delta q + I\,\delta r + \ldots. \end{aligned}$$

Substituant ces valeurs dans l'équation de condition et réduisant, on aura

$$(B - D)(dp\,\delta q - dq\,\delta p) + (C - G)(dp\,\delta r - dr\,\delta p) + (F - H)(dq\,\delta r - dr\,\delta q) = 0,$$

donc

$$B - D = 0, \quad C - G = 0, \quad F - H = 0,$$

savoir

$$\frac{dP}{dq}=\frac{dQ}{dp},\quad \frac{dP}{dr}=\frac{dR}{dp},\quad \frac{dQ}{dr}=\frac{dR}{dq},$$

c'est-à-dire que $P dp + Q dq + R dr + \ldots$ devra être une différentielle complète. Si cette condition a lieu, la valeur de $u\delta u$ sera simplement

$$-P\delta p - Q\delta q - R\delta r - \ldots;$$

autrement, il faudra encore tenir compte de l'intégrale

$$\int(\delta P dp - dP\delta p + \ldots)$$

pour rendre la formule $\int u ds$ un vrai maximum ou minimum; mais les équations qu'on trouverait alors ne seraient plus les véritables équations du mouvement du corps.

VII.

Remarque II. — Ce Problème est le seul auquel M. Euler ait appliqué son principe. Il l'a aussi résolu pour les deux cas des coordonnées rectangles et des rayons partant d'un centre fixe. Mais pour pouvoir comparer ses solutions avec les nôtres, il faut remarquer :

1° Que M. Euler n'a considéré que des courbes à simple courbure;

2° Qu'il n'a cherché le maximum ou le minimum de la formule $\int u ds$ qu'eu égard à la variabilité de l'ordonnée y dans le premier cas, et à celle de l'angle que nous avons nommé φ dans le second. (*Voyez* l'Addition citée au commencement de ce Mémoire.)

Au reste, il est clair que par notre méthode on pourra encore varier la solution de ce Problème en plusieurs autres manières, selon les différentes sortes de coordonnées qu'on choisira pour représenter la trajectoire cherchée.

VIII.

Problème II général. — *Soit un système quelconque de plusieurs corps,* M, M′, M″, ..., *qui soient sollicités par tant de forces centrales qu'on voudra, savoir:* M *par les forces* P, Q, R, ...; M′ *par les forces* P′, Q′, R′....; M″ *par les forces* P″, Q″, R″, ..., *et qui agissent de plus les uns sur les autres par des forces quelconques d'attraction mutuelle; trouver le mouvement de chacun de ces corps.*

Solution. — Tout se réduit à rendre la formule

$$\mathrm{M}\int u\,ds + \mathrm{M}'\int u'\,ds' + \mathrm{M}''\int u''\,ds'' + \ldots$$

un maximum ou un minimum. On fera donc, suivant notre méthode,

$$\delta\left(\mathrm{M}\int u\,ds\right) + \delta\left(\mathrm{M}'\int u'\,ds'\right) + \delta\left(\mathrm{M}''\int u''\,ds''\right) + \ldots = 0.$$

Or, à cause que M est constant (Article I),

$$\delta\left(\mathrm{M}\int u\,ds\right) = \mathrm{M}\,\delta\int u\,ds = \mathrm{M}\int(u\,\delta ds + u\,\delta u\,dt) = \int \mathrm{M}(u\,\delta u\,ds + u\,\delta u\,dt).$$

On trouvera de même, en substituant toujours dt pour $\frac{ds'}{u'}$, $\frac{ds''}{u''}$, ...,

$$\delta\left(\mathrm{M}'\int u'\,ds'\right) = \int(u'\,\delta ds' + u'\,\delta u'\,dt),$$
$$\delta\left(\mathrm{M}''\int u''\,ds''\right) = \int \mathrm{M}''(u''\,\delta ds'' + u''\,\delta u''\,dt),$$

et ainsi de suite; on aura donc l'équation

$$(\mathrm{D})\quad \left\{ \begin{aligned} &\int[\mathrm{M}u\,\delta ds + \mathrm{M}'u'\,\delta ds' + \mathrm{M}''u''\,\delta ds'' + \ldots \\ &\quad + (\mathrm{M}u\,\delta u + \mathrm{M}'u'\,\delta u' + \mathrm{M}''u''\,\delta u'' + \ldots)dt] = 0. \end{aligned} \right.$$

Maintenant, soient p, q, r, ..., les distances du corps M aux centres des forces P, Q, R, ..., et p', q', r', ..., p'', q'', r'', ..., celles des autres corps

M′, M″,... aux centres de leurs forces P′, Q′, R′,..., P″, Q″, R″,.... Soient, outre cela, f la distance entre le corps M et le corps M′, et F la force avec laquelle chaque point de l'un attire chaque point de l'autre; de même f' la distance entre les corps M′ et M″, et F′ leur force d'attraction, et ainsi de suite. Soient encore g la distance entre le corps M′ et le corps M″, et G leur attraction, et ainsi pour tous les autres corps; on aura, par le principe général de la conservation des forces vives, l'équation

$$\begin{aligned} Mu^2 + M'u'^2 + M''u''^2 + \ldots &= MU^2 + M'U'^2 + M''U''^2 + \ldots \\ &- 2M \int (P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \ldots) \\ &- 2M' \int (P'\,dp' + Q'\,dq' + R'\,dr' + \ldots) \\ &- 2M'' \int (P''\,dp'' + Q''\,dq'' + R''\,dr'' \ldots) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &- 2MM' \int F\,df - 2MM'' \int F'\,df' - \ldots - 2M'M'' \int G\,dg - \ldots, \end{aligned}$$

U, U′, U″,... étant les vitesses primitives des corps M, M′, M″,....

Or, soient supposés

$$\begin{aligned} &P = \text{fonct.}\,p, \quad Q = \text{fonct.}\,q, \quad R = \text{fonct.}\,r, \ldots, \\ &P' = \text{fonct.}\,p', \quad Q' = \text{fonct.}\,q', \quad R' = \text{fonct.}\,r', \ldots, \\ &F = \text{fonct.}\,f, \ldots, \quad G = \text{fonct.}\,g, \ldots, \end{aligned}$$

on trouvera, par un calcul analogue à celui qu'on a fait dans le Problème I, l'équation différentielle

$$(\mathrm{U}) \qquad \left\{ \begin{aligned} &Mu\,\delta u + M'u'\,\delta u' + M''u''\,\delta u'' + \ldots \\ &\quad = -M(P\,\delta p + Q\,\delta q + R\,\delta r + \ldots) \\ &\qquad - M'(P'\,\delta p' + Q'\,\delta q' + R'\,\delta r' + \ldots) \\ &\qquad - M''(P'\,\delta p'' + Q''\,\delta q'' + R''\,\delta r'' + \ldots) \\ &\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\qquad - MM'F\,\delta f - MM''F'\,\delta f' - \ldots \\ &\qquad - M'M''G\,\delta g - \ldots. \end{aligned} \right.$$

Il faut maintenant trouver les valeurs des différences δds, $\delta ds'$, $\delta ds''$,..., et cette recherche dépend, comme on le voit, de la nature des coordonnées qu'on emploie pour représenter les courbes décrites par chaque corps.

IX.

Premier cas. — Soient, comme dans l'Article I, x, y, z trois coordonnées rectangles qui déterminent la position du corps M dans un temps quelconque, et soient de même $x', y', z', x'', y'', z'', \ldots$, d'autres coordonnées rectangles et parallèles à celles-là pour la position des autres corps M', M'',..., dans le même temps; on aura, comme dans l'Article cité,

$$\delta ds = \frac{dx\, d\delta x + dy\, d\delta y + dz\, d\delta z}{ds},$$

et de même

$$\delta ds' = \frac{dx'\, d\delta x' + dy'\, d\delta y' + dz'\, d\delta z'}{ds'},$$

$$\delta ds'' = \frac{dx''\, d\delta x'' + dy''\, d\delta y'' + dz''\, d\delta z''}{ds''},$$

et ainsi de suite.

Qu'on substitue ces valeurs dans l'équation (D), et qu'on fasse disparaître, comme à l'ordinaire, les différentielles de $\delta x, \delta y, \delta z, \delta x', \delta y', \ldots$, on aura, en négligeant tous les termes hors du signe $\int$, qui peuvent être supposés nuls par la remarque de l'Article II,

$$(\mathrm{E})\quad \left\{\begin{aligned} &\int\Big[\mathrm{M}d\frac{u\,dx}{ds}\delta x + \mathrm{M}d\frac{u\,dy}{ds}\delta y + \mathrm{M}d\frac{u\,dz}{ds}\delta z \\ &+\mathrm{M}'d\frac{u'\,dx'}{ds'}\delta x' + \mathrm{M}'d\frac{u'\,dy'}{ds'}\delta y' + \mathrm{M}'d\frac{u'\,dz'}{ds'}\delta z' \\ &+\mathrm{M}''d\frac{u''\,dx''}{ds''}\delta x'' + \mathrm{M}''d\frac{u''\,dy''}{ds''}\delta y'' + \mathrm{M}''d\frac{u''\,dz''}{ds''}\delta z'' \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\qquad -(\mathrm{M}u\,\delta u + \mathrm{M}'u'\,\delta u' + \mathrm{M}''u''\,\delta u'' + \ldots)\,dt\Big] = 0. \end{aligned}\right.$$

Il ne s'agira plus maintenant que de substituer dans cette équation, au lieu de

$$\mathrm{M}u\,\delta u + \mathrm{M}'u'\,\delta u' + \mathrm{M}''u''\,\delta u'' + \ldots,$$

sa valeur tirée de l'équation (U), et de réduire ensuite les différences

$$\delta p,\ \delta q,\ \delta r,\ldots,\quad \delta p',\ \delta q',\ldots,\quad \delta f,\ \delta f',\ldots,\quad \delta g,\ldots,$$

aux différences

$$\delta x,\ \delta y,\ \delta z,\ \delta x',\ \delta y',\ldots,$$

par une méthode analogue à celle que l'on a pratiquée dans le Problème précédent; après quoi, si chaque corps est entièrement libre, en sorte que toutes les différences δx, δy, δz, $\delta x'$, $\delta y'$,..., demeurent indéterminées, on fera chacun de leurs coefficients égal à zéro, et l'on aura trois fois autant d'équations qu'il y a de corps, lesquelles, prises ensemble, suffiront pour déterminer toutes les vitesses et les courbes cherchées; mais si un ou plusieurs de ces corps sont forcés de se mouvoir sur des courbes ou des surfaces données, et qu'ils agissent de plus les uns sur les autres, soit en se poussant, soit en se tirant par des fils ou des verges inflexibles, ou de quelque autre manière que ce soit, alors on cherchera les rapports qui devront nécessairement se trouver entre les différences δx, δy, δz, $\delta x'$, $\delta y'$,.... On réduira par là ces différences au plus petit nombre possible, et on fera ensuite chacun de leurs coefficients égal à zéro, ce qui donnera toutes les équations nécessaires pour la solution du Problème.

X.

Corollaire. — Supposons le système entièrement libre, et que les corps agissent les uns sur les autres d'une manière quelconque; supposons outre cela que tous les corps soient sollicités par trois forces P, Q, R dirigées parallèlement aux coordonnées x, y, z et qui soient les mêmes pour chacun d'eux; on mettra dans l'équation (U) x, y, z à la place de p, q, r, et l'on aura

$$\begin{aligned}
&\mathrm{M}u\,\delta u + \mathrm{M}'u'\,\delta u' + \mathrm{M}''u''\,\delta u'' + \ldots \\
&\quad = -\mathrm{M}(\mathrm{P}\,\delta x + \mathrm{Q}\,\delta y + \mathrm{R}\,\delta z) - \mathrm{M}'(\mathrm{P}\,\delta x' + \mathrm{Q}\,\delta y' + \mathrm{R}\,\delta z') \\
&\qquad - \mathrm{M}''(\mathrm{P}\,\delta x'' + \mathrm{Q}\,\delta y'' + \mathrm{R}\,\delta z'') - \ldots \\
&\qquad - \mathrm{M}\mathrm{M}'\mathrm{F}\,\delta f - \mathrm{M}\mathrm{M}''\mathrm{F}'\,\delta f' - \ldots - \mathrm{M}'\mathrm{M}''\mathrm{G}\,\delta g - \ldots.
\end{aligned}$$

Cette valeur de $Mu\delta u + M'u'\delta u' + \ldots$ étant substituée dans l'équation (E), soit fait

$$x' = x + X, \quad y' = y + Y, \quad z' = z + Z,$$
$$x'' = x + X', \quad y'' = y + Y', \quad z'' = z + Z',$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et par conséquent

$$\delta x' = \delta x + \delta X, \quad \delta y' = \delta y + \delta Y, \quad \delta z' = \delta z + \delta Z,$$
$$\delta x'' = \delta x + \delta X', \quad \delta y'' = \delta y + \delta Y', \quad \delta z'' = \delta z + \delta Z',$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

il est clair que les lignes $f, f', g, \ldots$, qui marquent les distances des corps entre eux, dépendront uniquement des lignes $X, Y, Z, X', Y', Z', \ldots$, qui déterminent leur position respective, et qu'ainsi les expressions des différences $\delta f, \delta f', \delta g, \ldots$ ne renfermeront aucunement les différences $\delta x, \delta y, \delta z$; on remarquera de plus que ces mêmes différences $\delta x, \delta y, \delta z$ seront absolument indépendantes de toutes les autres différences $\delta X, \delta Y, \ldots$. Car il est évident que, l'action mutuelle des corps ne dépendant que de leur position respective, savoir des lignes X, Y, Z, X', Y' $Z', X'', \ldots$, il n'y aura que les seules différences $\delta X, \delta Y, \delta Z, \delta X', \delta Y', \delta Z', \ldots$ de ces mêmes lignes qui soient liées entre elles par des rapports donnés par la nature du Problème; d'où il suit que les termes affectés des différences $\delta x, \delta y, \delta z$ dans l'équation (E) devront être chacun en particulier égal à zéro; ce qui donnera les trois équations générales

$$M d\frac{u\,dx}{ds} + M' d\frac{u'\,dx'}{ds'} + M'' d\frac{u''\,dx''}{ds''} + \ldots + (M + M' + M'' + \ldots) P\,dt = 0,$$
$$M d\frac{u\,dy}{ds} + M' d\frac{u'\,dy'}{ds'} + M'' d\frac{u''\,dy''}{ds''} + \ldots + (M + M' + M'' + \ldots) Q\,dt = 0,$$
$$M d\frac{u\,dz}{ds} + M' d\frac{u'\,dz'}{ds'} + M'' d\frac{u''\,dz''}{ds''} + \ldots + (M + M' + M'' + \ldots) R\,dt = 0.$$

Or,

$$\frac{ds}{u} = \frac{ds'}{u'} = \frac{ds''}{u''} = \ldots = dt,$$

donc, ces équations deviendront celles-ci :

$$d\frac{M\,dx + M'\,dx' + M''\,dx'' + \ldots}{dt} + (M + M' + M'' + \ldots)P\,dt = 0,$$

$$d\frac{M\,dy + M'\,dy' + M''\,dy'' + \ldots}{dt} + (M + M' + M'' + \ldots)Q\,dt = 0,$$

$$d\frac{M\,dz + M'\,dz' + M''\,dz'' + \ldots}{dt} + (M + M' + M'' + \ldots)R\,dt = 0;$$

d'où l'on voit que si l'on prend à chaque instant dans le système un point tel que sa position soit déterminée par trois coordonnées, l'une parallèle à x et égale à

$$\frac{Mx + M'x' + M''x'' + \ldots}{M + M' + M'' + \ldots},$$

l'autre parallèle à y et égale à

$$\frac{My + M'y' + M''y'' + \ldots}{M + M' + M'' + \ldots},$$

et la troisième parallèle à z et égale à

$$\frac{Mz + M'z' + M''z'' + \ldots}{M + M' + M'' + \ldots},$$

ce point se mouvra comme ferait un corps sollicité simplement par les trois forces P, Q, R. Or il est évident que ce point ne sera autre chose que le centre de gravité du système, savoir, de tous les corps M, M',..., qui le composent.

XI.

Second cas. — Soit pris, comme dans l'Article IV, au lieu des deux coordonnées rectangles x et y, un rayon vecteur x avec un angle φ, et soient de même substitués aux autres coordonnées $x', y', x'', y'', \ldots,$ les rayons vecteurs $x', x'', \ldots,$ partant du même point fixe que le rayon x, avec les angles correspondants $\varphi', \varphi'', \ldots,$ pris dans le même plan de l'angle φ ; on trouvera, comme dans l'Article cité,

$$\delta ds = \frac{x^2 d\varphi\, d\delta\varphi + x\, d\varphi^2 \delta x + dx\, d\delta x + dz\, d\delta z}{ds},$$

et de même

$$\delta ds' = \frac{x'^2\, d\varphi'\, d\delta\varphi' + x'\, d\varphi'^2\, \delta x' + dx'\, d\delta x' + dz'\, d\delta z'}{ds'},$$

$$\delta ds'' = \frac{x''^2\, d\varphi''\, d\delta\varphi'' + x''\, d\varphi''^2\, \delta x'' + dx''\, d\delta x'' + dz''\, d\delta z''}{ds''},$$

et ainsi des autres. On substituera ces valeurs dans l'équation (D) de l'Article VIII, et pratiquant les mêmes réductions que dans l'Article IV, elle deviendra

$$(\mathrm{F})\quad \left\{\begin{aligned} \int\Big[& \mathrm{M}\, d\,\frac{ux^2\, d\varphi}{ds}\,\delta\varphi + \mathrm{M}\left(d\,\frac{u\,dx}{ds} - \frac{ux\,d\varphi^2}{ds}\right)\delta x + \mathrm{M}\,d\,\frac{u\,dz}{ds}\,\delta z \\ & + \mathrm{M}'\, d\,\frac{u'\,x'^2\, d\varphi'}{ds'}\,\delta\varphi' + \mathrm{M}'\left(d\,\frac{u'\,dx'}{ds'} - \frac{u'\,x'\,d\varphi'^2}{ds'}\right)\delta x' + \mathrm{M}'\,d\,\frac{u'\,dz'}{ds'}\,\delta z' \\ & + \mathrm{M}''\, d\,\frac{u''\,x''^2\, d\varphi''}{ds''}\,\delta\varphi' + \mathrm{M}''\left(d\,\frac{u''\,dx''}{ds''} - \frac{u''\,x''\,d\varphi''^2}{ds''}\right)\delta x'' + \mathrm{M}''\,d\,\frac{u''\,dz''}{ds''}\,\delta z'' \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + (\mathrm{M}u\,\delta u + \mathrm{M}'\,u'\,\delta u' + \mathrm{M}''\,u''\,\delta u'' + \ldots)\,dt\Big] = 0, \end{aligned}\right.$$

équation dans laquelle j'ai rejeté tous les termes qui sont hors du signe $\int$, parce que ces termes deviennent évidemment nuls dans la supposition que le premier et le dernier point de chaque trajectoire soient donnés. Or, cette équation étant analogue à l'équation (E) de l'Article VIII, ne demandera plus que des opérations semblables pour trouver le mouvement de chaque corps. On en verra des exemples dans les Problèmes suivants.

XII.

Corollaire. — Si le système est entièrement libre ou qu'il soit simplement assujetti à se mouvoir autour d'un point fixe, et que toutes les forces sollicitatrices des corps concourent à ce point, prenant ce point pour le centre des rayons vecteurs x, x', x'',..., et faisant

$$\varphi' = \varphi + \Phi, \quad \varphi'' = \varphi + \Phi', \ldots,$$

il est facile de voir que $\delta\varphi$ sera absolument indépendante des autres différences $\delta\Phi$, $\delta\Phi',\ldots$, δx, $\delta x'$, $\delta x'',\ldots$, quelle que soit l'action réciproque des corps les uns sur les autres; il est de plus évident que toutes les différences δp, δq, $\delta f,\ldots$, qui entrent dans la valeur de $\mathrm{M}u\delta u + \mathrm{M}'u'\delta u',\ldots$, seront aussi indépendantes de la différence $\delta\varphi$; d'où il suit que tous les termes de l'équation (F) qui se trouveront affectés de la différence $\delta\varphi$ après les substitutions de $\delta\varphi + \delta\Phi$, $\delta\varphi + \delta\Phi',\ldots$, à la place de $\delta\varphi'$, $\delta\varphi'',\ldots$, devront être égaux à zéro séparément du reste de l'équation; on aura donc en général, après avoir effacé le $\delta\varphi$, l'équation

$$\mathrm{M}d\frac{ux^2\,d\varphi}{ds} + \mathrm{M}'d\frac{u'x'^2\,d\varphi'}{ds'} + \mathrm{M}''d\frac{u''x''^2\,d\varphi''}{ds''} + \ldots = 0,$$

dont l'intégrale est

$$\text{(G)} \qquad \frac{\mathrm{M}ux^2\,d\varphi}{ds} + \frac{\mathrm{M}'u'x'^2\,d\varphi'}{ds'} + \frac{\mathrm{M}''u''x''^2\,d\varphi''}{ds''} + \ldots = \text{const.},$$

ou, en mettant dt pour $\frac{u}{ds}, \frac{u'}{ds'}, \frac{u''}{ds''},\ldots$ et en nommant H la constante,

$$\mathrm{M}x^2\,d\varphi + \mathrm{M}'x'^2\,d\varphi' + \mathrm{M}''x''^2\,d\varphi'' + \ldots = \mathrm{H}\,dt,$$

et intégrant de nouveau, il vient

$$\mathrm{M}\int x^2\,d\varphi + \mathrm{M}'\int x'^2\,d\varphi' + \mathrm{M}''\int x''^2\,d\varphi'' + \ldots = \mathrm{H}t.$$

Il est visible que l'intégrale

$$\int x^2\,d\varphi$$

exprime l'aire que la projection du corps M décrit autour du centre des forces, et que les autres intégrales

$$\int x'^2\,d\varphi', \quad \int x''^2\,d\varphi'',\ldots,$$

expriment de même les aires décrites par les projections des autres corps M', M'',..., autour du même centre; donc la somme de chacune de ces aires, multipliée par la masse du corps qui la décrit, est toujours proportionnelle au temps.

Le lecteur qui sera curieux de voir une démonstration de ce théorème tirée des principes de Mécanique, la trouvera dans un Mémoire de M. le chevalier d'Arcy, imprimé parmi ceux de l'Académie royale des Sciences de Paris, année 1747; il y trouvera aussi l'usage de ce même théorème pour résoudre plusieurs questions de Dynamique.

Au reste, nous remarquerons que l'équation (G) renferme le principe que MM. Daniel Bernoulli et Euler ont appelé la *conservation du moment du mouvement circulatoire*, et qui consiste en ce que la somme des produits de chaque corps M par sa vitesse circulatoire $\frac{u\,x\,d\varphi}{ds}$ et par sa distance au centre de x est constante pendant le mouvement du système. (*Voyez* les *Mémoires de l'Académie royale des Sciences de Berlin*, année 1745, et les *Opuscules* de M. Euler imprimés à Berlin en 1746.)

La même équation (G) renferme aussi le principe de M. le chevalier d'Arcy, que la somme des produits de chaque corps M par sa vitesse u, et par la perpendiculaire $\frac{x^2\,d\varphi}{ds}$ menée du centre sur la direction du corps, fait toujours une quantité constante. (*Voyez* les *Mémoires de l'Académie de Paris*, années 1749, 1752.)

XIII.

Remarque. — Il est aisé de trouver, par la méthode que j'ai donnée dans la Remarque de l'Article VI, que l'équation (U) sera exacte en général toutes les fois que la formule

$$-\,M(P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \ldots) - M'(P'\,dp' + Q'\,dq' + R'\,dr' + \ldots) - \ldots,$$

qui exprime la valeur de

$$M\,u\,du + M'\,u'\,du' + M''\,u''\,du'' + \ldots,$$

sera une différentielle complète. Dans tous les autres cas, cette équation ne pourra plus servir à trouver les conditions de la *maximité* ou de la *minimité* de la formule intégrale

$$M\int u\,ds + M'\int u'\,ds' + M''\int u''\,ds'' + \ldots,$$

mais elle servira toujours également pour trouver les mouvements des corps M, M′, M″,..., quelles que soient les forces dont ils sont animés. Ainsi, sans s'embarrasser que la formule dont nous parlons soit réellement un maximum ou un minimum, on pourra toujours employer l'équation (U) dans quelque hypothèse de forces que ce soit.

XIV.

Problème III. — *Trois corps* M, M′, M″ *s'attirent mutuellement par des forces d'attraction* F, F′, G ; *trouver les orbites des corps* M′, M″ *par rapport au corps* M *regardé comme en repos.*

Solution. — Les mêmes noms étant conservés que dans l'Article IX, on fera de plus, comme dans l'Article X,

$$x' = x + X, \quad y' = y + Y, \ldots,$$

et l'on aura

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2},$$
$$ds' = \sqrt{(dx + dX)^2 + (dy + dY)^2 + (dz + dZ)^2},$$
$$ds'' = \sqrt{(dx + dX')^2 + (dy + dY')^2 + (dz + dZ')^2},$$

d'où l'on tirera, par la différentiation, les valeurs de δds, $\delta ds'$, $\delta ds''$, qu'il faudra substituer dans l'équation (D) de l'Article VIII.

Mais pour mieux représenter les orbites relatives des corps M′, M″, soient pris, au lieu des coordonnées rectangles X, Y, X′, Y′, deux rayons vecteurs r, r', avec deux angles correspondants φ, φ', tels que l'on ait

$$X = r\cos\varphi, \quad Y = r\sin\varphi,$$
$$X' = r'\cos\varphi', \quad Y' = r'\sin\varphi';$$

ayant fait ces substitutions dans les valeurs de ds', ds'', on aura

$$ds' = \sqrt{ds^2 + 2\,dx\,d(r\cos\varphi) + 2\,dy\,d(r\sin\varphi) + r^2 d\varphi^2 + dr^2 + 2\,dz\,dZ + dZ^2},$$
$$ds'' = \sqrt{ds^2 + 2\,dx\,d(r'\cos\varphi') + 2\,dy\,d(r'\sin\varphi') + r'^2 d\varphi'^2 + dr'^2 + 2\,dz\,dZ' + dZ'^2}.$$

Maintenant, si l'on veut regarder l'orbite du corps M comme connue, on prendra les différences δds, $\delta ds'$, $\delta ds''$, en supposant dx, dy, dz constantes; on aura

$$\delta ds = 0,$$
$$\delta ds' = \frac{1}{ds'}[dx\,\delta d(r\cos\varphi) + dy\,\delta d(r\sin\varphi) + r^2 d\varphi\,\delta d\varphi + r\,d\varphi^2 \delta r + dr\,\delta dr + (dz + dZ)\,\delta dZ],$$
$$\delta ds'' = \frac{1}{ds''}[dx\,\delta d(r'\cos\varphi') + dy\,\delta d(r'\sin\varphi') + r'^2 d\varphi'\,\delta d\varphi' + r'\,d\varphi'^2 \delta r' + dr'\,\delta dr' + (dz + dZ')\,\delta dZ'].$$

Avant que de faire ces substitutions dans l'équation (D) de l'Article VIII, je remarque que les corps M', M'' dont on cherche le mouvement étant entièrement libres par l'hypothèse du Problème, les différences de leurs coordonnées δr, $\delta\varphi$, δZ, $\delta r'$, $\delta\varphi'$, $\delta Z'$ sont nécessairement indépendantes entre elles; d'où il suit qu'on peut faire pour chacun de ces corps un calcul à part, en ne considérant à la fois que les variations des trois coordonnées r, φ, Z ou r', φ', Z'.

Qu'on ne prenne d'abord que les trois premières r, φ, Z pour variables, il est clair qu'on aura $\delta ds'' = 0$; par conséquent l'équation mentionnée deviendra simplement

$$\int [M' u' \delta ds' + (M u \delta u + M' u' \delta u' + M'' u'' \delta u'' + \ldots) dt] = 0.$$

Pour appliquer cette équation au Problème présent, on commencera par substituer, à la place de $\delta ds'$, sa valeur trouvée ci-dessus, en y mettant, pour plus de simplicité, au lieu de $\frac{u'}{ds'}$ son égale $\frac{1}{dt}$; ensuite on intégrera par parties tous les termes qui renfermeront des différences affectées du double signe δd, après avoir changé ce signe dans son équivalent $d\delta$; cette opération donnera les transformées suivantes :

$$\begin{aligned}\int\frac{dx\,d\delta(r\cos\varphi)}{dt}&=\frac{dx\,\delta(r\cos\varphi)}{dt}-\int d\left(\frac{dx}{dt}\right)\delta(r\cos\varphi)\\&=\frac{dx}{dt}(\cos\varphi\,\delta r-r\sin\varphi\,\delta\varphi)-\int d\left(\frac{dx}{dt}\right)(\cos\varphi\,\delta r-r\sin\varphi\,\delta\varphi)\\&=-\int d\left(\frac{dx}{dt}\right)(\cos\varphi\,\delta r-r\sin\varphi\,\delta\varphi)\end{aligned}$$

(en rejetant les termes qui sont hors du signe d'intégration et qui s'évanouissent toujours dans l'hypothèse de l'Article II), et de même

$$\int\frac{dy\,d\delta(r\sin\varphi)}{dt}=-\int d\left(\frac{dy}{dt}\right)(\sin\varphi\,\delta r+r\cos\varphi\,\delta\varphi),$$

$$\int\frac{r^2 d\varphi\,d\delta\varphi}{dt}=-\int d\left(\frac{r^2 d\varphi}{dt}\right)\delta\varphi,\quad \int\frac{dr\,\delta\,dr}{dt}=-\int d\left(\frac{dr}{dt}\right)\delta r,$$

$$\int\frac{(dz+dZ)\,d\delta Z}{dt}=-\int d\,\frac{(dz+dZ)}{dt}\,\delta Z.$$

En joignant ensemble toutes ces transformées, et y ajoutant le terme $\int\frac{r\,d\varphi^2}{dt}\delta r$, on aura la valeur de $\int u'\,\delta ds'$ exprimée par la formule suivante :

$$\int\Big[\left(r\sin\varphi\,d\frac{dx}{dt}-r\cos\varphi\,d\frac{dy}{dt}-d\frac{r^2 d\varphi}{dt}\right)\delta\varphi$$
$$-\left(\cos\varphi\,d\frac{dx}{dt}+\sin\varphi\,d\frac{dy}{dt}+d\frac{dr}{dt}-\frac{r^2 d\varphi^2}{dt}\right)\delta r-d\,\frac{dz+dZ}{dt}\delta Z\Big].$$

A présent, pour avoir la valeur de

$$\mathrm{M}u\,\delta u+\mathrm{M}'u'\,\delta u'+\mathrm{M}''u''\,\delta u'',$$

on fera dans l'équation (U) de l'Article VIII toutes les quantités P, Q, R, P', Q',..., qui représentent des forces étrangères égales à zéro, et l'on aura

$$\mathrm{M}u\,\delta u+\mathrm{M}'u'\,\delta u'+\mathrm{M}''u''\,\delta u''=-\mathrm{MM}'\mathrm{F}\,\delta f-\mathrm{MM}''\mathrm{F}'\,\delta f'-\mathrm{M}'\mathrm{M}''\mathrm{G}\,\delta g.$$

Or il est facile de trouver que

$$f=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}=\sqrt{r^2+Z^2},\quad f'=\sqrt{X'^2+Y'^2+Z'^2}=\sqrt{r'^2+Z'^2},$$

$$g=\sqrt{(X'-X)^2+(Y'-Y)^2+(Z'-Z)^2}=\sqrt{r'^2+r^2-2r'r\cos(\varphi'-\varphi)+(Z'-Z)^2};$$

d'où l'on tirera, en regardant toujours φ', r' et Z' comme constantes,

$$\delta f=\frac{r\delta r+Z\delta Z}{f},\quad \delta f'=0,$$

$$\delta g=\frac{r-r'\cos(\varphi'-\varphi)}{g}\delta r-\frac{r'r\sin(\varphi'-\varphi)}{g}\delta\varphi-\frac{Z'-Z}{g}\delta Z.$$

Ayant fait ces substitutions, on ajoutera ensemble les valeurs de $M'\int u'\delta ds'$, et de $Mu\delta u+M'u'\delta u'+M''u''\delta u''$, et l'on aura une formule intégrale, dont chaque terme contiendra une des différences $\delta\varphi$, δr, δZ, et qui devra être égale à zéro, quelles que soient les valeurs de ces différences. On trouvera donc, en faisant séparément égal à zéro chacun de leurs coefficients, et divisant par M',

$$-d\frac{r^2d\varphi}{dt}+r\sin\varphi\, d\frac{dx}{dt}-r\cos\varphi\, d\frac{dy}{dt}+\frac{r'r\sin(\varphi'-\varphi)}{g}M''G\,dt=0,$$

$$d\frac{dr}{dt}-\frac{rd\varphi^2}{dt}+\cos\varphi\, d\frac{dx}{dt}+\sin\varphi\, d\frac{dy}{dt}+\frac{r}{f}MF\,dt+\frac{r-r'\cos(\varphi'-\varphi)}{g}M''G\,dt=0,$$

$$d\frac{dz+dZ}{dt}-\frac{Z'-Z}{g}M''G\,dt=0,$$

équations qui se réduisent à la forme de celles de l'Article IV, en supposant

$$r\sin\varphi\, d\frac{dx}{dt}-r\cos\varphi\, d\frac{dy}{dt}+\frac{rr'\sin(\varphi'-\varphi)}{g}M''G\,dt=-\varpi dt,$$

$$\cos\varphi\, d\frac{dx}{dt}+\sin\varphi\, d\frac{dy}{dt}+\frac{r}{f}MF\,dt+\frac{r-r'\cos(\varphi'-\varphi)}{g}M''G\,dt=\Pi\,dt,$$

$$d\frac{dz}{dt}-\frac{Z'-Z}{g}M''G\,dt=\Psi\,dt.$$

Et ces équations suffiront pour déterminer l'orbite du corps M', en supposant connues les orbites des deux autres corps M, M''.

Qu'on fasse maintenant, dans les expressions de $\delta ds'$, $\delta ds''$, $\delta f'$, δg, les changeantes r', φ', Z' variables au lieu des r, φ, Z; on trouvera, par des raisonnements et des opérations semblables aux précédentes, trois autres équations, qui ne différeront des équations ci-dessus que parce qu'il y aura r', φ', Z' à la place de r, φ, Z et réciproquement, et ces équations seront celles de l'orbite du corps M″.

XV.

Corollaire I. — Si l'on ne connaissait pas l'orbite absolue du corps M, alors, pour déterminer les valeurs des quantités $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, il faudrait aussi faire varier les trois changeantes x, y, z dans les valeurs de ds, ds', ds'', ce qui donnerait

$$\delta ds = \frac{1}{ds}(dx\,\delta dx + dy\,\delta dy + dz\,\delta dz),$$

$$\delta ds' = \frac{1}{ds'}[dx + d(r\cos\varphi)]\,\delta dx + [dy + d(r\sin\varphi)]\,\delta dy + (dz + dZ)\,\delta dz,$$

$$\delta ds'' = \frac{1}{ds''}[dx + d(r'\cos\varphi')]\,\delta dx + [dy + d(r'\sin\varphi')]\,\delta dy + (dz + dZ')\,\delta dz.$$

On substituerait ces valeurs dans l'équation générale (D) de l'Article VIII, et faisant après les réductions ordinaires les trois coefficients de δx, δy, δz chacun égal à zéro, on aurait trois équations, par lesquelles on pourrait déterminer les valeurs de $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}\cdot$ Au reste, ces équations reviendraient au même que celles de l'Article X, en y faisant P, Q, R chacun égal à zéro.

XVI.

Corollaire II. — Les équations qu'on trouverait par la méthode du Corollaire précédent ne renfermeraient point les forces F, F′, G, mais seulement les changeantes r, φ, r', φ' avec leurs différences; mais, pour ne pas trop charger de différentielles les équations du mouvement des corps M′, M″, il sera mieux de chercher les valeurs de $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, en considérant directement les orbites absolues de ces deux corps.

Que $x', y', z', x'', y'', z''$ soient les ordonnées rectangles des orbites dont nous parlons : on parviendra à une équation qui sera la même que l'équation (E) du Problème II, et dans laquelle, à cause que les corps sont libres, il faudra faire les coefficients de δx, δy, δz, $\delta x'$, $\delta y'$,..., chacun égal à zéro. Or il est facile de trouver que

$$\begin{aligned}
f &= \sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2},\\
f' &= \sqrt{(x''-x)^2+(y''-y)^2+(z''-z)^2},\\
g &= \sqrt{(x''-x')^2+(y''-y')^2+(z''-z')^2};
\end{aligned}$$

pour notre cas, il suffit de faire varier x, y, z seulement; on aura donc

$$\begin{aligned}
\delta f &= -\frac{x'-x}{f}\delta x - \frac{y'-y}{f}\delta y - \frac{z'-z}{f}\delta z,\\
\delta f' &= -\frac{x''-x}{f'}\delta x - \frac{y''-y}{f'}\delta y - \frac{z''-z}{f'}\delta z,\\
\delta g &= 0.
\end{aligned}$$

On substituera ces valeurs dans l'expression

$$-\mathrm{MM'F}\,\delta f - \mathrm{MM''F'}\,\delta f' - \mathrm{M'M''G}\,\delta g,$$

et à cause de

$$\begin{aligned}
&x'-x = \mathrm{X} = r\cos\varphi, \quad y'-y = \mathrm{Y} = r\sin\varphi, \quad z'-z = \mathrm{Z},\\
&x''-x = \mathrm{X'} = r'\cos\varphi', \quad y''-y = \mathrm{Y'} = r'\sin\varphi', \quad z''-z = \mathrm{Z'},
\end{aligned}$$

on aura

$$\begin{aligned}
&\mathrm{M}u\,\delta u + \mathrm{M'}u'\,\delta u' + \mathrm{M''}u''\,\delta u''\\
&\quad = \mathrm{M}\left(\frac{\mathrm{M'F}r\cos\varphi}{f} + \frac{\mathrm{M''F'}r'\cos\varphi'}{f'}\right)\delta x + \mathrm{M}\left(\frac{\mathrm{M'F}r\sin\varphi}{f} + \frac{\mathrm{M''F'}r'\sin\varphi'}{f'}\right)\delta y\\
&\quad\quad + \mathrm{M}\left(\frac{\mathrm{M'FZ}}{f} + \frac{\mathrm{M''F'Z'}}{f'}\right)\delta z.
\end{aligned}$$

Mettant cette valeur de

$$M u \delta u + M' u' \delta u' + M'' u'' \delta u''$$

dans l'équation (E), et faisant égal à zéro séparément chacun des trois coefficients de δx, δy, δz, il viendra, après avoir divisé le tout par M, et mis dt à la place de $\frac{ds}{u}$,

$$d\frac{dx}{dt} - \left(\frac{M' F r \cos\varphi}{f} + \frac{M'' F' r' \cos\varphi'}{f'}\right) dt = 0,$$
$$d\frac{dy}{dt} - \left(\frac{M' F r \sin\varphi}{f} + \frac{M'' F' r' \sin\varphi'}{f'}\right) dt = 0,$$
$$d\frac{dz}{dt} - \left(\frac{M' FZ}{f} + \frac{M'' F' Z'}{f'}\right) dt = 0.$$

Par là, les valeurs de ϖ, Π, Ψ de l'Article XIV deviendront, après quelques réductions fort simples,

$$M''\left(\frac{G}{g} - \frac{F'}{f'}\right) r r' \sin(\varphi' - \varphi) = \varpi,$$
$$(M + M')\frac{Fr}{f} + M''\left\{\frac{G}{g}[r - r'\cos(\varphi' - \varphi)] + \frac{F'}{f'} r' \cos(\varphi' - \varphi)\right\} = \Pi,$$
$$M'\frac{FZ}{f} + M''\left[\frac{F'Z'}{f'} - \frac{G(Z' - Z)}{g}\right] = \Psi.$$

XVII.

Problème IV. — *Un corps M étant sollicité par tant de forces qu'on voudra P, Q, R,..., et tirant après lui deux autres corps M', M'' par le moyen de deux fils de longueurs données, trouver le mouvement de chacun de ces trois corps. On suppose, pour plus de simplicité, qu'ils se meuvent tous trois dans le même plan.*

Solution. — Soient f, f' les longueurs données des fils, c'est-à-dire les distances invariables des corps M', M'' au corps M; x, y les coordonnées rectangles de la courbe décrite par le corps M, et φ, φ' les angles que les lignes f, f' forment à chaque instant avec l'axe des x; prenant x', y',

x'', y'' pour les coordonnées rectangles des autres corps M′, M″, on aura

$$x' = x - f\cos\varphi,\quad y' = y - f\sin\varphi,$$
$$x'' = x - f'\cos\varphi'',\quad y'' = y - f'\sin\varphi',$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2,$$
$$ds'^2 = dx'^2 + dy'^2 = dx^2 + dy^2 + 2f(\sin\varphi\, dx - \cos\varphi\, dy)\, d\varphi + f^2\, d\varphi^2,$$
$$ds''^2 = dx''^2 + dy''^2 = dx^2 + dy^2 + 2f'(\sin\varphi'\, dx - \cos\varphi'\, dy) d\varphi' + f'^2 d\varphi'^2,$$

d'où l'on tire

$$\delta\, ds = \frac{1}{ds}(dx\,\delta\, dx + dy\,\delta\, dy),$$

$$\begin{aligned}\delta\, ds' = \frac{1}{ds'}[&(dx + f\sin\varphi\, d\varphi)\delta\, dx + (dy - f\cos\varphi\, d\varphi)\delta\, dy \\ &+ f\, d\varphi(\cos\varphi\, dx + \sin\varphi\, dy)\,\delta\varphi + f(\sin\varphi\, dx - \cos\varphi\, dy + f\, d\varphi)\,\delta\, d\varphi],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta\, ds'' = \frac{1}{ds''}[&(dx + f'\sin\varphi'\, d\varphi')\,\delta\, dx + (dy - f'\cos\varphi'\, d\varphi')\delta\, dy \\ &+ f'\, d\varphi'(\cos\varphi'\, dx + \sin\varphi'\, dy)\,\delta\varphi' + f'(\sin\varphi' dx - \cos\varphi' dy + f'\, d\varphi')\,\delta\, d\varphi'].\end{aligned}$$

On substituera ces valeurs dans les intégrales

$$\int u\,\delta\, ds,\quad \int u'\,\delta\, ds',\quad \int u''\,\delta\, ds''$$

de l'équation (D) de l'Article VIII, et faisant les transformations et les réductions ordinaires, on trouvera

$$\int u\,\delta\, ds = -\int\left(d\,\frac{dx}{dt}\,\delta x + d\,\frac{dy}{dt}\,\delta y\right),$$

$$\begin{aligned}\int u'\,\delta\, ds' = -\int\Bigg[&d\,\frac{dx + f\sin\varphi\, d\varphi}{dt}\,\delta x + d\,\frac{dy - f\cos\varphi\, d\varphi}{dt}\,\delta y \\ &- \left(\frac{\cos\varphi\, dx + \sin\varphi\, dy}{dt}\, f\, d\varphi - d\,\frac{\sin\varphi\, dx - \cos\varphi\, dy - f\, d\varphi}{dt}\, f\right)\delta\varphi\Bigg].\end{aligned}$$

Et l'on aura pour $\int u''\,\delta\, ds''$ la même expression que pour $\int u'\,\delta\, ds'$, en marquant seulement d'un trait les lettres φ et f, comme il est aisé de s'en assurer par le calcul.

Pour avoir maintenant la valeur de

$$\mathrm{M}u\,\delta u + \mathrm{M}'u'\,\delta u' + \mathrm{M}''u''\,\delta u'',$$

on aura recours à l'équation générale (U) de l'Article VIII, laquelle donnera pour le cas présent

$$\mathrm{M}u\delta u + \mathrm{M}'u'\delta u' + \mathrm{M}''u''\delta u'' = -\mathrm{M}(\mathrm{P}\delta p + \mathrm{Q}\delta q + \mathrm{R}\delta r) = -\mathrm{M}(\Pi\delta x + \varpi\delta y),$$

en faisant les mêmes suppositions que dans l'Article I.

Il n'y a plus qu'à mettre ces différentes transformées dans l'équation (D); or, si l'on fait, pour abréger,

$$\mathrm{M}\left(d\frac{dx}{dt} + \Pi\,dt\right) + \mathrm{M}'d\left[\frac{1}{dt}(dx + f\sin\varphi\,d\varphi)\right] + \mathrm{M}''d\left[\frac{1}{dt}(dx + f'\sin\varphi'\,d\varphi')\right] = [x],$$

$$\mathrm{M}\left(d\frac{dy}{dt} + \varpi\,dt\right) + \mathrm{M}'d\left[\frac{1}{dt}(dy - f\cos\varphi\,d\varphi)\right] + \mathrm{M}''d\left[\frac{1}{dt}(dy - f'\cos\varphi'\,d\varphi')\right] = [y],$$

$$\frac{\mathrm{M}'f\,d\varphi}{dt}(\cos\varphi\,dx + \sin\varphi\,dy) - \mathrm{M}'d\left[\frac{f}{dt}(\sin\varphi\,dx - \cos\varphi\,dy + f\,d\varphi)\right] = [\varphi],$$

$$\frac{\mathrm{M}''f'\,d\varphi'}{dt}(\cos\varphi'\,dx + \sin\varphi'\,dy) - \mathrm{M}''d\left[\frac{f'}{dt}(\sin\varphi'\,dx - \cos\varphi'\,dy + f'\,d\varphi')\right] = [\varphi'],$$

on trouve

$$\text{(H)}\qquad -\int([x]\delta x + [y]\delta y - [\varphi]\delta\varphi - [\varphi']\delta\varphi') = 0,$$

d'où l'on tire par notre méthode

$$[x] = 0,\quad [y] = 0,\quad [\varphi] = 0;\quad [\varphi'] = 0,$$

quatre équations qui suffiront pour déterminer le rapport des indéterminées x, y, φ, φ' au temps t, et par conséquent le mouvement de chacun des trois corps M, M', M''.

XVIII.

Corollaire I. — Si le corps M était mû dans une rainure courbe représentée par l'équation

$$dy = m\,dx,$$

alors il n'y aurait qu'à mettre, dans l'équation (H), $m\delta x$ pour δy, et faire ensuite chacun des trois coefficients de δx, $\delta\varphi$, $\delta\varphi'$ égal à zéro; ce qui donnerait pour les équations du mouvement des corps

$$[x] + m[y] = 0, \quad [\varphi] = 0, \quad [\varphi'] = 0.$$

Si le corps M était, outre cela, obligé de se mouvoir avec une vitesse dont la loi à chaque point de la courbe fût donnée, alors, comme le mouvement de ce corps serait entièrement donné, on aurait $\delta x = 0$ et $\delta y = 0$; c'est pourquoi il faudrait supprimer les équations $[x] = 0$ et $[y] = 0$, et mettre dans les deux autres $[\varphi] = 0$, $[\varphi'] = 0$, au lieu de $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, leurs valeurs données.

XIX.

Corollaire II. — Supposons que les trois corps M, M′, M″, au lieu de se tenir par des fils, soient attachés à une verge inflexible, en sorte que l'angle des lignes f, f' soit constant et égal à α; on aura donc en ce cas

$$\varphi' = \varphi + \alpha \quad \text{et} \quad \delta\varphi' = \delta\varphi;$$

ainsi, il ne faudra qu'écrire, dans l'équation (H), $\varphi + \alpha$ pour φ' et $\delta\varphi$ pour $\delta\varphi'$, et faisant ensuite les coefficients de δx, δy, $\delta\varphi$ chacun en particulier égal à zéro, on aura

$$[x] = 0, \quad [y] = 0, \quad [\varphi] + [\varphi'] = 0.$$

XX.

Corollaire III. — Si l'on veut de plus, dans le cas du Corollaire précédent, que le corps M se meuve dans une rainure courbe dont l'équation soit $dy = m dx$, mettant, comme dans l'Article XVIII, $m\delta x$ au lieu de δy, et faisant chacun égal à zéro les coefficients de δx et $\delta\varphi$, on aura simplement les deux équations

$$[x] + m[y] = 0, \quad \text{et} \quad [\varphi] + [\varphi'] = 0.$$

Mais si la vitesse du corps M est aussi donnée, en ce cas, δx et δy étant nuls, il ne restera que l'équation

$$[\varphi]+[\varphi']=0,$$

dans laquelle il faudra mettre, au lieu de $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$, leurs valeurs données.

XXI.

Corollaire IV. — Si les corps M', M'' étaient liés par un même fil, de longueur donnée, le long duquel l'autre corps M pût couler librement par le moyen d'un anneau, on pourrait résoudre le Problème de la même manière en faisant les quantités f, f' variables dans les expressions de ds', ds'' et de leurs différences $\delta ds'$, $\delta ds''$.

Pour cela, il n'y aurait qu'à augmenter la valeur de ds'^2 trouvée ci-dessus (Article XVII) de la quantité

$$-2(\cos\varphi\, dx+\sin\varphi\, dy)\,df+df^2,$$

et ensuite celle de $\delta ds'$ de la quantité

$$\begin{aligned}(\sin\varphi\, dx-\cos\varphi\, dy+f d\varphi)\,d\varphi\,\delta f-(\cos\varphi\, dx+\sin\varphi\, dy-df)\,\delta df\\ +(\sin\varphi\, dx-\cos\varphi\, dy)\,df\,\delta\varphi-\cos\varphi\, df\,\delta dx-\sin\varphi\, df\,\delta dy\end{aligned}$$

divisée par ds'; c'est pourquoi la valeur de la formule intégrale $\int u'\,\delta ds'$ serait augmentée de

$$\begin{aligned}\int\Bigg\{ & d\,\frac{\cos\varphi\, df}{dt}\,\delta x+d\,\frac{\sin\varphi\, df}{dt}\,\delta y+\frac{df}{dt}(\sin\varphi\, dx-\cos\varphi\, dy)\,\delta\varphi\\ &+\left[\frac{d\varphi}{dt}(\sin\varphi\, dx-\cos\varphi\, dy+f d\varphi)+d\,\frac{1}{dt}(\cos\varphi\, dx+\sin\varphi\, dy-df)\right]\delta f\Bigg\}.\end{aligned}$$

Et l'autre formule intégrale $\int u''\,\delta ds''$ serait aussi augmentée de la même quantité, en marquant seulement d'un trait les deux lettres φ et f. Par là, l'équation (H) deviendrait de cette forme :

$$\text{(I)}\qquad -\int[(x)\,\delta x+(y)\,\delta y-(\varphi)\,\delta\varphi-(\varphi')\,\delta\varphi'+(f)\,\delta f+(f')\,\delta f']=0,$$

dans laquelle

$$(x)=[x]-\mathrm{M}'d\,\frac{\cos\varphi\, df}{dt}-\mathrm{M}''d\,\frac{\cos\varphi'\, df}{dt},$$

$$(y)=[y]-\mathrm{M}'d\,\frac{\sin\varphi\, df}{dt}-\mathrm{M}''d\,\frac{\sin\varphi'\, df'}{dt},$$

$$(\varphi)=[\varphi]+\mathrm{M}'\,\frac{df}{dt}(\sin\varphi\, dx-\cos\varphi\, dy),$$

$$(\varphi')=[\varphi']+\mathrm{M}''\frac{df'}{dt}(\sin\varphi'\, dx-\cos\varphi'\, dy),$$

$$(f)=\mathrm{M}'\,\frac{d\varphi}{dt}(\sin\varphi\, dx-\cos\varphi\, dy-f\,d\varphi)+\mathrm{M}'d\left[\frac{1}{dt}(\cos\varphi\, dx+\sin\varphi\, dy-df)\right],$$

$$(f')=\mathrm{M}''\,\frac{d\varphi'}{dt}(\sin\varphi'\, dx-\cos\varphi'\, dy+f'\,d\varphi')+\mathrm{M}''d\left[\frac{1}{dt}(\cos\varphi'\, dx+\sin\varphi'\, dy-df')\right]\,(*).$$

Maintenant, les deux corps M', M'' étant attachés fixement aux extrémités du fil qui est supposé inextensible, il faut que la somme des lignes f et f' soit constante; soit cette somme, c'est-à-dire la longueur totale du fil, égale à a, on aura

$$f'=a-f \quad \text{et} \quad \delta f'=-\delta f;$$

on fera donc ces substitutions dans l'équation (I), et mettant ensuite chacun égal à zéro les coefficients des différences restantes δx, δy, $\delta\varphi$, $\delta\varphi'$, δf, on aura les cinq équations

$$(x)=0,\quad (y)=0,\quad (\varphi)=0,\quad (\varphi')=0,\quad (f)-(f')=0,$$

lesquelles donneront le rapport des cinq indéterminées x, y, φ, φ', f au temps t.

XXII.

Corollaire V. — Si le corps M était fixe, ou, ce qui revient au même, si le fil qui joint les deux corps M', M'' passait à travers un anneau immo-

(*) On a rétabli, dans ces formules, les masses M' et M'' qui sont omises dans le texte primitif. (*Note de l'Éditeur.*)

bile, on aurait pour lors dx, dy et δx, δy chacun égal à zéro, et les équations du mouvement des deux corps seraient

$$(\varphi)=0, \quad (\varphi')=0 \quad \text{et} \quad (f)-(f')=0,$$

savoir, à cause que $dx=0$, $dy=0$ et $f'=a-f$,

$$d\frac{f^2 d\varphi}{dt}=0, \quad d\frac{(a-f)^2 d\varphi'}{dt}=0,$$

et

$$\frac{f(d\varphi^2+d\varphi'^2)-ad\varphi'^2}{dt}+2d\frac{df}{dt}=0\ (*).$$

Les deux premières équations, étant intégrées, donneront

$$d\varphi^2=\frac{A\,dt^2}{f^4}, \quad d\varphi'^2=\frac{B\,dt^2}{(a-f)^4},$$

et, ces valeurs substituées dans la troisième, on aura

$$\frac{A\,dt}{f^3}-\frac{B\,dt}{(a-f)^3}+2d\frac{df}{dt}=0,$$

laquelle étant multipliée par $\frac{df}{dt}$, et ensuite intégrée, devient

$$-\frac{A}{2f^2}+\frac{B}{2(a-f)^2}+\frac{df^2}{dt^2}=C,$$

d'où l'on tire

$$dt=\frac{df}{\sqrt{C+\frac{A}{2f^2}-\frac{B}{2(a-f)^2}}}.$$

XXIII.

Corollaire VI. — Si dans le cas du Corollaire précédent les deux corps M′, M″ étaient attachés à une verge droite et inflexible, alors on aurait $\varphi'=\varphi$ et $\delta\varphi'=\delta\varphi$, et les équations $(\varphi)=0$, $(\varphi')=0$ n'en feraient

(*) Dans cet Article et dans le suivant, Lagrange ne tient pas compte des masses; il en résulte que les formules obtenues se rapportent au seul cas où les masses M′ et M″ sont égales entre elles. (*Note de l'Éditeur.*)

plus qu'une seule, savoir $(\varphi)+(\varphi')=0$; on aurait donc simplement les deux équations

$$(\varphi)+(\varphi')=0 \quad \text{et} \quad (f)-(f')=0,$$

c'est-à-dire

$$d\frac{(a^2-2af+2f^2)\,d\varphi}{dt}=0 \quad \text{et} \quad \frac{(2f-a)\,d\varphi^2}{dt}+2d\frac{df}{dt}=0,$$

lesquelles donnent, en chassant dt,

$$\frac{(2f-a)\,d\varphi}{a^2-2af+2f^2}+2d\frac{df}{(a^2-2af+2f^2)\,d\varphi}=0.$$

Cette équation étant multipliée par $\frac{df}{a^2-2af+2f^2}$, et ensuite intégrée, en regardant $d\varphi$ comme constante, deviendra celle-ci

$$\frac{d\varphi}{2(a^2-2af+2f^2)}+\frac{df^2}{(a^2-2af+2f^2)^2\,d\varphi}=\frac{d\varphi}{A^2},$$

qui se réduit à

$$d\varphi=\frac{A\,df\sqrt{2}}{\sqrt{2(a^2-2af+2f^2)^2-A^2(a^2-2af+2f^2)}}.$$

XXIV.

Problème V. — *Trouver le mouvement d'un fil fixe en une de ses extrémités, et chargé de tant de corps pesants qu'on voudra* M, M′, M″,....

Solution. — Ayant pris, comme dans l'Article IX, x, y, z, x', y', z', x'', y'', z'',... pour les coordonnées rectangles des corps M, M′, M″,..., on a d'abord l'équation (E). Soit maintenant f la portion du fil interceptée entre l'extrémité fixe et le corps M; soient aussi f', f'',... les portions du même fil interceptées entre les corps M et M′, M′ et M″, et ainsi de suite; on aura les équations

$$\begin{aligned}
f &= \sqrt{x^2+y^2+z^2},\\
f' &= \sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2},\\
f'' &= \sqrt{(x''-x')^2+(y''-y')^2+(z''-z')^2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

l'origine des abscisses x, x', x'',... étant à l'extrémité fixe du fil. On tire de là

$$\begin{aligned}
x &= \sqrt{f^2 - y^2 - z^2},\\
x' &= x + \sqrt{f'^2 - (y'-y)^2 - (z'-z)^2},\\
x'' &= x' + \sqrt{f''^2 - (y''-y')^2 - (z''-z')^2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

et par conséquent

$$\delta x = -\frac{1}{x}(y\delta y + z\delta z),$$

$$\begin{aligned}
\delta x' &= \delta x - \frac{1}{x'-x}[(y'-y)(\delta y' - \delta y) + (z'-z)(\delta z' - \delta z)]\\
&= \left(\frac{y'-y}{x'-x} - \frac{y}{x}\right)\delta y - \frac{y'-y}{x'-x}\delta y' + \left(\frac{z'-z}{x'-x} - \frac{z}{x}\right)\delta z - \frac{z'-z}{x'-x}\delta z',
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta x'' &= \delta x' - \frac{1}{x''-x'}[(y''-y')(\delta y'' - \delta y') + (z''-z')(\delta z'' - \delta z')]\\
&= \left(\frac{y'-y}{x'-x} - \frac{y}{x}\right)\delta y + \left(\frac{y''-y'}{x''-x'} - \frac{y'-y}{x'-x}\right)\delta y' - \frac{y''-y'}{x''-x'}\delta y''\\
&\quad + \left(\frac{z'-z}{x'-x} - \frac{z}{x}\right)\delta z + \left(\frac{z''-z'}{x''-x'} - \frac{z'-z}{x'-x}\right)\delta z' - \frac{z''-z'}{x''-x'}\delta z'',
\end{aligned}$$

et ainsi de suite.

Maintenant, si on suppose, ce qui est absolument arbitraire, l'axe des x, x', x'',... vertical, et que P exprime la pesanteur absolue des corps, il faudra mettre dans l'équation (U) de l'Article VIII δx, $\delta x'$, $\delta x''$,... au lieu de δp, $\delta p'$, $\delta p''$,..., $-$P au lieu de P, P', P'',..., et toutes les autres forces Q, R, Q',... égales à zéro; on aura donc

$$\mathrm{M}u\delta u + \mathrm{M}'u'\delta u' + \mathrm{M}''u''\delta u'' + \ldots = \mathrm{P}(\mathrm{M}\delta x + \mathrm{M}'\delta x' + \mathrm{M}''\delta x'' + \ldots).$$

Faisant ces substitutions dans l'équation (E) citée ci-devant, et ordonnant les termes, elle deviendra de la forme suivante :

$$\int([y]\delta y + [y']\delta y' + [y'']\delta y'' + \ldots + [z]\delta z + [z']\delta z' + [z'']\delta z'' + \ldots) = 0,$$

dans laquelle on aura, après avoir mis au lieu de $\frac{ds}{u}$, $\frac{ds'}{u'}$, $\frac{ds''}{u''}$,... leur valeur commune dt,

$$
\begin{aligned}
[y] = \mathrm{M}\left[d\frac{dy}{dt} + \frac{y}{x}\left(\mathrm{P}dt - d\frac{dx}{dt}\right)\right]& \\
-\left[\frac{y'-y}{x'-x} - \frac{y}{x}\right]\Bigg[\mathrm{M}'\left(\mathrm{P}dt - d\frac{dx'}{dt}\right) + \mathrm{M}''\left(\mathrm{P}dt - d\frac{dx''}{dt}\right)& \\
+ \mathrm{M}'''\left(\mathrm{P}dt - d\frac{dx'''}{dt}\right) + \ldots\Bigg]&,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[y'] = \mathrm{M}'\left[d\frac{dy'}{dt} + \frac{y'-y}{x'-x}\left(\mathrm{P}dt - d\frac{dx'}{dt}\right)\right]& \\
-\left[\frac{y''-y'}{x''-x'} - \frac{y'-y}{x'-x}\right]\left[\mathrm{M}''\left(\mathrm{P}dt - d\frac{dx''}{dt}\right) + \mathrm{M}'''\left(\mathrm{P}dt - d\frac{dx'''}{dt}\right) + \ldots\right]&,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[y''] = \mathrm{M}''\left[d\frac{dy''}{dt} + \frac{y''-y'}{x''-x}\left(\mathrm{P}dt - d\frac{dx''}{dt}\right)\right]& \\
-\left[\frac{y'''-y''}{x'''-x''} - \frac{y''-y'}{x''-x'}\right]\left[\mathrm{M}'''\left(\mathrm{P}dt - d\frac{dx'''}{dt}\right) + \ldots\right]&, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&,
\end{aligned}
$$

et les valeurs de $[z]$, $[z']$, $[z'']$,... seront les mêmes que celles de $[y]$, $[y']$, $[y'']$,..., en y mettant simplement z, z', z'',... au lieu de y, y', y'',....

On fera donc, suivant notre méthode,

$$
\begin{gathered}
[y] = 0, \quad [y'] = 0, \quad [y''] = 0, \ldots, \\
[z] = 0, \quad [z'] = 0, \quad [z''] = 0, \ldots,
\end{gathered}
$$

équations qui, avec celles qu'on a trouvées plus haut, suffiront pour résoudre le Problème.

XXV.

Corollaire. — Soient les corps M, M′, M″,... infiniment petits, et placés à des distances égales les uns des autres; marquant par la lettre d la différence de deux coordonnées consécutives quelconques, on aura en général

$$
\frac{y'-y}{x'-x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \quad \text{et} \quad \frac{y''-y'}{x''-x'} - \frac{y'-y}{x'-x} = \mathrm{d}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.
$$

Soit dm chaque petit poids dont le fil est chargé; soit, de plus, désignée par $\mathrm{T}dt$ la somme des valeurs de $dm\left(\mathrm{P}dt - d\frac{dx}{dt}\right)$ pour toute la longueur du fil, et la somme indéfinie des mêmes valeurs prise relativement à l'abscisse x, marquée par la lettre S, de cette manière

$$\mathrm{S}dm\left(\mathrm{P}dt - d\frac{dx}{dt}\right);$$

il est facile de voir que les équations $[y]=0$, $[y']=0$, $[y'']=0$,... se réduiront toujours à celle-ci générale :

$$dm\left[d\frac{dy}{dt} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\left(\mathrm{P}dt - d\frac{dx}{dt}\right)\right] - \mathrm{d}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\left[\mathrm{T}dt - \mathrm{S}dm\left(\mathrm{P}dt - d\frac{dx}{dt}\right)\right] = 0;$$

que de même les équations $[z]=0$, $[z']=0$, $[z'']=0$,... se changeront en

$$dm\left[d\frac{dz}{dt} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\left(\mathrm{P}dt - d\frac{dx}{dt}\right)\right] - \mathrm{d}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\left[\mathrm{T}dt - \mathrm{S}dm\left(\mathrm{P}dt - d\frac{dx}{dt}\right)\right] = 0.$$

Ce seront donc ces deux équations qui serviront à déterminer le mouvement du fil; mais il y faudra encore ajouter une troisième équation qui se déduira de ce que chaque élément du fil, dont l'expression générale est $\sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2}$, doit demeurer constant, pendant que le fil varie de courbe. Cette équation sera donc

$$\frac{d\sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2}}{dt} = 0,$$

savoir

$$\mathrm{d}x\left(\frac{d\,\mathrm{d}x}{dt}\right) + \mathrm{d}y\left(\frac{d\,\mathrm{d}y}{dt}\right) + \mathrm{d}z\left(\frac{d\,\mathrm{d}z}{dt}\right) = 0.$$

Dans le cas des oscillations infiniment petites on a $\frac{dx}{dt} = 0$, parce qu'alors chaque point du fil répond toujours à très-peu près au même point de l'axe; de plus, si on regarde le fil comme uniformément épais, et que l'élément de sa courbe $\sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2}$ soit dénoté par $\mathrm{d}s$, on aura $dm = \mathrm{d}s$, et la formule intégrale $\mathrm{S}dm\left(\mathrm{P}dt - d\frac{dx}{dt}\right)$ se réduira à $\mathrm{SP}\,\mathrm{d}s\,dt = \mathrm{P}s\,dt$, à cause de $\mathrm{P}dt$ constant, s étant la longueur de la partie du fil qui répond à l'abscisse x; par conséquent, si la longueur totale du fil est l, on aura $T = Pl$, et les deux premières équations deviendront celles-ci, beaucoup plus simples,

$$ds\left(d\frac{dy}{dt} + \frac{dy}{dx}P\,dt\right) - P\,dt\,d\frac{dy}{dx}(l-s) = 0,$$

$$ds\left(d\frac{dz}{dt} + \frac{dz}{dx}P\,dt\right) - P\,dt\,d\frac{dz}{dx}(l-s) = 0;$$

la troisième sera inutile.

XXVI.

Scolie. — Si les fils $f, f', f'', \ldots$, qui joignent les corps M, M′, M″,..., étaient extensibles et élastiques, on aurait alors les équations

$$\begin{aligned} f\,\delta f &= x\,\delta x + y\,\delta y + z\,\delta z,\\ f'\,\delta f' &= (x'-x)(\delta x' - \delta x) + (y'-y)(\delta y' - \delta y) + (z'-z)(\delta z' - \delta z),\\ f'\,\delta f'' &= (x''-x')(\delta x'' - \delta x') + (y''-y')(\delta y'' - \delta y') + (z''-z')(\delta z'' - \delta z'), \end{aligned}$$

et ainsi de suite.

On trouvera de plus, en appelant F, F′, F″,... les forces d'élasticité ou de contraction des fils $f, f', f'', \ldots$, que l'équation (U) deviendra

$$\begin{aligned} &M u\,\delta u + M' u'\,\delta u' + M'' u''\,\delta u'' + \ldots\\ &\quad = P(M\,\delta x + M'\,\delta x' + M''\,\delta x'' + \ldots) - F\,\delta f - F'\,\delta f' - F''\,\delta f'' - \ldots, \end{aligned}$$

comme il est facile de s'en assurer en appliquant le principe de la conservation des forces vives au cas dont il s'agit ici.

On mettra donc, dans cette expression de

$$M u\,\delta u + M' u'\,\delta u' + M'' u''\,\delta u'' + \ldots,$$

au lieu de $\delta f, \delta f', \delta f'', \ldots$, les valeurs qu'on vient de trouver, et on la substituera ensuite dans l'équation (E) de l'Article IX; ce qui donnera, après avoir ordonné les termes et mis dt à la place de $\frac{ds}{u}, \frac{ds'}{u'}, \frac{ds''}{u''}, \ldots$, une équation de cette forme :

$$\int [(x)\,\delta x + (x')\,\delta x' + (x'')\,\delta x'' + \ldots + (y)\,\delta y + (y')\,\delta y' + (y'')\,\delta y'' + \ldots \\ + (z)\,\delta z + (z')\,\delta z' + (z'')\,\delta z'' + \ldots] = 0,$$

dans laquelle

$$(x) = \mathrm{M}\left(d\frac{dx}{dt} - \mathrm{P}dt\right) + \left(\frac{x}{f}\mathrm{F} - \frac{x'-x}{f'}\mathrm{F}'\right)dt,$$

$$(x') = \mathrm{M}'\left(d\frac{dx'}{dt} - \mathrm{P}dt\right) + \left(\frac{x'-x}{f'}\mathrm{F}' - \frac{x''-x'}{f''}\mathrm{F}''\right)dt,$$

$$(x'') = \mathrm{M}''\left(d\frac{dx''}{dt} - \mathrm{P}dt\right) + \left(\frac{x''-x'}{f''}\mathrm{F}'' - \frac{x'''-x''}{f'''}\mathrm{F}'''\right)dt,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$(y) = \mathrm{M}\,d\frac{dy}{dt} + \left(\frac{y}{f}\mathrm{F} - \frac{y'-y}{f'}\mathrm{F}'\right)dt,$$

$$(y') = \mathrm{M}'d\frac{dy'}{dt} + \left(\frac{y'-y}{f'}\mathrm{F}' - \frac{y''-y'}{f''}\mathrm{F}''\right)dt,$$

$$(y'') = \mathrm{M}''d\frac{dy''}{dt} + \left(\frac{y''-y'}{f''}\mathrm{F}'' - \frac{y'''-y''}{f'''}\mathrm{F}'''\right)dt,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et les autres expressions (z), (z'), (z'') seront les mêmes que les (y), (y'), (y''),..., en changeant seulement y en z, y' en z', y'' en z'',....

De cette équation on tirera donc, suivant notre méthode, les équations particulières

$$(x) = 0, \quad (x') = 0, \quad (x'') = 0, \ldots,$$
$$(y) = 0, \quad (y') = 0, \quad (y'') = 0, \ldots,$$
$$(z) = 0, \quad (z') = 0, \quad (z'') = 0, \ldots,$$

qui seront celles du mouvement des corps M, M', M'',....

XXVII.

Corollaire. — Si l'on veut que les masses M, M', M'',... soient infiniment petites et placées à des distances infiniment petites les unes des autres, conservant les suppositions faites dans l'Article XXV, on aura en général $\mathrm{M} = dm$, $f = \mathrm{d}s$, $x' - x = \mathrm{d}x$, $y' - y = \mathrm{d}y$, $z' - z = \mathrm{d}z$, et l'on trouvera que les équations ci-dessus se changeront dans les trois suivantes :

$$dm \left(d\frac{dx}{dt} - \mathrm{P}\,dt\right) - \mathrm{d}\frac{\mathrm{F}\,\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\,dt = 0,$$

$$dm\, d\frac{dy}{dt} - \mathrm{d}\frac{\mathrm{F}\,\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\,dt = 0,$$

$$dm\, d\frac{dz}{dt} - \mathrm{d}\frac{\mathrm{F}\,\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\,dt = 0,$$

où la quantité F marque l'élasticité variable de chaque élément du fil.

Si l'on fait abstraction de la pesanteur P, et qu'on suppose, outre cela, les oscillations du fil infiniment petites, en sorte que l'abscisse x demeure toujours la même pour chaque élément $\mathrm{d}s$, la première équation se réduira à

$$-\,\mathrm{d}\frac{\mathrm{F}\,\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\,dt = 0,$$

dont l'intégrale est $\frac{\mathrm{F}\,\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = k$, ce qui donne

$$\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{d}s} = \frac{k}{\mathrm{d}x},$$

et cette valeur étant substituée dans les deux autres équations, on aura, à cause de k constant,

$$dm\, d\frac{dy}{dt} = \mathrm{d}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\,k\,dt, \quad dm\, d\frac{dz}{dt} = \mathrm{d}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\,k\,dt.$$

Soit X l'épaisseur du fil, en sorte que $dm = \mathrm{X}\,\mathrm{d}x$ (il faudrait mettre à la rigueur $dm = \mathrm{X}\,\mathrm{d}s$, mais comme on suppose les vibrations infiniment petites, il est clair que $\mathrm{d}y$ et $\mathrm{d}z$ seront aussi infiniment petites par rapport à $\mathrm{d}x$, et qu'ainsi $\mathrm{d}s$ sera à très-peu près égal à $\mathrm{d}x$), on trouvera en différentiant et prenant dt et $\mathrm{d}x$ pour constantes, ce qui est permis,

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{k}{\mathrm{X}}\,\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}, \quad \frac{d^2z}{dt} = \frac{k}{\mathrm{X}}\,\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2},$$

équations connues.

XXVIII.

Remarque. — Les équations trouvées pour le mouvement d'un fil vibrant, élastique ou non, peuvent encore l'être d'une autre manière plus directe, en regardant d'abord le fil comme un assemblage d'une infinité de points mobiles; c'est ce qu'il est bon de faire voir pour développer davantage l'application de notre principe général à ces sortes de questions.

XXIX.

Problème VI. — *Trouver le mouvement d'un fil inextensible, dont tous les points sont sollicités par des forces quelconques* P, Q, R,....

Solution. — En conservant les noms donnés dans l'Article XXV, soient, de plus, u la vitesse de chaque élément du fil, et ds le petit espace qu'il parcourt dans le temps dt; il est facile de voir que la formule du principe général deviendra

$$\mathrm{S}\, dm \int u\, ds.$$

On fera donc, suivant notre méthode, l'équation

$$\delta\, \mathrm{S}\, dm \int u\, ds = 0,$$

qui se réduira d'abord, à cause que dm est constant pendant que le fil varie de courbe, à

$$\mathrm{S}\, dm\, \delta \int u\, ds = 0,$$

savoir à

$$\mathrm{S}\, dm \int (u\, \delta ds + \delta u\, ds) = \mathrm{S}\, dm \int u\, \delta\, ds + \mathrm{S}\, dm \int u\, \delta u\, dt = 0,$$

en mettant dt pour $\frac{ds}{u}$.

Maintenant, si on prend pour chaque élément du fil trois coordonnées rectangles x, y, z, comme dans le Problème I, on aura aussi

$$\delta ds = \frac{1}{ds}(dx\,d\,\delta x + dy\,d\,\delta y + dz\,d\,\delta z)$$

et

$$\int u\,\delta\,ds = -\int\left(d\,\frac{dx}{dt}\,\delta x + d\,\frac{dy}{dt}\,\delta y + d\,\frac{dz}{dt}\,\delta z\right),$$

en mettant dt pour $\frac{ds}{u}$; donc l'intégrale $\mathrm{S}dm\int u\,\delta\,ds$ deviendra

$$-\int \mathrm{S}dm\left(d\,\frac{dx}{dt}\,\delta x + d\,\frac{dy}{dt}\,\delta y + d\,\frac{dz}{dt}\,\delta z\right),$$

en transposant les signes S, $\int$, ce qui est évidemment permis.

On changera aussi par la même transposition des signes la formule $\mathrm{S}dm\int u\,\delta u\,dt$ en $\int \mathrm{S}dm\,u\,\delta u\,dt$, et l'on aura l'équation

$$\text{(K)}\qquad \int \mathrm{S}dm\left(u\,\delta u\,dt - d\,\frac{dx}{dt}\,\delta x - d\,\frac{dy}{dt}\,\delta y - d\,\frac{dz}{dt}\,\delta z\right) = 0.$$

Il s'agit maintenant de trouver la valeur de $\mathrm{S}dm\,u\,\delta u\,dt$. Or il n'est pas difficile de voir que l'équation (U) de l'Article VIII appliquée à la question présente donne

$$\mathrm{S}dm\,u\,\delta u = -\mathrm{S}dm(\mathrm{P}\,\delta p + \mathrm{Q}\,\delta q + \mathrm{R}\,\delta r + \ldots).$$

On aura donc, en multipliant par dt dont la valeur est la même pour tous les éléments du fil,

$$\mathrm{S}dm\,u\,\delta u\,dt = -\mathrm{S}dm(\mathrm{P}\,\delta p + \mathrm{Q}\,\delta q + \mathrm{R}\,\delta r + \ldots)\,dt,$$

ou bien en mettant, selon les suppositions de l'Art. I, $\Pi\,\delta x + \varpi\,\delta x + \Psi\,\delta z$ au lieu de $\mathrm{P}\,\delta p + \mathrm{Q}\,\delta q + \mathrm{R}\,\delta r + \ldots$,

$$\text{(X)}\qquad \mathrm{S}dm\,u\,\delta u\,dt = -\mathrm{S}dm(\Pi\,dt\,\delta x + \varpi\,dt\,\delta y + \Psi\,dt\,\delta z).$$

Cette valeur substituée dans l'équation (K), il viendra

$$\text{(L)}\qquad -\int \mathrm{S}dm\left[\left(d\,\frac{dx}{dt} + \Pi\,dt\right)\delta x + \left(d\,\frac{dy}{dt} + \varpi\,dt\right)\delta y + \left(d\,\frac{dz}{dt} + \Psi\,dt\right)\delta z\right] = 0.$$

Présentement, comme chaque élément du fil, $\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2}$, est supposé inextensible, on a, comme dans l'Article XXV, l'équation

$$\mathrm{d}x \frac{d\,\mathrm{d}x}{dt} + \mathrm{d}y \frac{d\,\mathrm{d}y}{dt} + \mathrm{d}z \frac{d\,\mathrm{d}z}{dt} = 0.$$

On a de plus, par la même raison,

$$\delta \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2} = 0,$$

ce qui donne

$$\mathrm{d}x\,\delta\mathrm{d}x + \mathrm{d}y\,\delta\mathrm{d}y + \mathrm{d}z\,\delta\mathrm{d}z = 0,$$

savoir, en transposant les deux caractéristiques δ, d,

$$\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\delta x + \mathrm{d}y\,\mathrm{d}\delta y + \mathrm{d}z\,\mathrm{d}\delta z = 0;$$

d'où l'on tire

$$\mathrm{d}\delta x = -\frac{\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\delta y + \mathrm{d}z\,\mathrm{d}\delta z}{dx},$$

et, en intégrant,

$$\mathrm{S}\,\mathrm{d}\delta x = \delta x = \delta' x - \mathrm{S}\frac{\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\delta y + \mathrm{d}z\,\mathrm{d}\delta z}{\mathrm{d}x};$$

$\delta' x$ dénote la valeur de δx lorsque l'intégrale marquée par S est zéro, savoir la valeur du δx à la première extrémité du fil. La substitution de cette valeur de δx dans l'équation (L) changera l'expression intégrale

$$\mathrm{S}\,dm\left(d\frac{dx}{dt} + \Pi\,dt\right)\delta x$$

en celle-ci

$$\mathrm{S}\,dm\left(d\frac{dx}{dt} + \Pi\,dt\right)\delta' x - \mathrm{S}\,dm\left[\left(d\frac{dx}{dt} + \Pi\,dt\right)\mathrm{S}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}\delta y + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}\delta z\right)\right].$$

Or la différence $\delta' x$, étant constante, peut être dégagée du signe d'intégration; donc si $\mathrm{T}\,dt$ exprime la valeur totale de l'intégrale

$$\mathrm{S}\,dm\left(d\frac{dx}{dt} + \Pi\,dt\right),$$

l'expression $\mathrm{S}\,dm\left(d\frac{dx}{dt} + \Pi\,dt\right)\delta' x$ se réduira à celle-ci plus simple, $\mathrm{T}\,dt\,\delta' x$. Il s'agit maintenant de faire disparaître les différences de δy et

δz dans l'autre expression $\left[\mathrm{S}dm\left(d\frac{dx}{dt}+\Pi dt\right)\mathrm{S}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}\,\delta y+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}\,\delta z\right)\right]$; c'est de quoi l'on viendra aisément à bout par la méthode de l'Article IX du Mémoire précédent. Suivant cette méthode, on trouvera que, si $\mathrm{T}dt$ représente, comme ci-devant, la valeur totale de l'intégrale

$$\mathrm{S}dm\left(d\frac{dx}{dt}+\Pi dt\right),$$

et qu'on fasse, pour abréger,

$$\mathrm{T}dt-\mathrm{S}dm\left(d\frac{dx}{dt}+\Pi dt\right)=\mathrm{U}dt,$$

on aura

$$\mathrm{S}dm\left(d\frac{dx}{dt}+\Pi dt\right)\mathrm{S}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}\,\delta y=\frac{\mathrm{U}dt\,\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\delta y-\mathrm{S}\,\mathrm{d}\frac{\mathrm{U}dt\,\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\delta y,$$

et de même

$$\mathrm{S}dm\left(d\frac{dx}{dt}+\Pi dt\right)\mathrm{S}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}\,\delta z=\frac{\mathrm{U}dt\,\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\delta z-\mathrm{S}\,\mathrm{d}\frac{\mathrm{U}dt\,\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\delta z,$$

où les termes qui se trouvent hors du signe d'intégration S doivent être pris avec les conditions énoncées à la fin de l'Article I du Mémoire précédent; or la valeur de $\mathrm{U}dt$ qui répond au dernier point du fil est nulle, parce que $\mathrm{S}dm\left(d\frac{dx}{dt}+\Pi dt\right)$ devient alors égal à $\mathrm{T}dt$, et, pour le premier point, cette valeur est égale à $\mathrm{T}dt$, parce que $\mathrm{S}dm\left(d\frac{dx}{dt}+\Pi\,dt\right)$ est égal à zéro; donc, si l'on marque par $'x$, $'y$, $'z$ les coordonnées qui répondent à ce point, on aura $-\frac{\mathrm{T}dt\,\mathrm{d}'y}{\mathrm{d}'x}\delta\,'y$ pour la valeur exacte du terme $\frac{\mathrm{U}dt\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\delta y$, et $-\frac{\mathrm{T}dt\,\mathrm{d}'z}{\mathrm{d}'z}\delta\,'z$ pour celle de l'autre terme $\frac{\mathrm{U}dt\,\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\delta z$. Par ces substitutions, on aura donc

$$\begin{aligned}\mathrm{S}dm&\left[\left(d\frac{dx}{dt}+\Pi dt\right)\mathrm{S}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}\,\delta y+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}\,\delta z\right)\right]\\&=-\mathrm{T}dt\left(\delta\,'x+\frac{\mathrm{d}'y}{\mathrm{d}'x}\delta\,'y+\frac{\mathrm{d}'z}{\mathrm{d}'x}\delta\,'z\right)-\mathrm{S}\left(d\frac{\mathrm{U}dt\,\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\delta y+\mathrm{d}\frac{\mathrm{U}dt\,\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\delta z\right),\end{aligned}$$

et l'équation (L) se changera en celle-ci :

$$(\mathrm{M})\quad\left\{\begin{aligned}&-\int\left(\delta\,'x+\frac{\mathrm{d}\,'y}{\mathrm{d}\,'x}\delta\,'y+\frac{\mathrm{d}\,'z}{\mathrm{d}\,'x}\delta\,'z\right)\mathrm{T}dt\\&-\int\mathrm{S}\left[\left(\mathrm{d}\,\frac{\mathrm{U}dt\,\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+dm\,d\frac{dy}{dt}+dm\,\varpi\,dt\right)\delta y\right.\\&\qquad\left.+\left(\mathrm{d}\,\frac{\mathrm{U}dt\,\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+dm\,d\frac{dz}{dt}+dm\,\Psi dt\right)\delta z\right]=\mathrm{o},\end{aligned}\right.$$

d'où l'on tire pour tous les points du fil en général

$$\mathrm{d}\,\frac{\mathrm{U}dt\,\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+dm\left(d\frac{dy}{dt}+\varpi\,dt\right)=\mathrm{o},$$

$$\mathrm{d}\,\frac{\mathrm{U}dt\,\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+dm\left(d\frac{dz}{dt}+\Psi\,dt\right)=\mathrm{o},$$

et ces équations, avec celle qui a été trouvée précédemment

$$\mathrm{d}x\left(\frac{d\,\mathrm{d}x}{dt}\right)+\mathrm{d}y\left(\frac{d\,\mathrm{d}y}{dt}\right)+\mathrm{d}z\left(\frac{d\,\mathrm{d}z}{dt}\right)=\mathrm{o},$$

serviront pour déterminer le mouvement du fil.

Si l'on fait dans ces équations $\Pi=-\mathrm{P}$, $\varpi=\mathrm{o}$, $\Psi=\mathrm{o}$, elles reviendront au même que celles de l'Article XXV, comme il est facile de s'en assurer par un calcul fort simple.

XXX.

Scolie I. — Maintenant, pour satisfaire au reste de l'équation (M), on fera encore

$$\left(\delta\,'x+\frac{\mathrm{d}\,'y}{\mathrm{d}\,'x}\delta\,'y+\frac{\mathrm{d}\,'z}{\mathrm{d}\,'x}\delta\,'z\right)\mathrm{T}dt=\mathrm{o},$$

équation qui appartient uniquement au premier point du fil.

Supposons d'abord ce point absolument fixe : il est clair qu'on aura $\delta\,'x=\mathrm{o}$, $\delta\,'y=\mathrm{o}$, $\delta\,'z=\mathrm{o}$, ce qui rendra nuls tous les termes de l'équation dont il s'agit; donc les équations trouvées à la fin de l'Article précédent suffiront dans ce cas pour résoudre le Problème.

Mais si l'autre bout du fil est aussi fixe, il faudra faire alors quelques changements à ces équations. Pour cela soit reprise l'équation,

$$\delta x = \delta' x - S\left(\frac{dy}{dx} d\,\delta y + \frac{dz}{dx} d\,\delta z\right),$$

on trouvera, en intégrant par parties avec l'addition des constantes nécessaires,

$$\delta x = \delta' x - \frac{dy}{dx}\delta y - \frac{dz}{dx}\delta z + \frac{d'y}{d'x}\delta' y + \frac{d'z}{d'x}\delta' z + S\left(d\frac{dy}{dx}\delta y + d\frac{dz}{dx}\delta z\right).$$

Désignons par x', y', z' les valeurs de x, y, z qui répondent à l'extrémité du fil, et rapportons l'équation qu'on vient de trouver à ce point, on aura, en transposant,

$$\begin{aligned}\delta x' + \frac{dy'}{dx'}\delta y' + \frac{dz'}{dx'}\delta z' - \delta' x - \frac{d'y}{d'x}\delta' y - \frac{d'z}{d'x}\delta' z&\\ - S\left(d\frac{dy}{dx}\delta y + d\frac{dz}{dx}\delta z\right) &= 0,\end{aligned}$$

l'intégrale

$$S\left(d\frac{dy}{dx}\delta y + d\frac{dz}{dx}\delta z\right)$$

étant prise pour toute la longueur du fil. Cette équation étant vraie pour tous les instants du mouvement du fil, on peut la multiplier par dt, et en prendre l'intégrale relativement au temps t; on aura donc, en affectant tous les termes du signe $\int$,

$$(\mathrm{N})\quad\left\{\begin{aligned}\int\left(\delta x' + \frac{dy'}{dx'}\delta y' + \frac{dz'}{dx'}\delta z' - \delta' x - \frac{d'y}{d'x}\delta' y - \frac{d'z}{d'x}\delta' z\right) dt&\\ - \int S\left(d\frac{dy}{dx}\delta y + d\frac{dz}{dx}\delta z\right) dt &= 0,\end{aligned}\right.$$

équation qui doit avoir lieu en même temps que l'équation générale (M) en faisant $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$, $\delta' x$, $\delta' y$, $\delta' z$ égaux à zéro conformément à l'hypothèse, ce qui la réduit à

$$-\int S\left(d\frac{dy}{dx}\delta y + d\frac{dz}{dx}\delta z\right) dt = 0;$$

je multiplie donc cette équation par un coefficient indéterminé k, et je l'ajoute à l'équation (M); j'ai, à cause de $\delta' x$, $\delta' y$, $\delta' z$ égaux à zéro,

$$-\int \mathrm{S}\left[\left(\mathrm{d}\frac{\mathrm{U}dt\,\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + dm\,d\frac{dy}{dt} + dm\,\varpi\,dt + \mathrm{d}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}k\,dt\right)\delta y + \left(\mathrm{d}\frac{\mathrm{U}dt\,\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + dm\,d\frac{dz}{dt} + dm\,\Psi\,dt + \mathrm{d}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}k\,dt\right)\delta z\right] = 0,$$

d'où je tire pour le mouvement du fil

$$\mathrm{d}\frac{\mathrm{U}dt\,\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + dm\left(d\frac{dy}{dt} + \varpi\,dt\right) + \mathrm{d}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}k\,dt = 0,$$

$$\mathrm{d}\frac{\mathrm{U}dt\,\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + dm\left(d\frac{dz}{dt} + \Psi\,dt\right) + \mathrm{d}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}k\,dt = 0,$$

et la troisième équation sera la même que dans l'Article précédent.

XXXI.

Scolie II. — L'équation (N) étant multipliée par un coefficient indéterminé k, et ensuite ajoutée à l'équation (M), on a en général

$$\int\left[(\mathrm{d}x'\delta x' + \mathrm{d}y'\delta y' + \mathrm{d}z'\delta z')\frac{k\,dt}{\mathrm{d}x'} - (\mathrm{d}'x\,\delta' x + \mathrm{d}'y\,\delta' y + \mathrm{d}'z\,\delta' z)\frac{\mathrm{T}+k}{\mathrm{d}'x}dt\right]$$
$$-\int \mathrm{S}\left[\left(\mathrm{d}\frac{\mathrm{U}dt\,\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \mathrm{d}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}k\,dt + dm\,d\frac{dy}{dt} + dm\,\varpi\,dt\right)\delta y + \left(\mathrm{d}\frac{\mathrm{U}dt\,\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + \mathrm{d}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}k\,dt + dm\,d\frac{dz}{dt} + dm\,\Psi\,dt\right)\delta z\right] = 0.$$

Les termes affectés du double signe $\int \mathrm{S}$ fourniront d'abord pour le mouvement général du fil les mêmes équations que dans l'Article précédent; ensuite les autres termes affectés simplement du signe $\int$ donneront l'équation

$$(\mathrm{d}x'\delta x' + \mathrm{d}y'\delta y' + \mathrm{d}z'\delta z')\frac{k\,dt}{\mathrm{d}x'} - (\mathrm{d}'x\,\delta' x + \mathrm{d}'y\,\delta' y + \mathrm{d}'z\,\delta' z)\frac{\mathrm{T}+k}{\mathrm{d}'x}dt = 0,$$

d'où l'on tire les conclusions suivantes :

1° Si le fil est fixement arrêté à ses deux extrémités, les différences

$\delta\,'x$, $\delta\,'y$, $\delta\,'z$, $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$ sont nulles par elles-mêmes, et l'équation dont il s'agit ne fournit aucune condition nouvelle; c'est le cas de l'Article précédent.

2° S'il n'y a qu'une des extrémités du fil qui soit fixe, alors on aura simplement $\delta\,'x$, $\delta\,'y$, $\delta\,'z$ ou $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$ égaux à zéro; dans le premier cas, il restera l'équation

$$(\mathrm{d}x'\delta x' + \mathrm{d}y'\delta y' + \mathrm{d}z'\delta z')\frac{k\,dt}{\mathrm{d}x'} = 0,$$

à laquelle on ne peut satisfaire qu'en mettant $k = 0$; dans le second, l'équation restante sera

$$-(\mathrm{d}\,'x\,\delta\,'x + \mathrm{d}\,'y\,\delta\,'y + \mathrm{d}\,'z\,\delta\,'z)\frac{k+\mathrm{T}}{\mathrm{d}\,'x}\,dt = 0,$$

laquelle donnera nécessairement

$$k + \mathrm{T} = 0, \quad \text{savoir} \quad \mathrm{T} = -k.$$

3° Si le fil est attaché d'un côté à une verge fixe le long de laquelle il puisse couler par le moyen d'un anneau, et que l'équation de la verge soit en général

$$dz = m\,dx + n\,dy,$$

alors on supposera

$$\delta\,'z = {}'m\,\delta\,'x + {}'n\,\delta\,'y, \quad \text{ou} \quad \delta z' = m'\,\delta x' + n'\,\delta y',$$

selon que ce sera le premier ou le dernier point du fil qui décrira la courbe donnée; et substituant dans l'équation ci-dessus la valeur de $\delta\,'z$ ou de $\delta z'$ on en tirera pour le premier cas les deux conditions

$$\mathrm{d}\,'x + {}'m\,\mathrm{d}\,'z = 0, \quad \mathrm{d}\,'y + {}'n\,\mathrm{d}\,'z = 0,$$

et de plus $k = 0$, si l'autre bout du fil est libre, et pour le second cas on trouvera de même

$$\mathrm{d}x' + m'\mathrm{d}z' = 0, \quad \mathrm{d}y' + n'\mathrm{d}z' = 0,$$

et de plus $\mathrm{T} + k = 0$, si le premier point du fil est libre.

4° Si les deux bouts du fil coulent le long de deux courbes représentées par les équations

$$d'z = 'm\,d'x + 'n\,d'y, \quad dz' = m'\,dx' + n'\,dy',$$

on mettra $'m\,\delta'x + 'n\,\delta'y$ pour $\delta'z$, et $m'\,\delta x' + n'\,\delta y'$ pour $\delta z'$, et l'on fera en conséquence

$$\mathrm{d}'x + 'm\,\mathrm{d}'z = 0, \quad \mathrm{d}'y + 'n\,\mathrm{d}'z = 0, \quad \mathrm{d}x' + m'\,\mathrm{d}z' = 0, \quad \mathrm{d}y' + n'\,\mathrm{d}z' = 0.$$

5° Si les deux bouts du fil sont attachés l'un à l'autre, en sorte qu'il en résulte une courbe rentrant en elle-même, on aura dans ce cas $x' = 'x$, $y' = 'y$, $z' = 'z$, et l'équation générale se réduira à

$$-(\mathrm{d}'x\,\delta'x + \mathrm{d}'y\,\delta'y + \mathrm{d}'z\,\delta'z)\frac{\mathrm{T}\,dt}{\mathrm{d}'x} = 0;$$

d'où $\mathrm{T} = 0$ comme dans le premier cas du n° 1.

Toutes ces équations, au reste, devront se vérifier au moyen des constantes qui se trouveront dans les équations générales de l'Article précédent après leur intégration.

XXXII.

Scolie III. — Imaginons que le fil soit emporté par un corps de masse finie M′ attaché à son extrémité et animé par des puissances quelconques P′, Q′, R′,.... Il est clair que dans ce cas la formule, qui doit être un maximum ou un minimum, ne sera plus simplement $\mathrm{S}dm\int u\,ds$, mais

$$\mathrm{S}dm\int u\,ds + \mathrm{M}'\int u'\,ds',$$

en nommant u' la vitesse du corps M′ et ds' l'élément de la courbe qu'il décrit. Or cette dernière formule, étant traitée comme celle du Problème I, donnera pour sa différentielle

$$-\mathrm{M}'\int\left[\left(d\frac{dx'}{dt} + \Pi'\,dt\right)\delta x' + \left(d\frac{dy'}{dt} + \varpi'\,dt\right)\delta y' + \left(d\frac{dz'}{dt} + \Psi'\,dt\right)\delta z'\right];$$

on ajoutera donc cette quantité au premier membre de l'équation générale de l'Article précédent, et l'on aura celle-ci :

$$
(\mathrm{P})\left\{
\begin{aligned}
&-\int\Big[\Big(\mathrm{M}'d\frac{dx'}{dt}+\mathrm{M}'\Pi' dt-k\,dt\Big)\delta x'+\Big(\mathrm{M}'d\frac{dy'}{dt}+\mathrm{M}'\varpi' dt-\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x'}k\,dt\Big)\delta y'\\
&\qquad+\Big(\mathrm{M}'d\frac{dz'}{dt}+\mathrm{M}'\Psi' dt-\frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}x'}k\,dt\Big)\delta z'+(\mathrm{d}'x\,\delta'x+\mathrm{d}'y\,\delta'y+\mathrm{d}'z\,\delta'z)\frac{\mathrm{T}+k}{\mathrm{d}'x}dt\Big]\\
&-\int\mathrm{S}\Big[\Big(\mathrm{d}\frac{\mathrm{U}dt\,\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\mathrm{d}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}k\,dt+dm\,d\frac{dy}{dt}+dm\,\varpi\,dt\Big)\delta y\\
&\qquad\qquad-\Big(\mathrm{d}\frac{\mathrm{U}dt\,\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+\mathrm{d}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}k\,dt+dm\,d\frac{dz}{dt}+dm\,\Psi\,dt\Big)\delta z\Big]=0.
\end{aligned}
\right.
$$

Les termes affectés du double signe $\int\mathrm{S}$ donneront pour le mouvement du fil en général les mêmes équations de l'Article XXX, qu'il est inutile de répéter. Les autres termes fourniront l'équation

$$
\begin{aligned}
&\Big(\mathrm{M}'d\frac{dx'}{dt}+\mathrm{M}'\Pi' dt-k\,dt\Big)\delta x'\\
&+\Big(\mathrm{M}'d\frac{dy'}{dt}+\mathrm{M}'\varpi' dt-\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x'}k\,dt\Big)\delta y'\\
&+\Big(\mathrm{M}'d\frac{dz'}{dt}+\mathrm{M}'\Psi' dt-\frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}x'}k\,dt\Big)\delta z'\\
&+(\mathrm{d}'x\,\delta'x+\mathrm{d}'y\,\delta'y+\mathrm{d}'z\,\delta'z)\frac{\mathrm{T}+k}{\mathrm{d}'x}dt=0.
\end{aligned}
$$

Or, si le corps M' est libre, en sorte que les différentiations $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$ demeurent indéterminées, on fera

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{M}'\Big(d\frac{dx'}{dt}+\Pi' dt\Big)-k\,dt=0,\\
&\mathrm{M}'\Big(d\frac{dy'}{dt}+\varpi' dt\Big)-\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x'}k\,dt=0,\\
&\mathrm{M}'\Big(d\frac{dz'}{dt}+\Psi' dt\Big)-\frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}x'}k\,dt=0.
\end{aligned}
$$

Ce sont les équations qui serviront à déterminer le mouvement du corps M'.

Si ce corps était contraint de se mouvoir sur une surface donnée par l'équation

$$dz' = m'\,dx' + n'\,dy',$$

on mettrait, comme à l'ordinaire, $m'\delta x' + n'\delta y'$ au lieu de $\delta z'$, et l'on en tirerait les équations

$$\mathrm{M}'\left(d\frac{dx'}{dt} + \Pi'\,dt\right) - k\,dt + \left[\mathrm{M}'\left(d\frac{dz'}{dt} + \Psi'\,dt\right) - \frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}x'}k\,dt\right]m' = 0,$$

$$\mathrm{M}'\left(d\frac{dy'}{dt} + \varpi'\,dt\right) - \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x'}k\,dt + \left[\mathrm{M}'\left(d\frac{dz'}{dt} + \Psi'dt\right) - \frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}x'}k\,dt\right]n' = 0.$$

A l'égard des termes

$$(\mathrm{d}\,'x\,\delta\,'x + \mathrm{d}\,'y\,\delta\,'y + \mathrm{d}\,'z\,\delta\,'z)\,\frac{\mathrm{T}+k}{\mathrm{d}\,'x}\,dt,$$

qui appartiennent au premier point du fil, ils fourniront les mêmes conditions que dans l'Article précédent, selon les différentes circonstances du mouvement de ce point. Mais si l'on imaginait de plus en ce point un autre corps 'M, animé des puissances 'P, 'Q, 'R,..., en sorte que le fil fût emporté par deux corps 'M, M' fixement attachés à ses extrémités, alors on aurait, pour la formule du maximum ou du minimum,

$$\mathrm{S}\,dm\int u\,ds + \mathrm{M}'\int u'\,ds' + {}'\mathrm{M}\int {}'u\,d\,'s,$$

et l'on trouverait, en faisant le calcul de la même manière que ci-dessus, que le premier membre de l'équation (P) serait augmenté des termes

$$-\,{}'\mathrm{M}\int\left[\left(d\frac{d\,'x}{dt} + {}'\Pi\,dt\right)\delta\,'x + \left(d\frac{d\,'y}{dt} + {}'\varpi\,dt\right)\delta\,'y + \left(d\frac{d\,'z}{dt} + {}'\Psi\,dt\right)\delta\,'z\right],$$

ce qui ne changerait rien aux formules trouvées pour le mouvement du fil et de l'autre corps M'; mais on aurait de plus l'équation

$$\begin{aligned}&\left[{}'\mathrm{M}\, d\frac{d\,{}'x}{dt} + {}'\mathrm{M}\,{}'\Pi\, dt + (\mathrm{T}+k)\, dt\right]\delta\,{}'x\\
+&\left[{}'\mathrm{M}\, d\frac{d\,{}'y}{dt} + {}'\mathrm{M}\,{}'\varpi\, dt + \frac{\mathrm{d}\,{}'y}{\mathrm{d}\,{}'x}(\mathrm{T}+k)\, dt\right]\delta y\\
+&\left[{}'\mathrm{M}\, d\frac{d\,{}'z}{dt} + {}'\mathrm{M}\,{}'\Psi dt + \frac{\mathrm{d}\,{}'z}{\mathrm{d}\,{}'x}(\mathrm{T}+k)\, dt\,\delta\right]\delta\,{}'z = 0,\end{aligned}$$

d'où l'on tirerait pour le mouvement du corps 'M des formules analogues à celles qu'on a trouvées pour le corps M'.

XXXIII.

Problème VII. — *Résoudre le Problème précédent, en supposant que le fil soit extensible et élastique.*

Solution. — Soit F le ressort, c'est-à-dire la force de contraction de chaque élément du fil, on aura, en général, par l'équation (U) de l'Article VIII,

$$\mathrm{S}\, dm\, u\, \delta u = -\mathrm{S}\, dm(\mathrm{P}\,\delta p + \mathrm{Q}\,\delta q + \mathrm{R}\,\delta r + \ldots) - \mathrm{SF}\,\delta f;$$

ce qui donne, en multipliant par dt, et mettant $\Pi\delta x + \varpi\delta y + \Psi\delta z$ au lieu de $\mathrm{P}\delta p + \mathrm{Q}\delta q + \mathrm{R}\delta r + \ldots$, et $\mathrm{d}s$ au lieu de f,

$$(\mathrm{Y})\qquad \mathrm{S}\, dm\, u\,\delta u\, dt = -\mathrm{S}\, dm(\Pi\, dt\,\delta x + \varpi\, dt\,\delta y + \Psi\, dt\,\delta z) - \mathrm{SF}\, dt\,\delta\,\mathrm{d}s.$$

Or

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2},$$

donc

$$\delta\,\mathrm{d}s = \frac{\mathrm{d}x\,\delta\mathrm{d}x + \mathrm{d}y\,\delta\mathrm{d}y + \mathrm{d}z\,\delta\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\delta x + \mathrm{d}y\,\mathrm{d}\delta y + \mathrm{d}z\,\mathrm{d}\delta z}{\mathrm{d}s};$$

donc, mettant cette valeur dans $\mathrm{SF}\,dt\,\delta\mathrm{d}s$, et intégrant par parties avec les constantes nécessaires, on aura

$$\begin{aligned}\mathrm{SF}\,dt\,\delta\,\mathrm{d}s = {}&\frac{\mathrm{F}'\,dt}{\mathrm{d}s'}(\mathrm{d}x'\,\delta x' + \mathrm{d}y'\,\delta y' + \mathrm{d}z'\,\delta z') - \frac{{}'\mathrm{F}\,dt}{\mathrm{d}\,{}'s}(\mathrm{d}\,{}'x\,\delta\,{}'x + \mathrm{d}\,{}'y\,\delta\,{}'y + \mathrm{d}\,{}'z\,\delta\,{}'z)\\
&- \mathrm{S}\left(\mathrm{d}\frac{\mathrm{F}\,\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\delta x + \mathrm{d}\frac{\mathrm{F}\,\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\delta y + \mathrm{d}\frac{\mathrm{F}\,\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\delta z\right) dt.\end{aligned}$$

Maintenant, pour résoudre le Problème, il n'y a plus qu'à mettre dans l'équation (K) de l'Article XXIX, au lieu de $\mathrm{S}\,dmu\,\delta u\,dt$, la valeur qu'on vient de trouver, et l'on aura, en ordonnant les termes,

$$-\int\left[(\mathrm{d}x'\,\delta x' + \mathrm{d}y'\,\delta y' + \mathrm{d}z'\,\delta z')\frac{\mathrm{F}'dt}{\mathrm{d}s'} - (\mathrm{d}'x\,\delta'x + \mathrm{d}'y\,\delta'y + \mathrm{d}'z\,\delta'z)\frac{'\mathrm{F}dt}{\mathrm{d}'s}\right]$$
$$+\int\mathrm{S}\left[\left(\mathrm{d}\frac{\mathrm{F}\,\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}dt - dm\,\Pi\,dt - dm\,d\frac{dx}{dt}\right)\delta x\right.$$
$$+\left(\mathrm{d}\frac{\mathrm{F}\,\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}dt - dm\,\varpi\,dt - dm\,d\frac{dy}{dt}\right)\delta y$$
$$\left.+\left(\mathrm{d}\frac{\mathrm{F}\,\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}dt - dm\,\Psi\,dt - dm\,d\frac{dz}{dt}\right)\delta z\right] = \mathrm{o},$$

d'où l'on tire, pour les équations générales du mouvement du fil,

$$\mathrm{d}\frac{\mathrm{F}\,\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}dt - dm\left(\Pi\,dt + d\frac{dx}{dt}\right) = \mathrm{o},$$
$$\mathrm{d}\frac{\mathrm{F}\,\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}dt - dm\left(\varpi\,dt + d\frac{dy}{dt}\right) = \mathrm{o},$$
$$\mathrm{d}\frac{\mathrm{F}\,\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}dt - dm\left(\Psi\,dt + d\frac{dz}{dt}\right) = \mathrm{o},$$

ce qui s'accorde avec ce qu'on a trouvé dans l'Article XXVII, en mettant ϖ et $\Psi = \mathrm{o}$, et $-\mathrm{P}$ au lieu de Π.

On aura de plus l'équation

$$(\mathrm{d}x'\,\delta x' + \mathrm{d}y'\,\delta y' + \mathrm{d}z'\,\delta z')\frac{\mathrm{F}'dt}{\mathrm{d}s'} - (\mathrm{d}'x\,\delta'x + \mathrm{d}'y\,\delta'y + \mathrm{d}'z\,\delta'z)\frac{'\mathrm{F}\,\mathrm{d}t}{\mathrm{d}'s} = \mathrm{o},$$

qu'on traitera ainsi qu'on a fait ci-devant l'équation (P), et qui donnera par conséquent des conclusions semblables sur le mouvement des deux extrémités du fil. J'en laisse le détail au lecteur.

XXXIV.

Problème VIII. — *Trouver le mouvement d'un corps de figure quelconque animé par des forces quelconques.*

Solution — Soient nommées dm chaque particule du corps, u sa vitesse et ds l'espace qu'elle parcourt dans le temps dt : on aura, comme dans l'Article XXIX, $\mathrm{S}dm\int u\,ds$ pour la formule qui doit être un maximum ou un minimum.

En suivant la méthode expliquée dans cet Article, on parviendra de même à l'équation (L)

$$-\int \mathrm{S}dm\left[\left(d\frac{dx}{dt}+\Pi\,dt\right)\delta x+\left(d\frac{dy}{dt}+\varpi\,dt\right)\delta y+\left(d\frac{dz}{dt}+\Psi\,dt\right)\delta z\right]=0,$$

et il n'y aura plus qu'à substituer dans cette équation les valeurs de dx, dy, dz et δx, δy, δz convenables à chaque particule du corps donné.

Pour trouver ces valeurs, je prends dans l'intérieur du corps un point quelconque fixe que j'appelle le centre de rotation et dont je suppose que la position soit représentée par les coordonnées rectangles X, Y, Z; je rapporte à ce centre chacun des autres points du corps par le moyen de trois nouvelles coordonnées p, q, r prises dans les mêmes axes que les X, Y, Z; j'ai ainsi

$$x=\mathrm{X}+p,\quad y=\mathrm{Y}+q,\quad z=\mathrm{Z}+r;$$

par conséquent

$$dx=d\mathrm{X}+dp,\quad dy=d\mathrm{Y}+dq,\quad dz=d\mathrm{Z}+dr,$$

et de même

$$\delta x=\delta\mathrm{X}+\delta p,\quad \delta y=\delta\mathrm{X}+\delta q,\quad \delta z=\delta\mathrm{Z}+\delta r.$$

Il s'agit maintenant de trouver les valeurs des différences de p, q, r pour chaque point du corps; pour cela il faut considérer le mouvement du corps autour de son centre et déterminer les variations qui en résultent dans chacune des lignes p, q, r. Or il est facile de voir que, quel que soit ce mouvement, il peut toujours être regardé comme formé de trois mouvements de rotation autour de trois axes perpendiculaires entre eux, et passant par le centre dont nous parlons; donc, si l'on prend pour les axes de rotation ceux des coordonnées p, q, r, on trouvera par un calcul très-simple que, tandis que le corps tourne autour de l'axe des r d'un mouvement angulaire $d\mathrm{R}$, la ligne p croîtra de la quantité $q\,d\mathrm{R}$, et la ligne q décroîtra de la quantité $pd\mathrm{R}$; que de même, en nommant $d\mathrm{Q}$ l'angle de rotation autour de l'axe des q, les lignes p et r deviendront par ce mouvement $p+rd\mathrm{Q}$, $r-pd\mathrm{Q}$; et qu'enfin l'angle de rotation autour de l'axe des p étant $d\mathrm{P}$, il en résultera dans la ligne q un accroissement égal à $rd\mathrm{P}$, et dans la ligne r un décroissement égal à $qd\mathrm{P}$. Donc, en ajoutant ensemble toutes ces différentes variations des lignes p, q, r, et exprimant les variations totales par dp, dq, dr, on aura, en général,

$$\text{(Q)} \qquad dp = r\,d\mathrm{Q} + q\,d\mathrm{R}, \quad dq = r\,d\mathrm{P} - p\,d\mathrm{R}, \quad dr = -q\,d\mathrm{P} - p\,d\mathrm{Q},$$

et par conséquent aussi, en changeant d en δ,

$$\delta p = r\delta\mathrm{Q} + q\,\delta\mathrm{R}, \quad \delta q = r\delta\mathrm{P} - p\delta\mathrm{R}, \quad \delta r = -q\,\delta\mathrm{P} - p\,\delta\mathrm{Q}.$$

On aura donc par là

$$\begin{aligned}
\delta x &= \delta\mathrm{X} + r\delta\mathrm{Q} + q\delta\mathrm{R},\\
\delta y &= \delta\mathrm{Y} + r\delta\mathrm{P} - p\delta\mathrm{R},\\
\delta z &= \delta\mathrm{Z} - q\delta\mathrm{P} - p\delta\mathrm{Q};\\
\frac{dx}{dt} &= \frac{d\mathrm{X}}{dt} + r\frac{d\mathrm{Q}}{dt} + q\frac{d\mathrm{R}}{dt},\\
\frac{dy}{dt} &= \frac{d\mathrm{Y}}{dt} + r\frac{d\mathrm{P}}{dt} - p\frac{d\mathrm{R}}{dt},\\
\frac{dz}{dt} &= \frac{d\mathrm{Z}}{dt} - q\frac{d\mathrm{P}}{dt} - p\frac{d\mathrm{Q}}{dt},
\end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$d\frac{dx}{dt} = d\frac{d\mathrm{X}}{dt} + rd\frac{d\mathrm{Q}}{dt} + dr\frac{d\mathrm{Q}}{dt} + qd\frac{d\mathrm{R}}{dt} + dq\frac{d\mathrm{R}}{dt},$$

savoir, en mettant pour dq, dr leurs valeurs,

$$d\frac{dx}{dt} = d\frac{d\mathrm{X}}{dt} + rd\frac{d\mathrm{Q}}{dt} + qd\frac{d\mathrm{R}}{dt} - q\frac{d\mathrm{P}\,d\mathrm{Q}}{dt} - p\frac{d\mathrm{Q}^2}{dt} + r\frac{d\mathrm{P}\,d\mathrm{R}}{dt} - p\frac{d\mathrm{R}^2}{dt};$$

on aura de la même manière

$$d\frac{dy}{dt} = d\frac{d\mathrm{Y}}{dt} + rd\frac{d\mathrm{P}}{dt} - pd\frac{d\mathrm{R}}{dt} - q\frac{d\mathrm{P}^2}{dt} - p\frac{d\mathrm{P}\,d\mathrm{Q}}{dt} - r\frac{d\mathrm{Q}\,d\mathrm{R}}{dt} - q\frac{d\mathrm{R}^2}{dt},$$

$$d\frac{dz}{dt} = d\frac{d\mathrm{Z}}{dt} - qd\frac{d\mathrm{P}}{dt} - pd\frac{d\mathrm{Q}}{dt} - r\frac{d\mathrm{P}^2}{dt} + p\frac{d\mathrm{P}\,d\mathrm{R}}{dt} - r\frac{d\mathrm{Q}^2}{dt} - q\frac{d\mathrm{Q}\,d\mathrm{R}}{dt}.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (L) ci-dessus, et faisant sortir hors du signe S les quantités dX, dY, dZ, δX, δY, δZ, dP, dQ, dR, δP, δQ, δR qui sont les mêmes pour chaque point du corps, enfin ordonnant les termes par rapport à δX, δY, δZ, δP, δQ, δR, on aura une équation de la forme suivante :

$$\text{(S)} \qquad \int([X]\delta X + [Y]\delta Y + [Z]\delta Z + [P]\delta P + [Q]\delta Q + [R]\delta R) = 0,$$

dans laquelle

$$[X] = \mathrm{M}d\frac{dX}{dt} + \mathrm{S}r\,dm\left(d\frac{dQ}{dt} + \frac{dP\,dR}{dt}\right) + \mathrm{S}q\,dm\left(d\frac{dR}{dt} - \frac{dP\,dQ}{dt}\right)$$
$$- \mathrm{S}p\,dm\frac{dQ^2 + dR^2}{dt} + \mathrm{S}\Pi\,dm\,dt,$$

$$[Y] = \mathrm{M}d\frac{dY}{dt} + \mathrm{S}r\,dm\left(d\frac{dP}{dt} + \frac{dQ\,dR}{dt}\right) + \mathrm{S}q\,dm\frac{dP^2 + dR^2}{dt}$$
$$- \mathrm{S}p\,dm\left(d\frac{dR}{dt} + \frac{dP\,dQ}{dt}\right) + \mathrm{S}\varpi\,dm\,dt,$$

$$[Z] = \mathrm{M}d\frac{dZ}{dt} - \mathrm{S}r\,dm\frac{dP^2 + dQ^2}{dt} - \mathrm{S}q\,dm\left(d\frac{dP}{dt} + \frac{dP\,dR}{dt}\right)$$
$$- \mathrm{S}p\,dm\left(d\frac{dQ}{dt} + \frac{dP\,dR}{dt}\right) + \mathrm{S}\Psi\,dm\,dt,$$

$$[P] = \mathrm{S}r\,dm\,d\frac{dY}{dt} - \mathrm{S}q\,dm\,d\frac{dZ}{dt} + (\mathrm{S}r^2dm + \mathrm{S}q^2dm)\,d\frac{dP}{dt}$$
$$+ \mathrm{S}pq\,dm\,d\frac{dQ}{dt} - \mathrm{S}pr\,dm\,d\frac{dR}{dt} + \mathrm{S}qr\,dm\frac{dQ^2 - dR^2}{dt} - \mathrm{S}pr\,dm\frac{dP\,dQ}{dt}$$
$$- \mathrm{S}pq\,dm\frac{dP\,dR}{dt} + (\mathrm{S}q^2dm - \mathrm{S}r^2dm)\frac{dQ\,dR}{dt} + \mathrm{S}\varpi r\,dm\,dt - \mathrm{S}\Psi q\,dm\,dt,$$

$$[Q] = \mathrm{S}r\,dm\,d\frac{dX}{dt} - \mathrm{S}p\,dm\,d\frac{dZ}{dt} + (\mathrm{S}r^2dm + \mathrm{S}p^2dm)\,d\frac{dQ}{dt}$$
$$+ \mathrm{S}pq\,dm\,d\frac{dP}{dt} + \mathrm{S}qr\,dm\,d\frac{dR}{dt} + \mathrm{S}pr\,dm\frac{dP^2 - dR^2}{dt} - \mathrm{S}qr\,dm\frac{dP\,dQ}{dt}$$
$$+ \mathrm{S}pq\,dm\frac{dQ\,dR}{dt} + (\mathrm{S}r^2dm - \mathrm{S}p^2dm)\frac{dP\,dR}{dt} + \mathrm{S}\Pi r\,dm\,dt - \mathrm{S}\Psi p\,dm\,dt,$$

$$[R] = Sqdmd\frac{dX}{dt} - Spdmd\frac{dY}{dt} + (Sp^2dm + Sq^2dm)\,d\frac{dR}{dt}$$
$$+ Sqrdmd\frac{dQ}{dt} - Sprdmd\frac{dP}{dt} + Spqdm\frac{dP^2 - dQ^2}{dt} + Sqrdm\frac{dP\,dR}{dt}$$
$$+ Sprdm\frac{dQ\,dR}{dt} + (Sp^2dm - Sq^2dm)\frac{dP\,dQ}{dt} + S\Pi q\,dm\,dt - S\varpi p\,dm\,dt;$$

M exprime la valeur de Sdm, savoir la masse entière du corps.

Cette équation donnera la solution du Problème en faisant, comme à l'ordinaire, les coefficients des différences marquées par δ, chacun en particulier égal à zéro, comme on va le voir dans les Corollaires suivants.

XXXV.

Remarque. — On peut simplifier les expressions de [X], [Y], [Z], [P], [Q], [R] en faisant tomber le centre de rotation dans le centre de gravité du corps. Car alors les intégrales $Spdm$, $Sqdm$, $Srdm$, qui expriment la somme des moments de toutes les particules du corps par rapport à ses trois axes de rotation, deviendront nécessairement égales à zéro, par la propriété connue de ce centre.

A l'égard des autres intégrales Sp^2dm, $Sq^2dm, \ldots$, il faut observer que leur valeur dépend de la position instantanée du corps, et qu'elle varie par conséquent avec le temps t.

En effet,

$$d(Sp^2dm) = Sd(p^2dm) = 2Sp\,dp\,dm = 2Sprdm\,dQ + 2Spq\,dm\,dR,$$

en mettant au lieu de dp sa valeur $r\,dQ + q\,dR$; on trouvera de la même manière

$$d(Sq^2\,dm) = 2(Sqrdm)\,dP - 2(Spq\,dm)\,dR,$$
$$d(Sr^2\,dm) = -2(Sqrdm)\,dP - 2(Sprdm)\,dQ,$$
$$d(Spq\,dm) = (Sprdm)\,dP + (Sqrdm)\,dQ + (Sq^2dm - Sp^2dm)\,dR,$$
$$d(Spr\,dm) = -(Spq\,dm)\,dP + (Sr^2dm - Sp^2dm)\,dQ + (Sq^2dm)\,dR,$$
$$d(Sqr\,dm) = (Sr^2dm - Sq^2dm)\,dP - (Spq\,dm)\,dQ - (Spr\,dm)\,dR.$$

Ce sont ces équations qui serviront à déterminer les valeurs générales des quantités Sp^2dm, Sq^2dm, Sr^2dm, $Spq\,dm$, $Spr\,dm$, $Sqr\,dm$ qui entrent dans les expressions [X], [Y],... de l'équation (S); mais c'est de quoi il ne paraît pas facile de venir à bout, à cause de la difficulté d'intégrer ces sortes d'équations.

XXXVI.

Corollaire I. — Or, si le corps est entièrement libre, en sorte que les différences δx, δy, δz, δP, δQ, δR n'aient entre elles aucun rapport déterminé, il faut, pour vérifier l'équation (S), faire les coefficients de ces différences chacun en particulier égal à zéro, ce qui donne les six équations $[X]=0$, $[Y]=0$, $[Z]=0$, $[P]=0$, $[Q]=0$, $[R]=0$, par où l'on peut connaître le mouvement du corps à chaque instant. Si l'on fait dans ces équations $Sp\,dm=0$, $Sq\,dm=0$, $Sr\,dm=0$, selon l'hypothèse de l'Article précédent, les trois premières deviendront celles-ci :

$$Md\frac{dX}{dt}+S\Pi\,dm\,dt=0,$$

$$Md\frac{dY}{dt}+S\varpi\,dm\,dt=0,$$

$$Md\frac{dZ}{dt}+S\Psi\,dm\,dt=0,$$

lesquelles montrent que le centre de gravité du corps se meut de la même manière que si toute la masse du corps était réunie dans ce centre.

Les trois autres équations ne contiendront que les variables dP, dQ, dR d'où dépend le mouvement de rotation du corps autour du centre de gravité; ainsi ce mouvement sera tout à fait indépendant de celui du centre de gravité.

Imaginons que le corps ne tourne qu'autour d'un seul axe, on supposera, dans les équations $[P]=0$, $[Q]=0$, $[R]=0$, deux quelconques des trois variables dP, dQ, dR égales à zéro. Soient d'abord dQ, dR

égales à zéro, on aura

$$(\mathrm{S}r^2 dm + \mathrm{S}q^2 dm)\, d\frac{d\mathrm{P}}{dt} + \mathrm{S}\varpi r\, dm\, dt - \mathrm{S}\Psi q\, dm\, dt = 0,$$

$$(\mathrm{S}pq\, dm)\, d\frac{d\mathrm{P}}{dt} + (\mathrm{S}pr\, dm)\frac{d\mathrm{P}^2}{dt} + \mathrm{S}\Pi r\, dm\, dt - \mathrm{S}\Psi p\, dm\, dt = 0,$$

$$-(\mathrm{S}pr\, dm)\, d\frac{d\mathrm{P}}{dt} + (\mathrm{S}pq\, dm)\frac{d\mathrm{P}^2}{dt} + \mathrm{S}\Pi q\, dm\, dt - \mathrm{S}\varpi p\, dm\, dt = 0.$$

On trouvera, de plus, par les formules données à la fin de l'Article précédent,

$$d(\mathrm{S}r^2\, dm) + d(\mathrm{S}q^2\, dm) = 0,$$
$$d(\mathrm{S}pq\, dm) = (\mathrm{S}pr\, dm)\, d\mathrm{P},$$
$$d(\mathrm{S}pr\, dm) = -(\mathrm{S}pq\, dm)\, d\mathrm{P},$$

d'où

1° $$\mathrm{S}r^2\, dm + \mathrm{S}q^2\, dm = \text{const.},$$

constante que j'appellerai A;

2° $$\frac{d(\mathrm{S}pq\, dm)}{\mathrm{S}pr\, dm} = -\frac{d(\mathrm{S}pr\, dm)}{\mathrm{S}pq\, dm},$$

savoir :

$$(\mathrm{S}pq\, dm)\, d(\mathrm{S}pq\, dm) = -(\mathrm{S}pr\, dm)\, d(\mathrm{S}pr\, dm),$$

ce qui donne, en intégrant et réduisant,

$$(\mathrm{S}pq\, dm)^2 + (\mathrm{S}pr\, dm)^2 = \text{const.};$$

soit cette constante égale à B^2, on aura

$$\mathrm{S}pr\, dm = \sqrt{\mathrm{B}^2 - (\mathrm{S}pq\, dm)^2},$$

donc

$$\frac{d(\mathrm{S}pq\, dm)}{\sqrt{\mathrm{B}^2 - (\mathrm{S}pq\, dm)^2}} = d\mathrm{P},$$

d'où

$$\mathrm{S}pq\, dm = \mathrm{B}\sin(\alpha + \mathrm{P}),$$

α étant un angle constant tel, que $\mathrm{B}\sin\alpha = \mathrm{S}pq\, dm$, au commencement de la rotation du corps; par conséquent,

$$\mathrm{S}pr\,dm = \mathrm{B}\cos(\alpha + \mathrm{P});$$

donc, si l'on substitue ces valeurs dans les trois équations ci-dessus, on aura

$$\mathrm{A}\,d\frac{d\mathrm{P}}{dt} + \mathrm{S}\varpi r\,dm\,dt - \mathrm{S}\Psi q\,dm\,dt = 0,$$

$$\mathrm{B}\sin(\alpha + \mathrm{P})\,d\frac{d\mathrm{P}}{dt} + \mathrm{B}\cos(\alpha + \mathrm{P})\frac{d\mathrm{P}^2}{dt} + \mathrm{S}\Pi r\,dm\,dt - \mathrm{S}\Psi p\,dm\,dt = 0,$$

$$-\mathrm{B}\cos(\alpha + \mathrm{P})\,d\frac{d\mathrm{P}}{dt} + \mathrm{B}\sin(\alpha + \mathrm{P})\frac{d\mathrm{P}^2}{dt} + \mathrm{S}\Pi q\,dm\,dt - \mathrm{S}\varpi p\,dm\,dt = 0.$$

La première de ces équations étant multipliée par $\frac{d\mathrm{P}}{dt}$, et ensuite intégrée, donne

$$\frac{\mathrm{A}\,d\mathrm{P}^2}{2dt^2} + \int(\mathrm{S}\varpi r\,dm - \mathrm{S}\Psi q\,dm)\,d\mathrm{P} = \frac{\mathrm{A}c^2}{2},$$

c étant la valeur de $\frac{d\mathrm{P}}{dt}$ lorsque $\mathrm{P} = 0$, c'est-à-dire la vitesse primitive de rotation; donc, substituant dans la seconde et dans la troisième équation, au lieu de $d\frac{d\mathrm{P}}{dt}$ et de $\frac{d\mathrm{P}^2}{dt}$, leurs valeurs, on aura, après avoir divisé par dt,

$$\begin{aligned}
&-\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}\sin(\alpha + \mathrm{P})(\mathrm{S}\varpi r\,dm - \mathrm{S}\Psi q\,dm)\\
&\quad -\frac{2\mathrm{B}}{\mathrm{A}}\cos(\alpha + \mathrm{P})\int(\mathrm{S}\varpi r\,dm - \Psi q\,dm)\,d\mathrm{P}\\
&\qquad + \mathrm{B}c^2\cos(\alpha + \mathrm{P}) + \mathrm{S}\Pi r\,dm - \mathrm{S}\Psi p\,dm = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}\cos(\alpha + \mathrm{P})(\mathrm{S}\varpi r\,dm - \mathrm{S}\Psi q\,dm)\\
&\quad -\frac{2\mathrm{B}}{\mathrm{A}}\sin(\alpha + \mathrm{P})\int(\mathrm{S}\varpi r\,dm - \mathrm{S}\Psi q\,dm)\,d\mathrm{P}\\
&\qquad + \mathrm{B}c^2\sin(\alpha + \mathrm{P}) + \mathrm{S}\Pi q\,dm - \mathrm{S}\varpi p\,dm = 0,
\end{aligned}$$

et ces équations renfermeront les conditions nécessaires pour que le corps tourne librement autour d'un axe immobile.

Si les forces Π, ϖ, Ψ sont nulles, ou constantes, ou bien si elles sont proportionnelles à p, q, r, on a

$$\mathrm{S}\varpi r\,dm - \mathrm{S}\Psi q\,dm = 0,\quad \mathrm{S}\Pi r\,dm - \mathrm{S}\Psi p\,dm = 0,\quad \mathrm{S}\Pi q\,dm - \mathrm{S}\varpi p\,dm = 0;$$

par conséquent,

$$\frac{d\mathrm{P}^2}{dt^2} = c^2,$$

c'est-à-dire que le mouvement de rotation est uniforme, et les équations précédentes se réduisent à

$$\mathrm{B}c^2\cos(\alpha + \mathrm{P}) = 0,\quad \mathrm{B}c^2\sin(\alpha + \mathrm{P}) = 0,$$

ce qui donne $\mathrm{B} = 0$; on aura donc

$$\sqrt{(\mathrm{S}pq\,dm)^2 + (\mathrm{S}pr\,dm)^2} = 0,$$

ce qui ne peut arriver, à moins que l'on n'ait $\mathrm{S}pq\,dm = 0$, $\mathrm{S}pr\,dm = 0$. Voilà donc les conditions par lesquelles on déterminera la position de l'axe de rotation au dedans du corps. Il est clair que ces conditions sont suffisantes pour une telle détermination, puisqu'on sait que la position d'une droite qui passe par un point donné ne dépend que de deux variables.

Soient maintenant

$$d\mathrm{P} = 0,\quad d\mathrm{R} = 0 \quad \text{ou} \quad d\mathrm{P} = 0,\quad d\mathrm{Q} = 0,$$

dans les équations

$$[\mathrm{P}] = 0,\quad [\mathrm{Q}] = 0,\quad [\mathrm{R}] = 0;$$

on trouvera, par des procédés semblables à ceux que nous venons de pratiquer, les conditions de la rotation du corps autour de deux autres axes.

Dans la supposition de

$$\mathrm{S}\varpi r\,dm - \mathrm{S}\Psi q\,dm = 0,\quad \mathrm{S}\Pi r\,dm - \mathrm{S}\Psi p\,dm = 0,\quad \mathrm{S}\Pi q\,dm - \mathrm{S}\varpi p\,dm = 0,$$

les équations dont il s'agit seront

$$(\mathrm{S}pq\,dm)\,d\,\frac{d\mathrm{Q}}{dt}+(\mathrm{S}qr\,dm)\,\frac{d\mathrm{Q}^2}{dt}=0,$$

$$(\mathrm{S}r^2dm+\mathrm{S}p^2dm)\,d\,\frac{d\mathrm{Q}}{dt}=0,$$

$$(\mathrm{S}qr\,dm)\,d\,\frac{d\mathrm{Q}}{dt}-(\mathrm{S}pq\,dm)\,\frac{d\mathrm{Q}^2}{dt}=0,$$

pour le cas où $d\mathrm{P}=0$, $d\mathrm{R}=0$, et

$$-(\mathrm{S}pr\,dm)\,d\,\frac{d\mathrm{R}}{dt}-(\mathrm{S}qr\,dm)\,\frac{d\mathrm{R}^2}{dt}=0,$$

$$(\mathrm{S}qr\,dm)\,d\,\frac{d\mathrm{R}}{dt}-(\mathrm{S}pr\,dm)\,\frac{d\mathrm{R}^2}{dt}=0,$$

$$(\mathrm{S}p^2dm+\mathrm{S}q^2dm)\,d\,\frac{d\mathrm{R}}{dt}=0,$$

pour le cas où $d\mathrm{P}=0$, $d\mathrm{Q}=0$.

Dans le premier cas on aura donc $d\,\frac{d\mathrm{Q}}{dt}=0$, c'est-à-dire que la rotation sera uniforme, et de plus $\mathrm{S}qr\,dm=0$, $\mathrm{S}pq\,dm=0$ pour la détermination de l'axe de rotation.

Le second cas donnera pareillement $d\,\frac{d\mathrm{R}}{dt}=0$, savoir la rotation uniforme, et $\mathrm{S}pr\,dm=0$, $\mathrm{S}qr\,dm=0$ pour la détermination de son axe.

On trouvera donc trois axes fixes autour de chacun desquels le corps M pourra tourner librement et uniformément, en cherchant dans ce corps la position de trois droites, qui passent par son centre de gravité, et qui soient telles que

$$\mathrm{S}pq\,dm=0,\quad \mathrm{S}pr\,dm=0,$$
$$\mathrm{S}qr\,dm=0,\quad \mathrm{S}pq\,dm=0,$$
$$\mathrm{S}qr\,dm=0,\quad \mathrm{S}pr\,dm=0,$$

savoir :

$$\mathrm{S}pq\,dm=0,\quad \mathrm{S}pr\,dm=0,\quad \mathrm{S}qr\,dm=0,$$

p, q, r étant les coordonnées rectangles qui déterminent la position de chaque particule du corps par rapport à chacune de ces droites; d'où il est aisé de conclure que les trois axes de rotation dont il s'agit sont nécessairement perpendiculaires entre eux.

Au reste, quel que soit le mouvement du corps autour de son centre de gravité, il y aura toujours un axe instantané de rotation qui passera par ce centre, et qui sera facile à déterminer dès qu'on connaîtra les mouvements angulaires $d\mathrm{P}$, $d\mathrm{Q}$, $d\mathrm{R}$. Soient p', q', r' les coordonnées qui répondent à chacun des points placés dans l'axe dont nous parlons : il est clair que ces points devant être immobiles pour un instant, on doit avoir

$$\begin{aligned}
dp' &= r'd\mathrm{Q} + q'd\mathrm{R} = 0,\\
dq' &= r'd\mathrm{P} - p'd\mathrm{R} = 0,\\
dr' &= -q'd\mathrm{P} - p'd\mathrm{Q} = 0,
\end{aligned}$$

équations dont la troisième est, comme on le voit, une suite nécessaire des deux premières; c'est pourquoi on fera simplement

$$r'd\mathrm{Q} + q'd\mathrm{R} = 0, \quad r'd\mathrm{P} - p'd\mathrm{R} = 0;$$

ce qui, en regardant p', q', r' comme variables, et $d\mathrm{P}$, $d\mathrm{Q}$, $d\mathrm{R}$ comme constantes, donne une droite dont la position est aisée à déterminer par rapport aux axes des coordonnées p', q', r'.

Dans le premier instant du mouvement on a, en faisant $d\mathrm{P} = 0$, $d\mathrm{Q} = 0$, $d\mathrm{R} = 0$ dans les équations $[\mathrm{P}] = 0$, $[\mathrm{Q}] = 0$, $[\mathrm{R}] = 0$,

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{S}r^2 dm + \mathrm{S}q^2 dm)\, d\frac{d\mathrm{P}}{dt} + (\mathrm{S}pq\, dm)\, d\frac{d\mathrm{Q}}{dt} - (\mathrm{S}pr\, dm)\, d\frac{d\mathrm{R}}{dt}\\
&\qquad\qquad + \mathrm{S}\varpi r\, dm\, dt - \mathrm{S}\Psi q\, dm\, dt = 0,\\
&(\mathrm{S}r^2 dm + \mathrm{S}p^2 dm)\, d\frac{d\mathrm{Q}}{dt} + (\mathrm{S}pq\, dm)\, d\frac{d\mathrm{P}}{dt} + (\mathrm{S}qr\, dm)\, d\frac{d\mathrm{R}}{dt}\\
&\qquad\qquad + \mathrm{S}\Pi r\, dm\, dt - \mathrm{S}\Psi p\, dm\, dt = 0,\\
&(\mathrm{S}p^2 dm + \mathrm{S}q^2 dm)\, d\frac{d\mathrm{R}}{dt} + (\mathrm{S}qr\, dm)\, d\frac{d\mathrm{Q}}{dt} - (\mathrm{S}pr\, dm)\, d\frac{d\mathrm{P}}{dt}\\
&\qquad\qquad + \mathrm{S}\Pi q\, dm\, dt - \mathrm{S}\varpi p\, dm\, dt = 0;
\end{aligned}$$

de plus, les équations

$$r'd\mathrm{Q} + q'd\mathrm{R} = 0, \quad r'd\mathrm{P} - p'd\mathrm{R} = 0,$$

étant divisées par dt et ensuite différentiées, donnent, à cause de $d\mathrm{P}=0$, $d\mathrm{Q}=0$, $d\mathrm{R}=0$,

$$r'd\frac{d\mathrm{Q}}{dt}+q'd\frac{d\mathrm{R}}{dt}=0,\quad r'd\frac{d\mathrm{P}}{dt}-p'd\frac{d\mathrm{R}}{dt}=0;$$

d'où l'on tire

$$d\frac{d\mathrm{Q}}{dt}=-\frac{q'}{r'}d\frac{d\mathrm{R}}{dt},\quad d\frac{d\mathrm{P}}{dt}=\frac{p'}{r'}d\frac{d\mathrm{R}}{dt};$$

ces valeurs substituées dans les équations ci-devant, on a

$$\left[(\mathrm{S}r^2dm+\mathrm{S}q^2dm)\frac{p'}{r'}-(\mathrm{S}pq\,dm)\frac{q'}{r'}-\mathrm{S}pr\,dm\right]d\frac{d\mathrm{R}}{dt}$$
$$+\mathrm{S}\varpi r\,dm\,dt-\mathrm{S}\Psi q\,dm\,dt=0,$$

$$\left[-(\mathrm{S}r^2dm+\mathrm{S}p^2dm)\frac{q'}{r'}+(\mathrm{S}pq\,dm)\frac{p'}{r'}+\mathrm{S}qr\,dm\right]d\frac{d\mathrm{R}}{dt}$$
$$+\mathrm{S}\Pi r\,dm\,dt-\mathrm{S}\Psi p\,dm\,dt=0,$$

$$\left[\mathrm{S}p^2dm+\mathrm{S}q^2dm-(\mathrm{S}qr\,dm)\frac{q'}{r'}-(\mathrm{S}pr\,dm)\frac{p'}{r'}\right]d\frac{d\mathrm{R}}{dt}$$
$$+\mathrm{S}\Pi q\,dm\,dt-\mathrm{S}\varpi p\,dm\,dt=0,$$

et, en éliminant $d\dfrac{d\mathrm{R}}{dt}$,

$$\frac{(\mathrm{S}r^2dm+\mathrm{S}q^2dm)p'-(\mathrm{S}pq\,dm)q'-(\mathrm{S}pr\,dm)r'}{(\mathrm{S}pq\,dm)p'-(\mathrm{S}r^2dm+\mathrm{S}p^2dm)q'+(\mathrm{S}qr\,dm)r'}=\frac{\mathrm{S}\Psi q\,dm-\mathrm{S}\varpi r\,dm}{\mathrm{S}\Psi p\,dm-\mathrm{S}\Pi r\,dm},$$

$$\frac{(\mathrm{S}r^2dm+\mathrm{S}q^2dm)p'-(\mathrm{S}pq\,dm)q'-(\mathrm{S}pr\,dm)r'}{-(\mathrm{S}pr\,dm)p'-(\mathrm{S}r^2dm+\mathrm{S}q^2dm)q'+(\mathrm{S}qr\,dm)r'}=\frac{\mathrm{S}\Psi q\,dm-\mathrm{S}\varpi r\,dm}{\mathrm{S}\varpi p\,dm-\mathrm{S}\Pi q\,dm},$$

équations qui donnent le rapport des coordonnées p', q', r' entre elles, et par conséquent la position de l'axe de rotation au commencement du mouvement.

XXXVII.

Corollaire II. — Si le corps n'est pas absolument libre, mais qu'un de ses points quelconque soit obligé de se mouvoir sur une surface donnée, alors, prenant ce point pour le centre de rotation, et supposant la surface exprimée par l'équation

$$dZ = m\,dX + n\,dY,$$

on ne fera que mettre, dans l'équation (S), $m\delta X + n\delta Y$ pour δZ, et l'on aura, au lieu des trois équations $[X] = 0$, $[Y] = 0$, $[Z] = 0$, ces deux-ci :

$$[X] + m[Z] = 0, \quad [Y] + n[Z] = 0,$$

les trois autres ne recevant aucun changement. Mais si, pour simplifier les expressions de $[X]$, $[Y]$,..., on veut que le centre de rotation soit le centre de même de gravité du corps, suivant la Remarque de l'Article XXXV, alors on ne doit plus prendre X, Y, Z pour les coordonnées de la surface proposée, mais $X + p'$, $Y + q'$, $Z + r'$, p', q', r' étant les coordonnées qui déterminent la position du point qui se meut sur cette surface par rapport au centre de gravité; on aura donc

$$dZ + dr' = m(dX + dp') + n(dY + dq'),$$

et mettant au lieu de dp', dq', dr' leurs valeurs

$$r'\,dQ + q'\,dR, \quad r'\,dP - p'\,dR, \quad -q'\,dP - p'\,dQ,$$

et ordonnant les termes,

$$dZ = m\,dX + n\,dY + (q' + nr')\,dP + (p' + mr')\,dQ + (mr' - np')\,dR;$$

on trouvera par un raisonnement semblable

$$\delta Z = m\,\delta X + n\,\delta Y + (q' + nr')\,\delta P + (p' + mr')\,\delta Q + (mq' - np')\,\delta R;$$

donc, substituant cette valeur de δZ dans l'équation (S), et faisant les coefficients des différences restantes chacun égal à zéro, on aura les cinq équations

$$[X] + m[Z] = 0, \quad [Y] + n[Z] = 0,$$

$$[P] + (q' + nr')[Z] = 0, \quad [Q] + (p' + mr')[Z] = 0, \quad [R] + (mr' - np')[Z] = 0,$$

et pour la sixième équation on prendra celle qu'on a trouvée ci-dessus,

savoir

$$dZ = m\,dX + n\,dY + (q' + nr')\,dP + \ldots$$

Mais si l'on supposait que le point qui répond aux coordonnées p', q', r' fût fixement attaché, alors on ferait

$$dX + dp' = 0, \quad dY + dq' = 0, \quad dZ + dr' = 0,$$

ce qui donnerait, en mettant au lieu de dp', dq', dr' leurs valeurs,

$$dX = -r'\,dQ - q'\,dR, \quad dY = -r'\,dP + p'\,dR, \quad dZ = q'\,dP + p'\,dQ;$$

on aurait par la même raison

$$\delta X = -r'\delta Q - q'\delta R, \quad \delta Y = -r'\delta P + p'\delta R, \quad \delta Z = q'\delta P + p'\delta Q,$$

et, ces valeurs substituées dans l'équation (S), on trouverait, en faisant les coefficients de δP, δQ, δR chacun égal à zéro, les trois équations

$$\begin{aligned}
-r'[Y] + q'[Z] + [P] &= 0,\\
-r'[X] + q'[Z] + [Q] &= 0,\\
-q'[X] + p'[Y] + [R] &= 0.
\end{aligned}$$

XXXVIII.

Corollaire III. — Imaginons que le corps soit posé sur un plan ou sur une surface quelconque le long de laquelle il puisse glisser librement, en tournant sur lui-même d'une manière quelconque; soient p', q', r' les coordonnées de la superficie du corps, et

$$dr' = M\,dp' + N\,dq'$$

son équation différentielle, il est clair :

1° Que tandis que le corps a ses divers mouvements dX, dY, dZ, dP, dQ, dR, chaque point de sa surface parcourt les espaces

$$dX + r'\,dQ + q'\,dR, \quad dY + r'\,dP - p'\,dR, \quad dZ - q'\,dP - p'\,dQ$$

dans la direction des coordonnées X, Y, Z;

2° Que le point d'attouchement, étant mobile sur cette surface, parcourra de plus dans les mêmes directions les espaces dp', dq', dr', savoir dp', dq', $\mathrm{M}dp' + \mathrm{N}dq'$, d'où il suit que les espaces entiers parcourus par le point touchant seront

$$\begin{gathered} d\mathrm{X} + r'd\mathrm{Q} + q'd\mathrm{R} + dp', \\ d\mathrm{Y} + r'd\mathrm{P} - p'd\mathrm{R} + dq', \\ d\mathrm{Z} - q'd\mathrm{P} - p'd\mathrm{Q} + \mathrm{M}dp' + \mathrm{N}dq'. \end{gathered}$$

Or, ce point devant aussi se mouvoir sur une surface représentée par l'équation

$$d\mathrm{Z} = m\,d\mathrm{X} + n\,d\mathrm{Y},$$

ou bien

$$dz = m\,dx + n\,dy,$$

en appelant x, y, z les coordonnées de cette surface pour les distinguer des X, Y, Z qui appartiennent au centre de gravité du corps, il faudra mettre dans cette équation, au lieu de dx, dy, dz, les quantités qu'on vient de trouver, ce qui donnera après les réductions

$$\begin{aligned} d\mathrm{Z} = m\,d\mathrm{X} + n\,d\mathrm{Y} + (q' + nr')d\mathrm{P} + (p' + mr')d\mathrm{Q} + (mq' - np')d\mathrm{R} \\ + (m - \mathrm{M})dp' + (n - \mathrm{N})dq'. \end{aligned}$$

Cette équation appartiendrait en général à tous les points dans lesquels la superficie du corps pourrait rencontrer la surface proposée; mais dans notre cas, où l'on veut que les deux surfaces se touchent, il faudra de plus supposer qu'elles aient les mêmes tangentes dans leurs points de rencontre, c'est-à-dire que $m = \mathrm{M}$, $n = \mathrm{N}$; donc l'équation trouvée se réduira à

$$d\mathrm{Z} = m\,d\mathrm{X} + n\,d\mathrm{Y} + (q' + nr')d\mathrm{P} + (p' + mr')d\mathrm{Q} + (mq' - np')d\mathrm{R}.$$

Par les mêmes raisonnements, on trouvera, en considérant les différences marquées par δ,

$$\delta\mathrm{Z} = m\delta\mathrm{X} + n\delta\mathrm{Y} + (q' + nr')\delta\mathrm{P} + (p' + mr')\delta\mathrm{Q} + (mq' - np')\delta\mathrm{R}.$$

Il n'y aura donc plus qu'à substituer cette valeur de δZ dans l'équation (S), et à égaler ensuite à zéro chacun des coefficients des différences δX, δY, δP, δQ, δR, ce qui donnera les cinq équations

$$[X]+m[Z]=0,\quad [Y]+n[Z]=0,$$

$$[P]+(q'+nr')[Z]=0,\quad [Q]+(p'+mr')[Z]=0,\quad [R]+(mq'-np')[Z]=0,$$

lesquelles étant jointes avec l'équation ci-dessus,

$$dZ=m\,dX+n\,dY+(q'+nr')\,dP+\ldots,$$

serviront à déterminer le mouvement du corps.

Si l'on voulait que le corps n'eût à chaque instant qu'un mouvement autour du point touchant, c'est-à-dire qu'il n'eût aucun mouvement pour glisser le long de la surface sur laquelle il se meut, alors il est clair que les espaces parcourus par le point d'attouchement sur la surface dont nous parlons et sur celle du corps devraient être exactement les mêmes; il faudrait donc que

$$\begin{aligned} dX+r'\,dQ+q'\,dR+dp'&=dp',\\ dY+r'\,dP-p'\,dR+dq'&=dq',\\ dZ-q'\,dP-p'\,dR+dr'&=dr', \end{aligned}$$

savoir

$$dX+r'\,dQ+q'\,dR=0,\quad dY+r'\,dP-p'\,dR=0,\quad dZ-q'\,dP-p'\,dR=0,$$

et pareillement

$$\delta X+r'\,\delta Q+q'\,\delta R=0,\quad \delta Y+r'\,\delta P-p'\,\delta R=0,\quad \delta Z-q'\,\delta P-p'\,\delta R=0,$$

d'où l'on aurait pour δX, δY, δZ les mêmes valeurs que dans le second cas de l'Article XXXVII, et ces valeurs substituées dans l'équation (S) donneraient par conséquent aussi les mêmes équations pour le mouvement du corps, mais avec cette différence que les coordonnées p', q', r' répondraient ici non plus à un point fixe, mais à un point mobile qui change continuellement de place tant sur la surface du corps que sur celle le long de laquelle le corps se meut.

XXXIX.

Scolie. — Les expressions [X], [Y],..., sont en général

$$[X] = Md\frac{dX}{dt} + S\left(d\frac{dp}{dt} + \Pi\,dt\right)dm,$$

$$[Y] = Md\frac{dY}{dt} + S\left(d\frac{dq}{dt} + \varpi\,dt\right)dm,$$

$$[Z] = Md\frac{dZ}{dt} + S\left(d\frac{dr}{dt} + \Psi\,dt\right)dm,$$

$$\begin{aligned}[P] = {} & (S\,r\,dm)\,d\frac{dY}{dt} - (S\,q\,dm)\,d\frac{dZ}{dt} \\ & + S\left(d\frac{dq}{dt} + \varpi\,dt\right)r\,dm - S\left(d\frac{dr}{dt} + \Psi\,dt\right)q\,dm,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[Q] = {} & (S\,r\,dm)\,d\frac{dX}{dt} - (S\,p\,dm)\,d\frac{dZ}{dt} \\ & + S\left(d\frac{dp}{dt} + \Pi\,dt\right)r\,dm - S\left(d\frac{dr}{dt} + \Psi\,dt\right)p\,dm,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[R] = {} & (S\,q\,dm)\,d\frac{dX}{dt} - (S\,p\,dm)\,d\frac{dY}{dt} \\ & + S\left(d\frac{dp}{dt} + \Pi\,dt\right)q\,dm - S\left(d\frac{dq}{dt} + \varpi\,dt\right)p\,dm.\end{aligned}$$

Dans les formules de l'Article XXXIV nous avons mis à la place de p, q, r leurs valeurs tirées de l'équation (Q), et cette substitution a introduit les quantités Sp^2dm, Sq^2dm, Sr^2dm, $Spqdm$, $Sprdm$, $Sqrdm$ qui ne peuvent être déterminées que par l'intégration des équations données dans l'Article XXXV. Or, pour éviter cet embarras, il n'y aura qu'à exprimer les coordonnées p, q, r par d'autres variables, dont les unes dépendent uniquement de la situation du corps et soient par conséquent les mêmes pour chacun de ses points, et les autres au contraire soient différentes pour tous les points du corps et demeurent toujours les mêmes pendant qu'il change de situation. Pour cela, ayant imaginé deux axes perpendiculaires l'un à l'autre, qui passent par le centre de rotation et qui demeurent toujours fixes au dedans du corps, on remarquera : 1° que la position de ces deux axes relativement à un plan fixe quelconque ne dépend que de trois variables qu'on peut nommer P, Q, R; 2° que la position de chaque point du corps, relativement à ces axes, dépend encore de trois autres variables que j'appellerai ξ, φ, ζ; d'où il suit que la position de chaque point du corps par rapport à un plan fixe quelconque dépendra en tout de six variables P, Q, R, ξ, φ, ζ, et qu'ainsi les quantités p, q, r ne seront que des fonctions de ces mêmes variables, fonctions toujours faciles à déterminer par les éléments de Géométrie. Ayant donc trouvé les valeurs de p, q, r en P, Q, R, ξ, φ, ζ, on en tirera aisément celles de $d\frac{dp}{dt}$, $d\frac{dq}{dt}$, $d\frac{dr}{dt}$, en faisant varier P, Q, R; on substituera ensuite toutes ces valeurs dans les expressions ci-dessus, et l'on intégrera les termes affectés du signe S, en regardant ξ, φ, ζ comme variables, après quoi il ne restera plus de variables que les P, Q, R qui représentent la position du corps à chaque instant.

Au reste les expressions de p, q, r dont nous venons de parler peuvent servir aussi à trouver les valeurs des différences δp, δq, δr. Soient en général pour chaque point du corps, c'est-à-dire en regardant ξ, φ, ζ comme constantes,

$$dp = A\,dP + B\,dQ + C\,dR,$$
$$dq = D\,dP + E\,dQ + F\,dR,$$
$$dr = G\,dP + H\,dQ + I\,dR,$$

on aura également

$$\delta p = A\delta P + B\delta Q + C\delta R,$$
$$\delta q = D\delta P + E\delta Q + F\delta R,$$
$$\delta r = G\delta P + H\delta Q + I\delta R,$$

et par conséquent

$$\delta x = \delta X + \delta p = \delta X + A\delta P + B\delta Q + C\delta R,$$
$$\delta y = \delta Y + \delta q = \delta Y + D\delta P + E\delta Q + F\delta R,$$
$$\delta z = \delta Z + \delta r = \delta Z + G\delta P + H\delta Q + I\delta R.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (L), on aura une équation de la même forme que (S), dans laquelle les quantités [X], [Y], [Z] seront exprimées comme ci-dessus, et les [P], [Q], [R] auront les valeurs suivantes :

$$[P] = (\mathrm{SA}\,dm)\,d\frac{dX}{dt} + (\mathrm{SD}\,dm)\,d\frac{dY}{dt} + (\mathrm{SG}\,dm)\,d\frac{dZ}{dt}$$
$$+ \mathrm{S}\left[\left(d\frac{dp}{dt} + \Pi\,dt\right)\mathrm{A} + \left(d\frac{dq}{dt} + \varpi\,dt\right)\mathrm{D} + \left(d\frac{dr}{dt} + \Psi\,dt\right)\mathrm{G}\right]dm,$$

$$[Q] = (\mathrm{SB}\,dm)\,d\frac{dX}{dt} + (\mathrm{SE}\,dm)\,d\frac{dY}{dt} + (\mathrm{SH}\,dm)\,d\frac{dZ}{dt}$$
$$+ \mathrm{S}\left[\left(d\frac{dp}{dt} + \Pi\,dt\right)\mathrm{B} + \left(d\frac{dq}{dt} + \varpi\,dt\right)\mathrm{E} + \left(d\frac{dr}{dt} + \Psi\,dt\right)\mathrm{H}\right]dm,$$

$$[R] = (\mathrm{SC}\,dm)\,d\frac{dX}{dt} + (\mathrm{SF}\,dm)\,d\frac{dY}{dt} + (\mathrm{SI}\,dm)\,d\frac{dZ}{dt}$$
$$+ \mathrm{S}\left[\left(d\frac{dp}{dt} + \Pi\,dt\right)\mathrm{C} + \left(d\frac{dq}{dt} + \varpi\,dt\right)\mathrm{F} + \left(d\frac{dr}{dt} + \Psi\,dt\right)\mathrm{I}\right]dm.$$

Je laisse au lecteur le détail de l'application de cette équation, qui n'aura aucune difficulté, après ce que nous avons dit dans les Corollaires précédents.

XL.

Problème IX. — *Trouver les lois du mouvement des fluides non élastiques.*

Solution. — Il est visible que l'équation (L), qui a servi pour résoudre le Problème précédent, a encore lieu ici, cette équation étant générale pour un système quelconque de corpuscules *dm*, agités par des forces quelconques P, Q, R,...,

Soit D la densité de chaque particule du fluide *dm*, on aura

$$dm = \mathrm{D}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

et l'équation dont il s'agit sera

$$(a)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int \mathrm{S}^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{D}\left[\left(d\frac{dx}{dt} + \Pi\,dt\right)\delta x + \left(d\frac{dy}{dt} + \varpi\,dt\right)\delta y\right.\\ &\qquad\qquad\left. + \left(d\frac{dz}{dt} + \Psi\,dt\right)\delta z\right] = 0. \end{aligned}\right.$$

Je mets l'exposant [3] au signe S, pour exprimer les trois intégrations que ce signe renferme, relativement aux trois variables x, y, z, intégrations que nous aurons souvent occasion dans la suite de considérer chacune en particulier.

Maintenant, comme le fluide est supposé incompressible, il faut que le volume de chaque particule dm, lequel est exprimé par $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, reste toujours le même; on aura donc

$$\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,d\mathrm{d}x + \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,d\mathrm{d}y + \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,d\mathrm{d}z = 0,$$

savoir

$$\frac{d\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} + \frac{d\mathrm{d}y}{\mathrm{d}y} + \frac{d\mathrm{d}z}{\mathrm{d}z} = 0,$$

ou, en mettant $\mathrm{d}d$ au lieu de $d\mathrm{d}$,

$$\frac{\mathrm{d}dx}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}dy}{\mathrm{d}y} + \frac{\mathrm{d}dz}{\mathrm{d}z} = 0. \tag{b}$$

On aura par la même raison

$$\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\delta\mathrm{d}x + \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\delta\mathrm{d}y + \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\delta\mathrm{d}z = 0,$$

ou bien

$$\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\delta x + \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\delta y + \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\delta z = 0,$$

ce qui donne

$$\mathrm{d}\delta x = -\mathrm{d}x\left(\frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}y} + \frac{\mathrm{d}\delta z}{\mathrm{d}z}\right),$$

et par conséquent

$$\mathrm{S}\,\mathrm{d}\delta x = \delta x = \delta' x - \mathrm{S}\,\mathrm{d}x\left(\frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}y} + \frac{\mathrm{d}\delta z}{\mathrm{d}z}\right); \tag{c}$$

$\delta' x$ est la valeur de δx, quand l'intégrale $\mathrm{S}\,\mathrm{d}x\left(\frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}y} + \frac{\mathrm{d}\delta z}{\mathrm{d}z}\right)$ est nulle; or, comme cette intégrale doit être prise en variant seulement x, il s'ensuit que la quantité $\delta' x$ sera constante par rapport à x, mais variable par rapport à y et z, c'est-à-dire que cette quantité sera une fonction de y et z.

Donc, mettant dans l'équation (a), à la place de δx, la valeur qu'on vient de trouver, l'expression intégrale

$$\mathrm{S}^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{D}\left(d\frac{dx}{dt}+\Pi\,dt\right)\delta x$$

se changera en celle-ci :

$$\begin{aligned}&\mathrm{S}^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{D}\left(d\frac{dx}{dt}+\Pi\,dt\right)\delta' x\\ &-\mathrm{S}^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\left[\mathrm{D}\left(d\frac{dx}{dt}+\Pi\,dt\right)\mathrm{S}\,\mathrm{d}x\left(\frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}y}+\frac{\mathrm{d}\delta z}{\mathrm{d}z}\right)\right].\end{aligned}$$

J'écris d'abord le premier membre transformé ainsi :

$$\mathrm{S}^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{S}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{D}\left(d\frac{dx}{dt}+\Pi\,dt\right)\delta' x,$$

expression qu'on voit bien être équivalente à la proposée. Or, soit la valeur totale de

$$\mathrm{S}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{D}\left(d\frac{dx}{dt}+\Pi\,dt\right)$$

exprimée par $\mathrm{T}\,dt$, il est clair qu'on aura, à cause que $\delta' x$ est constant par rapport à x,

$$\mathrm{S}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{D}\left(d\frac{dx}{dt}+\Pi\,dt\right)\delta' x=\delta' x\,\mathrm{S}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{D}\left(d\frac{dx}{dt}+\Pi\,dt\right)=\delta' x\,\mathrm{T}\,dt;$$

donc

$$\mathrm{S}^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{D}\left(d\frac{dx}{dt}+\Pi\,dt\right)\delta' x=\mathrm{S}^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{T}\,dt\,\delta' x.$$

Je mets de même le second membre sous la forme suivante :

$$\mathrm{S}^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{S}\,\mathrm{d}x\left[\mathrm{D}\left(d\frac{dx}{dt}+dt\right)\mathrm{S}\,\mathrm{d}x\left(\frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}y}+\frac{\mathrm{d}\delta z}{\mathrm{d}z}\right)\right];$$

j'opère sur l'intégrale

$$\mathrm{S}\,\mathrm{d}x\left[\mathrm{D}\left(d\frac{dx}{dt}+\Pi\,dt\right)\mathrm{S}\,\mathrm{d}x\left(\frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}y}+\frac{\mathrm{d}\delta z}{\mathrm{d}z}\right)\right]$$

suivant la méthode de l'Article IX, Mémoire précédent : j'aurai, en supposant, pour abréger,

$$\mathrm{U}\,dt = \mathrm{T}\,dt - \mathrm{S}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{D}\left(d\frac{dx}{dt} + \Pi\,dt\right),$$

la transformée

$$\mathrm{S}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{U}\,dt\left(\frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}y} + \frac{\mathrm{d}\delta z}{\mathrm{d}z}\right),$$

où il n'y a plus qu'un seul signe d'intégration; la formule proposée deviendra donc

$$\mathrm{S}^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{S}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{U}\,dt\left(\frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}y} + \frac{\mathrm{d}\delta z}{\mathrm{d}z}\right),$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\mathrm{S}^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{U}\,dt\left(\frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}y} + \frac{\mathrm{d}\delta z}{\mathrm{d}z}\right),$$

dans laquelle il ne s'agit plus que de faire disparaître les différences de δy et δz.

Pour cela il est nécessaire de distinguer d'abord les intégrations relatives à la variabilité de y et de z, en mettant cette intégrale sous la forme suivante :

$$\mathrm{S}^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{S}\,\mathrm{d}y\,\frac{\mathrm{U}\,dt\,\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}y} + \mathrm{S}^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{S}\,\mathrm{d}z\,\frac{\mathrm{U}\,dt\,\mathrm{d}\delta z}{\mathrm{d}z}.$$

Or, par la méthode ordinaire des intégrations par parties, on trouve

$$\mathrm{S}\,\mathrm{d}y\,\frac{\mathrm{U}\,dt\,\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}y} = \mathrm{U}\,dt\,\delta y - \mathrm{S}\,\mathrm{d}y\,\frac{\mathrm{d}(\mathrm{U}\,dt)}{\mathrm{d}y}\,\delta y.$$

J'écris $\mathrm{S}\,\mathrm{d}y\,\frac{\mathrm{d}(\mathrm{U}\,dt)}{\mathrm{d}y}\,\delta y$ au lieu de $\mathrm{S}\,\mathrm{d}(\mathrm{U}\,dt)\,\delta y$ qui lui est égal, pour dénoter que cette intégrale, de même que la différentielle $\mathrm{d}\mathrm{U}\,dt$, doit être prise en ne considérant que la variabilité de y seul. Soient maintenant $'y$ la valeur de y lorsque l'intégrale $\mathrm{S}\,\mathrm{d}y\,\frac{\mathrm{d}(\mathrm{U}\,dt)}{\mathrm{d}y}\,\delta y$ commence, et y' sa valeur lorsque cette intégrale finit; et soit exprimé par $'\mathrm{U}$ ce que devient U en y mettant $'y$ à la place de y, et par U' ce que la même quantité devient en faisant $y = y'$; on trouvera, par la Remarque faite à la fin de l'Article I du Mémoire précédent, que la valeur complète du terme $\mathrm{U}\,dt\,\delta y$ sera $\mathrm{U}'dt\,\delta y' - {}'\mathrm{U}dt\,\delta' y$.

Mais pour peu qu'on réfléchisse sur la nature de nos formules, il est aisé de voir que quand $\mathrm{U} = {}'\mathrm{U}$ l'intégrale $\mathrm{S}\,\mathrm{d}x\mathrm{D}\left(d\frac{dx}{dt} + \Pi\,\delta t\right)$ est nulle, et que quand $\mathrm{U} = \mathrm{U}'$, cette intégrale est précisément égale à $\mathrm{T}dt$; c'est pourquoi l'on aura $'\mathrm{U} = \mathrm{T}$ et $\mathrm{U}' = 0$; donc enfin

$$\mathrm{S}\,\mathrm{d}y\,\frac{\mathrm{U}dt\,\mathrm{d}\,\delta y}{\mathrm{d}y} = -\mathrm{T}\,\delta' y - \mathrm{S}\,\mathrm{d}y\,\frac{\mathrm{d}(\mathrm{U}dt)}{\mathrm{d}y}\,\delta y.$$

On trouvera par des opérations et des raisonnements semblables

$$\mathrm{S}\,\mathrm{d}z\,\frac{-\mathrm{U}dt\,\mathrm{d}\,\delta z}{\mathrm{d}z} = -\mathrm{T}\,\delta' z - \mathrm{S}\,\mathrm{d}z\,\frac{\mathrm{d}(\mathrm{U}dt)}{\mathrm{d}z}\,\delta z;$$

donc

$$\mathrm{S}^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{U}dt\left(\frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}y} + \frac{\mathrm{d}\delta z}{\mathrm{d}z}\right)$$

se changera en

$$-\mathrm{S}^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{T}\,dt\,\delta' y - \mathrm{S}^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{S}\,\mathrm{d}y\,\frac{\mathrm{d}(\mathrm{U}dt)}{\mathrm{d}y}\,\delta y$$
$$-\mathrm{S}^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{T}\,dt\,\delta' z - \mathrm{S}^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{S}\,\mathrm{d}z\,\frac{\mathrm{d}(\mathrm{U}dt)}{\mathrm{d}z}\,\delta z,$$

ou, en réduisant,

$$-\mathrm{S}^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{T}dt\,\delta' y - \mathrm{S}^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{T}dt\,\delta' z - \mathrm{S}^3\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\left(\frac{\mathrm{d}(\mathrm{U}dt)}{\mathrm{d}y}\,\delta y + \frac{\mathrm{d}(\mathrm{U}dt)}{\mathrm{d}z}\,\delta z\right);$$

donc

$$\mathrm{S}^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\;\mathrm{D}\left(d\frac{dx}{dt} + \Pi dt\right)\delta x = \mathrm{S}^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{T}\,dt\,\delta' x - \mathrm{S}^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{T}\,dt\,\delta' y$$
$$-\mathrm{S}^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{T}\,dt\,\delta' z + \mathrm{S}^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\left(\frac{\mathrm{d}(\mathrm{U}dt)}{\mathrm{d}y}\,\delta y + \frac{\mathrm{d}(\mathrm{U}dt)}{\mathrm{d}z}\,\delta z\right),$$

donc l'équation (a) deviendra

$$(d)\quad\left\{\begin{aligned}&\int(\mathrm{S}^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.\mathrm{T}\,dt\,\delta' x + \mathrm{S}^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{T}\,dt\,\delta' y + \mathrm{S}^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{T}\,dt\,\delta' z)\\&\quad+\int\mathrm{S}^3\,\mathrm{d}x.\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\left\{\left[\frac{\mathrm{d}(\mathrm{U}dt)}{\mathrm{d}y} + \mathrm{D}\left(d\frac{dy}{dt} + \varpi dt\right)\right]\delta y\right.\\&\qquad\qquad\left.+\left[\frac{\mathrm{d}(\mathrm{U}dt)}{\mathrm{d}z} + \mathrm{D}\left(d\frac{dz}{dt} + \Psi dt\right)\right]\delta z\right\} = 0;\end{aligned}\right.$$

d'où l'on tire pour le mouvement de chaque particule du fluide en général

$$(e)\quad \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}(\mathrm{U}\,dt)}{\mathrm{d}y} + \mathrm{D}\left(d\,\dfrac{dy}{dt} + \varpi\,dt\right) = 0, \\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}(\mathrm{U}\,dt)}{\mathrm{d}z} + \mathrm{D}\left(d\,\dfrac{dz}{dt} + \Psi\,dt\right) = 0. \end{cases}$$

Ensuite, pour satisfaire au reste de l'équation, on fera

$$(f)\quad \mathrm{S}^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{T}\,dt\,\delta'x + \mathrm{S}^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{T}\,dt\,\delta'y + \mathrm{S}^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{T}\,dt\,\delta'z = 0.$$

XLI.

Corollaire I. — La valeur de $\mathrm{U}\,dt$ est

$$\mathrm{T}\,dt - \mathrm{S}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{D}\left(d\,\frac{dx}{dt} + \Pi\,dt\right),$$

l'intégrale étant prise en variant seulement x; on substituera donc cette valeur dans les équations (e); mais, pour pouvoir faire disparaître le signe S, on prendra les différentielles de ces deux équations en supposant x seul variable, ce qui donnera, en mettant pour $\dfrac{\mathrm{d}(\mathrm{U}\,dt)}{\mathrm{d}x}$ sa valeur $-\mathrm{D}\left(d\,\dfrac{dx}{dt} + \Pi\,dt\right)$, deux équations

$$(g)\quad \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\left[\mathrm{D}\left(d\,\dfrac{dx}{dt} + \Pi\,dt\right)\right]}{\mathrm{d}y} = \dfrac{\mathrm{d}\left[\mathrm{D}\left(d\,\dfrac{dx}{dt} + \varpi\,dt\right)\right]}{\mathrm{d}x}, \\[3ex] \dfrac{\mathrm{d}\left[\mathrm{D}\left(d\,\dfrac{dx}{dt} + \Pi\,dt\right)\right]}{\mathrm{d}z} = \dfrac{\mathrm{d}\left[\mathrm{D}\left(d\,\dfrac{dz}{dt} + \Psi\,dt\right)\right]}{\mathrm{d}x}, \end{cases}$$

qui jointes à l'équation (b) trouvée ci-dessus feront connaître les valeurs de x, y, z pour un temps quelconque.

XLII.

Corollaire II. — Telles sont les équations par lesquelles on peut déterminer en général le mouvement d'un fluide non élastique sollicité par des forces quelconques P, Q, R,..., qui agissent suivant des directions quelconques, ou bien par des forces Π, ϖ, Ψ dirigées suivant les lignes x, y, z; comme il est aisé de le voir en examinant les valeurs de ces quantités Π, ϖ, Ψ (Article I).

Pour mieux connaître les équations dont il s'agit, exprimons par α, β, γ les vitesses de chaque particule du fluide parallèlement aux coordonnées x, y, z, c'est-à-dire les valeurs de $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$: on aura, en divisant par dt,

$$(h)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}\left(\mathrm{D}\frac{d\alpha}{dt}\right)}{\mathrm{d}y}+\frac{\mathrm{d}(\mathrm{D}\Pi)}{\mathrm{d}y}=\frac{\mathrm{d}\left(\mathrm{D}\frac{d\beta}{dt}\right)}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}(\mathrm{D}\varpi)}{\mathrm{d}x},\\ &\frac{\mathrm{d}\left(\mathrm{D}\frac{d\alpha}{dt}\right)}{\mathrm{d}z}+\frac{\mathrm{d}(\mathrm{D}\Pi)}{\mathrm{d}z}=\frac{\mathrm{d}\left(\mathrm{D}\frac{d\gamma}{dt}\right)}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}(\mathrm{D}\Psi)}{\mathrm{d}x}, \end{aligned}\right.$$

$$(i)\quad \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}y}+\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}z}=0.$$

On voit par ces équations que les quantités α, β, γ sont nécessairement des fonctions des variables x, y, z qui déterminent la position des particules à chaque instant, et du temps écoulé depuis le commencement du mouvement; or, dans l'instant dt, il est clair que les variables x, y, z deviennent $x+\alpha\,dt$, $y+\beta\,dt$, $z+\gamma\,dt$; donc les variations des quantités α, β, γ dans cet instant ne seront pas seulement $\frac{d\alpha}{dt}dt$, $\frac{d\beta}{dt}dt$, $\frac{d\gamma}{dt}dt$, mais

$$\begin{aligned} &\frac{d\alpha}{dt}dt+\frac{d\alpha}{dx}\alpha\,dt+\frac{d\alpha}{dy}\beta\,dt+\frac{d\alpha}{dz}\gamma\,dt,\\ &\frac{d\beta}{dt}dt+\frac{d\beta}{dx}\alpha\,dt+\frac{d\beta}{dy}\beta\,dt+\frac{d\beta}{dz}\gamma\,dt,\\ &\frac{d\gamma}{dt}dt+\frac{d\gamma}{dx}\alpha\,dt+\frac{d\gamma}{dy}\beta\,dt+\frac{d\gamma}{dz}\gamma\,dt, \end{aligned}$$

et telles seront les valeurs de $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$; donc, si on substitue ces valeurs dans les équations (h), et qu'on suppose pour plus de simplicité les forces Π, ϖ, Ψ nulles ou telles que

$$\frac{\mathrm{d}(\mathrm{D}\Pi)}{\mathrm{d}y}=\frac{\mathrm{d}(\mathrm{D}\varpi)}{\mathrm{d}x},\quad \frac{\mathrm{d}(\mathrm{D}\Pi)}{\mathrm{d}z}=\frac{\mathrm{d}(\mathrm{D}\Psi)}{\mathrm{d}x},$$

et de plus la densité D constante, on aura, en divisant par D et marquant toutes les différences par d, ce qui est absolument indifférent ici,

$$\frac{d^2\alpha}{dt\,dy} + \alpha\frac{d^2\alpha}{dx\,dy} + \beta\frac{d^2\alpha}{dy^2} + \gamma\frac{d^2\alpha}{dy\,dz} + \frac{d\alpha}{dx}\frac{d\alpha}{dy} + \frac{d\alpha}{dy}\frac{d\beta}{dy} + \frac{d\alpha}{dz}\frac{d\gamma}{dy}$$
$$= \frac{d^2\beta}{dt\,dx} + \alpha\frac{d^2\beta}{dx^2} + \beta\frac{d^2\beta}{dx\,dy} + \gamma\frac{d^2\beta}{dx\,dz} + \frac{d\beta}{dx}\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy}\frac{d\beta}{dx} + \frac{d\beta}{dz}\frac{d\gamma}{dx},$$

$$\frac{d^2\alpha}{dt\,dz} + \alpha\frac{d^2\alpha}{dx\,dz} + \beta\frac{d^2\alpha}{dy\,dz} + \gamma\frac{d^2\alpha}{dz^2} + \frac{d\alpha}{dx}\frac{d\alpha}{dz} + \frac{d\alpha}{dy}\frac{d\beta}{dz} + \frac{d\alpha}{dz}\frac{d\gamma}{dz}$$
$$= \frac{d^2\gamma}{dt\,dx} + \alpha\frac{d^2\gamma}{dx^2} + \beta\frac{d^2\gamma}{dx\,dy} + \gamma\frac{d^2\gamma}{dx\,dz} + \frac{d\gamma}{dx}\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\gamma}{dy}\frac{d\beta}{dx} + \frac{d\gamma}{dz}\frac{d\gamma}{dx}.$$

Ces équations peuvent s'abréger en supposant

$$\frac{d\alpha}{dy} - \frac{d\beta}{dx} = \mu, \quad \frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx} = \nu,$$

ce qui les réduira à

$$(k) \quad \begin{cases} \dfrac{d\mu}{dt} + \alpha\dfrac{d\mu}{dx} + \beta\dfrac{d\mu}{dy} + \gamma\dfrac{d\mu}{dz} + \mu\left(\dfrac{d\alpha}{dx} + \dfrac{d\beta}{dy}\right) + \dfrac{d\alpha}{dz}\dfrac{d\gamma}{dy} - \dfrac{d\beta}{dz}\dfrac{d\gamma}{dx} = 0, \\ \dfrac{d\nu}{dt} + \alpha\dfrac{d\nu}{dx} + \beta\dfrac{d\nu}{dy} + \gamma\dfrac{d\nu}{dz} + \nu\left(\dfrac{d\alpha}{dx} + \dfrac{d\beta}{dy}\right) + \dfrac{d\alpha}{dy}\dfrac{d\beta}{dz} - \dfrac{d\gamma}{dy}\dfrac{d\beta}{dx} = 0. \end{cases}$$

On peut satisfaire à ces deux équations, en faisant

$$\mu = \frac{d\alpha}{dy} - \frac{d\beta}{dx} = 0, \quad \nu = \frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx} = 0, \quad \frac{d\beta}{dz} - \frac{d\gamma}{dy} = 0,$$

comme il est facile de s'en assurer; or la troisième de ces conditions est évidemment une suite nécessaire des deux premières; donc on n'aura réellement que deux conditions à remplir, lesquelles pourront s'exprimer plus simplement en disant que $\alpha dx + \beta dy + \gamma dz$ doit être une différentielle complète; et ces conditions jointes avec celle que donne l'équation (i), savoir, en changeant d en d,

$$\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz} = 0,$$

serviront à déterminer les mouvements du fluide dans plusieurs cas particuliers.

Ces cas se réduisent à ceux où l'on suppose que les particules du fluide décrivent des courbes invariables, ce qui arrive quand les rapports des vitesses α, β, γ sont indépendants du temps t, c'est-à-dire quand les quantités α, β, γ sont simplement des fonctions de x, y, z multipliées par une même fonction de t. Car, soit mis dans les équations générales (h) $\theta\alpha$, $\theta\beta$, $\theta\gamma$ à la place de α, β, γ (θ étant une fonction quelconque de t, et α, β, γ étant maintenant regardées comme des fonctions indéterminées de x, y, z sans t), on trouvera, après avoir divisé par θ^2,

$$\frac{\mu}{\theta^2}\frac{d\theta}{dt} + \alpha\frac{d\mu}{dx} + \beta\frac{d\mu}{dy} + \gamma\frac{d\mu}{dz} + \mu\left(\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy}\right) + \frac{d\alpha}{dz}\frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz}\frac{d\gamma}{dx} = 0,$$

$$\frac{\nu}{\theta^2}\frac{d\theta}{dt} + \alpha\frac{d\nu}{dx} + \beta\frac{d\nu}{dy} + \gamma\frac{d\nu}{dz} + \nu\left(\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy}\right) + \frac{d\alpha}{dy}\frac{d\beta}{dz} - \frac{d\gamma}{dy}\frac{d\beta}{dx} = 0.$$

Or, comme les termes $\frac{\mu}{\theta^2}\frac{d\theta}{dt}$, $\frac{\nu}{\theta^2}\frac{d\theta}{dt}$ sont les seuls qui renferment t, il faut nécessairement qu'ils soient égaux à zéro séparément de tous les autres, pour que les équations soient possibles; on aura donc $\mu = 0$, $\nu = 0$, ce qui satisfait encore au reste de l'une et de l'autre équation, comme on l'a vu plus haut.

Il y a pourtant un cas où les équations précédentes peuvent être vérifiées sans supposer $\mu = 0$ et $\nu = 0$; c'est celui où l'on aura

$$\frac{1}{\theta^2}\frac{d\theta}{dt} = \text{const.},$$

c'est-à-dire où

$$\frac{1}{\theta} = a - bt \quad \text{et} \quad \theta = \frac{1}{a - bt},$$

a et b étant deux constantes quelconques; car alors les termes $\frac{\mu}{\theta^2}\frac{d\theta}{dt}$, $\frac{\nu}{\theta^2}\frac{d\theta}{dt}$ se trouveront entièrement indépendants du temps t, ainsi que tous les autres.

Au reste, en combinant les équations $\mu = 0$, $\nu = 0$ avec l'équation (i), on peut séparer les indéterminées α, β, γ, et l'on aura

$$\frac{d^2\alpha}{dx^2}+\frac{d^2\alpha}{dy^2}+\frac{d^2\alpha}{dz^2}=0,$$

$$\frac{d^2\beta}{dx^2}+\frac{d^2\beta}{dy^2}+\frac{d^2\beta}{dz^2}=0,$$

$$\frac{d^2\gamma}{dx^2}+\frac{d^2\gamma}{dy^2}+\frac{d^2\gamma}{dz^2}=0,$$

XLIII.

Remarque. — Quand on aura trouvé, par le moyen des équations de l'Article précédent, les valeurs générales de α, β, γ, il faudra de plus déterminer ces valeurs, en sorte que les particules contiguës aux parois du vase dans lequel le fluide se meut puissent couler le long de ces parois; soient x', y', z' leurs coordonnées, et

$$dz' = p\,dx' + q\,dy'$$

l'équation qui représente la figure du vase donné, en mettant, au lieu de dx', dy', dz', leurs valeurs $\alpha' dt$, $\beta' dt$, $\gamma' dt$; α', β', γ' dénotant les valeurs de α, β, γ lorsque x, y, z deviennent x', y', z', on aura l'équation

$$\gamma' = p\alpha' + q\beta',$$

qui devra être vraie indépendamment de t.

Dans le cas où le temps t n'entre point dans le rapport des vitesses α, β, γ, il est clair qu'il n'entrera pas non plus dans l'équation

$$\gamma' = p\alpha' + q\beta';$$

mais alors les valeurs de α, β, γ étant beaucoup moins générales, il pourra arriver que cette équation ne se vérifie qu'en supposant que les quantités p, q aient certaines conditions, c'est-à-dire que le vase ait une certaine figure; c'est ce que M. d'Alembert a déjà remarqué dans un excellent Mémoire sur les lois du mouvement des fluides, imprimé dans le premier volume de ses *Opuscules mathématiques*. Mais ce savant Géomètre prétend de plus que, lorsque le vase aura une autre figure quelconque, le mouvement du fluide ne pourra plus être soumis au calcul; c'est de quoi je ne saurais tomber d'accord avec lui; car il me semble que tout ce qu'il faudrait conclure alors, c'est que la supposition particulière de $\mu = 0$ et $\nu = 0$ cesserait d'être exacte, et que par conséquent les valeurs de α, β, γ dépendraient de la résolution générale des équations (k).

Il est vrai que M. d'Alembert prétend que les équations $\mu = 0$, $\nu = 0$ sont les seules vraiment exactes pour déterminer les lois du mouvement des fluides; il se fonde sur ce que le rapport des vitesses α, β, γ doit être indépendant du temps t dans les particules qui coulent le long des parois du vase; d'où il infère qu'il doit l'être aussi en général dans toutes les particules du fluide; mais cette conséquence, si j'ose le dire, ne me paraît point assez juste. En effet, on peut très-bien imaginer, ce me semble, des fonctions de x, y, z telles, que la variable t ne disparaisse de l'expression de leur rapport que lorsque x, y, z deviennent x', y', z', et sont liées par l'équation

$$dz' = p\,dx' + q\,dy'.$$

En général, il me paraît certain qu'en résolvant les équations (h), (i) par des méthodes analogues à celles que j'ai expliquées dans les *Recherches sur le Son*, imprimées ci-devant, on aura une solution applicable à tous les cas possibles, et par laquelle on pourra déterminer le mouvement des fluides qui se meuvent dans des vases de figure quelconque, et qui ont reçu au commencement des impulsions quelconques.

Il ne pourra y avoir de difficulté que dans les seuls cas où le fluide se divisera en se mouvant et cessera de former une masse continue; mais alors, ayant trouvé par le calcul, ce qui est toujours possible, les endroits où le fluide doit se diviser en plusieurs portions, on considérera ensuite chaque portion à part, et on en déterminera le mouvement en la regardant comme une masse isolée.

Nous avons observé dans l'Article précédent qu'il y a un cas où les équations $\mu = 0$, $\nu = 0$ ne sont pas indispensables dans l'hypothèse que les rapports des vitesses α, β, γ soient indépendants du temps t. M. d'Alembert a fait aussi cette remarque dans l'Article X de son Mémoire cité ci-dessus; mais il trouve, par ses formules, que le cas dont il s'agit est celui où

$$\theta = ac^t,$$

au lieu que, suivant les nôtres, ce cas est celui où

$$\theta = \frac{1}{a - bt}.$$

Or cette différence vient d'une légère méprise qui s'est glissée dans les calculs de M. d'Alembert, mais qui n'influe d'ailleurs en rien sur le reste de ses ingénieuses recherches.

Pour faire sentir la vérité de ce que nous avançons ici, examinons les équations que M. d'Alembert donne dans l'Article I du Mémoire cité pour les fluides pesants qui se meuvent dans un plan. Ces équations sont:

1° $$\frac{dp}{dz} = -\frac{dq}{dx},$$

2° $$\frac{d(g - \mathrm{B}\theta p - \mathrm{A}\theta q - q\mathrm{T})}{dz} = \frac{d(-\theta q\mathrm{A} - \theta p\mathrm{B}' - p\mathrm{T})}{dx};$$

g est la gravité, θ est une fonction quelconque de t comme ci-dessus; θq, θp expriment les vitesses que nous avons nommées α et γ, et les quantités A, B, A′, B′, T sont telles, que

$$d(\theta q) = q\mathrm{T}\,dt + \theta\mathrm{A}\,dx + \theta\mathrm{B}\,dz, \quad d(\theta p) = p\mathrm{T}\,dt + \theta\mathrm{A}'\,dx + \theta\mathrm{B}'\,dz.$$

La première de ces équations résulte de l'incompressibilité des particules du fluide, et revient par conséquent au même que l'équation (i) ci-dessus en y faisant $\beta = 0$. A l'égard de la seconde, l'Auteur la tire de cette considération, que les forces verticales et horizontales, perdues à chaque instant par les particules du fluide, doivent se faire équilibre; ces forces sont, selon lui,

$$g - \mathrm{B}\theta p - \mathrm{A}\theta q - q\mathrm{T}, \quad -\theta q\mathrm{A}' - \theta p\mathrm{B}' - p\mathrm{T},$$

ce qui donne, par les lois générales de l'équilibre des fluides, l'équation dont nous parlons. Or je dis que, suivant les hypothèses de M. d'Alembert, il faut écrire θ^2 au lieu de θ dans les expressions des forces en question. Car il est facile de voir que ces forces sont en général

$$g - \frac{d\alpha}{dt}, \quad -\frac{d\gamma}{dt},$$

savoir :

$$g - \frac{d(\theta q)}{dt}, \quad -\frac{d(\theta p)}{dt},$$

c'est-à-dire

$$g - q\mathrm{T} - \frac{\theta \mathrm{A}\, dx}{dt} - \frac{\theta \mathrm{B}\, dz}{dt}, \quad -p\mathrm{T} - \frac{\theta \mathrm{A}'\, dx}{dt} - \frac{\theta \mathrm{B}'\, dz}{dt};$$

mais

$$dx = \alpha\, dt = \theta q\, dt, \quad dz = \gamma\, dt = \theta p\, dt;$$

donc ces quantités deviendront

$$g - q\mathrm{T} - \theta^2 \mathrm{A} q - \theta^2 \mathrm{B} p, \quad -p\mathrm{T} - \theta^2 \mathrm{A}' q - \theta^2 \mathrm{B}' p.$$

Ainsi l'on aura à la rigueur l'équation

$$\frac{d(g - \mathrm{B}\theta^2 p - \mathrm{A}\theta^2 q - q\mathrm{T})}{dz} = \frac{d(-\theta^2 q \mathrm{A}' - \theta^2 p \mathrm{B}' - p\mathrm{T})}{dx},$$

de laquelle le temps t ne disparaît que quand θ^2 est proportionnel à T, c'est-à-dire

$$\frac{\mathrm{T}\, dt}{\theta^2} = \frac{d\theta}{\theta^2} = \text{const.};$$

d'où l'on tire, comme ci-dessus,

$$\theta = \frac{1}{a - bt};$$

au lieu que, selon l'équation de M. d'Alembert, cela doit arriver lorsque

$$\frac{\mathrm{T}}{\theta} = \text{const.},$$

ce qui donne, en intégrant,

$$\theta = ac^t,$$

comme cet Auteur l'a trouvé.

XLIV.

Corollaire III. — Si, au lieu de considérer les vitesses α, β, γ, on veut considérer les variables x, y, z elles-mêmes, on remarquera que ces variables ne peuvent être que des fonctions du temps t et des valeurs qu'elles avaient au commencement du mouvement quand $t = 0$, valeurs qui doivent être entièrement arbitraires, pour que la solution du problème ait toute la généralité possible.

Dénotons ces valeurs par X, Y, Z, c'est-à-dire supposons que les variables x, y, z, qui représentent la position de chaque particule du fluide, après un temps quelconque t, soient au commencement du mouvement X, Y, Z; les différences de x, y, z s'exprimeront en général de la manière suivante :

$$\text{différ. } x = \mathrm{L}\,d\mathrm{X} + \mathrm{M}\,d\mathrm{Y} + \mathrm{N}\,d\mathrm{Z} + \alpha\,dt,$$
$$\text{différ. } y = \mathrm{P}\,d\mathrm{X} + \mathrm{Q}\,d\mathrm{Y} + \mathrm{R}\,d\mathrm{Z} + \beta\,dt,$$
$$\text{différ. } z = \mathrm{S}\,d\mathrm{X} + \mathrm{T}\,d\mathrm{Y} + \mathrm{U}\,d\mathrm{Z} + \gamma\,dt,$$

de sorte que

$$dx = \alpha\,dt, \quad dy = \beta\,dt, \quad dz = \gamma\,dt,$$

et

$$\mathrm{d}x = \mathrm{L}\,d\mathrm{X} + \mathrm{M}\,d\mathrm{Y} + \mathrm{N}\,d\mathrm{Z},$$
$$\mathrm{d}y = \mathrm{P}\,d\mathrm{X} + \mathrm{Q}\,d\mathrm{Y} + \mathrm{R}\,d\mathrm{Z},$$
$$\mathrm{d}z = \mathrm{S}\,d\mathrm{X} + \mathrm{T}\,d\mathrm{Y} + \mathrm{U}\,d\mathrm{Z}.$$

Substituant dans les équations (g), (b), α, β, γ au lieu de $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, et supposant d'ailleurs, pour simplifier le calcul, D constant, et

$$\frac{\mathrm{d}(\mathrm{D}\Pi)}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}(\mathrm{D}\varpi)}{\mathrm{d}x}, \quad \frac{\mathrm{d}(\mathrm{D}\Pi)}{\mathrm{d}z} = \frac{\mathrm{d}(\mathrm{D}\Psi)}{\mathrm{d}x},$$

on trouvera, après avoir divisé les deux premières par Ddt, et la troisième par dt,

$$(l) \qquad \frac{\mathrm{d}\frac{d\alpha}{dt}}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}\frac{d\beta}{dt}}{\mathrm{d}x}, \quad \frac{\mathrm{d}\frac{d\alpha}{dt}}{\mathrm{d}z} = \frac{\mathrm{d}\frac{d\gamma}{dt}}{\mathrm{d}x},$$

$$(m) \qquad \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}y} + \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}z} = 0.$$

Or $\dfrac{\mathrm{d}\dfrac{d\alpha}{dt}}{\mathrm{d}y}$ exprime, comme on sait, le coefficient qu'aurait y dans la différentiation de $\dfrac{d\alpha}{dt}$, supposé que α fût exprimée par une fonction de x, y, z, t; et ainsi des autres expressions semblables. Donc, puisque les quantités α, β, γ sont, par hypothèse, des fonctions de X, Y, Z, il faudra substituer dans α, β, γ, à la place des variables X, Y, Z, leurs valeurs en x, y, z, et différentier ensuite en prenant x, y, z pour variables, ou bien, ce qui revient au même, différentier d'abord les quantités α, β, γ, en faisant varier X, Y, Z, et substituer ensuite au lieu de dX, dY, dZ leurs valeurs en $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}z$.

Des expressions de $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}z$, données ci-dessus, on tire par les règles communes de l'Algèbre

$$dX = \frac{(QU - RT)\,\mathrm{d}x + (NT - MU)\,\mathrm{d}y + (MR - NQ)\,\mathrm{d}z}{K},$$

$$dY = \frac{(RS - PU)\,\mathrm{d}x + (LU - NS)\,\mathrm{d}y + (NP - LR)\,\mathrm{d}z}{K},$$

$$dZ = \frac{(PT - QS)\,\mathrm{d}x + (MS - LT)\,\mathrm{d}y + (LQ - MP)\,\mathrm{d}z}{K},$$

K étant mis, pour abréger, au lieu de

$$LQU - MPU + MRS - NQS + NPT - LRT.$$

Or $\mathrm{d}\alpha$ est la différence de α, qui naît des différences $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}z$, ou bien des différences dX, dY, dZ; donc on aura en général

$$\mathrm{d}\alpha = \frac{d\alpha}{dX}dX + \frac{d\alpha}{dY}dY + \frac{d\alpha}{dZ}dZ;$$

on aura de plus, à cause que la différence de x est une différentielle complète,

$$\frac{d\alpha}{dX} = \frac{dL}{dt}, \quad \frac{d\alpha}{dY} = \frac{dM}{dt}, \quad \frac{d\alpha}{dZ} = \frac{dN}{dt};$$

donc

$$\mathrm{d}\alpha = \frac{dL}{dt}dX + \frac{dM}{dt}dY + \frac{dN}{dt}dZ;$$

on trouvera de même

$$\mathrm{d}\beta = \frac{dP}{dt}dX + \frac{dQ}{dt}dY + \frac{dR}{dt}dZ,$$
$$\mathrm{d}\gamma = \frac{dS}{dt}dX + \frac{dT}{dt}dY + \frac{dU}{dt}dZ;$$

substituant, au lieu de dX, dY, dZ, les valeurs trouvées ci-devant, il viendra

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\alpha = {} & \frac{(QU - RT)\frac{dL}{dt} + (RS - PU)\frac{dM}{dt} + (PT - QS)\frac{dN}{dt}}{K}\,\mathrm{d}x \\
& + \frac{(NT - MU)\frac{dL}{dt} + (LU - NS)\frac{dM}{dt} + (MS - LT)\frac{dN}{dt}}{K}\,\mathrm{d}y \\
& + \frac{(MR - NQ)\frac{dL}{dt} + (NP - LR)\frac{dM}{dt} + (LQ - MP)\frac{dN}{dt}}{K}\,\mathrm{d}z,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\beta = {} & \frac{(QU - RT)\frac{dP}{dt} + (RS - PU)\frac{dQ}{dt} + (PT - QS)\frac{dR}{dt}}{K}\,\mathrm{d}x \\
& + \frac{(NT - MU)\frac{dP}{dt} + (LU - NS)\frac{dQ}{dt} + (MS - LT)\frac{dR}{dt}}{K}\,\mathrm{d}y \\
& + \frac{(MR - NQ)\frac{dP}{dt} + (NP - LR)\frac{dQ}{dt} + (LQ - MP)\frac{dR}{dt}}{K}\,\mathrm{d}z,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\gamma = {} & \frac{(QU - RT)\frac{dS}{dt} + (RS - PU)\frac{dT}{dt} + (PT - QS)\frac{dU}{dt}}{K}\,\mathrm{d}x \\
& + \frac{(NT - MU)\frac{dS}{dt} + (LU - NS)\frac{dT}{dt} + (MS - LT)\frac{dU}{dt}}{K}\,\mathrm{d}y \\
& + \frac{(MR - NQ)\frac{dS}{dt} + (NP - LR)\frac{dT}{dt} + (LQ - MP)\frac{dU}{dt}}{K}\,\mathrm{d}z.
\end{aligned}$$

Donc prenant, dans l'expression de $d\alpha$, le coefficient de $\mathrm{d}x$, dans celle de $\mathrm{d}\beta$ le coefficient de $\mathrm{d}y$, et dans celle de $\mathrm{d}\gamma$ le coefficient de $\mathrm{d}z$, on aura les valeurs de $\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x}$, $\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}y}$, $\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}z}$, et l'équation (m) deviendra

$$\begin{aligned}(QU - RT)\frac{dL}{dt} + (RS - PU)\frac{dM}{dt} + (PT - QS)\frac{dN}{dt}\\ + (NT - MU)\frac{dP}{dt} + (LU - NS)\frac{dQ}{dt} + (MS - LT)\frac{dR}{dt}\\ + (MR - NQ)\frac{dS}{dt} + (NP - LR)\frac{dT}{dt} + (LQ - NP)\frac{dU}{dt} = 0,\end{aligned}$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\frac{dK}{dt} = 0,$$

d'où l'on tirera $K = \text{const.}$, savoir :

$$LQU - MPU + MRS - NQS + NPT - LRT = H,$$

H étant une fonction de X, Y, Z, sans t, savoir la valeur de K, lorsque $t = 0$.

A l'égard des deux équations (l), on remarquera que $\mathrm{d}\frac{d\alpha}{dt}$ est la même chose que $\frac{d\,\mathrm{d}\alpha}{dt}$; c'est pourquoi il n'y aura qu'à différentier la valeur de $\mathrm{d}\alpha$ trouvée ci-dessus, en ne faisant varier que t, et l'on aura

$$\mathrm{d}\frac{d\alpha}{dt} = \frac{d^2L}{dt^2}dX + \frac{d^2M}{dt^2}dY + \frac{d^2N}{dt^2}dZ;$$

de la même manière on trouvera

$$\mathrm{d}\frac{d\beta}{dt} = \frac{d^2P}{dt^2}dX + \frac{d^2Q}{dt^2}dY + \frac{d^2R}{dt^2}dZ,$$
$$\mathrm{d}\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2}dX + \frac{d^2T}{dt^2}dY + \frac{d^2U}{dt^2}dZ.$$

On substituera donc dans ces expressions, comme on a fait ci-dessus dans celles de $\mathrm{d}\alpha$, $\mathrm{d}\beta$, $\mathrm{d}\gamma$, les valeurs de dX, dY, dZ en $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}z$, et prenant les coefficients de $\mathrm{d}y$ et de $\mathrm{d}z$ dans la différentielle $\mathrm{d}\frac{d\alpha}{dt}$, et ceux de $\mathrm{d}x$ dans les deux différentielles $\mathrm{d}\frac{d\beta}{dt}$, $\mathrm{d}\frac{d\gamma}{dt}$, on aura les valeurs de

$$\frac{\mathrm{d}\frac{d\alpha}{dt}}{\mathrm{d}y}, \quad \frac{\mathrm{d}\frac{d\alpha}{dt}}{\mathrm{d}z}, \quad \frac{\mathrm{d}\frac{d\beta}{dt}}{\mathrm{d}x}, \quad \frac{\mathrm{d}\frac{d\gamma}{dt}}{\mathrm{d}x},$$

lesquelles étant mises à la place de ces quantités dans les équations (l), il nous viendra, en ôtant le dénominateur commun K, les deux équations

$$\begin{aligned}&(\mathrm{NT}-\mathrm{MU})\frac{d^2\mathrm{L}}{dt^2}+(\mathrm{LU}-\mathrm{NS})\frac{d^2\mathrm{M}}{dt^2}+(\mathrm{MS}-\mathrm{LT})\frac{d^2\mathrm{N}}{dt^2}\\ &=(\mathrm{QU}-\mathrm{RT})\frac{d^2\mathrm{P}}{dt^2}+(\mathrm{RS}-\mathrm{PU})\frac{d^2\mathrm{Q}}{dt^2}+(\mathrm{PT}-\mathrm{QS})\frac{d^2\mathrm{R}}{dt^2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(\mathrm{MR}-\mathrm{NQ})\frac{d^2\mathrm{L}}{dt^2}+(\mathrm{NP}-\mathrm{LR})\frac{d^2\mathrm{M}}{dt^2}+(\mathrm{LQ}-\mathrm{MP})\frac{d^2\mathrm{N}}{dt^2}\\ &=(\mathrm{QU}-\mathrm{RT})\frac{d^2\mathrm{S}}{dt^2}+(\mathrm{RS}-\mathrm{PU})\frac{d^2\mathrm{T}}{dt^2}+(\mathrm{PT}-\mathrm{QS})\frac{d^2\mathrm{U}}{dt^2}.\end{aligned}$$

Si l'on met dans ces deux équations, aussi bien que dans celle qui a été trouvée précédemment pour L, M, N, P, Q, R, S, T, U, leurs valeurs $\frac{dx}{d\mathrm{X}}, \frac{dx}{d\mathrm{Y}}, \frac{dx}{d\mathrm{Z}}, \frac{dy}{d\mathrm{X}}, \frac{dy}{d\mathrm{Y}}, \frac{dy}{d\mathrm{Z}}, \frac{dz}{d\mathrm{X}}, \frac{dz}{d\mathrm{Y}}, \frac{dz}{d\mathrm{Z}}$, on aura trois équations générales qui ne renfermeront que les changeantes x, y, z avec leurs différences relatives à X, Y, Z, t, et par lesquelles on pourra déterminer la position de chaque particule du fluide à chaque instant de son mouvement.

XLV.

Scolie. — Les équations

$$\frac{\mathrm{d}(\mathrm{D}\Pi)}{\mathrm{d}y}=\frac{\mathrm{d}(\mathrm{D}\varpi)}{\mathrm{d}x}, \quad \frac{\mathrm{d}(\mathrm{D}\Pi)}{\mathrm{d}z}=\frac{\mathrm{d}(\mathrm{D}\Psi)}{\mathrm{d}x},$$

que nous avons supposées dans l'Article XLII pour simplifier les formules (h), ont lieu quand toutes les forces Π, ϖ, Ψ sont telles que leurs actions sur les particules du fluide se détruisent mutuellement, c'est-à-dire que les particules du fluide animées par ces forces se font équilibre.

En effet, si le fluide est en repos, les vitesses α, β, γ sont nulles, et les équations (h) se réduisent à celles que nous venons de rapporter.

Au reste, pour pouvoir faire usage des équations dont il s'agit, il n'est pas nécessaire que les quantités D, Π, ϖ, Ψ soient uniquement des fonctions de x, y, z comme il semble qu'on pourrait le conclure de la forme même de ces équations.

Supposons, par exemple, que les quantités D, Π, ϖ, Ψ renferment outre les variables x, y, z encore une quatrième variable s représentée par une ligne quelconque, il est clair que, quelles que soient la nature et la position de cette ligne, on pourra toujours exprimer sa différentielle ds de cette manière : $A\,dx + B\,dy + C\,dz$; par conséquent, la valeur complète de l'expression $\frac{d(D\Pi)}{dy}$, qui n'est autre chose que le coefficient de dy dans la différentiation de $D\Pi$, sera

$$\frac{d(D\Pi)}{dy} + B\frac{d(D\Pi)}{ds};$$

on trouvera de même

$$\frac{d(D\Pi)}{dz} + C\frac{d(D\Pi)}{ds}, \quad \frac{d(D\varpi)}{dx} + A\frac{d(D\varpi)}{ds}, \quad \frac{d(D\Psi)}{dx} + A\frac{d(D\Psi)}{ds},$$

pour les valeurs complètes des expressions $\frac{d(D\Pi)}{dz}$, $\frac{d(D\varpi)}{dx}$, $\frac{d(D\Psi)}{dx}$; substituant ces valeurs dans les équations ci-dessus, elles deviendront

$$\frac{d(D\Pi)}{dy} + B\frac{d(D\Pi)}{ds} = \frac{d(D\varpi)}{dx} + A\frac{d(D\varpi)}{ds},$$
$$\frac{d(D\Pi)}{dz} + C\frac{d(D\Pi)}{ds} = \frac{d(D\Psi)}{dx} + A\frac{d(D\Psi)}{ds},$$

équations dans lesquelles les différentielles qui dépendent de chacune des variables x, y, z, s se trouvent séparées.

Je fais cette remarque relativement à un endroit de l'excellent *Traité de la résistance des Fluides* (Article 164).

Si la densité D est constante, les équations

$$\frac{d(D\Pi)}{dy} = \frac{d(D\varpi)}{dx}, \quad \frac{d(D\Pi)}{dz} = \frac{d(D\Psi)}{dx}$$

deviennent, en divisant par D,

$$\frac{d\Pi}{dy} = \frac{d\varpi}{dx}, \quad \frac{d\Pi}{dz} = \frac{d\Psi}{dx},$$

lesquelles renferment les conditions de l'équilibre des fluides homogènes.

Supposons que le fluide soit composé de différentes couches, dont chacune soit d'une densité uniforme, et qu'on en cherche l'équation; soient x, y, z les coordonnées de chacune de ces couches, on aura par hypothèse

$$\frac{dD}{dx}dx + \frac{dD}{dy}dy + \frac{dD}{dz}dz = 0.$$

Or les équations

$$\frac{d(D\Pi)}{dy} = \frac{d(D\varpi)}{dx}, \quad \frac{d(D\Pi)}{dz} = \frac{d(D\Psi)}{dx}$$

donnent

$$\Pi\frac{dD}{dy} + D\frac{d\Pi}{dy} = \varpi\frac{dD}{dx} + D\frac{d\varpi}{dx},$$

$$\Pi\frac{dD}{dz} + D\frac{d\Pi}{dz} = \Psi\frac{dD}{dx} + D\frac{d\Psi}{dx};$$

substituant dans l'équation ci-dessus les valeurs de $\frac{dD}{dy}$, $\frac{dD}{dz}$ tirées de celles-ci, et ordonnant les termes, il viendra

$$\frac{dD}{dx}\left(dx + \frac{\varpi}{\Pi}dy + \frac{\Psi}{\Pi}dz\right) + \frac{D}{\Pi}\left[\left(\frac{d\varpi}{dx} - \frac{d\Pi}{dy}\right)dy + \left(\frac{d\Psi}{dx} - \frac{d\Pi}{dz}\right)dz\right] = 0,$$

savoir, en multipliant par $\frac{\Pi}{D}$,

$$\frac{1}{D}\frac{dD}{dx}(\Pi dx + \varpi dy + \Psi dz) + \left(\frac{d\varpi}{dx} - \frac{d\Pi}{dy}\right)dy + \left(\frac{d\Psi}{dx} - \frac{d\Pi}{dz}\right)dz = 0,$$

équation qui exprimera la figure de chaque couche où la densité est uniforme.

Si l'on a

$$\frac{d\Pi}{dy} = \frac{d\varpi}{dx}, \quad \frac{d\Pi}{dz} = \frac{d\Psi}{dx},$$

c'est-à-dire si les forces Π, ϖ, Ψ sont par leur nature telles, qu'elles puissent tenir en équilibre une masse fluide homogène, alors l'équation précédente se réduit à

$$\frac{1}{D}\frac{dD}{dx}(\Pi\,dx + \varpi\,dy + \Psi\,dz) = 0,$$

ce qui donne

$$\Pi\,dx + \varpi\,dy + \Psi\,dz = 0,$$

équation générale des couches de niveau, comme il est aisé de le voir, d'où il s'ensuit que, dans ce cas, chaque couche de niveau sera nécessairement d'une densité uniforme dans toute son étendue.

Tel devrait donc être l'arrangement de différentes parties de la terre si elle avait été primitivement fluide; car il est aisé de prouver par le calcul, et M. Clairaut l'a démontré à l'Article LIV de sa *Théorie de la figure de la Terre,* que les forces Π, ϖ, Ψ, résultantes de toutes les attractions que les particules exercent les unes sur les autres, ont d'elles-mêmes les conditions

$$\frac{d\Pi}{dy} = \frac{d\varpi}{dx}, \quad \frac{d\Pi}{dz} = \frac{d\Psi}{dx}.$$

Cependant un grand Géomètre a cru qu'il n'était pas toujours nécessaire que les surfaces des différentes couches fussent de niveau, et il a donné un autre principe pour connaître la figure de ces surfaces (*). Mais les équations que son principe fournit ne sont elles-mêmes dans le fond que celles des couches de niveau. Pour le démontrer d'une manière générale, soit un sphéroïde composé de couches de différentes densités, et dont le rayon soit exprimé généralement par $r + \alpha Z$, r étant une quantité constante dans la même couche, Z étant une fonction quelconque de r et d'un angle z variable pour tous les points de chaque couche, et α marquant une petite quantité constante. Qu'on réduise l'attraction totale que ce sphéroïde exerce sur chaque particule d'une couche quelconque, à deux forces, l'une verticale, c'est-à-dire perpendi-

(*) *Voyez* l'Appendice qui est à la fin de l'*Essai sur la résistance des Fluides* cité ci-dessus, et la troisième Partie des *Recherches sur le système du Monde,* p. 226 et suiv.

culaire à la couche, et qui pourra sans erreur sensible être supposée égale à la pesanteur qui tend au centre du sphéroïde; l'autre horizontale, savoir dans la direction même de la couche, laquelle est à peu près perpendiculaire au rayon; et soit nommée la première Π, et la seconde ϖ. Par le principe de l'illustre Auteur dont nous venons de parler, il faudra multiplier la force horizontale ϖ par $\Delta r dz$, Δ marquant la densité du fluide qu'on suppose être une fonction de r seulement, ensuite la différentier en ne faisant varier que r; de même il faudra multiplier la force verticale Π par $\Delta\left(dr + \alpha \frac{dZ}{dr} dr\right)$ et différentier ensuite en ne faisant varier que z; après quoi on égalera les deux différentielles, ce qui donnera l'équation

$$\frac{d\Delta r\varpi}{dr} dr dz = \frac{d\left(\Delta\Pi + \Delta\alpha\Pi\frac{dZ}{dr}\right)}{dz} dz\, dr,$$

savoir

$$\frac{d\Delta}{dr} r\varpi + \frac{d\,r\varpi}{dr}\Delta = \frac{d\left(\Pi + \alpha\Pi\frac{dZ}{dr}\right)}{dz}\Delta.$$

Or, en faisant le calcul, on trouvera toujours que les quantités Π, ϖ, Z seront telles que

$$\frac{d\left(\Pi + \alpha\Pi\frac{dZ}{dr}\right)}{dz} = \frac{d\,r\varpi}{dr};$$

donc il ne restera que l'équation

$$\frac{d\Delta}{dr} r\varpi = 0,$$

qui donne $\varpi = 0$, savoir la force horizontale nulle, et par conséquent chaque couche de niveau.

XLVI.

Corollaire IV. — Je viens maintenant à l'équation (f). Par la nature des expressions dont cette équation est composée, il est manifeste qu'elle appartient uniquement à la surface postérieure du fluide. Or, si l'on suppose qu'il n'y ait point de parois qui soutiennent le fluide, les valeurs de $\delta\,'x$, $\delta\,'y$, $\delta\,'z$ demeureront absolument arbitraires, et l'équation (f) ne pourra se vérifier qu'en faisant généralement $\mathrm{T}=0$, savoir la valeur totale de l'intégrale $\mathrm{S\,d}x\mathrm{D}\left(d\frac{dx}{dt}+\Pi\,dt\right)$ nulle.

Soient rapportées les équations (e) à la surface postérieure du fluide, en y mettant $'x$, $'y$, $'z$ au lieu de x, y, z, et supposant l'intégrale $\mathrm{S\,d}x\mathrm{D}\left(d\frac{dx}{dt}+\Pi\,dt\right)$ nulle, ce qui rend $\mathrm{U}=\mathrm{T}$, on aura

$$\frac{\mathrm{d}(\mathrm{T}\,dt)}{\mathrm{d}\,'y}={}'\mathrm{D}\left(d\frac{d\,'y}{dt}+{}'\Pi\,dt\right),\quad \frac{\mathrm{d}(\mathrm{T}\,dt)}{\mathrm{d}\,'z}={}'\mathrm{D}\left(d\frac{d\,'z}{dt}+{}'\Psi\,dt\right);$$

donc

$$\mathrm{dT}=\frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{d}\,'x}\mathrm{d}\,'x+\frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{d}\,'y}\mathrm{d}\,'y+\frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{d}\,'z}\mathrm{d}\,'z$$
$$={}'\mathrm{D}\left[\left(d\frac{d\,'x}{dt}+{}'\Pi\,dt\right)\mathrm{d}\,'x+\left(d\frac{d\,'y}{dt}+{}'\varpi\,dt\right)\mathrm{d}\,'y+\left(d\frac{d\,'z}{dt}+{}'\Psi\,dt\right)\mathrm{d}\,'z\right].$$

C'est la valeur de la différentielle de T prise dans la surface dont nous parlons; donc, puisque la quantité T y doit être généralement égale à zéro, sa différentielle le sera aussi, et l'on aura par conséquent l'équation

$$\left(d\frac{d\,'x}{dt}+{}'\Pi\,dt\right)\mathrm{d}\,'x+\left(d\frac{d\,'y}{dt}+{}'\varpi\,dt\right)\mathrm{d}\,'y+\left(d\frac{d\,'y}{dt}+{}'\Psi\,dt\right)\mathrm{d}\,'z=0,$$

qui sera celle que la surface postérieure du fluide doit avoir.

On trouvera une équation semblable pour la surface antérieure du fluide; car nommant x', y', z' les coordonnées pour cette surface, et U' ce que devient U quand x, y, z deviennent x', y', z', on aura en général, comme on l'a déjà remarqué, Article XL, $\mathrm{U}'=0$; donc aussi

$$\mathrm{dU}'=\frac{\mathrm{dU}'}{\mathrm{d}x'}\mathrm{d}x'+\frac{\mathrm{dU}'}{\mathrm{d}y'}\mathrm{d}y'+\frac{\mathrm{dU}'}{\mathrm{d}z'}\mathrm{d}z'=0.$$

Or

$$\frac{\mathrm{d}(\mathrm{U}\,dt)}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x=-\mathrm{D\,d}x\left(d\frac{dx}{dt}+\Pi\,dt\right),$$

et

$$\frac{\mathrm{d}(\mathrm{U}\,dt)}{\mathrm{d}y} = -\,\mathrm{D}\left(d\,\frac{dy}{dt} + \varpi\,dt\right), \quad \frac{\mathrm{d}(\mathrm{U}\,dt)}{\mathrm{d}z} = -\,\mathrm{D}\left(d\,\frac{dz}{dt} + \Psi\,dt\right);$$

donc

$$\mathrm{d}\mathrm{U}' = -\,\frac{\mathrm{D}'}{dt}\left[\left(d\,\frac{dx'}{dt} + \Pi'\,dt\right)\mathrm{d}x' + \left(d\,\frac{dy'}{dt} + \varpi'\,dt\right)\mathrm{d}y' + \left(d\,\frac{dz'}{dt} + \Psi'\,dt\right)\mathrm{d}z'\right] = 0.$$

Donc, en général, quand le fluide est libre de tous côtés, sa surface extérieure doit être déterminée par l'équation

$$\left(d\,\frac{dx}{dt} + \Pi\,dt\right)\mathrm{d}x + \left(d\,\frac{dy}{dt} + \varpi\,dt\right)\mathrm{d}y + \left(d\,\frac{dz}{dt} + \Psi\,dt\right)\mathrm{d}z = 0.$$

Supposons maintenant que le fluide soit soutenu par des parois fixes de figure quelconque, et dont l'équation soit

$$\mathrm{d}z = m\,\mathrm{d}x + n\,\mathrm{d}y.$$

Si l'on considère les trois expressions intégrales de l'équation (f), on voit qu'elles renferment chacune deux intégrations qui se rapportent à y et z dans la première, à x et z dans la seconde, à x et y dans la troisième. Or, puisque la relation des trois variables x, y, z est donnée par l'équation $\mathrm{d}z = m\mathrm{d}x + n\mathrm{d}y$, ces différentes intégrales pourront être ramenées toutes à la même forme, c'est-à-dire être rapportées à deux seules changeantes x et y; il n'y aura pour cela qu'à mettre dans la première, au lieu de $\mathrm{d}z$, sa valeur en x, $m\mathrm{d}x$, et dans la seconde sa valeur en y, $n\mathrm{d}y$; par là l'équation (f) deviendra celle-ci

$$\mathrm{S}^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,(m\,\delta x + n\,\delta y + \delta z)\,\mathrm{T}\,dt = 0.$$

Mais puisque

$$\mathrm{d}z = m\,\mathrm{d}x + n\,\mathrm{d}y,$$

on doit avoir aussi

$$\delta z = m\,\delta x + n\,\delta y;$$

donc l'équation sera identique et ne fournira aucune condition; ainsi tout se réduira à faire en sorte que les équations générales (b), (e) satisfassent, après leur intégration, à l'équation donnée

$$\mathrm{d}z = m\,\mathrm{d}x + n\,\mathrm{d}y.$$

XLVII.

Remarque. — Je ne m'étends pas davantage sur cette matière, pour ne point passer les bornes que je me suis prescrites dans le présent Mémoire. Au reste, par les formules et les méthodes données dans ce Problème et dans les précédents, on pourrait encore trouver la solution de plusieurs questions qui concernent les fluides : comme le mouvement d'un fluide enfermé dans un vase mobile, les oscillations d'un corps qui flotte sur un fluide, la résistance qu'un fluide fait à un corps qui s'y meut, et d'autres Problèmes de cette espèce.

XLVIII.

Problème X. — *Trouver les lois du mouvement des fluides élastiques.*

Solution. — Par notre principe général, il faut que la quantité $S^3 dm \int u\,ds$ soit un maximum ou un minimum; donc, en faisant les mêmes raisonnements que dans le Problème VI, on trouvera l'équation

$$\int S^3 dm \left(u\,\delta u\,dt - d\frac{dx}{dt}\delta x - d\frac{dy}{dt}\delta y - d\frac{dz}{dt}\delta z\right) = 0.$$

Or, si aucune force n'agissait entre les corpuscules dm, on aurait, conformément à la formule (X) du même Problème,

$$S^3 dm\,u\,\delta u\,dt = S^3 dm\,(\Pi\,dt\,\delta x + \varpi\,dt\,\delta y + \Psi\,dt\,\delta z);$$

mais le fluide étant supposé élastique, on doit regarder chaque particule comme un ressort qui agit de tous côtés sur les particules contiguës. Nommant F la force du ressort et f l'espace par lequel il tend à se dilater, on trouvera, en appliquant ici la formule (U) de l'Article VIII,

$$\mathrm{S}^3 dm\, u\,\delta u = -\mathrm{S}^3 dm(\mathrm{P}\delta p + \mathrm{Q}\delta q + \mathrm{R}\delta r + \ldots) - \mathrm{S}^3 \mathrm{F}\delta f,$$

ou, en mettant $\Pi\delta x + \varpi\delta y + \Psi\delta z$ au lieu de $\mathrm{P}\delta p + \mathrm{Q}\delta q + \mathrm{R}\delta r + \ldots$, et prenant F négativement à cause que cette force tend ici à éloigner les particules,

$$\mathrm{S}^3 dm\, u\,\delta u = -\mathrm{S}^3 dm(\Pi\delta x + \varpi\delta y + \Psi\delta z) + \mathrm{S}^3 \mathrm{F}\delta f.$$

Substituant cette valeur dans l'équation ci-dessus, et mettant au lieu de dm sa valeur $\mathrm{D}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, on aura donc

$$(n)\quad \left\{\begin{aligned} &-\int \mathrm{S}^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{D}\left[\left(d\frac{dx}{dt} + \Pi dt\right)\delta x + \left(d\frac{dy}{dt} + \varpi dt\right)\delta y\right.\\ &\qquad\qquad\left. + \left(d\frac{dz}{dt} + \Psi dt\right)\delta z\right] + \int \mathrm{S}^3\,\mathrm{F}\delta f dt = 0.\end{aligned}\right.$$

Or, comme l'action du ressort F consiste à augmenter le volume de chaque particule dm, il est clair qu'il faudra prendre ce volume même pour la valeur de l'espace f; donc $f = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$; par conséquent,

$$\begin{aligned}\delta f &= \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\delta\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\delta\,\mathrm{d}y + \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\delta\,\mathrm{d}z,\\ &= \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\delta x + \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\delta y + \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\delta z,\end{aligned}$$

en transposant les signes δ, d; donc

$$\begin{aligned}\mathrm{S}^3\mathrm{F}\delta f &= \mathrm{S}^3(\mathrm{F}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\delta x + \mathrm{F}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\delta y + \mathrm{F}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\delta z)\\ &= \mathrm{S}^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\left(\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}\delta x + \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{d}y}\mathrm{d}\delta y + \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{d}z}\mathrm{d}\delta z\right),\end{aligned}$$

formule qu'on peut mettre sous cette forme :

$$\mathrm{S}^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{S}\,\mathrm{d}x\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}\delta x + \mathrm{S}^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{S}\,\mathrm{d}y\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{d}y}\mathrm{d}\delta y + \mathrm{S}^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{S}\,\mathrm{d}z\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{d}z}\mathrm{d}\delta z.$$

Or $\mathrm{S}\,\mathrm{d}x\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}\delta x$ se réduit, en intégrant par parties, à

$$\mathrm{F}\delta x - \mathrm{S}\,\mathrm{d}x\frac{d\mathrm{F}}{\mathrm{d}x}\delta x$$

(j'écris $\mathrm{d}x\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}$ au lieu de $\mathrm{d}F$, pour dénoter que cette différentielle doit être prise en ne variant que x), et à

$$F'\,\delta x' - {}'F\,\delta\,{}'x - S\,\mathrm{d}x\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}\,\delta x$$

en complétant l'intégrale, suivant la remarque que nous avons faite à la fin de l'Article I du Mémoire précédent; on changera de même

$$S\,\mathrm{d}y\frac{F}{\mathrm{d}y}\,\mathrm{d}\,\delta y \quad \text{en} \quad F'\,\delta y' - {}'F\,\delta\,{}'y - S\,\mathrm{d}y\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}y}\,\delta y,$$

et

$$S\,\mathrm{d}z\frac{F}{\mathrm{d}z}\,\mathrm{d}\,\delta z \quad \text{en} \quad F'\,\delta z' - {}'F\,\delta\,{}'z - S\,\mathrm{d}z\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}\,\delta z;$$

donc

$$\begin{aligned}
S^3 F\,\delta f = {} & S^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,(F'\,\delta x' - {}'F\,\delta\,{}'x) + S^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,(F'\,\delta y' - {}'F\,\delta\,{}'y) \\
& + S^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,(F'\,\delta z' - {}'F\,\delta\,{}'z) - S^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,S\,\mathrm{d}x\,\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}\,\delta x \\
& - S^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,S\,\mathrm{d}y\,\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}y}\,\delta y - S^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,S\,\mathrm{d}z\,\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}\,\delta z \\
= {} & S^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,F'\,\delta x' + S^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,F'\,\delta y' + S^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,F'\,\delta y' \\
& - S^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,{}'F\,\delta\,{}'x - S^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,{}'F\,\delta\,{}'y - S^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,{}'F\,\delta\,{}'z \\
& - S^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}\,\delta x + \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}y}\,\delta y + \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}\,\delta z\right);
\end{aligned}$$

donc, substituant dans l'équation (n), au lieu de $S^3 F\,\delta f$, l'expression qu'on vient de trouver, on aura enfin

$$\begin{aligned}
& \int\Big[S^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,F'\,\delta x' + S^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,F'\,\delta y' + S^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,F'\,\delta z' \\
& \qquad - S^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,{}'F\,\delta\,{}'x - S^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,{}'F\,\delta\,{}'y - S^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,{}'F\,\delta\,{}'z\Big]\,dt \\
& - \int S^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\left[\left(D\,d\frac{dx}{dt} + D\,\Pi\,dt + \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}\,dt\right)\delta x\right. \\
& \qquad\qquad + \left(D\,d\frac{dy}{dt} + D\,\varpi\,dt + \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}y}\,dt\right)\delta y \\
& \qquad\qquad \left. + \left(D\,d\frac{dz}{dt} + D\,\Psi\,dt + \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}\,dt\right)\delta z\right] = 0,
\end{aligned}$$

équation réduite à l'état qu'exige notre méthode. Supposant donc les coefficients des différences δx, δy, δz chacun égal à zéro, on aura

$$(p)\quad \begin{cases} \mathrm{D}\left(d\dfrac{dx}{dt}+\Pi\,dt\right)+\dfrac{\mathrm{dF}}{\mathrm{d}x}dt=0, \\ \mathrm{D}\left(d\dfrac{dy}{dt}+\varpi\,dt\right)+\dfrac{\mathrm{dF}}{\mathrm{d}y}dt=0, \\ \mathrm{D}\left(d\dfrac{dz}{dt}+\Psi\,dt\right)+\dfrac{\mathrm{dF}}{\mathrm{d}z}dt=0, \end{cases}$$

et le reste de l'équation donnera

$$(q)\quad \begin{cases} \mathrm{S}^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{F}'\,\delta x' + \mathrm{S}^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{F}'\,\delta y' + \mathrm{S}^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{F}'\,\delta z' \\ \quad - \mathrm{S}^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,{}'\mathrm{F}\,\delta\,{}'x - \mathrm{S}^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,{}'\mathrm{F}\,\delta\,{}'y - \mathrm{S}^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,{}'\mathrm{F}\,\delta\,{}'z = 0. \end{cases}$$

XLIX.

Corollaire I. — Les trois équations (p) renferment les lois générales du mouvement des fluides élastiques. Pour faire usage de ces équations on supposera, comme dans l'Article XLII,

$$\frac{dx}{dt}=\alpha,\quad \frac{dy}{dt}=\beta,\quad \frac{dz}{dt}=\gamma;$$

on mettra au lieu de $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$ leurs valeurs trouvées dans le même Article, et marquant, pour plus de simplicité, toutes les différences par d, on trouvera, après avoir divisé par $\mathrm{D}dt$ les trois équations

$$(r)\quad \begin{cases} \dfrac{d\alpha}{dt}+\alpha\dfrac{d\alpha}{dx}+\beta\dfrac{d\alpha}{dy}+\gamma\dfrac{d\alpha}{dz}+\Pi=-\dfrac{1}{\mathrm{D}}\dfrac{d\mathrm{F}}{dx}, \\ \dfrac{d\beta}{dt}+\alpha\dfrac{d\beta}{dx}+\beta\dfrac{d\beta}{dy}+\gamma\dfrac{d\beta}{dz}+\varpi=-\dfrac{1}{\mathrm{D}}\dfrac{d\mathrm{F}}{dy}, \\ \dfrac{d\gamma}{dt}+\alpha\dfrac{d\gamma}{dx}+\beta\dfrac{d\gamma}{dy}+\gamma\dfrac{d\gamma}{dz}+\Psi=-\dfrac{1}{\mathrm{D}}\dfrac{d\mathrm{F}}{dz}, \end{cases}$$

dans lesquelles il ne faudra plus que substituer, au lieu de F et de D, leurs valeurs en x, y, z, t.

Voici comment on trouvera ces valeurs : F exprime la force du ressort de chaque particule du fluide, laquelle est ordinairement proportionnelle à la densité; supposons donc, pour plus de généralité, que cette force soit comme une fonction quelconque donnée de la densité, en sorte que $d\mathrm{F} = \mathrm{E}\,d\mathrm{D}$; on aura

$$\frac{d\mathrm{F}}{dx} = \mathrm{E}\frac{d\mathrm{D}}{dx}, \quad \frac{d\mathrm{F}}{dy} = \mathrm{E}\frac{d\mathrm{D}}{dy}, \quad \frac{d\mathrm{F}}{dz} = \mathrm{E}\frac{d\mathrm{D}}{dz}.$$

Ensuite, pour trouver D, on observera que la masse *dm* de chaque particule du fluide est $\mathrm{D}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, et que cette masse reste toujours la même quelque mouvement que le fluide reçoive; donc sa différentielle, en faisant varier t, doit être nulle, ce qui donne

$$\frac{d(\mathrm{D}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z)}{dt} = 0,$$

savoir:

$$\frac{d\mathrm{D}}{dt}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \frac{d\,\mathrm{d}x}{dt}\mathrm{D}\,\mathrm{d}y\,dz + \frac{d\,\mathrm{d}y}{dt}\mathrm{D}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + \frac{d\,\mathrm{d}z}{dt}\mathrm{D}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0,$$

ou

$$(s) \qquad \frac{\frac{d\mathrm{D}}{dt}}{\mathrm{D}} + \frac{\frac{d\,\mathrm{d}x}{dt}}{\mathrm{d}x} + \frac{\frac{d\,\mathrm{d}y}{dt}}{\mathrm{d}y} + \frac{\frac{d\,\mathrm{d}z}{dt}}{\mathrm{d}z} = 0.$$

Or

$$\frac{d\,\mathrm{d}x}{dt} = \mathrm{d}\frac{dx}{dt} = \mathrm{d}\alpha;$$

donc

$$\frac{\frac{d\,\mathrm{d}x}{dt}}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x};$$

on trouve de même

$$\frac{\frac{d\,\mathrm{d}y}{dt}}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}y}, \quad \text{et} \quad \frac{\frac{d\,\mathrm{d}z}{dt}}{\mathrm{d}z} = \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}z};$$

de plus, $\frac{d\mathrm{D}}{dt}dt$ exprime la variation de D dans l'instant dt; donc, si l'on suppose que D soit représenté par une fonction quelconque de x, y, z, t, on trouvera que la valeur complète de $\frac{d\mathrm{D}}{dt}dt$ sera

$$\frac{d\mathrm{D}}{dt}dt + \frac{d\mathrm{D}}{dx}\alpha\,dt + \frac{d\mathrm{D}}{dy}\beta\,dt + \frac{\mathrm{d}\mathrm{D}}{\mathrm{d}z}\gamma\,dt;$$

on mettra ces valeurs dans l'équation ci-dessus, et changeant les lettres d en d et multipliant le tout par D, on aura

$$\frac{dD}{dt}+\alpha\frac{dD}{dx}+\beta\frac{dD}{dy}+\gamma\frac{dD}{dz}+D\left(\frac{d\alpha}{dx}+\frac{d\beta}{dy}+\frac{d\gamma}{dz}\right)=0,$$

ou

$$\frac{dD}{dt}+\frac{d(D\alpha)}{dx}+\frac{d(D\beta)}{dy}+\frac{d(D\gamma)}{dz}=0,$$

équation par laquelle on connaîtra D, et par conséquent F.

L.

Corollaire II. — Soit, suivant l'hypothèse ordinaire, $F=D$, par conséquent $E=1$, et qu'on mette les équations (r) sous cette forme :

$$L=-\frac{1}{D}\frac{dF}{dx},\quad M=-\frac{1}{D}\frac{dF}{dy},\quad N=-\frac{1}{D}\frac{dF}{dz},$$

on aura

$$L=-\frac{1}{D}\frac{dD}{dx},\quad M=-\frac{1}{D}\frac{dD}{dy},\quad N=-\frac{1}{D}\frac{dD}{dz}.$$

Supposons encore

$$\frac{d\alpha}{dx}+\frac{d\beta}{dy}+\frac{d\gamma}{dz}=U,$$

on aura (Article précédent) l'équation

$$\frac{dD}{dt}+\alpha\frac{dD}{dx}+\beta\frac{dD}{dy}+\gamma\frac{dD}{dz}+DU=0;$$

donc, chassant les quantités $\frac{dD}{dx}, \frac{dD}{dy}, \frac{dD}{dz}$ par le moyen des équations précédentes, divisant par D, et transposant, on aura

$$\frac{\frac{dD}{dt}}{D}=\frac{d\log D}{dt}=\alpha L+\beta M+\gamma N-U,$$

ou, pour abréger,

$$\frac{d\log D}{dt}=T.$$

Or les équations ci-dessus se réduisent à

$$L = -\frac{d\log D}{dx}, \quad M = -\frac{d\log D}{dy}, \quad N = -\frac{d\log D}{dz};$$

donc, comparant ces équations avec celle qu'on vient de trouver, on aura

$$\frac{dL}{dt} = -\frac{dT}{dx}, \quad \frac{dM}{dt} = -\frac{dT}{dy}, \quad \frac{dN}{dt} = -\frac{dT}{dz},$$

équations où la lettre D ne se trouve plus. On trouvera encore, en combinant ensemble les équations ci-devant,

$$\frac{dL}{dy} = \frac{dM}{dx}, \quad \frac{dL}{dz} = \frac{dN}{dx},$$

deux équations qui reviennent au même que les équations (k) de l'Article XLII. On aura donc cinq équations toutes délivrées de la lettre D, dont trois prises à volonté suffiront pour résoudre le Problème.

Si l'on suppose que le mouvement du fluide soit parvenu à un état permanent, alors on aura $\frac{dD}{dt} = 0$, et par conséquent $T = 0$.

LI.

Corollaire III. — On peut encore représenter le mouvement du fluide par les variables X, Y, Z, t, comme dans l'Article XLIV. Pour cela on cherchera d'abord la valeur de D au moyen de l'équation (s), laquelle, en introduisant les lettres α, β, γ, devient celle-ci :

$$\frac{\frac{dD}{dt}}{D} + \frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz} = 0.$$

Or, par les formules de l'Article cité, on trouve

$$\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz} = \frac{\frac{dK}{dt}}{K};$$

par conséquent,

$$\frac{\frac{dD}{dt}}{D} + \frac{\frac{dK}{dt}}{K} = 0,$$

d'où l'on tire

$$\log D + \log K = \text{const.},$$

savoir :

$$DK = h \quad \text{et} \quad D = \frac{h}{K}.$$

Pour déterminer la constante h, on remarquera qu'au commencement du mouvement

$$dx = dX, \quad dy = dY, \quad dz = dZ;$$

donc

$$L = 1, \quad M = 0, \quad N = 0, \quad P = 0, \quad Q = 1, \quad R = 0, \quad S = 0, \quad T = 0, \quad U = 1,$$

ce qui donne $K = 1$; d'où il s'ensuit que h doit être égale à la densité D que le fluide a au premier instant de son mouvement.

Ayant trouvé l'expression de D, il n'y aura plus qu'à la substituer dans les équations (p); or, D étant une fonction de X, Y, Z, t, sa différentielle, en prenant t constant, sera représentée par

$$E\,dX + F\,dY + G\,dZ;$$

ainsi, pour avoir les valeurs de $\frac{dD}{dx}$, $\frac{dD}{dy}$, $\frac{dD}{dz}$, il faudra encore substituer au lieu de dX, dY, dZ leurs expressions en dx, dy, dz trouvées dans l'Article XLIV, ce qui, en supposant

$$\begin{aligned} E(QU - RT) + F(RS - PU) + G(PT - QS) &= A, \\ E(NT - MU) + F(LU - NS) + G(MS - LT) &= B, \\ E(MR - NQ) + F(NP - LR) + G(LQ - MP) &= C, \end{aligned}$$

donnera

$$dD = \frac{A\,dx + B\,dy + C\,dz}{K},$$

d'où l'on tire

$$\frac{dD}{dx} = \frac{A}{K}, \quad \frac{dD}{dy} = \frac{B}{K}, \quad \frac{dD}{dz} = \frac{C}{K},$$

et par conséquent, suivant l'hypothèse de l'Article XLIX,

$$\frac{dF}{dx} = \frac{EA}{K}, \quad \frac{dF}{dy} = \frac{EB}{K}, \quad \frac{dF}{dz} = \frac{EC}{K}.$$

On substituera donc ces valeurs dans les équations (p), et l'on aura, en divisant par D qui est égal à $\frac{h}{K}$,

$$d\frac{dx}{dt} + \Pi\, dt + \frac{EA}{b} dt = 0,$$

$$d\frac{dy}{dt} + \varpi\, dt + \frac{EB}{b} dt = 0,$$

$$d\frac{dz}{dt} + \Psi\, dt + \frac{EC}{b} dt = 0.$$

Si l'on suppose dans ces équations

$$\Pi = 0, \quad \varpi = 0, \quad \Psi = 0, \quad \frac{E}{b} = 2g,$$

elles reviennent au même que celles que M. Euler a trouvées par une voie différente (Recherches sur la propagation des ébranlements dans un milieu élastique, *Miscellanea Taurinensia*, t. II, p. 6).

LII.

Scolie. — A l'égard de l'équation (q) qui reste encore à examiner, on prouvera, par un raisonnement semblable à celui de l'Article XLVI, que si le fluide appuie contre des parois fixes, les trois termes

$$S^2 dy\, dz\, {}'F\, \delta\, {}'x + S^2 dx\, dz\, {}'F\, \delta\, {}'y + S^2 dx\, dy\, {}'F\, \delta\, {}'z$$

sont toujours égaux à zéro aussi bien que les trois autres

$$S^2 dy\, dz\, F'\, \delta x' + S^2 dx\, dz\, F'\, \delta y' + S^2 dx\, dy\, F'\, \delta z'.$$

Mais si l'on suppose le fluide libre de toutes parts, ou seulement de quelque côté, alors la quantité F devra être nulle à la surface extérieure du fluide dans les endroits où il est libre; on aura donc, pour cette surface, l'équation $dF = o$, savoir :

$$\frac{dF}{dx}dx + \frac{dF}{dy}dy + \frac{dF}{dz}dz = o,$$

ou, en mettant au lieu de $\frac{dF}{dx}, \frac{dF}{dy}, \frac{dF}{dz}$ leurs valeurs tirées des équations (p),

$$\left(d\frac{dx}{dt} + \Pi\,dt\right)dx + \left(d\frac{dy}{dt} + \varpi\,dt\right)dy + \left(d\frac{dz}{dt} + \Psi\,dt\right)dz = o,$$

précisément comme on a trouvé dans l'Article cité, pour les fluides non élastiques.

SOLUTION

DE

DIFFÉRENTS PROBLÈMES

DE

CALCUL INTÉGRAL.

SOLUTION

DE

DIFFÉRENTS PROBLÈMES

DE

CALCUL INTÉGRAL.

(*Miscellanea Taurinensia*, t. III, 1762-1765.)

Sur l'intégration de l'équation

$$\text{(A)} \qquad Ly + M\frac{dy}{dt} + N\frac{d^2y}{dt^2} + P\frac{d^3y}{dt^3} + \ldots = T,$$

dans laquelle L, M, N,..., T *sont des fonctions de* t.

1. Je multiplie cette équation par $z\,dt$, z étant une variable indéterminée; j'en prends l'intégrale, j'ai

$$\int Lzy\,dt + \int Mz\frac{dy}{dt}dt + \int Nz\frac{d^2y}{dt^2}dt + \int Pz\frac{d^3y}{dt^3}dt + \ldots = \int Tz\,dt;$$

je change les expressions

$$\int Mz\frac{dy}{dt}dt, \quad \int Nz\frac{d^2y}{dt^2}dt, \quad \int Pz\frac{d^3y}{dt^3}dt, \ldots,$$

en leurs égales

$$Mzy - \int\frac{dMz}{dt}y\,dt,$$

$$Nz\frac{dy}{dt} - \frac{dNz}{dt}y + \int \frac{d^2Nz}{dt^2}y\,dt,$$

$$Pz\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dPz}{dt}\frac{dy}{dt} + \frac{d^2Pz}{dt^2}y - \int \frac{d^3Pz}{dt^3}y\,dt,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

j'ai, en ordonnant les termes par rapport à y,

$$\begin{aligned}&y\left(Mz - \frac{dNz}{dt} + \frac{d^2Pz}{dt^2} - \ldots\right)\\ &\quad + \frac{dy}{dt}\left(Nz - \frac{dPz}{dt} + \ldots\right) + \frac{d^2y}{dt^2}(Pz - \ldots) + \ldots\\ &\quad + \int\left(Lz - \frac{dMz}{dt} + \frac{d^2Nz}{dt^2} - \frac{d^3Pz}{dt^3} + \ldots\right) y\,dt = \int Tz\,dt.\end{aligned}$$

Soit maintenant

$$\text{(B)} \qquad Lz - \frac{dMz}{dt} + \frac{d^2Nz}{dt^2} - \frac{d^3Pz}{dt^3}\ldots = 0,$$

et l'équation précédente se réduira à celle-ci :

$$\text{(C)} \quad \left\{\begin{aligned}&y\left(Mz - \frac{dNz}{dt} + \frac{d^2Pz}{dt^2} - \ldots\right)\\ &\quad + \frac{dy}{dt}\left(Nz - \frac{dPz}{dt} + \ldots\right) + \frac{d^2y}{dt^2}(Pz - \ldots) + \ldots = \int Tz\,dt,\end{aligned}\right.$$

laquelle est d'un ordre moins élevé d'une unité que l'équation proposée (A).

2. Donc : 1° si l'on peut trouver une valeur de z, laquelle satisfasse à l'équation (B), on aura tout de suite l'intégrale de l'équation proposée (A), en mettant cette valeur dans l'équation (C); 2° si l'on avait deux valeurs différentes de z, lesquelles satisfissent également à l'équation (B), on aurait, par la substitution successive de ces valeurs dans l'équation (C), deux intégrales de l'équation (A), à l'aide desquelles on éliminerait la plus haute différentielle de y, et l'équation résultante serait l'intégrale seconde de la proposée (j'entends par intégrale première, ou intégrale simplement, une équation qui est d'un ordre moins

élevé d'une unité que la proposée; par intégrale seconde, une équation qui est d'un ordre moins élevé de deux unités, et ainsi de suite); 3° de même, si l'on avait trois valeurs différentes de z, on trouverait trois équations intégrales; d'où, éliminant les deux plus hautes différentielles de y, on aurait une équation qui serait l'intégrale troisième de la proposée, et ainsi de suite. D'où il est aisé de conclure, qu'en connaissant un nombre de valeurs de z égal à celui de l'exposant de l'ordre de l'équation (A), on pourra trouver l'intégrale finie et algébrique de cette même équation.

3. Qu'on multiplie l'équation (B) par $y\,dt$, et qu'on en prenne l'intégrale, en faisant disparaître de dessous le signe $\int$ toutes les différences de z, par des intégrations par parties, comme nous l'avons pratiqué sur l'équation (A), on aura, en changeant les signes,

$$\begin{aligned} & y\left(\mathrm{M}z - \frac{d\mathrm{N}z}{dt} + \frac{d^2\mathrm{P}z}{dt^2} - \ldots\right) \\ & \quad + \frac{dy}{dt}\left(\mathrm{N}z - \frac{d\mathrm{P}z}{dt} + \ldots\right) + \frac{d^2y}{dt}(\mathrm{P}z - \ldots) + \ldots \\ & \quad - \int\left(\mathrm{L}y + \mathrm{M}\frac{dy}{dt} + \mathrm{N}\frac{d^2y}{dt^2} + \mathrm{P}\frac{d^3y}{dt^3} + \ldots\right) z\,dt = \text{const.} \end{aligned}$$

Donc, si l'on fait

$$\mathrm{L}y + \mathrm{M}\frac{dy}{dt} + \mathrm{N}\frac{d^2y}{dt^2} + \mathrm{P}\frac{d^3y}{dt^3} + \ldots = 0, \tag{D}$$

et qu'on ordonne l'équation restante par rapport à z, on aura

$$\text{(E)}\quad \left\{\begin{aligned} & z\left[\left(\mathrm{M} - \frac{d\mathrm{N}}{dt} + \frac{d^2\mathrm{P}}{dt^2} - \ldots\right)y + \left(\mathrm{N} - \frac{d\mathrm{P}}{dt} + \ldots\right)\frac{dy}{dt}\right. \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad \left. + (\mathrm{P} - \ldots)\frac{d^2y}{dt} + \ldots\right] \\ & - \frac{dz}{dt}\left[\left(\mathrm{N} - 2\frac{d\mathrm{P}}{dt} + \ldots\right)y + (\mathrm{P} - \ldots)\frac{dy}{dt} + \ldots\right] \\ & \qquad\qquad + \frac{d^2z}{dt}\Big[(\mathrm{P} - \ldots)y + \ldots\Big] - \ldots = \text{const.} \end{aligned}\right.$$

4. Donc, si l'on peut trouver une valeur de y qui satisfasse à l'équation (D), on aura l'intégrale première de l'équation (B); si l'on a deux valeurs différentes de y, qui satisfassent à la même équation (D), on aura l'intégrale seconde de l'équation (B), et ainsi de suite; de sorte que, si l'on connaissait un nombre de valeurs de y égal à celui de l'exposant de l'équation (B), on pourrait trouver (2) l'intégrale finie et algébrique de cette même équation.

5. Cette dernière intégrale contiendra, comme on voit, autant de constantes arbitraires qu'il y a d'unités dans l'exposant de l'ordre de l'équation différentielle (B); car les équations (E), d'où elle résulte, contiennent chacune une constante arbitraire. Donc, si l'on fait successivement toutes ces constantes, moins une, égales à zéro, on aura autant d'intégrales particulières, et par conséquent autant de valeurs différentes de z qu'il y a d'unités dans l'exposant de l'ordre de l'équation (B); or il est facile de voir que cette équation est du même ordre que l'équation (A) (1); donc on trouvera aussi l'intégrale finie et algébrique de cette dernière équation (2).

6. Donc l'équation (A), savoir

$$\mathrm{L}y + \mathrm{M}\frac{dy}{dt} + \mathrm{N}\frac{d^2y}{dt^2} + \mathrm{P}\frac{d^3y}{dt^3} + \ldots = \mathrm{T},$$

sera intégrable algébriquement toutes les fois qu'on aura m valeurs de y en t dans le cas de $\mathrm{T} = 0$, m étant l'exposant de l'ordre de cette équation.

7. Si l'on ne connaissait que $m - 1$ valeurs de y, dans le cas de $\mathrm{T}=0$, on pourrait néanmoins trouver l'intégrale algébrique de l'équation (A), car on aurait dans ce cas $m - 1$ équations (E); d'où, éliminant les plus hautes différences de z, on parviendrait à une équation de cette forme $\mathrm{V}z + \mathrm{X}\frac{dz}{dt} = \mathrm{Y}$; V, X et Y étant des fonctions de t, laquelle donnerait

$$z = e^{-\int \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{X}} dt}\left(\text{const.} + \int \frac{\mathrm{Y} e^{\int \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{X}} dt}}{\mathrm{X}} dt\right);$$

donc, etc.

8. Donc l'équation (A) sera aussi intégrable algébriquement, toutes les fois qu'on aura $m-1$ valeurs de y dans le cas de $T=0$.

9. Si les valeurs connues de y n'étaient qu'au nombre de $m-2$, alors il faudrait, pour avoir les m valeurs de z, intégrer une équation de cette forme

$$Vz + X\frac{dz}{dt} + Y\frac{d^2z}{dt^2} = Z,$$

laquelle n'est intégrable que dans quelques cas particuliers, et ainsi de suite.

10. Au reste, si l'on ne connaissait pas d'avance les valeurs particulières de y dans le cas de $T=0$, il vaudrait mieux chercher directement les valeurs de z par la résolution de l'équation (B), laquelle n'est guère plus compliquée que l'équation (D).

11. Soit l'équation

$$Ly + M\frac{dy}{dt} + N\frac{d^2y}{dt^2} = T,$$

pour laquelle on connait deux valeurs particulières de y dans le cas de $T=0$.

On aura d'abord l'équation en z (3)

$$z\left[\left(M - \frac{dN}{dt}\right)y + N\frac{dy}{dt}\right] - \frac{dz}{dt}Ny = \text{const.};$$

donc, supposant que y_1 et y_2 soient les deux valeurs de y qui satisfont à l'équation

$$Ly + M\frac{dy}{dt} + N\frac{d^2y}{dt^2} = 0,$$

on aura

$$z\left[\left(M - \frac{dN}{dt}\right)y_1 + N\frac{dy_1}{dt}\right] - \frac{dz}{dt}Ny_1 = A,$$

$$z\left[\left(M - \frac{dN}{dt}\right)y_2 + N\frac{dy_2}{dt}\right] - \frac{dz}{dt}Ny_2 = B,$$

A et B étant deux constantes arbitraires.

On tire de ces deux équations

$$z = \frac{Ay_2 - By_1}{N\left(y_2\frac{dy_1}{dt} - y_1\frac{dy_2}{dt}\right)}.$$

Soit d'abord $A = 0$, on aura

$$z = -\frac{B}{N}\frac{y_1}{y_2\frac{dy_1}{dt} - y_1\frac{dy_2}{dt}} = z_1;$$

soit ensuite $B = 0$, on aura

$$z = \frac{A}{N}\frac{y_2}{y_2\frac{dy_1}{dt} - y_1\frac{dy_2}{dt}} = z_2.$$

Ayant deux valeurs de z, savoir z_1 et z_2, on les substituera successivement dans l'équation (C), et l'on aura

$$y\left(Mz_1 - \frac{dNz_1}{dt}\right) + \frac{dy}{dt}Nz_1 = \int Tz_1\,dt,$$

$$y\left(Mz_2 - \frac{dNz_2}{dt}\right) + \frac{dy}{dt}Nz_2 = \int Tz_2\,dt;$$

d'où l'on tire

$$\text{(F)} \qquad y = \frac{z_2\int Tz_1\,dt - z_1\int Tz_2\,dt}{N\left(z_1\frac{dz_2}{dt} - z_2\frac{dz_1}{dt}\right)}.$$

C'est la valeur générale et complète de y qui satisfait à l'équation proposée.

Si l'on ne connaissait que la valeur y_1, on aurait simplement l'équation

$$z\left[\left(M - \frac{dN}{dt}\right)y_1 + N\frac{dy_1}{dt}\right] - \frac{dz}{dt}Ny_1 = A,$$

laquelle étant intégrée donnerait

$$z = e^{\int\left(\frac{M}{N} - \frac{dN}{Ndt} + \frac{dy_1}{y_1dt}\right)dt}\left[\text{const.} - A\int\frac{e^{-\int\left(\frac{M}{N} - \frac{dN}{Ndt} + \frac{dy_1}{y_1dt}\right)dt}}{Ny_1}dt\right]$$

ou bien

$$z = \frac{y_1}{N} e^{\int \frac{M}{N} dt} \left[C - A \int \frac{e^{-\int \frac{M}{N} dt}}{y_1^2} dt \right].$$

Donc, en faisant $A = 0$, on aurait

$$z = \frac{C y_1}{N} e^{\int \frac{M}{N} dt} = z_1,$$

et, en faisant $C = 0$,

$$z = -\frac{A y_1}{N} e^{\int \frac{M}{N} dt} \int \frac{e^{-\int \frac{M}{N} dt}}{y_1^2} dt = z_2.$$

Supposons que les quantités L, M, N soient constantes, on aura, comme on sait, pour les deux valeurs de y qui satisfont à l'équation $Ly + M\frac{dy}{dt} + N\frac{d^2y}{dt^2} = 0$, $e^{k_1 t}$ et $e^{k_2 t}$; k_1 et k_2 étant les racines de l'équation $L + Mk + Nk^2 = 0$; donc

$$y_1 = e^{k_1 t}, \quad y_2 = e^{k_2 t};$$

et par conséquent

$$z_1 = -\frac{B}{N} \frac{e^{-k_2 t}}{k_1 - k_2}, \quad z_2 = \frac{A}{N} \frac{e^{-k_1 t}}{k_1 - k_2};$$

donc

$$y = \frac{e^{k_2 t} \int T e^{-k_2 t} dt - e^{k_1 t} \int T e^{-k_1 t} dt}{N(k_2 - k_1)}.$$

Si l'on voulait employer les valeurs de z_1 et de z_2 trouvées à la fin du numéro précédent, on aurait

$$z_1 = \frac{C y_1}{N} e^{\frac{M}{N} t} \quad \text{et} \quad z_2 = -\frac{A y_1}{N} e^{\frac{M}{N} t} \int \frac{e^{-\frac{M}{N} t}}{y_1^2} dt,$$

ou bien, en mettant pour y_1 sa valeur $e^{k_1 t}$,

$$z_1 = \frac{C}{N} e^{\left(k_1 + \frac{M}{N}\right) t} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{A}{M + 2Nk_1} e^{-k_1 t}.$$

Or, k_1 et k_2 étant les racines de l'équation $L + Mk + Nk^2 = 0$, on aura

$$k_1 + k_2 = -\frac{M}{N};$$

donc

$$k_1 + \frac{M}{N} = -k_2 \quad \text{et} \quad M + 2Nk_1 = N(k_1 - k_2);$$

donc, en faisant $C = -\frac{B}{k_1 - k_2}$, les valeurs de z_1 et de z_2 seront les mêmes que ci-dessus.

Ces valeurs pourraient encore se trouver d'une manière plus simple par la remarque du n° **10**. Car l'équation (B) sera, dans le cas présent,

$$Lz - M\frac{dz}{dt} + N\frac{d^2z}{dt^2} = 0;$$

d'où l'on tire

$$z = Fe^{h_1 t} = z_1 \quad \text{et} \quad z = Ge^{h_2 t} = z_2,$$

F, G étant deux constantes arbitraires, et h_1, h_2 les racines de l'équation $L - Mh + Nh^2 = 0$; de sorte qu'on aura

$$h_1 = -k_1 \quad \text{et} \quad h_2 = -k_2.$$

Recherche des cas d'intégration de l'équation

$$\frac{d^2y}{dt^2} + ayt^m = T.$$

12. On aura ici $L = at^{2m}$, $M = 0$, $N = 1$; donc l'équation (B) deviendra

$$azt^{2m} + \frac{d^2z}{dt^2} = 0. \tag{G}$$

Supposons dt variable, nous aurons, au lieu du terme $\frac{d^2z}{dt^2}$, ces deux-ci $\frac{d^2z}{dt^2} - \frac{dz\,d^2t}{dt^3}$; donc, faisant cette substitution et divisant toute l'équation par t^{2m}, on aura la transformée

$$\frac{d^2z}{t^{2m}\,dt^2} - \frac{dz\,d^2t}{t^{2m}\,dt^3} + az = 0.$$

Soit maintenant $t^m\,dt = du$, c'est-à-dire $u = \frac{t^{m+1}}{m+1}$, on aura, en prenant du pour constante,

$$\frac{d^2t}{dt} + m\frac{dt}{t} = 0,$$

c'est-à-dire, à cause de $dt = t^{-m}du$,

$$\frac{d^2t}{dt} = -mt^{-m-1}du = -\frac{m}{m+1}\frac{du}{u};$$

donc, substituant ces valeurs dans l'équation précédente, et faisant, pour abréger, $\frac{m}{m+1} = n$, on aura

$$\frac{d^2z}{du^2} + \frac{n}{u}\frac{dz}{du} + az = 0.$$

Si n était égal à zéro, on aurait $\frac{d^2z}{du^2} + az = 0$; par conséquent $z = e^{ku}$, k étant une des racines de l'équation $k^2 + a = 0$.

Supposons donc $z = xe^{ku}$, on aura, après les substitutions et les réductions,

$$\frac{d^2x}{du^2} + \left(2k + \frac{n}{u}\right)\frac{dx}{du} + \frac{nkx}{u} = 0.$$

Qu'on fasse

$$x = \text{A}u^r + \text{B}u^{r+1} + \text{C}u^{r+2} + \ldots,$$

on trouvera, en égalant à zéro les termes homogènes, les équations suivantes :

$$r(r-1)\text{A} + nr\text{A} = 0,$$
$$(r+1)r\text{B} + 2kr\text{A} + n(r+1)\text{B} + nk\text{A} = 0,$$
$$(r+2)(r+1)\text{C} + 2k(r+1)\text{B} + n(r+2)\text{C} + nk\text{B} = 0,$$

et ainsi de suite.

D'où l'on tire premièrement, ou $r = 0$, ou $r - 1 + n = 0$, savoir $r = 1 - n$, ensuite

$$\text{B} = -\frac{2r+n}{(r+1)(r+n)}k\text{A},$$

$$\text{C} = -\frac{2(r+1)+n}{(r+2)(r+1+n)}k\text{B},$$

$$\text{D} = -\frac{3(r+2)+n}{(r+3)(r+2+n)}k\text{C},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

En combinant les deux cas de $r = 0$ et de $r = 1 - n$, et faisant $1 - n = \nu$ et $A = 1$, on aura

$$\begin{aligned}
A &= 1,\\
B &= -k,\\
C &= \frac{3+\nu}{2(2+\nu)}k^2,\\
D &= -\frac{(3\mp\nu)(5\mp\nu)}{2.3(2\mp\nu)(3\mp\nu)}k^3,\\
E &= \frac{(3\mp\nu)(5\mp\nu)(7\mp\nu)}{2.3.4(2\mp\nu)(3\mp\nu)(4\mp\nu)}k^4,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots,
\end{aligned}$$

le signe supérieur étant pour le premier cas, et le signe inférieur pour le second cas; d'où l'on voit que la série se terminera toutes les fois que ν sera égal à un nombre quelconque impair positif ou négatif, à l'exception de ± 1.

Ayant ainsi la valeur de x, on aura celle de z par la supposition de $z = xe^{ku}$, et comme l'équation $k^2 + a = 0$ donne deux valeurs de k, savoir $k = \pm\sqrt{-a}$, on aura aussi deux valeurs de z, qu'on nommera, comme ci-dessus, z_1 et z_2, et qui, étant substituées dans la formule (F) du numéro précédent, donneront la valeur de y.

Si a est une quantité positive, les deux valeurs de k seront imaginaires. Dans ce cas la valeur de x sera de cette forme $P \pm Q\sqrt{-1}$, et par conséquent on aura

$$z = (P \pm Q\sqrt{-1})\, e^{\pm u\sqrt{a}\sqrt{-1}},$$

ou, en mettant au lieu de $e^{\pm u\sqrt{a}\sqrt{-1}}$ sa valeur $\cos(u\sqrt{a}) \pm \sin(u\sqrt{a})\sqrt{-1}$, savoir :

$$z = [P\cos(u\sqrt{a}) - Q\sin(u\sqrt{a})] \pm [P\sin(u\sqrt{a}) + Q\cos(u\sqrt{a})]\sqrt{-1}.$$

Soit donc, pour abréger,

$$\begin{aligned}
P\cos(u\sqrt{a}) - Q\sin(u\sqrt{a}) &= R,\\
P\sin(u\sqrt{a}) + Q\cos(u\sqrt{a}) &= S,
\end{aligned}$$

on aura

$$R + S\sqrt{-1} = z_1 \quad \text{et} \quad R - S\sqrt{-1} = z_2,$$

et la valeur de y deviendra

$$y = \frac{R\int TS\,dt - S\int TR\,dt}{\left(S\frac{dR}{dt} - R\frac{dS}{dt}\right)}.$$

13. Si $m = 1$, on aura $n = \infty$, et la valeur de x sera exprimée par une suite infinie; mais, en reprenant l'équation (G), on aura

$$\frac{az}{t^2} + \frac{d^2z}{dt^2} = 0,$$

laquelle, en faisant $z = t^r$, se change en

$$a + r(r-1) = 0,$$

d'où l'on tire

$$r = \frac{1}{2} \mp \sqrt{\frac{1}{4} - a}.$$

Ainsi l'on aura les deux valeurs de z.

14. Soient $T = 0$ et $y = e^{\int q\,dt}$, l'équation proposée se changera en celle-ci :

$$\frac{dq}{dt} + q + at^{2m} = 0,$$

laquelle est connue sous le nom d'*équation de Riccati;* on trouvera donc par la méthode précédente l'intégrale de cette même équation.

Intégration de l'équation

$$\text{(H)}\quad Ay + B(h+kt)\frac{dy}{dt} + C(h+kt)^2\frac{d^2y}{dt^2} + D(h+kt)^3\frac{d^3y}{dt^3} + \ldots = T,$$

A, B, C,... *étant des coefficients constants.*

15. En comparant cette équation avec la formule générale (A), on aura

$$L = A,\quad M = B(h+kt),\quad N = C(h+kt)^2,\quad P = D(h+kt)^3,\ldots.$$

Donc les équations (B) et (C) deviendront

$$(\mathrm{I})\quad Az - B\frac{d.(h+kt)z}{dt} + C\frac{d^2.(h+kt)^2z}{dt^2} - D\frac{d^3.(h+kt)^3z}{dt^3} + \ldots = 0,$$

$$(\mathrm{K})\quad \left\{\begin{aligned} &y\left[B(h+kt)z - C\frac{d.(h+kt)^2z}{dt} + D\frac{d^2.(h+kt)^3z}{dt^2} - \ldots\right] \\ &\quad + \frac{dy}{dt}\left[C(h+kt)^2z - D\frac{d.(h+kt)z}{dt} + \ldots\right] \\ &\quad + \frac{d^2y}{dt^2}\left[D(h+kt)^3z - \ldots\right] + \ldots\ldots\ldots\ldots = \int Tz\,dt. \end{aligned}\right.$$

Soit maintenant

$$z = (h+kt)^r,$$

et l'équation (I) étant divisée par $(h+kt)^r$ se réduira à celle-ci :

$$(\mathrm{L})\quad A - Bk(r+1) + Ck^2(r+1)(r+2) - Dk^3(r+1)(r+2)(r+3) + \ldots = 0,$$

laquelle étant ordonnée par rapport à r montera à un degré dont l'exposant sera le même que celui de l'ordre de l'équation proposée (H).

Faisant la même substitution dans l'équation (K), on aura, après avoir divisé par $(h+kt)^{r+1}$,

$$\begin{aligned} &y[B - Ck(r+2) + Dk^2(r+2)(r+3) - \ldots] \\ &\quad + \frac{dy}{dt}[C - Dk(r+3) + \ldots](h+kt) + \frac{d^2y}{dt^2}(D - \ldots)(h+kt)^2 + \ldots \\ &= (h+kt)^{-r-1}\int T(h+kt)^r\,dt, \end{aligned}$$

équation qui devra avoir lieu en mettant pour r chacune des racines de l'équation (L).

Soit, pour abréger,

$$\begin{aligned} &B - Ck(r+2) + Dk^2(r+2)(r+3) - \ldots = \alpha, \\ &C - Dk(r+3) + \ldots = \beta, \\ &D - \ldots = \gamma, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &(h+kt)^{-r-1}\int T(h+kt)^r\,dt = \theta, \end{aligned}$$

l'équation dont il s'agit se réduira à celle-ci :

$$\text{(M)} \qquad \alpha y + \beta(h+kt)\frac{dy}{dt} + \gamma(h+kt)^2\frac{d^2y}{dt^2} + \ldots = \theta.$$

Supposons que $r_1, r_2, r_3,\ldots$ soient les racines de l'équation (L), et que $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3,\ldots, \beta_1, \beta_2, \beta_3,\ldots$ soient ce que deviennent les quantités α, $\beta,\ldots$, lorsque r devient successivement $r_1, r_2, r_3,\ldots$; au lieu de l'équation (M), on aura celles-ci :

$$\begin{array}{ll}
(\mathrm{M}_1) & \alpha_1 y + \beta_1(h+kt)\dfrac{dy}{dt} + \gamma_1(h+kt)^2\dfrac{d^2y}{dt^2} + \ldots = \theta_1, \\
(\mathrm{M}_2) & \alpha_2 y + \beta_2(h+kt)\dfrac{dy}{dt} + \gamma_2(h+kt)^2\dfrac{d^2y}{dt^2} + \ldots = \theta_2, \\
(\mathrm{M}_3) & \alpha_3 y + \beta_3(h+kt)\dfrac{dy}{dt} + \gamma_3(h+kt)^2\dfrac{d^2y}{dt^2} + \ldots = \theta_3, \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{array}$$

dont le nombre sera le même que celui des quantités inconnues y, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{d^2y}{dt^2},\ldots$, comme il est facile de s'en assurer. Ainsi, en éliminant les quantités $\frac{dy}{dt}$, $\frac{d^2y}{dt^2},\ldots$, on aura la valeur de y.

Pour cet effet, je multiplie l'équation (M_1) par M', l'équation (M_2) par M'', et ainsi de suite; après quoi je les ajoute ensemble : j'ai

$$\begin{aligned}
&(\alpha_1 \mathrm{M}' + \alpha_2 \mathrm{M}'' + \alpha_3 \mathrm{M}''' + \ldots) y \\
&+ (\beta_1 \mathrm{M}' + \beta_2 \mathrm{M}'' + \beta_3 \mathrm{M}''' + \ldots)(h+kt)\frac{dy}{dt} \\
&+ (\gamma_1 \mathrm{M}' + \gamma_2 \mathrm{M}'' + \gamma_3 \mathrm{M}''' + \ldots)(h+kt)^2\frac{d^2y}{dt^2} + \ldots \\
&= \mathrm{M}'\theta_1 + \mathrm{M}''\theta_2 + \mathrm{M}'''\theta_3 + \ldots.
\end{aligned}$$

Je suppose

$$\text{(N)} \qquad \left\{\begin{array}{l}
\beta_1 \mathrm{M}' + \beta_2 \mathrm{M}'' + \beta_3 \mathrm{M}''' + \ldots = 0, \\
\gamma_1 \mathrm{M}' + \gamma_2 \mathrm{M}'' + \gamma_3 \mathrm{M}''' + \ldots = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;
\end{array}\right.$$

j'aurai

$$(\mathrm{P}) \qquad y = \frac{M'\theta_1 + M''\theta_2 + M'''\theta_3 + \ldots}{M'\alpha_1 + M''\alpha_2 + M'''\alpha_3 + \ldots},$$

et toute la difficulté se réduira à déterminer les quantités M′, M″, M‴,... par le moyen des équations (N).

Or, si l'on substitue dans ces équations les valeurs de β_1, $\gamma_1, \ldots$, β_2, $\gamma_2, \ldots$, et qu'on ordonne les termes par rapport aux puissances de r, on verra qu'elles se réduisent à celles-ci :

$$\begin{aligned}
&M' + M'' + M''' + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + M^{(m)} = 0,\\
&M' r_1 + M'' r_2 + M''' r_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + M^{(m)} r_m = 0,\\
&M' r_1^2 + M'' r_2^2 + M''' r_3^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + M^{(m)} r_m^2 = 0,\\
&M' r_1^3 + M'' r_2^3 + M''' r_3^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + M^{(m)} r_m^3 = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&M' r_1^{m-2} + M'' r_2^{m-2} + M''' r_3^{m-2} + \ldots + M^{(m)} r_m^{m-2} = 0,
\end{aligned}$$

m étant l'exposant de l'ordre de l'équation proposée (H), et la quantité $M'\alpha_1 + M''\alpha_2 + M'''\alpha_3 + \ldots$ deviendra

$$\pm V h^{m-1} (M' r_1^{m-1} + M'' r_2^{m-1} + M''' r_3^{m-1} + \ldots + M^{(m)} r_m^{m-1}),$$

dans laquelle V est le coefficient du terme $(h+kt)^m \frac{d^m y}{dt^m}$ de la même équation, le signe supérieur étant pour le cas de m impair, et le signe inférieur pour celui de m pair.

Telles sont les équations par lesquelles il faudra déterminer les inconnues M′, M″, M‴,..., $M^{(m)}$.

Pour rendre cette recherche plus générale, nous supposerons que l'on ait les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
&M' + M'' + M''' + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + M^{(m)} = R,\\
&M' r_1 + M'' r_2 + M''' r_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + M^{(m)} r_m = R',\\
&M' r_1^2 + M'' r_2^2 + M''' r_3^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + M^{(m)} r_m^2 = R'',\\
&M' r_1^3 + M'' r_2^3 + M''' r_3^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + M^{(m)} r_m^3 = R''',\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&M' r_1^{m-1} + M'' r_2^{m-1} + M''' r_3^{m-1} + \ldots + M^{(m)} r_m^{m-1} = R^{(m-1)}.
\end{aligned}$$

(Je prends ici une équation de plus afin que l'on ait autant d'équations que d'inconnues.)

On multipliera la première de ces équations par N, la seconde par N', la troisième par N'', et ainsi des autres; on les ajoutera ensemble, et l'on aura

$$\begin{aligned}
&\mathrm{M}'\,(\mathrm{N}+\mathrm{N}'r_1+\mathrm{N}''r_1^2+\mathrm{N}'''r_1^3+\ldots+\mathrm{N}^{(m-1)}r_1^{m-1})\\
&+\mathrm{M}''(\mathrm{N}+\mathrm{N}'r_2+\mathrm{N}''r_2^2+\mathrm{N}'''r_2^3+\ldots+\mathrm{N}^{(m-1)}r_2^{m-1})\\
&+\mathrm{M}'''(\mathrm{N}+\mathrm{N}'r_3+\mathrm{N}''r_3^2+\mathrm{N}'''r_3^3+\ldots+\mathrm{N}^{(m-1)}r_3^{m-1})\\
&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+\mathrm{M}^{(m)}(\mathrm{N}+\mathrm{N}'r_m+\mathrm{N}''r_m^2+\mathrm{N}'''r_m^3+\ldots+\mathrm{N}^{(m-1)}r_m^{m-1})\\
=\;&\mathrm{NR}+\mathrm{N}'\mathrm{R}'+\mathrm{N}''\mathrm{R}''+\mathrm{N}'''\mathrm{R}'''+\ldots+\mathrm{N}^{(m-1)}\mathrm{R}^{(m-1)}.
\end{aligned}$$

Maintenant, pour avoir la valeur d'une M quelconque, comme $\mathrm{M}^{(\mu)}$, il n'y aura qu'à supposer égales à zéro les quantités qui multiplient toutes les autres M, et l'on aura

$$(\mathrm{Q})\qquad \mathrm{M}^{(\mu)}=\frac{\mathrm{NR}+\mathrm{N}'\mathrm{R}'+\mathrm{N}''\mathrm{R}''+\mathrm{N}'''\mathrm{R}'''+\ldots+\mathrm{N}^{(m-1)}\mathrm{R}^{(m-1)}}{\mathrm{N}+\mathrm{N}'r_\mu+\mathrm{N}''r_\mu^2+\mathrm{N}'''r_\mu^3+\ldots+\mathrm{N}^{(m-1)}r_\mu^{m-1}},$$

et les quantités N, N', N'',..., $\mathrm{N}^{(m-1)}$ seront déterminées par ces équations

$$\begin{aligned}
\mathrm{N}+\mathrm{N}'r_1+\mathrm{N}''r_1^2+\ldots+\mathrm{N}^{(m-1)}r_1^{m-1}&=0,\\
\mathrm{N}+\mathrm{N}'r_2+\mathrm{N}''r_2^2+\ldots+\mathrm{N}^{(m-1)}r_2^{m-1}&=0,
\end{aligned}$$

et ainsi de suite jusqu'à

$$\mathrm{N}+\mathrm{N}'r_m+\mathrm{N}''r_m^2+\ldots+\mathrm{N}^{(m-1)}r_m^{m-1}=0,$$

à l'exception de

$$\mathrm{N}+\mathrm{N}'r_\mu+\mathrm{N}''r_\mu^2+\ldots+\mathrm{N}^{(m-1)}r_\mu^{m-1}=0;$$

c'est-à-dire qu'on aura l'équation

$$\mathrm{N}+\mathrm{N}'r+\mathrm{N}''r^2+\mathrm{N}'''r^3+\ldots+\mathrm{N}^{(m-1)}r^{(m-1)}=0,$$

laquelle devra avoir lieu en mettant au lieu de r, successivement r_1, r_2, r_3,..., r_m, à l'exception de r_μ.

Or, comme $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_m$ sont les racines de l'équation (L), si l'on représente cette équation par

$$a + br + cr^2 + dr^3 + \ldots + tu^{m-1} + ur^m = 0,$$

on aura, par la théorie des équations,

$$1 + \frac{N'}{N} r + \frac{N''}{N} r^2 + \frac{N'''}{N} r^3 + \ldots + \frac{N^{(m-1)}}{N} r^{m-1} = \frac{1 + \frac{b}{a} r + \frac{c}{a} r^2 + \frac{d}{a} r^3 + \ldots + \frac{u}{a} r}{1 - \frac{r}{r_\mu}};$$

donc, multipliant par $1 - \frac{r}{r_\mu}$ et comparant les termes, on aura

$$\frac{N'}{N} - \frac{1}{r_\mu} = \frac{b}{a},$$
$$\frac{N''}{N} - \frac{1}{r_\mu}\frac{N'}{N} = \frac{c}{a},$$
$$\frac{N'''}{N} - \frac{1}{r_\mu}\frac{N''}{N} = \frac{d}{a},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

d'où l'on tire

$$N' = \frac{N}{ar_\mu}(a + br_\mu),$$
$$N'' = \frac{N}{ar_\mu^2}(a + br_\mu + cr_\mu^2),$$
$$N''' = \frac{N}{ar_\mu^3}(a + br_\mu + cr_\mu^2 + dr_\mu^3),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$N^{(m-1)} = \frac{N}{ar_\mu^{m-1}}(a + br_\mu + cr_\mu^2 + dr_\mu^3 + \ldots + tr_\mu^{m-1}).$$

Faisant ces substitutions dans la formule (Q), on verra que la quantité N disparaîtra d'elle-même; de sorte que l'on aura la valeur de chacun des coefficients M.

Soit maintenant $R = 0$, $R' = 0$, $R'' = 0, \ldots, R^{(m-2)} = 0$, on aura

$$M^{(\mu)} = \frac{N^{(m-1)} R^{(m-1)}}{N + N' r_\mu + N'' r_\mu^2 + \ldots + N^{(m-1)} r_\mu^{m-1}}.$$

Or

$$\mathrm{N}^{(m-1)} = \frac{\mathrm{N}}{ar_\mu^{m-1}}(a + br_\mu + cr_\mu^2 + \ldots + tr_\mu^{m-1});$$

et comme

$$a + br + cr^2 + \ldots + tr^{m-1} + ur^m = 0,$$

on a, en mettant r_μ au lieu de r,

$$a + br_\mu + cr_\mu^2 + \ldots + tr_\mu^{m-1} = -ur_\mu^m;$$

donc

$$\mathrm{N}^{(m-1)} = \frac{\mathrm{N}}{ar_\mu^{m-1}}(-ur_\mu^m) = -\frac{\mathrm{N}u}{a}r_\mu.$$

De plus, on a

$$\frac{\mathrm{N} + \mathrm{N}'r + \mathrm{N}''r + \ldots + \mathrm{N}^{(m-1)}r^{m-1}}{\mathrm{N}} = \frac{a + br + cr^2 + \ldots + ur^m}{a\left(1 - \frac{r}{r_\mu}\right)};$$

donc, si l'on fait pareillement $r = r_\mu$, on aura, en prenant la différence du numérateur et du dénominateur, à cause que l'un et l'autre s'évanouissent dans ce cas,

$$\frac{\mathrm{N} + \mathrm{N}'r_\mu + \mathrm{N}''r_\mu^2 + \ldots + \mathrm{N}^{(m-1)}r_\mu^{m-1}}{\mathrm{N}} = -\frac{b + 2cr_\mu + 3dr_\mu^2 + \ldots + mur_\mu^{m-1}}{\frac{a}{r_\mu}};$$

donc

$$\mathrm{M}^{(\mu)} = \frac{u\mathrm{R}^{(m-1)}}{b + 2cr_\mu + 3dr_\mu^2 + \ldots}.$$

Soit

$$\mathrm{A} - \mathrm{B}k(r+1) + \mathrm{C}k^2(r+1)(r+2) - \ldots \mp \mathrm{V}k^m(r+1)(r+2)\ldots(r+m) = \mathrm{P},$$

de sorte que l'équation (L) soit représentée par $\mathrm{P} = 0$, on aura

$$a + br + cr^2 + \ldots + ur^m = \mathrm{P};$$

donc

$$u = \mp \mathrm{V}k^m$$

(le signe supérieur étant pour le cas de m impair, et l'inférieur pour celui de m pair), et

$$b + 2cr + 3dr^2 + \ldots = \frac{dP}{dr}.$$

Donc, si l'on fait $\frac{dP}{dr} = Q$, et qu'on dénote par Q_1, Q_2, Q_3,..., les valeurs de Q lorsque r devient r_1, r_2, r_3,..., on aura

$$M' = \frac{+\sqrt{k^m R^{(m-1)}}}{Q_1}, \quad M'' = \frac{+\sqrt{k^m R^{(m-1)}}}{Q_2}, \ldots.$$

Substituant donc ces valeurs dans la formule (P), et faisant attention que

$$\begin{aligned} M'\alpha_1 + M''\alpha_2 + M'''\alpha_3 + \ldots &= \pm\sqrt{k^{m-1}}\,(M' r_1^{m-1} + M'' r_2^{m-1} + M''' r_3^{m-1} + \ldots) \\ &= \pm\sqrt{k^{m-1} R^{(m-1)}}, \end{aligned}$$

on aura enfin

$$\text{(R)} \qquad y = -k\left(\frac{\theta_1}{Q_1} + \frac{\theta_2}{Q_2} + \frac{\theta_3}{Q_3} + \ldots\right).$$

D'où l'on voit que chaque racine de l'équation $P = o$ donne, dans la valeur de y, un terme correspondant tel que $-k\frac{\theta}{Q}$.

16. Toute la difficulté se réduit donc à résoudre l'équation $P = o$; or il peut arriver deux cas qu'il est bon d'examiner : le premier est celui où cette équation aurait des racines égales, le second celui où elle aurait des racines imaginaires.

1° Supposons que l'on trouve deux racines égales, par exemple $r_2 = r_1$; on fera $r_2 = r_1 + \omega$, ω étant une quantité évanouissante; et, comme P peut être représenté en général par $(r - r_1)(r - r_2)\Pi$, on aura

$$Q = \frac{dP}{dr} = (r - r_2)\Pi + (r - r_1)\Pi + (r - r_1)(r - r_2)\frac{d\Pi}{dr};$$

donc, faisant successivement $r = r_1$ et $r = r_2$, et substituant $r_1 + \omega$ au lieu de r_2, on aura

$$Q_1 = -\omega\Pi_1 \quad \text{et} \quad Q_2 = \omega\Pi_1,$$

Π_1 étant la valeur de Π lorsque $r = r_1$. Pour trouver cette valeur, on remarquera que, puisque $r_2 = r_1$, on a $(r-r_1)^2 \Pi = P$; d'où l'on tire, en différentiant deux fois,

$$2\Pi + 4(r-r_1)\frac{d\Pi}{dr} + (r-r_1)^2\frac{d^2\Pi}{dr^2} = \frac{d^2P}{dr^2} = R;$$

et, par conséquent, en faisant $r = r_1$,

$$2\Pi_1 = R_1 \quad \text{et} \quad \Pi_1 = \frac{R_1}{2};$$

donc

$$Q_1 = -\frac{\omega}{2}R_1 \quad \text{et} \quad Q_2 = \frac{\omega}{2}R_1.$$

Maintenant on a

$$\theta_1 = (h+kt)^{-r_1-1}\int T(h+kt)^{r_1}dt \quad \text{et} \quad \theta_2 = (h+kt)^{-r_2-1}\int T(h+kt)^{r_2}dt;$$

or

$$(h+kt)^{-r_2-1} = (h+kt)^{-r_1-1-\omega} = (h+kt)^{-r_1-1}[1-\omega\log(h+kt)\ldots],$$

et de même

$$(h+kt)^{r_2} = (h+kt)^{r_1}[1+\omega\log(h+kt)];$$

donc, négligeant les ω^2, on aura

$$\theta_2 = \theta_1 + \omega(h+kt)^{-r_1-1}\left[\int T(h+kt)^{r_1}\log(h+kt)dt - \log(h+kt)\int T(h+kt)^{r_1}dt\right],$$

ou bien

$$\theta_2 = \theta_1 - \omega(h+kt)^{-r_1-1}\int\frac{k\,dt}{h+kt}\int T(h+kt)^{r_1}dt;$$

donc, faisant ces substitutions dans les termes $-k\frac{\theta_1}{Q_1} - k\frac{\theta_2}{Q_2}$ de la valeur de y, lesquels répondent aux racines égales r_1, r_2, et effaçant ce qui se détruit, on aura

$$-k\frac{\theta_1}{Q_1} - k\frac{\theta_2}{Q_2} = k\frac{2(h+kt)^{-r_1-1}}{R_1}\int\frac{k\,dt}{h+kt}\int T(h+kt)^{r_1}dt.$$

On résoudrait de même le cas de trois racines égales, en faisant $r_2 = r_1 + \omega$, $r_3 = r_1 + \eta$, ω et η étant deux quantités infiniment petites, et ayant égard aux quantités du second ordre. De cette manière on trouvera que les trois termes $-k\frac{\theta_1}{Q_1}-k\frac{\theta_2}{Q_2}-k\frac{\theta_3}{Q_3}$ deviendront

$$-k\frac{6(h+kt)^{-r_1-1}}{S_1}\int\frac{k\,dt}{h+kt}\int\frac{k\,dt}{h+kt}\int T(h+kt)^{r_1}dt,$$

S étant égal à $\frac{d^3P}{dr^3}$, et S_1 exprimant la valeur de S lorsque $r=r_1$, et ainsi de suite.

2° Supposons maintenant que les deux racines r_1 et r_2 soient imaginaires, en sorte que $r_1=F+G\sqrt{-1}$ et $r_2=F-G\sqrt{-1}$; il est facile de voir que les quantités Q_1 et Q_2 seront de cette forme: $Q_1=M+N\sqrt{-1}$, $Q_2=M-N\sqrt{-1}$; de plus, les quantités $(h+kt)^{-r_1-1}$ et $(h+kt)^{r_1}$ deviendront

$$(h+kt)^{-F-1}(h+kt)^{-G\sqrt{-1}},\quad \text{et}\quad (h+kt)^{F}(h+kt)^{G\sqrt{-1}}.$$

Or soit

$$(h+kt)^{G\sqrt{-1}}=\lambda(\cos\varphi+\sin\varphi\sqrt{-1}),$$

on aura par les logarithmes

$$G\sqrt{-1}\log(h+kt)=\log\lambda+\varphi\sqrt{-1},$$

donc $\log\lambda=0$, savoir

$$\lambda=1,\quad \text{et}\quad \varphi=G\log(h+kt),$$

donc

$$(h+kt)^{G\sqrt{-1}}=\cos[G\log(h+kt)]+\sin[G\log(h+kt)]\sqrt{-1},$$

et prenant le radical $\sqrt{-1}$ en $-$,

$$(h+kt)^{-G\sqrt{-1}}=\cos[G\log(h+kt)]-\sin[G\log(h+kt)]\sqrt{-1};$$

par ces substitutions on réduira les quantités θ_1 et θ_2 à la forme $X\pm Y\sqrt{-1}$, de sorte que les deux termes $-k\frac{\theta_1}{Q_1}-k\frac{\theta_2}{Q_2}$ de l'expression de y se changeront en

$$-k\frac{X+Y\sqrt{-1}}{M+N\sqrt{-1}}-k\frac{X-Y\sqrt{-1}}{M-N\sqrt{-1}}=-2k\frac{MX+NY}{M^2+N^2}.$$

Application à l'équation

$$Ay + B\frac{dy}{dt} + C\frac{d^2y}{dt^2} + D\frac{d^3y}{dt^3} + \ldots = T.$$

17. On aura dans ce cas $h = 1$ et $k = 0$; mais comme la supposition de $k = 0$ donnerait $P = A = 0$, on supposera simplement k infiniment petite, et ensuite r infiniment grande, en sorte que kr soit égal à une quantité finie ρ; de cette manière on aura

$$P = A - B\rho + C\rho^2 - D\rho^3 + \ldots = 0,$$

équation d'où l'on tirera autant de valeurs de ρ qu'il y a d'unités dans l'exposant de l'ordre de l'équation différentielle, de sorte que, si l'on appelle $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \ldots$, les racines de cette équation, on aura

$$r_1 = \frac{\rho_1}{k}, \quad r_2 = \frac{\rho_2}{k}, \ldots.$$

Or on a $Q = \frac{dP}{dr}$; donc, si l'on fait $\frac{dP}{d\rho} = q$, on aura $Q = kq$, et par conséquent

$$Q_1 = kq_1 \quad Q_2 = kq_2, \ldots,$$

donc

$$y = -\left(\frac{\theta_1}{Q_1} + \frac{\theta_2}{Q_2} + \frac{\theta_3}{Q_3} + \ldots\right).$$

Or

$$\theta = (h + kt)^{-r-1}\int T(h + kt)^r dt;$$

donc, si l'on fait $h = 1$, et qu'on mette $\frac{\rho}{k}$ au lieu de r, on aura, à cause de $r = \infty$,

$$\theta = (1 + kt)^{-\frac{\rho}{k}}\int T(1 + kt)^{\frac{\rho}{k}} dt;$$

mais on sait que

$$(1 + kt)^{\pm\frac{\rho}{k}} = e^{\pm\rho t}$$

(dans le cas de k infiniment petite), e étant le nombre dont le logarithme hyperbolique est 1; donc

$$\theta = e^{-\rho t} \int \mathrm{T} e^{\rho t}\, dt,$$

et par conséquent

$$\theta_1 = e^{-\rho_1 t} \int \mathrm{T} e^{\rho_1 t}\, dt, \quad \theta_2 = e^{-\rho_2 t} \int \mathrm{T} e^{\rho_2 t}\, dt, \ldots.$$

Si l'équation $\mathrm{P} = 0$ a deux racines égales, on transformera d'abord les termes

$$-\frac{\theta_1}{\mathrm{Q}_1} - \frac{\theta_2}{\mathrm{Q}_2} = -k\left(\frac{\theta_1}{\mathrm{Q}_1} + \frac{\theta_2}{\mathrm{Q}_2}\right)$$

en

$$k\frac{2(h+kt)^{-r_1-1}}{\mathrm{R}_1} \int \frac{k\,dt}{h+kt} \int \mathrm{T}(h+kt)^{r_1}\, dt$$

(numéro précédent), expression qui se réduit dans le cas présent à celle-ci :

$$\frac{2k^2}{\mathrm{R}_1} e^{-\rho_1 t} \int dt \int \mathrm{T} e^{\rho_1 t}\, dt;$$

mais

$$\mathrm{R} = \frac{d^2\mathrm{P}}{dr^2} = \frac{k^2 d^2\mathrm{P}}{d\rho^2};$$

donc, si l'on fait $\frac{d^2\mathrm{P}}{d\rho^2} = \mathrm{R}$, on aura

$$\frac{2}{\mathrm{R}_1} e^{-\rho_1 t} \int dt \int \mathrm{T} e^{\rho_1 t}\, dt$$

au lieu des termes $-\frac{\theta_1}{\mathrm{Q}_1} - \frac{\theta_2}{\mathrm{Q}_2}$. On opérerait de même si l'on avait trois, quatre, etc., racines égales.

Si ρ_1 et ρ_2 sont imaginaires, de sorte que

$$\rho_1 = \mathrm{F} + \mathrm{G}\sqrt{-1}, \quad \text{et} \quad \rho_2 = \mathrm{F} - \mathrm{G}\sqrt{-1},$$

on aura

$$e^{\pm \rho_1 t} = e^{\pm \mathrm{F} t}(\cos \mathrm{G} t \pm \sin \mathrm{G} t \sqrt{-1}),$$

et

$$e^{\pm \rho_2 t} = e^{\pm \mathrm{F} t}(\cos \mathrm{G} t \pm \sin \mathrm{G} t \sqrt{-1});$$

de plus on trouvera

$$Q_1 = M + N\sqrt{-1} \quad \text{et} \quad Q_2 = M - N\sqrt{-1},$$

donc les termes $-\dfrac{\theta_1}{Q_1} - \dfrac{\theta_2}{Q_2}$ se réduiront à

$$-\frac{2e^{-\nu t}}{M^2+N^2}\left[(M\cos Gt - N\sin Gt)\int Te^{\nu t}\cos Gt\,dt \right.$$
$$\left. + (M\sin Gt + N\cos Gt)\int Te^{\nu t}\sin Gt\,dt\right].$$

Résolution de l'équation

$$\alpha\varphi[t+a(h+kt)] + \beta\varphi[t+b(h+kt)] + \gamma\varphi[t+c(h+kt)] + \ldots = T,$$

dans laquelle φ dénote une fonction inconnue.

18. On sait que $\varphi[t+a(h+kt)]$ peut se réduire en série de cette manière :

$$\varphi(t) + a(h+kt)\frac{d\varphi(t)}{dt} + \frac{1}{2}a^2(h+kt)^2\frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} + \frac{1}{2.3}a^3(h+kt)^3\frac{d^3\varphi(t)}{dt^3} + \ldots;$$

donc, si l'on développe de même $\varphi[t+b(h+kt)]$, $\varphi[t+c(h+kt)]$,..., et qu'on fasse

$$\varphi(t) = y,$$

l'équation proposée deviendra

$$(\mathrm{S}) \qquad \left\{\begin{aligned} &(\alpha+\beta+\gamma+\ldots)y \\ &+(\alpha a+\beta b+\gamma c+\ldots)(h+kt)\frac{dy}{dt} \\ &+\frac{1}{2}(\alpha a^2+\beta b^2+\gamma c^2+\ldots)(h+kt)^2\frac{d^2y}{dt^2} \\ &+\frac{1}{2.3}(\alpha a^3+\beta b^3+\gamma c^3+\ldots)(h+kt)^3\frac{d^3y}{dt^3} \\ &+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = T. \end{aligned}\right.$$

Comparant cette équation avec l'équation (H) du n° **15**, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{A} &= \alpha + \beta + \gamma + \ldots,\\
\mathrm{B} &= \alpha a + \beta b + \gamma c + \ldots,\\
\mathrm{C} &= \frac{1}{2}(\alpha a^2 + \beta b^2 + \gamma c^2 + \ldots),\\
\mathrm{D} &= \frac{1}{2.3}(\alpha a^2 + \beta b^3 + \gamma c^3 + \ldots),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;
\end{aligned}$$

donc on aura

$$\begin{aligned}
\mathrm{P} = {} & \alpha\left[1 - ka(r+1) + \frac{k^2a^2}{2}(r+1)(r+2) - \frac{k^3a^3}{2.3}(r+1)(r+2)(r+3) + \ldots\right]\\
& + \beta\left[1 - kb(r+1) + \frac{k^2b^2}{2}(r+1)(r+2) - \frac{k^3b^3}{2.3}(r+1)(r+2)(r+3) + \ldots\right]\\
& + \gamma\left[1 - kc(r+1) + \frac{k^2c^2}{2}(r+1)(r+2) - \frac{k^3c^3}{2.3}(r+1)(r+2)(r+3) + \ldots\right]\\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
& = 0,
\end{aligned}$$

équation d'où l'on tirera les valeurs r_1, r_2, r_3,..., de r, dont le nombre sera infini; de sorte que la valeur de y sera exprimée par une suite infinie, telle que

$$-k\left(\frac{\theta_1}{\mathrm{Q}_1} + \frac{\theta_2}{\mathrm{Q}_2} + \frac{\theta_3}{\mathrm{Q}_3} + \ldots\right),$$

θ étant égal à $(h+kt)^{-r-1}\int \mathrm{T}(h+kt)^r\,dt$.

Maintenant il est clair que la valeur de P se réduit à

$$\alpha(1+ka)^{-r-1} + \beta(1+kb)^{-r-1} + \gamma(1+kc)^{-r-1} + \ldots,$$

donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{Q} = {} & -\alpha(1+ka)^{-r-1}\log(1+ka) - \beta(1+kb)^{-r-1}\log(1+kb)\\
& - \gamma(1+kc)^{-r-1}\log(1+kc) - \ldots,
\end{aligned}$$

et l'équation à résoudre sera

$$\alpha(1+ka)^{-r-1}+\beta(1+kb)^{-r-1}+\gamma(1+kc)^{-r-1}+\ldots=0,$$

r étant l'inconnue; or cette résolution réussira dans les deux cas suivants :

1° Lorsque l'équation n'a que deux termes, c'est-à-dire lorsqu'on a

$$\alpha(1+ka)^{-r-1}+\beta(1+kb)^{-r-1}=0;$$

car, divisant par $\beta(1+kb)^{-r-1}$, on a

$$\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{1+ka}{1+kb}\right)^{-r-1}+1=0,$$

d'où l'on tire, par les logarithmes,

$$r+1=\frac{\log\left(-\frac{\alpha}{\beta}\right)}{\log\frac{1+ka}{1+kb}}.$$

Qu'on suppose, ce qui est toujours possible,

$$-\frac{\alpha}{\beta}=\lambda(\cos\omega+\sin\omega\sqrt{-1}),$$

λ étant une quantité réelle et positive, on trouvera pour ω une infinité d'angles différents, et l'on aura

$$\log\left(-\frac{\alpha}{\beta}\right)=\log\lambda+\omega\sqrt{-1},$$

ce qui donnera une infinité de valeurs de r.

Soit $\frac{\alpha}{\beta}$ une quantité réelle positive, on fera

$$\lambda=\frac{\alpha}{\beta},\quad \cos\omega=-1 \quad\text{et}\quad \sin\omega=0,$$

ce qui donne

$$\omega=(2\nu+1)\pi,$$

ν étant un nombre quelconque entier positif ou négatif, et π dénotant l'angle de 180 degrés; donc

$$r+1=\frac{\log\frac{\alpha}{\beta}+(2\nu+1)\pi\sqrt{-1}}{\log\frac{1+ka}{1+kb}},$$

et l'on aura les différentes valeurs de r, en faisant successivement ν égal à $1, -1, 2, -2, \ldots$.

Si $\frac{\alpha}{\beta}$ est une quantité réelle négative, $-\frac{\alpha}{\beta}$ sera réelle positive; c'est pourquoi on supposera

$$\lambda=-\frac{\alpha}{\beta},\quad \cos\omega=1,\quad \sin\omega=0;$$

d'où

$$\omega=2\nu\pi,$$

et par conséquent

$$r+1=\frac{\log\left(-\frac{\alpha}{\beta}\right)+2\nu\pi\sqrt{-1}}{\log\frac{1+ka}{1+kb}}.$$

Enfin, si $\frac{\alpha}{\beta}$ est une quantité imaginaire de la forme $p+q\sqrt{-1}$, on aura

$$\lambda\cos\omega=-p \quad\text{et}\quad \lambda\sin\omega=-q,$$

d'où l'on tire

$$\lambda=\sqrt{p^2+q^2},\quad \sin\omega=-\frac{q}{\lambda}\quad\text{et}\quad \cos\omega=-\frac{p}{\lambda}.$$

Donc, si l'on suppose que ω' soit le plus petit angle dont le sinus est égal à $-\frac{q}{\lambda}$, et le cosinus à $-\frac{p}{\lambda}$, on aura

$$\omega=\omega'+2\nu\pi,$$

ν dénotant comme ci-devant un nombre quelconque entier positif ou négatif, d'où

$$r+1=\frac{\log\lambda+(\omega'+2\nu\pi)\sqrt{-1}}{\log\frac{1+ka}{1+kb}}.$$

2° Lorsque $1 + kb = (1 + ka)^2$, $1 + kc = (1 + ka)^3, \ldots$; car, en faisant

$$(1 + ka)^{-r-1} = p,$$

l'équation proposée deviendra

$$\alpha p + \beta p^2 + \gamma p^3 + \ldots = 0;$$

d'où l'on tirera p par les méthodes connues; après quoi on trouvera r par la méthode précédente.

19. Si $k = 0$ et $h = 1$, en sorte que l'équation à résoudre soit

$$\alpha\varphi(t + a) + \beta\varphi(t + b) + \gamma\varphi(t + c) + \ldots = \mathrm{T},$$

alors, suivant ce qui a été dit dans le n° **13**, on trouvera

$$\mathrm{P} = \alpha e^{-\rho a} + \beta e^{-\rho b} + \gamma e^{-\rho c} + \ldots$$

et

$$\mathrm{Q} = -\alpha a e^{-\rho a} - \beta b e^{-\rho b} - \gamma c e^{-\rho c} - \ldots,$$

et la valeur de y, c'est-à-dire de $\varphi(t)$, sera exprimée par la suite infinie

$$-\frac{\theta_1}{\mathrm{Q}_1} - \frac{\theta_2}{\mathrm{Q}_2} - \frac{\theta_3}{\mathrm{Q}_3} - \ldots,$$

dans laquelle on aura, en général,

$$\theta = e^{-\rho t}\int \mathrm{T} e^{\rho t}\, dt.$$

A l'égard des valeurs de ρ, on les tirera de l'équation $\mathrm{P} = 0$, laquelle est résoluble dans les mêmes cas que ci-dessus, savoir lorsque le coefficient γ et tous les suivants sont nuls, et lorsque $b = 2a$, $c = 3a, \ldots$. Dans le premier cas on aura

$$\alpha e^{-\rho a} + \beta e^{-\rho b} = 0,$$

d'où l'on tire, en divisant par $\beta e^{-\rho b}$ et prenant les logarithmes,

$$\rho = \frac{\log\left(-\frac{\alpha}{\beta}\right)}{b-a} = \frac{\log\lambda + \omega\sqrt{-1}}{b-a}.$$

Dans le second on aura, en faisant $e^{-\rho a} = p$,

$$\alpha + \beta p^2 + \gamma p^3 + \ldots = 0,$$

d'où l'on tirera p, et par conséquent ρ.

Solutions de quelques problèmes concernant le mouvement des fluides.

20. Si un fluide homogène et non élastique se meut dans un vase de figure quelconque, et qu'on suppose son mouvement arrivé à un état permanent, nommant p et q les vitesses d'une particule quelconque du fluide parallèlement à deux axes fixes perpendiculaires entre eux, et t, x les coordonnées rectangles qui déterminent la position de cette particule par rapport aux mêmes axes, on aura les équations suivantes :

$$\frac{dp}{dt} + \frac{dq}{dx} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dp}{dx} - \frac{dq}{dt} = 0.$$

(*Voyez* l'Article XLII du Mémoire qui a pour titre : *Application de la méthode précédente à la solution, etc.*, page 440.)

De ces deux équations on tire celle-ci :

$$\frac{d^2p}{dt^2} = -\frac{d^2p}{dx^2},$$

dont l'intégrale est

$$p = \varphi(t + x\sqrt{-1}) + \psi(t - x\sqrt{-1}),$$

φ et ψ dénotant des fonctions quelconques.

Ensuite l'équation $\frac{dq}{dt} = \frac{dp}{dx}$ donnera

$$\frac{q}{\sqrt{-1}} = \varphi(t + x\sqrt{-1}) - \psi(t - x\sqrt{-1}).$$

Or, dans chaque courbe que les particules du fluide décrivent, on a $\frac{dt}{dx} = \frac{p}{q}$; donc l'équation générale de ces courbes sera

$$p\,dx - q\,dt = 0,$$

ou bien, en substituant les valeurs de p et q et intégrant ensuite,

$$\Phi(t + x\sqrt{-1}) - \Psi(t - x\sqrt{-1}) = \mathrm{M},$$

M étant une constante arbitraire, et Φ, Ψ dénotant des fonctions telles que $\frac{d\Phi(t)}{dt} = \varphi(t)$ et $\frac{d\Psi(t)}{dt} = \psi(t)$, et cette équation devra exprimer aussi la courbure des parois du vase.

Supposons que l'axe des t divise le vase en deux parties égales et semblables, il faudra que l'équation dont il s'agit ne contienne aucune puissance paire de x; or

$$\Phi(t + x\sqrt{-1}) = \Phi(t) + \varphi(t)x\sqrt{-1} - \varphi'(t)\frac{x^2}{2} - \varphi''(t)\frac{x^3}{2.3}\sqrt{-1}\ldots,$$

$$\Psi(t - x\sqrt{-1}) = \Psi(t) - \psi(t)x\sqrt{-1} - \psi'(t)\frac{x^2}{2} + \psi''(t)\frac{x^3}{2.3}\sqrt{-1}\ldots$$

$\left(\text{on suppose ici que } \varphi'(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt},\ \varphi''(t) = \frac{d\varphi'(t)}{dt}, \text{ et ainsi des autres}\right)$; donc l'équation sera

$$\Phi(t) - \Psi(t) + [\varphi(t) + \psi(t)]x\sqrt{-1} - [\varphi'(t) - \psi'(t)]\frac{x^2}{2}$$
$$- [\varphi''(t) + \psi''(t)]\frac{x^3}{2.3}\sqrt{-1}\ldots = \mathrm{M}.$$

Maintenant il est clair que les puissances impaires de x ne peuvent disparaître que dans ces deux cas : 1° lorsque

$$\Phi(t) - \Psi(t) = \mathrm{M},$$

ce qui donne, en différentiant deux fois,

$$\varphi'(t) - \psi'(t) = 0,\ldots;$$

2° lorsque

$$\varphi(t) + \psi(t) = 0,$$

ce qui donne aussi

$$\varphi''(t)+\psi''(t)=0,\ldots.$$

Dans le premier cas on aura

$$\Psi(t-x\sqrt{-1})=\Phi(t-x\sqrt{-1})-M,$$

et l'équation deviendra

$$\Phi(t+x\sqrt{-1})-\Phi(t-x\sqrt{-1})=0;$$

de plus on aura

$$p=\varphi(t+x\sqrt{-1})+\varphi(t-x\sqrt{-1})$$

et

$$\frac{q}{\sqrt{-1}}=\varphi(t+x\sqrt{-1})-\varphi(t-x\sqrt{-1}),$$

où il faut remarquer qu'en faisant x négative, la valeur de p demeure la même, et que celle de q change de signe; d'où il s'ensuit que dans ce cas-là les particules du fluide auront autour du diamètre du vase des mouvements semblables, et dans le même sens.

Dans le second cas on aura

$$\psi(t-x\sqrt{-1})=-\varphi(t-x\sqrt{-1}),$$

et intégrant,

$$\Psi(t-x\sqrt{-1})=N-\Phi(t-x\sqrt{-1}),$$

d'où

$$\Phi(t+x\sqrt{-1})+\Phi(t-x\sqrt{-1})=M+N,$$

et ensuite

$$p=\varphi(t+x\sqrt{-1})-\varphi(t-x\sqrt{-1}),$$

$$\frac{q}{\sqrt{-1}}=\varphi(t+x\sqrt{-1})+\varphi(t-x\sqrt{-1}).$$

Ici, en faisant x négative, p devient négative, et q demeure positive, ce qui fait voir que dans ce cas les particules du fluide décrivent de côté et d'autre du diamètre du vase des courbes égales et semblables, comme dans le cas précédent, mais avec des directions contraires.

Tout se réduit donc à trouver la fonction Φ par cette condition que

$$\Phi(t+x\sqrt{-1})\pm\Phi(t-x\sqrt{-1})=\mathrm{H},$$

x étant donnée en t par la figure des parois du vase, et H étant une quantité constante.

Soit $x=h+kt$, ce qui est le cas où les parois sont des lignes droites, et l'équation dont il s'agit sera réductible à la formule générale du n° 18.

On fera donc

$$\alpha=1,\quad \beta=\pm 1;\quad \gamma=0,\quad a=\sqrt{-1},\quad b=-\sqrt{-1},\quad \mathrm{T}=\mathrm{H},\quad y=\Phi(t),$$

et l'on aura :

1° $-\dfrac{\alpha}{\beta}=\mp 1$, et par conséquent

$$\lambda=1,\quad \cos\omega=\mp 1,\quad \sin\omega=0;$$

donc $\omega=\mu\pi$, π dénotant la demi-circonférence, et μ étant un nombre quelconque impair dans le premier cas, savoir dans le cas où l'on prend le signe supérieur, et un nombre quelconque pair dans l'autre cas; par conséquent on aura

$$r+1=\frac{\mu\pi\sqrt{-1}}{\log\dfrac{1+k\sqrt{-1}}{1-k\sqrt{-1}}};$$

or on sait que

$$\log\frac{1+\operatorname{tang}u\sqrt{-1}}{1-\operatorname{tang}u\sqrt{-1}}=2u\sqrt{-1};$$

donc, prenant u pour l'arc dont la tangente est k, on aura

$$r+1=\frac{\mu\pi}{2u}.$$

2° On aura, par le même numéro,

$$\mathrm{Q}=-(1+k\sqrt{-1})^{-r-1}\log(1+k\sqrt{-1})\mp(1-k\sqrt{-1})^{-r-1}\log(1-k\sqrt{-1});$$

or, à cause de $k = \dfrac{\sin u}{\cos u}$, on a

$$(1 \pm k\sqrt{-1})^{-r-1} = \cos^{r+1} u (\cos u \pm \sin u \sqrt{-1})^{-r-1}$$
$$= \cos^{r+1} u \left[\cos(r+1)u + \sin(r+1)u\sqrt{-1}\right],$$

et

$$\log(1 \pm k\sqrt{-1}) = \log \frac{\cos u \pm \sin u\sqrt{-1}}{\cos u} = \pm u\sqrt{-1} - \log\cos u;$$

donc on aura pour le premier cas, à cause de $(r+1)u = \dfrac{\mu\pi}{2}$,

$$Q = -2\cos^{r+1} u [u \sin(r+1)u - (\log\cos u)\cos(r+1)u] = \mp 2u\cos^{r+1} u,$$

le signe supérieur étant pour le cas où μ sera de la forme $4\nu + 1$, et le signe inférieur pour le cas où μ sera de la forme $4\nu + 3$; et pour l'autre cas

$$Q = -2\cos^{r+1} u [u\cos(r+1)u + (\log\cos u)\sin(r+1)u]\sqrt{-1}$$
$$= \mp 2u\cos^{r+1} u\sqrt{-1},$$

le signe supérieur étant pour le cas où μ est de la forme 4ν, et le signe inférieur pour le cas où μ est de la forme $4\nu + 2$.

3° On aura, à cause de $T = H$,

$$\int T(h+kt)^r\,dt = \frac{H}{(r+1)k}(h+kt)^{r+1} + \text{const.};$$

donc

$$\theta = \frac{H}{(r+1)k} + (h+kt)^{-r-1} \times \text{const.}$$

Donc on aura en général dans le premier cas

$$-k\frac{\theta}{Q} = \pm \frac{H}{2u(r+1)\cos^{r+1} u} + (h+kt)^{-r-1} \times \text{const.},$$

et dans le second cas

$$-k\frac{\theta}{Q} = \pm \frac{H}{2u(r+1)\cos^{r+1} u\sqrt{-1}} + (h+kt)^{-r-1} \times \text{const.}$$

Ainsi, substituant au lieu de $r+1$ sa valeur $\frac{\mu\pi}{2u}$, et mettant successivement au lieu de μ tous les nombres entiers positifs et négatifs, on aura tous les termes qui doivent entrer dans la valeur de y.

Il y a cependant un cas à excepter; c'est celui où $\mu = 0$, et par conséquent $r = -1$; dans ce cas on aura

$$\int \mathrm{T}(h+kt)^r dt = \frac{\mathrm{H}}{k}\log(h+kt) + \text{const.},$$

et par conséquent

$$-k\frac{\theta}{\mathrm{Q}} = \frac{\mathrm{H}}{2u\sqrt{-1}}\log(h+kt) + \text{const.}$$

Donc, faisant, pour abréger,

$$(\cos u)^{\frac{\pi}{2u}} = p, \quad (h+kt)^{\frac{\pi}{2u}} = z,$$

et prenant des constantes arbitraires A, B, C,..., $a, b, c,\ldots$, on aura pour l'équation

$$\Phi\left[t+(h+kt)\sqrt{-1}\right] + \Phi\left[t-(h+kt)\sqrt{-1}\right] = \mathrm{H},$$

$$\begin{aligned}\Phi(t) &= \mathrm{A}z + az^{-1} + \mathrm{B}z^3 + bz^{-3} + \ldots\\ &\quad + \frac{\mathrm{H}}{\pi}\left(p + \frac{1}{p} - \frac{1}{3}p^3 - \frac{1}{3p^3} + \frac{1}{5}p^5 + \frac{1}{5p^5} - \ldots\right),\end{aligned}$$

et pour l'équation

$$\Phi\left[t+(h+kt)\sqrt{-1}\right] - \Phi\left[t-(h+kt)\sqrt{-1}\right] = \mathrm{H},$$

$$\Phi(t) = \frac{\mathrm{H}}{2u\sqrt{-1}}\log(h+kt) + \mathrm{A}z^2 + az^{-2} + \mathrm{B}z^4 + bz^{-4} + \ldots + \text{const.}$$

Or

$$p - \frac{1}{3}p^3 + \frac{1}{5}p^5 - \ldots = \operatorname{arc\,tang} p,$$

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{3p^3} + \frac{1}{5p^5} - \ldots = \operatorname{arc\,cot} p;$$

donc la somme de ces deux séries sera égale à $\frac{\pi}{2}$; par conséquent on aura pour la première équation

$$\Phi(t) = Az + az^{-1} + Bz^3 + bz^{-3} + \ldots + \frac{H}{2}.$$

Connaissant ainsi la nature de la fonction Φ, on trouvera par la différentiation la fonction φ, et par conséquent les expressions des vitesses p et q, et l'on déterminera ensuite les constantes arbitraires A, a, B, $b, \ldots$, par les valeurs connues et données de p et q, lorsque $t = 0$.

21. Si $k = 0$, de manière que le fluide se meuve dans un canal rectiligne et dont la largeur soit partout égale à $2h$, on supposera k infiniment petite, et l'on aura d'abord $u = k$; faisant ensuite $k = \alpha h$, α étant une quantité évanouissante, on aura

$$(h + kt)^{\frac{\pi}{2u}} = h^{\frac{\pi}{2u}}(1 + \alpha t)^{\frac{\pi}{2\alpha h}} = h^{\frac{\pi}{2k}} e^{\frac{\pi t}{2h}}$$

et

$$\log(h + kt) = \log[h(1 + \alpha t)] = \log h + \alpha t;$$

par conséquent

$$\frac{H}{2u\sqrt{-1}} \log(h + kt) = \frac{H \log h}{2k\sqrt{-1}} + \frac{Ht}{2h\sqrt{-1}}.$$

Donc, si l'on fait $z = e^{\frac{\pi t}{2h}}$, on aura pour $\Phi(t)$ les mêmes expressions que dans le numéro précédent, excepté qu'au lieu de $\frac{H}{2u\sqrt{-1}} \log(h + kt)$, il faudra mettre $\frac{Ht}{2h\sqrt{-1}}$.

22. Si l'on ne voulait pas que le vase eût deux parties égales et semblables, alors nommant x les ordonnées qui répondent à l'une des parois, et x' celles qui répondent à l'autre, on aura les deux équations

$$\Phi(t + x\sqrt{-1}) - \Psi(t - x\sqrt{-1}) = M,$$
$$\Phi(t + x'\sqrt{-1}) - \Psi(t - x'\sqrt{-1}) = N,$$

par le moyen desquelles on déterminera les fonctions Φ et Ψ.

Si les deux parois sont des lignes droites, de sorte que

$$x = h + kt \quad \text{et} \quad x' = h' + k't,$$

on en viendra à bout de la manière suivante. On supposera $h' = h + \mathrm{H}$, $k' = k + \mathrm{K}$, et la seconde équation deviendra, en faisant $\mathrm{H} + \mathrm{K}t = \mathrm{X}$,

$$\Phi(t + x\sqrt{-1} + \mathrm{X}\sqrt{-1}) - \Psi(t - x\sqrt{-1} - \mathrm{X}\sqrt{-1}) = \mathrm{N}.$$

Soient maintenant

$$\Phi(t + x\sqrt{-1}) = y \quad \text{et} \quad \Psi(t - x\sqrt{-1}) = y';$$

on aura ces deux équations :

$$\begin{aligned} &y - y' = \mathrm{M},\\ &y + \frac{dy}{dt}\mathrm{X}\sqrt{-1} + \frac{d^2y}{dt^2}\frac{(\mathrm{X}\sqrt{-1})^2}{2} + \frac{d^3y}{dt^3}\frac{(\mathrm{X}\sqrt{-1})^3}{2.3} + \ldots\\ &-y' + \frac{dy'}{dt}\mathrm{X}\sqrt{-1} - \frac{d^2y'}{dt^2}\frac{(\mathrm{X}\sqrt{-1})^2}{2} + \frac{d^3y'}{dt^3}\frac{(\mathrm{X}\sqrt{-1})^3}{2.3} - \ldots = \mathrm{N}. \end{aligned}$$

La première donne

$$y' = y - \mathrm{M}, \quad \frac{dy'}{dt} = \frac{dy}{dt}, \quad \frac{d^2y'}{dt^2} = \frac{d^2y}{dt^2}, \ldots;$$

donc la seconde deviendra

$$2\frac{dy}{dt}\mathrm{X}\sqrt{-1} + 2\frac{d^3y}{dt^3}\frac{(\mathrm{X}\sqrt{-1})^3}{2.3} + \ldots + \mathrm{M} = \mathrm{N},$$

ou bien

$$\begin{aligned} 2\sqrt{-1}(\mathrm{H} + \mathrm{K}t)\frac{dy}{dt} &+ 2\frac{(\sqrt{-1})^3}{2.3}(\mathrm{H} + \mathrm{K}t)^3\frac{d^3y}{dt^3}\\ &+ 2\frac{(\sqrt{-1})^5}{2.3.4.5}(\mathrm{H} + \mathrm{K}t)^5\frac{d^5y}{dt^5} - \ldots = \mathrm{N} - \mathrm{M}, \end{aligned}$$

équation qui est dans le cas de la formule (S) du n° 18, et l'on aura

$$\alpha = 1, \quad \beta = -1, \quad \gamma = 0; \quad a = \sqrt{-1}, \quad b = -\sqrt{-1}; \quad h = \mathrm{H}, \quad k = \mathrm{K};$$

donc, etc.

On trouvera ainsi la valeur de y en t, après quoi on aura celle de y' par l'équation $y' = y - \mathrm{M}$.

23. Les équations

$$p = \varphi(t + x\sqrt{-1}) + \varphi(t - x\sqrt{-1}),$$
$$\frac{q}{\sqrt{-1}} = \varphi(t + x\sqrt{-1}) - \varphi(t - x\sqrt{-1}),$$

trouvées dans le n° **20**, donnent

$$p \pm \frac{q}{\sqrt{-1}} = 2\varphi(t \pm x\sqrt{-1});$$

ou bien, en faisant $\mathrm{P} = \frac{p}{2}$, $\mathrm{Q} = -\frac{q}{2}$,

$$\varphi(t \pm x\sqrt{-1}) = \mathrm{P} \pm \mathrm{Q}\sqrt{-1};$$

ainsi, pour trouver les vitesses p et q, il ne s'agit que de réduire l'expression $\varphi(t + x\sqrt{-1})$ à la forme $\mathrm{P} + \mathrm{Q}\sqrt{-1}$, P et Q étant des quantités réelles.

Lorsque la fonction φ est donnée algébriquement, on peut trouver les valeurs de P et Q par les méthodes connues; mais, si la fonction φ est inconnue, alors il faut avoir recours aux séries, lesquelles donnent

$$\mathrm{P} = \varphi(t) - \frac{x^2}{2}\varphi''(t) + \frac{x^4}{2.3.4}\varphi^{\mathrm{IV}}(t) - \ldots,$$
$$\mathrm{Q} = x\varphi'(t) - \frac{x^3}{2.3}\varphi'''(t) + \frac{x^5}{2.3.4.5}\varphi^{\mathrm{V}}(t) - \ldots.$$

Or je remarque : 1° que ces deux séries deviennent divergentes lorsque x est fort grande; 2° qu'elles demandent qu'on connaisse les différences de la fonction $\varphi(t)$, de sorte qu'elles ne peuvent être d'usage dans la pratique que lorsque la fonction φ est connue analytiquement, et nullement lorsque cette fonction n'est donnée que mécaniquement, c'est-à-dire par le moyen d'une courbe; ainsi je crois qu'il ne sera pas inutile de faire voir comment on peut transformer ces mêmes séries en d'autres qui dépendent uniquement de la fonction φ.

Pour cet effet, je prends la quantité

$$\frac{\varphi(t+x\sqrt{-1})+\varphi(t-x\sqrt{-1})}{2},$$

laquelle étant réduite en série devient

$$\varphi(t)-\frac{x^2}{2}\varphi''(t)+\frac{x^4}{2.3.4}\varphi^{\text{iv}}(t)-\frac{x^6}{2.3.4.5.6}\varphi^{\text{vi}}(t)+\ldots.$$

Je prends de plus la quantité

$$\frac{\varphi(t+x)+\varphi(t-x)}{2},$$

laquelle se change de même en celle-ci :

$$\varphi(t)+\frac{x^2}{2}\varphi''(t)+\frac{x^4}{2.3.4}\varphi^{\text{iv}}(t)+\frac{x^6}{2.3.4.5.6}\varphi^{\text{vi}}(t)+\ldots.$$

J'appelle la première de ces deux quantités y, et la seconde y; ensuite je suppose que Y, Y', Y'', Y''',... soient les valeurs de y, lorsque, au lieu de x, on y met o, x, $2x$, $3x$,..., et prenant des coefficients arbitraires α, α', α'', α''',..., j'aurai

$$\begin{aligned}
&y-\alpha\mathrm{Y}-\alpha'\mathrm{Y}'-\alpha''\mathrm{Y}''-\alpha'''\mathrm{Y}'''-\ldots\\
&\quad=(1-\alpha-\alpha'-\alpha''-\alpha'''-\ldots)\varphi(t)\\
&\quad-(1+\alpha'+2^2\alpha''+3^2\alpha'''+\ldots)\frac{x^2}{2}\varphi''(t)\\
&\quad+(1-\alpha'-2^4\alpha''-3^4\alpha'''-\ldots)\frac{x^4}{2.3.4}\varphi^{\text{iv}}(t)\\
&\quad-(1+\alpha'+2^6\alpha''+3^6\alpha'''+\ldots)\frac{x^6}{2.3.4.5.6}\varphi^{\text{iv}}(t)\\
&\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Soient

$$(\mathrm{T})\qquad\left\{\begin{aligned}
&1-\alpha-\alpha'-\alpha''-\alpha'''-\ldots=0,\\
&1+\alpha'+2^2\alpha''+3^2\alpha'''+\ldots=0,\\
&1-\alpha'-2^4\alpha''-3^4\alpha'''-\ldots=0,\\
&1+\alpha'+2^6\alpha''+3^6\alpha'''+\ldots=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}\right.$$

on aura

$$y = \alpha Y + \alpha' Y' + \alpha'' Y'' + \alpha''' Y''' + \ldots$$

Tout se réduira donc à tirer les valeurs de α', α'', α''',... des équations (T). Pour y parvenir, je multiplie la seconde par β', la troisième par β'', la quatrième par β''',...; β', β'', β''',... étant des coefficients indéterminés; après quoi je les ajoute toutes ensemble, ce qui me donne

$$\begin{aligned}
&1 + \beta' + \beta'' + \beta''' + \ldots - \alpha \\
&- (1 - \beta' + \beta'' - \beta''' + \ldots)\alpha' \\
&- (1 - 2^2\beta' + 2^4\beta'' - 2^6\beta''' + \ldots)\alpha'' \\
&- (1 - 3^2\beta' + 3^4\beta'' - 3^6\beta''' + \ldots)\alpha''' \\
&- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0.
\end{aligned}$$

A présent, pour avoir la valeur d'une α quelconque, comme $\alpha^{(m)}$, je fais égal à zéro chacun des coefficients des autres α; de cette manière j'ai d'abord

$$\alpha^{(m)} = \frac{1 + \beta' + \beta'' + \beta''' + \ldots - \alpha}{1 - m^2\beta' + m^4\beta'' - m^6\beta''' + \ldots},$$

et ensuite les équations de condition

$$\begin{aligned}
&1 - \beta' + \beta'' - \beta''' + \ldots = 0, \\
&1 - 2^2\beta' + 2^4\beta'' - 2^6\beta''' + \ldots = 0, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

c'est-à-dire l'équation

$$1 - \beta' u^2 + \beta'' u^4 - \beta''' u^6 + \ldots = 0,$$

laquelle doit avoir lieu en mettant au lieu de u tous les nombres entiers 1, 2, 3,... à l'infini, excepté m. Donc, si l'on multiplie cette équation par $1 - \frac{u^2}{m^2}$, et qu'on suppose $u = \frac{z}{\pi}$, on aura

$$1 - \frac{\beta' + \frac{1}{m^2}}{\pi^2} z^2 + \frac{\beta'' + \frac{\beta'}{m^2}}{\pi^4} z^4 - \frac{\beta''' + \frac{\beta''}{m^2}}{\pi^6} z^6 + \ldots = 0,$$

équation dont les racines seront π^2, $4\pi^2$, $9\pi^2$, $16\pi^2$,... à l'infini; donc, comparant cette équation avec l'équation

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{2.3} + \frac{z^4}{2.3.4.5} - \frac{z^6}{2.3.4.5.6.7} + \ldots = 0,$$

dont les racines sont aussi, comme on sait, π^2, $4\pi^2$, $9\pi^2$, $16\pi^2$,..., on aura

$$\beta' + \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{2.3},$$
$$\beta'' + \frac{\beta'}{m^2} = \frac{\pi^4}{2.3.4.5},$$
$$\beta''' + \frac{\beta''}{m^2} = \frac{\pi^6}{2.3.4.5.6.7},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

par où l'on connaîtra les valeurs des quantités β; mais, pour notre objet, il suffit de remarquer que

$$1 - \beta' u^2 + \beta'' u^4 - \beta''' u^6 + \ldots = \frac{\sin \pi u}{\pi u \left(1 - \frac{u^2}{m^2}\right)}.$$

Car, faisant: 1° $u^2 = -1$, savoir $u = \sqrt{-1}$, on aura

$$1 + \beta' + \beta'' + \beta''' + \ldots = \frac{\sin(\pi\sqrt{-1})}{\pi\sqrt{-1}\left(1 + \frac{1}{m^2}\right)} = \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{2\pi\left(1 + \frac{1}{m^2}\right)};$$

2° si l'on suppose $u = m$, on trouvera, en différentiant le numérateur et le dénominateur, à cause que l'un et l'autre s'évanouissent lorsque $u = m$,

$$1 - \beta' m^2 + \beta'' m^4 - \beta''' m^6 + \ldots = -\frac{\cos m\pi}{2} = \pm\frac{1}{2},$$

le signe supérieur étant pour le cas où m est impair, et le signe inférieur pour le cas où m est pair; donc on aura

$$\alpha^{(m)} = \pm \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{\pi\left(1 + \frac{1}{m^2}\right)} \mp 2\alpha,$$

ou bien, en faisant $\alpha = a\dfrac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2\pi}$,

$$\alpha^{(m)} = \pm\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{\pi}\,\frac{m^2(1-a)-a}{m^2+1};$$

donc enfin

$$y = \frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{\pi}\left[\frac{a}{2}Y + \frac{1-a-a}{1+1}Y' - \frac{4(1-a)-a}{4+1}Y'' + \frac{9(1-a)-a}{9+1}Y''' - \ldots\right].$$

Or, puisque la quantité a est arbitraire, on la déterminera de manière que la série devienne la plus convergente qu'il est possible; c'est pourquoi on fera $1-a=0$, savoir $a=1$; ce qui donnera

$$y = \frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{\pi}\left(\frac{Y}{2} - \frac{Y'}{1+1} + \frac{Y''}{4+1} - \frac{Y'''}{9+1} + \ldots\right),$$

et par conséquent

$$\begin{aligned}\varphi(t+x\sqrt{-1}) &+ \varphi(t-x\sqrt{-1})\\ = \frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{\pi}&\left[\frac{1}{2}\varphi(t) - \frac{\varphi(t+x)+\varphi(t-x)}{1+1} + \frac{\varphi(t+2x)+\varphi(t-2x)}{4+1} - \frac{\varphi(t+3x)+\varphi(t-3x)}{9+1} + \ldots\right].\end{aligned}$$

Qu'on différentie cette équation en faisant varier x, et qu'on l'intègre ensuite en faisant varier t, on aura

$$\begin{aligned}[\varphi(t+x\sqrt{-1}) &- \varphi(t-x\sqrt{-1})]\sqrt{-1}\\ = \frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{\pi}&\left[\frac{\varphi(t+x)-\varphi(t-x)}{1+1} - 2\frac{\varphi(t+2x)-\varphi(t-2x)}{4+1} + 3\frac{\varphi(t+3x)-\varphi(t-3x)}{9+1} - \ldots\right].\end{aligned}$$

Donc, si l'on fait

$$P = \frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2\pi}\left[\frac{1}{2}\varphi(t) - \frac{\varphi(t+x)+\varphi(t-x)}{1+1} + \frac{\varphi(t+2x)+\varphi(t-2x)}{4+1} - \frac{\varphi(t+3x)+\varphi(t-3x)}{9+1} + \ldots\right],$$

et

$$Q = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi}\left[\frac{\varphi(t+x)-\varphi(t-x)}{1+1} - 2\,\frac{\varphi(t+2x)-\varphi(t-2x)}{4+1} + 3\,\frac{\varphi(t+3x)-\varphi(t-3x)}{9+1} - \ldots\right],$$

on aura

$$\varphi(t \pm x\sqrt{-1}) = P + Q\sqrt{-1};$$

et les quantités P et Q seront données, comme on voit, par des suites convergentes dont chaque terme pourra se déterminer mécaniquement sans qu'il soit besoin de connaître la nature de la fonction φ.

24. Il est clair que l'intégrale de l'équation (nº 20)

$$\frac{d^2p}{dt^2} = -\frac{d^2p}{dx^2}$$

est aussi

$$p = \varphi(x + t\sqrt{-1}) + \psi(x - t\sqrt{-1}),$$

ou, ce qui revient au même,

$$p = \frac{\varphi(x+t\sqrt{-1}) + \varphi(x-t\sqrt{-1})}{2} - \frac{\psi(x+t\sqrt{-1}) - \psi(x-t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}},$$

d'où l'on tire ensuite

$$q = \frac{\varphi(x+t\sqrt{-1}) - \varphi(x-t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}} + \frac{\psi(x+t\sqrt{-1}) + \psi(x-t\sqrt{-1})}{2}.$$

Imaginons que le vase soit formé de deux parois droites et parallèles, en sorte qu'il ait partout la même largeur a; en prenant une de ces parois pour l'axe des t, il faudra que la vitesse q soit nulle lorsque $x = 0$ et lorsque $x = a$, quel que soit t. Or, en faisant $t = 0$, on a $p = \varphi(x)$ et $q = \psi(x)$; ainsi, en décrivant sur la portion de l'axe des x comprise entre les parois du vase deux courbes qui soient les échelles des vitesses p et q, que doivent avoir les particules du fluide dans cette section du vase, les appliquées de ces courbes répondantes à une abscisse quelconque x représenteront les fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$.

Présentement on trouvera, par le numéro précédent,

$$p = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi}\left[\frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{\varphi(x+t)+\varphi(x-t)}{1+1} + \frac{\varphi(x+2t)+\varphi(x-2t)}{4+1} - \ldots\right]$$
$$- \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi}\left[\frac{\psi(x+t)-\psi(x-t)}{4+1} - 2\frac{\psi(x+2t)-\psi(x-2t)}{4+1} + \ldots\right],$$

$$q = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi}\left[\frac{\varphi(x+t)-\varphi(x-t)}{1+1} - 2\frac{\varphi(x+2t)-\varphi(x-2t)}{4+1} + \ldots\right]$$
$$+ \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi}\left[\frac{1}{2}\psi(x) - \frac{\psi(x+t)+\psi(x-t)}{1+1} + \frac{\psi(x+2t)+\psi(x-2t)}{4+1} - \ldots\right].$$

Donc, puisque q doit être égale à zéro, lorsque $x = 0$ et $x = a$, il faudra que l'on ait

$$\frac{\varphi(t)-\varphi(-t)}{1+1} - 2\frac{\varphi(2t)-\varphi(-2t)}{4+1} + \ldots$$
$$+ \frac{1}{2}\psi(0) - \frac{\psi(t)+\psi(-t)}{1+1} + \frac{\psi(2t)+\psi(-2t)}{4+1} - \ldots = 0,$$

$$\frac{\varphi(a+t)-\varphi(a-t)}{1+1} - 2\frac{\varphi(a+2t)-\varphi(a-2t)}{4+1} + \ldots$$
$$+ \frac{1}{2}\psi(a) - \frac{\psi(a+t)+\psi(a-t)}{1+1} + \frac{\psi(a+2t)+\psi(a-2t)}{4+1} - \ldots = 0,$$

ou bien, afin que les fonctions φ et ψ ne dépendent point l'une de l'autre,

$$\frac{\varphi(t)-\varphi(-t)}{1+1} - 2\frac{\varphi(2t)-\varphi(-2t)}{4+1} + \ldots = 0,$$
$$\frac{\varphi(a+t)-\varphi(a-t)}{1+1} - 2\frac{\varphi(a+2t)-\varphi(a-2t)}{4+1} + \ldots = 0,$$
$$\frac{1}{2}\psi(0) - \frac{\psi(t)+\psi(-t)}{1+1} + \frac{\psi(2t)+\psi(-2t)}{4+1} - \ldots = 0,$$
$$\frac{1}{2}\psi(a) - \frac{\psi(a+t)+\psi(a-t)}{1+1} + \frac{\psi(a+2t)+\psi(a-2t)}{4+1} + \ldots = 0.$$

Pour satisfaire à ces quatre conditions, on supposera que les fonctions φ et ψ soient telles, que l'on ait en général, quelle que soit la valeur de u,

$$\varphi u = \varphi(-u), \quad \varphi(a+u) = \varphi(a-u),$$
$$\psi(u) = -\psi(-u), \quad \psi(a+u) = -\psi(a-u),$$

ce qui servira à déterminer la continuation des deux échelles données pour les abscisses négatives et pour les abscisses plus grandes que a; laquelle devra par conséquent être telle, que les ordonnées également distantes de part et d'autre des deux extrémités de l'axe a soient égales et de même signe dans la courbe des vitesses p, et de signes différents dans la courbe des vitesses q; d'où il s'ensuit que la première de ces courbes sera composée d'une infinité de branches égales et semblables, toutes du même côté de l'axe, et disposées alternativement en sens contraire, et que l'autre aura de même une infinité de branches égales et semblables, mais situées alternativement au-dessus et au-dessous de l'axe.

Ayant donc décrit ces deux courbes, on aura, par les séries données ci-dessus, les valeurs approchées des vitesses p et q de chaque particule du fluide; d'où l'on voit que le mouvement d'un fluide qui se meut dans un canal droit est déterminé par le mouvement que ce fluide a dans une section quelconque de ce même canal.

De plus il est clair, par la nature des courbes qui représentent les fonctions φ et ψ, qu'en augmentant ou en diminuant la quantité t de $2a$, ou de $4a$, ou de $6a,\ldots$, les valeurs de p et de q demeurent les mêmes; d'où il s'ensuit que si l'on imagine le fluide divisé en portions égales par des droites perpendiculaires aux parois du canal, et placées à la distance $2a$ les unes des autres, chacune de ces portions du fluide aura nécessairement le même mouvement.

Si le fluide était terminé par une ligne droite perpendiculaire aux parois du vase, alors prenant cette même ligne pour l'axe des x, il faudrait que $p = 0$ lorsque $t = 0$; donc $\varphi(x) = 0$, et par conséquent

$$p = -\frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi}\left[\frac{\psi(x+t) - \psi(x-t)}{1+1} - 2\,\frac{\psi(x+2t) - \psi(x-2t)}{4+1} + \ldots\right]$$

$$q = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi}\left[\frac{1}{2}\psi(x) - \frac{\psi(x+t) - \psi(x-t)}{1+1} + \frac{\psi(x+2t) + \psi(x-2t)}{4+1} - \ldots\right].$$

Or, puisque la valeur de p est nulle lorsque $t = 0$, elle le sera aussi lorsque t est égal à $2a$, $4a,\ldots$; ainsi le fluide aura dans ce cas le même mouvement que s'il était renfermé dans un vase de figure rectangulaire dont la longueur fût double, quadruple, etc., de la largeur.

On pourra encore trouver le mouvement du fluide lorsque la longueur du vase sera égale à sa largeur, et en général toutes les fois que les deux dimensions du vase seront commensurables entre elles; mais il faudra pour lors que les valeurs données de q forment une courbe qui ait un ou plusieurs nœuds, de sorte que la fonction $\psi(x)$ demeure la même en augmentant ou en diminuant x d'une quantité égale à la longueur du vase. Dans tous les autres cas, c'est-à-dire lorsque les dimensions du vase seront incommensurables, on ne pourra déterminer le mouvement du fluide par la théorie précédente; et comme cette théorie est fondée sur la supposition que le mouvement du fluide soit dans un état constant, en sorte que les particules du fluide décrivent des courbes invariables, ce sera une marque que l'hypothèse dont nous parlons n'aura point lieu; sur quoi *voyez* les Articles XLII et XLIII de la Dissertation citée ci-dessus.

Solution d'une question relative à la théorie des cordes vibrantes.

25. La question que je vais examiner ici consiste à savoir si toutes les courbes qui rendent la solution du problème des cordes vibrantes possible, suivant la théorie de M. d'Alembert, sont renfermées ou non dans l'équation

$$y = \alpha \sin \frac{\pi x}{a} + \beta \sin \frac{2\pi x}{a} + \gamma \sin \frac{3\pi x}{a} + \ldots;$$

question que ce grand Géomètre a vivement agitée avec MM. Bernoulli et Euler dans le premier Mémoire de ses *Opuscules mathématiques*.

Pour pouvoir résoudre cette question d'une manière directe et convaincante, je prends l'équation générale de la courbe que forme la corde vibrante, laquelle est, comme on sait,

$$y = \frac{\varphi(x+t) + \varphi(x-t)}{2},$$

et j'examine quelle doit être la forme de la fonction φ pour que l'on ait en général, quel que soit t,

$$\varphi(t)+\varphi(-t)=0, \quad \text{et} \quad \varphi(a+t)+\varphi(a-t)=0,$$

conditions nécessaires pour que les deux bouts de la corde soient fixes; or, puisque $\varphi(t)=-\varphi(-t)$, on aura

$$\varphi(a-t)=-\varphi[-(a-t)]=-\varphi(t-a);$$

donc la seconde des deux conditions se réduira à celle-ci :

$$\varphi(t+a)-\varphi(t-a)=0.$$

Cette équation étant comparée avec la formule du n° 19, on aura

$$\alpha=1, \quad \beta=-1, \quad \gamma=0, \quad b=-a, \quad T=0;$$

donc

$$P=e^{-\rho a}-e^{\rho a};$$

et faisant $\rho=-r\sqrt{-1}$,

$$P=2\sin ra\sqrt{-1};$$

donc l'équation $P=0$ donnera $ra=\mu\pi$, μ étant un nombre entier positif ou négatif; par conséquent on aura

$$r=\frac{\mu\pi}{a} \quad \text{et} \quad \rho=-\frac{\mu\pi}{a}\sqrt{-1};$$

or, T étant égal à zéro, on aura

$$\int Te^{\rho t}\,dt=\text{const.};$$

donc

$$\frac{\theta}{q}=e^{\frac{\mu\pi t}{a}\sqrt{-1}}\times\text{const.};$$

donc, donnant successivement à μ toutes ses valeurs $1, -1, +2, -2, \ldots$, et prenant des constantes arbitraires A, B, C,..., A', B', C',..., on aura

$$\varphi(t)=Ae^{\frac{\pi t}{a}\sqrt{-1}}+A'e^{-\frac{\pi t}{a}\sqrt{-1}}+Be^{\frac{2\pi t}{a}\sqrt{-1}}+B'e^{-\frac{2\pi t}{a}\sqrt{-1}}+\ldots,$$

équation qui revient à cette forme :

$$\varphi(t)=\alpha\sin\frac{\pi t}{a}+\alpha'\cos\frac{\pi t}{a}+\beta\sin\frac{2\pi t}{a}+\beta'\cos\frac{2\pi t}{a}+\ldots,$$

$\alpha, \alpha', \beta, \beta', \ldots$, étant pareillement des constantes arbitraires.

65.

Or, par la première condition il faut que

$$\varphi(t)+\varphi(-t)=0,$$

donc

$$\alpha'\cos\frac{\pi t}{a}+\beta'\cos\frac{2\pi t}{a}+\ldots=0,$$

donc

$$\alpha'=0,\quad \beta'=0,\ldots,$$

donc

$$\varphi(t)=\alpha\sin\frac{\pi t}{a}+\beta\sin\frac{2\pi t}{a}+\gamma\sin\frac{3\pi t}{a}+\ldots;$$

par conséquent l'équation de la figure initiale de la corde, lorsqu'elle en a une, ne peut être que de la forme

$$y=\alpha\sin\frac{\pi x}{a}+\beta\sin\frac{2\pi x}{a}+\gamma\sin\frac{3\pi x}{a}+\ldots;$$

Sur l'intégration des équations

$$\begin{aligned}
&\mathrm{L}\,y+\mathrm{M}\frac{dy}{dt}+\mathrm{N}\frac{d^2y}{dt^2}+\ldots+ly'+m\frac{dy'}{dt}+n\frac{d^2y'}{dt^2}+\ldots\\
&\qquad\qquad+\lambda\,y''+\mu\frac{dy''}{dt}+\nu\frac{d^2y''}{dt^2}+\ldots=\mathrm{T},\\
&\mathrm{L}'y+\mathrm{M}'\frac{dy}{dt}+\mathrm{N}'\frac{d^2y}{dt^2}+\ldots+l'y'+m'\frac{dy'}{dt}+n'\frac{d^2y'}{dt^2}+\ldots\\
&\qquad\qquad+\lambda'y''+\mu'\frac{dy''}{dt}+\nu'\frac{d^2y''}{dt^2}+\ldots=\mathrm{T}',\\
&\mathrm{L}''y+\mathrm{M}''\frac{dy}{dt}+\mathrm{N}''\frac{d^2y}{dt^2}+\ldots+l''y'+m''\frac{dy'}{dt}+n''\frac{d^2y'}{dt^2}+\ldots\\
&\qquad\qquad+\lambda''y''+\mu''\frac{dy''}{dt}+\nu''\frac{d^2y''}{dt^2}+\ldots=\mathrm{T}'',\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

dans lesquelles L, M, N,..., l, m, n,..., *sont des fonctions quelconques de* t.

26. En suivant les mêmes principes que dans le n° 1, on multipliera la première de ces équations par $z\,dt$, la seconde par $z'\,dt$, la troisième par $z''dt$, et ainsi de suite, $z, z', z'', \ldots$ étant de nouvelles indéterminées, et, après les avoir ajoutées ensemble, on en prendra l'intégrale en faisant disparaître, par des intégrations par parties, les différences des variables $y, y', y'', \ldots$, de dessous le signe $\int$; de cette manière on aura une équation de la forme suivante :

$$\mathrm{U} + \int (\mathrm{V}y + \mathrm{V}'y' + \mathrm{V}''y'' + \ldots)\,dt = \int (\mathrm{T}z + \mathrm{T}'z' + \mathrm{T}''z'' + \ldots)\,dt;$$

dans laquelle

$$\begin{aligned}
\mathrm{U} = y &\left(\mathrm{M}z - \frac{d.\mathrm{N}z}{dt} + \ldots + \mathrm{M}'z' - \frac{d.\mathrm{N}'z'}{dt^2} + \ldots + \mathrm{M}''z'' - \frac{d.\mathrm{N}''z''}{dt} + \ldots\right)\\
&\quad + \frac{dy}{dt}(\mathrm{N}z - \ldots + \mathrm{N}'z' - \ldots + \mathrm{N}''z'' - \ldots) + \ldots\\
+ y' &\left(mz - \frac{d.nz}{dt} + \ldots + m'z' - \frac{d.n'z'}{dt^2} + \ldots + m''z'' - \frac{d.n''z''}{dt} + \ldots\right)\\
&\quad + \frac{dy'}{dt}(nz - \ldots + n'z' - \ldots + n''z'' - \ldots) + \ldots\\
+ y'' &\left(\mu z - \frac{d.\nu z}{dt} + \ldots + \mu'z' - \frac{d.\nu'z'}{dt^2} + \ldots + \mu''z'' - \frac{d.\nu''z''}{dt} + \ldots\right)\\
&\quad + \frac{dy''}{dt}(\nu z - \ldots + \nu'z' - \ldots + \nu''z'' - \ldots) + \ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{V} = \mathrm{L}z &- \frac{d.\mathrm{M}z}{dt} + \frac{d^2.\mathrm{N}z}{dt^2} - \ldots\\
+ \mathrm{L}'z' &- \frac{d.\mathrm{M}'z'}{dt} + \frac{d^2.\mathrm{N}'z'}{dt^2} - \ldots\\
+ \mathrm{L}''z'' &- \frac{d.\mathrm{M}''z''}{dt} + \frac{d^2.\mathrm{N}''z''}{dt^2} - \ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{V}' = lz &- \frac{d.mz}{dt} + \frac{d^2.nz}{dt^2} - \ldots\\
+ l'z' &- \frac{d.m'z'}{dt} + \frac{d^2.n'z'}{dt^2} - \ldots\\
+ l''z'' &- \frac{d.m''z''}{dt} + \frac{d^2.n''z''}{dt^2} - \ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V'' = \lambda z - \frac{d.\mu z}{dt} + \frac{d^2.\nu z}{dt^2} - \ldots\\ + \lambda' z' - \frac{d.\mu' z'}{dt} + \frac{d^2.\nu' z'}{dt^2} - \ldots\\ + \lambda'' z'' - \frac{d.\mu'' z''}{dt} + \frac{d^2.\nu'' z''}{dt^2} - \ldots\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Supposant donc

$$V = 0, \quad V' = 0, \quad V'' = 0, \ldots,$$

on aura

$$U = \int (Tz + T'z' + T''z'' + \ldots)\,dt,$$

équation dans laquelle les plus hautes différences des variables y, y', y'',... se trouveront moins élevées d'une unité que dans les équations différentielles proposées.

On aura donc autant de pareilles intégrales qu'on trouvera de valeurs particulières de chacune des quantités z, z', z'',... par le moyen des équations $V = 0$, $V' = 0$, $V'' = 0$,.... Or, soit m la somme des exposants des plus hautes différences de y, y', y'',... dans les équations proposées, il est clair que la quantité U contiendra autant d'inconnues, comme y, y', y'',..., $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dy'}{dt}$, $\frac{dy''}{dt}$,..., qu'il y a d'unités dans le nombre m; donc, si l'on a aussi m valeurs particulières de z, de z', de z'',..., on trouvera facilement les valeurs générales et complètes de y, y', y'',....

Soient maintenant Y, Y', Y'',... les premiers membres des équations proposées, on aura

$$(\mathrm{U})\quad \int (Yz + Y'z' + Y''z'' + \ldots)\,dt = U + \int (Vy + V'y' + V''y'' + \ldots)\,dt;$$

donc, faisant $V = 0$, $V' = 0$, $V'' = 0$,..., on aura l'équation

$$U - \int (Yz + Y'z' + Y''z'' + \ldots)\,dt = \text{const.},$$

laquelle aura nécessairement toutes les valeurs de z, z', z'',... communes avec les équations $V=0$, $V'=0$, $V''=0$,.... Or l'équation (U) est identique, et par conséquent ne dépend point des valeurs de $y, y', y'',\ldots$; donc on peut supposer ces valeurs telles que

$$Y=0,\quad Y'=0,\quad Y''=0,\ldots,$$

et l'on aura par ce moyen l'équation $U=\text{const.}$, dans laquelle on regardera les quantités $y, y', y'',\ldots, \frac{dy}{dt}, \frac{dy'}{dt}, \frac{dy''}{dt},\ldots$ comme données, et les quantités $z, z', z'',\ldots, \frac{dz}{dt}, \frac{dz'}{dt}, \frac{dz''}{dt},\ldots$ comme indéterminées; or il est aisé de voir que ces indéterminées seront aussi au nombre de m; si donc on a m valeurs particulières de chacune des quantités $y, y', y'',\ldots$ dans les équations $Y=0$, $Y'=0$, $Y''=0,\ldots$, on aura aussi, par la substitution successive de ces valeurs dans l'équation $U=\text{const.}$, m équations particulières, d'où l'on tirera les valeurs de $z, z', z'',\ldots$, lesquelles contiendront nécessairement m constantes arbitraires; de sorte qu'en faisant successivement toutes ces constantes, hors une, égales à zéro, on aura m valeurs particulières de z, de z', de z'',.... Donc, etc.

27. De là résulte ce théorème :

Les équations proposées seront intégrables algébriquement, si l'on peut trouver, dans le cas de $T=0$, $T'=0$, $T''=0,\ldots$, *autant de valeurs particulières de chacune des quantités* $y, y', y'',\ldots$ *qu'il y a d'unités dans la somme des exposants des plus hautes différences de ces variables.*

Au reste, ce théorème n'est qu'une suite de celui du n° 6. Car il est clair que les équations proposées peuvent toujours réduire à ne contenir chacune qu'une seule variable, et il est facile de s'assurer par le calcul que les réduites seront nécessairement de l'ordre m; donc, etc.

28. Les équations $V=0$, $V'=0$, $V''=0,\ldots$ sont intégrables en général lorsque

$$L=A(h+kt)^p,\quad M=B(h+kt)^{p+1},\quad N=C(h+kt)^{p+2},\ldots,$$
$$L'=A'(h+kt)^p,\quad M'=B'(h+kt)^{p+1},\ldots,$$

et de même

$$l = a(h+kt)^q, \quad m = b(h+kt)^{q+1}, \quad n = c(h+kt)^{q+2}, \ldots,$$
$$l' = a'(h+kt)^q, \quad m' = b'(h+kt)^{q+1}, \ldots,$$

et ainsi des autres.

On fera dans ce cas

$$z = \mathrm{R}(h+kt)^r, \quad z' = \mathrm{R}'(h+kt)^r, \quad z'' = \mathrm{R}''(h+kt)^r, \ldots,$$

R, R′, R″,... étant ainsi que r des constantes indéterminées; on substituera ces valeurs dans les équations dont il s'agit, et divisant ensuite la première par $(h+kt)^{p+r}$, la seconde par $(h+kt)^{q+r}$,..., on aura des équations sans t, qui donneront les valeurs de r, R, R′, R″,....

29. Si les coefficients L, M, N,..., L′, M′, N′,... étaient constants, on ferait $k = 0$, $h = 1$ et $r = \frac{\rho}{k}$, ρ étant une quantité finie, et l'on aurait

$$(h+kt)^r = e^{\rho t};$$

par conséquent il faudrait supposer

$$z = \mathrm{R}e^{\rho t}, \quad z' = \mathrm{R}'e^{\rho t}, \quad z'' = \mathrm{R}''e^{\rho t}, \ldots.$$

Méthode générale pour déterminer le mouvement d'un système quelconque de corps qui agissent les uns sur les autres, en supposant que ces corps ne fassent que des oscillations infiniment petites autour de leurs points d'équilibre.

30. Soit n le nombre des corps qui composent le système, et nommons $y', y'', y''',\ldots$ les espaces infiniment petits que ces corps décrivent dans leurs oscillations pendant le temps t; on aura, en négligeant les quantités infiniment petites du second ordre et des ordres plus élevés,

des équations de cette forme

$$(a)\quad\begin{cases}\dfrac{d^2y'}{dt^2}+A'y'+B'y''+C'y'''+\ldots\ldots\ldots+N'y^{(n)}=0,\\ \dfrac{d^2y''}{dt^2}+A''y'+B''y''+C''y'''+\ldots\ldots\ldots+N''y^{(n)}=0,\\ \dfrac{d^2y'''}{dt^2}+A'''y'+B'''y''+C'''y'''+\ldots\ldots\ldots+N'''y^{(n)}=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ \dfrac{d^2y^{(n)}}{dt^2}+A^{(n)}y'+B^{(n)}y''+C^{(n)}y'''+\ldots+N^{(n)}y^{(n)}=0,\end{cases}$$

$A', B', C',\ldots, A'', B'', C'',\ldots$ étant des constantes données par la nature du problème.

Pour intégrer ces équations suivant la méthode expliquée ci-dessus, on multipliera la première par $\lambda' e^{\rho t}dt$, la seconde par $\lambda'' e^{\rho t}dt$, la troisième par $\lambda''' e^{\rho t}dt$, et ainsi de suite, $\lambda', \lambda'', \lambda''',\ldots$ étant, ainsi que ρ, des constantes indéterminées; ensuite on les ajoutera ensemble, et on en prendra l'intégrale en faisant disparaître de dessous le signe $\int$ les différences des variables $y', y'', y''',\ldots$; après quoi on fera les coefficients des quantités $\int y'e^{\rho t}dt$, $\int y''e^{\rho t}dt$, $\int y'''e^{\rho t}dt,\ldots$, égaux à zéro; de cette manière on aura d'abord l'équation intégrale

$$(b)\quad\begin{cases}\Big[\lambda'\left(\dfrac{dy'}{dt}-\rho y'\right)+\lambda''\left(\dfrac{dy''}{dt}-\rho y''\right)\\ \quad+\lambda'''\left(\dfrac{dy'''}{dt}-\rho y'''\right)+\ldots+\lambda^{(n)}\left(\dfrac{dy^{(n)}}{dt}-\rho y^{(n)}\right)\Big]e^{\rho t}=\text{const.}\end{cases}$$

et ensuite les équations

$$(c)\quad\begin{cases}\rho^2\lambda'+A'\lambda'+A''\lambda''+A'''\lambda'''+\ldots+A^{(n)}\lambda^{(n)}=0,\\ \rho^2\lambda''+B'\lambda'+B''\lambda''+B'''\lambda'''+\ldots+B^{(n)}\lambda^{(n)}=0.\\ \rho^2\lambda'''+C'\lambda'+C''\lambda''+C'''\lambda'''+\ldots+C^{(n)}\lambda^{(n)}=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ \rho^2\lambda^{(n)}+N'\lambda'+N''\lambda''+N'''\lambda'''+\ldots+N^{(n)}\lambda^{(n)}=0,\end{cases}$$

lesquelles serviront à déterminer les quantités $\rho, \lambda', \lambda'', \lambda''',\ldots$

Soient, lorsque $t = 0$,

$$y' = Y', \quad y'' = Y'', \quad y''' = Y''', \ldots,$$

et

$$\frac{dy'}{dt} = V', \quad \frac{dy''}{dt} = V'', \quad \frac{dy'''}{dt} = V''', \ldots,$$

l'équation (b) deviendra, en divisant par $e^{\rho t}$,

$$\begin{aligned}\lambda' \frac{dy'}{dt} + \lambda'' \frac{dy''}{dt} + \lambda''' \frac{dy'''}{dt} + \ldots + \lambda^{(n)} \frac{dy^{(n)}}{dt} - \rho[\lambda' y' + \lambda'' y'' + \lambda''' y''' + \ldots + \lambda^{(n)} y^{(n)}]\\ = [\lambda' V' + \lambda'' V'' + \lambda''' V''' + \ldots + \lambda^{(n)} V^{(n)} - \rho(\lambda' Y' + \lambda'' Y'' + \lambda''' Y''' + \ldots + \lambda^{(n)} Y^{(n)})] e^{-\rho t}.\end{aligned}$$

Or, comme la quantité ρ ne se trouve dans les équations (c) que sous la forme quadratique ρ^2, il s'ensuit qu'elle peut avoir indifféremment le signe $+$ et le signe $-$; donc on aura aussi

$$\begin{aligned}\lambda' \frac{dy'}{dt} + \lambda'' \frac{dy''}{dt} + \lambda''' \frac{dy'''}{dt} + \ldots + \lambda^{(n)} \frac{dy^{(n)}}{dt} + \rho(\lambda' y' + \lambda'' y'' + \lambda''' y''' + \ldots + \lambda^{(n)} y^{(n)})\\ = [\lambda' V' + \lambda'' V'' + \lambda''' V''' + \ldots + \lambda^{(n)} V^{(n)} + \rho(\lambda' Y' + \lambda'' Y'' + \lambda''' Y''' + \ldots + \lambda^{(n)} Y^{(n)})] e^{\rho t};\end{aligned}$$

donc, retranchant ces deux équations l'une de l'autre, et divisant ensuite par 2ρ, on aura

$$(d)\quad \left\{\begin{aligned}&\lambda' y' + \lambda'' y'' + \lambda''' y''' + \ldots + \lambda^{(n)} y^{(n)}\\ &\quad = [\lambda' Y' + \lambda'' Y'' + \lambda''' Y''' + \ldots + \lambda^{(n)} Y^{(n)}] \frac{e^{\rho t} + e^{-\rho t}}{2}\\ &\quad + [\lambda' V' + \lambda'' V'' + \lambda''' V''' + \ldots + \lambda^{(n)} V^{(n)}] \frac{e^{\rho t} - e^{-\rho t}}{2\rho}.\end{aligned}\right.$$

Qu'on reprenne maintenant les équations (c) et qu'on substitue dans une quelconque de ces équations les valeurs de $\frac{\lambda''}{\lambda'}, \frac{\lambda'''}{\lambda'}, \ldots, \frac{\lambda^{(n)}}{\lambda'}$ en ρ^2 tirées des $n-1$ autres, valeurs qui seront toujours données, comme on voit, par des équations linéaires, on aura une équation qui, étant ordonnée par rapport à ρ^2, montera au degré n, et aura par conséquent n racines. Donc ρ aura, indépendamment de l'ambiguïté du signe dont nous avons déjà tenu compte, n valeurs que nous dénoterons par ρ_1, $\rho_2, \rho_3, \ldots, \rho_n$, en sorte que $\rho_1^2, \rho_2^2, \rho_3^2, \ldots$ soient les racines de l'équation dont il s'agit. Donc, si l'on fait, pour abréger,

$$\theta = [\lambda' Y' + \lambda'' Y'' + \lambda''' Y''' + \ldots + \lambda^{(n)} Y^{(n)}] \frac{e^{\rho t} + e^{-\rho t}}{2}$$
$$+ [\lambda' V' + \lambda'' V'' + \lambda''' V''' + \ldots + \lambda^{(n)} V^{(n)}] \frac{e^{\rho t} - e^{-\rho t}}{2\rho},$$

et qu'on désigne par $\lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3, \ldots, \lambda'_n$, $\lambda''_1, \lambda''_2, \lambda''_3, \ldots, \lambda''_n, \ldots$ les valeurs de $\lambda', \lambda'', \ldots$ qui résultent de la substitution de $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \ldots, \rho_n$ au lieu de ρ, et que de même $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \ldots, \theta_n$ soient les valeurs correspondantes de θ, on aura, au lieu de l'équation (d), les n suivantes :

$$\begin{aligned}
&\lambda'_1 y' + \lambda''_1 y'' + \lambda'''_1 y''' + \ldots + \lambda^{(n)}_1 y^{(n)} = \theta_1,\\
&\lambda'_2 y' + \lambda''_2 y'' + \lambda'''_2 y''' + \ldots + \lambda^{(n)}_2 y^{(n)} = \theta_2,\\
&\lambda'_3 y' + \lambda''_3 y'' + \lambda'''_3 y''' + \ldots + \lambda^{(n)}_3 y^{(n)} = \theta_3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\lambda'_n y' + \lambda''_n y'' + \lambda'''_n y''' + \ldots + \lambda^{(n)}_n y^{(n)} = \theta_n,
\end{aligned}$$

par lesquelles il faudra déterminer les n inconnues $y', y'', y''', \ldots, y^{(n)}$; c'est à quoi se réduit maintenant toute la difficulté du problème.

Pour en venir à bout, je multiplie la première de ces équations par μ', la seconde par μ'', la troisième par μ''', et ainsi de suite, $\mu', \mu'', \mu''', \ldots$ étant des coefficients indéterminés, puis je les ajoute ensemble, ce qui me donne, en ordonnant les termes par rapport à $y', y'', y''', \ldots$,

$$\begin{aligned}
&[\mu'\lambda'_1 + \mu''\lambda'_2 + \mu'''\lambda'_3 + \ldots + \mu^{(n)}\lambda'_n]\, y'\\
+&[\mu'\lambda''_1 + \mu''\lambda''_2 + \mu'''\lambda''_3 + \ldots + \mu^{(n)}\lambda''_n]\, y''\\
+&[\mu'\lambda'''_1 + \mu''\lambda'''_2 + \mu'''\lambda'''_3 + \ldots + \mu^{(n)}\lambda'''_n]\, y'''\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
+&[\mu'\lambda^{(n)}_1 + \mu''\lambda^{(n)}_2 + \mu'''\lambda^{(n)}_3 + \ldots + \mu^{(n)}\lambda^{(n)}_n]\, y^{(n)}\\
=&\ \mu'\theta_1 + \mu''\theta_2 + \mu'''\theta_3 + \ldots + \mu^{(n)}\theta_n;
\end{aligned}$$

d'où l'on tirera aisément la valeur d'une y quelconque, comme $y^{(s)}$, en égalant à zéro chacun des coefficients des autres y; ainsi l'on aura

$$(e)\qquad y^{(s)} = \frac{\mu'\theta_1 + \mu''\theta_2 + \mu'''\theta_3 + \ldots + \mu^{(n)}\theta_n}{\mu'\lambda_1^{(s)} + \mu''\lambda_2^{(s)} + \mu'''\lambda_3^{(s)} + \ldots + \mu^{(n)}\lambda_n^{(s)}},$$

et ensuite ces équations de condition :

$$(f)\qquad \left\{\begin{array}{l} \mu'\lambda_1' + \mu''\lambda_2' + \mu'''\lambda_3' + \ldots\ldots + \mu^{(n)}\lambda_n' = 0, \\ \mu'\lambda_1'' + \mu''\lambda_2'' + \mu'''\lambda_3'' + \ldots\ldots + \mu^{(n)}\lambda_n'' = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \mu'\lambda_1^{(n)} + \mu''\lambda_2^{(n)} + \mu'''\lambda_3^{(n)} + \ldots + \mu^{(n)}\lambda_n^{(n)} = 0, \end{array}\right.$$

à l'exception seulement de celle qui répondrait à l'exposant s.

Supposons que l'on ait en général

$$\begin{array}{l} \mu'\lambda_1' + \mu''\lambda_2' + \mu'''\lambda_3' + \ldots\ldots + \mu^{(n)}\lambda_n' = \Delta', \\ \mu'\lambda_1'' + \mu''\lambda_2'' + \mu'''\lambda_3'' + \ldots\ldots + \mu^{(n)}\lambda_n'' = \Delta'', \\ \mu'\lambda_1''' + \mu''\lambda_2''' + \mu'''\lambda_3''' + \ldots\ldots + \mu^{(n)}\lambda_n''' = \Delta''', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \mu'\lambda_1^{(n)} + \mu''\lambda_2^{(n)} + \mu'''\lambda_3^{(n)} + \ldots + \mu^{(n)}\lambda_n^{(n)} = \Delta^{(n)}, \end{array}$$

et qu'il faille trouver la valeur d'une μ quelconque comme $\mu^{(m)}$. On multipliera ces équations par des coefficients indéterminés $\nu', \nu'', \nu''', \ldots, \nu^{(n)}$, et, après les avoir ajoutées ensemble, on fera les coefficients des quantités $\mu', \mu'', \mu''', \ldots$ chacun égal à zéro, excepté celui de la quantité $\mu^{(m)}$; de cette manière on aura

$$(g)\qquad \mu^{(m)} = \frac{\nu'\Delta' + \nu''\Delta'' + \nu'''\Delta''' + \ldots + \nu^{(n)}\Delta^{(n)}}{\nu'\lambda_m' + \nu''\lambda_m'' + \nu'''\lambda_m''' + \ldots + \nu^{(n)}\lambda_m^{(n)}},$$

et la détermination des quantités $\nu', \nu'', \nu''', \ldots$ dépendra de cette condition que

$$(h)\qquad \nu'\lambda' + \nu''\lambda'' + \nu'''\lambda''' + \ldots + \nu^{(n)}\lambda^{(n)} = 0,$$

lorsque $\rho = \rho_1, \rho_2, \rho_3, \ldots, \rho_n$, excepté ρ_m.

Or, les équations (c) étant multipliées par $\nu', \nu'', \nu''', \ldots$, et ajoutées ensemble, donnent

$$(i)\quad\left\{\begin{aligned}&[\rho^2\nu' + \mathrm{A}'\nu' + \mathrm{B}'\nu'' + \mathrm{C}'\nu''' + \ldots\ldots + \mathrm{N}'\nu^{(n)}]\lambda'\\&+[\rho^2\nu'' + \mathrm{A}''\nu' + \mathrm{B}''\nu'' + \mathrm{C}''\nu''' + \ldots\ldots + \mathrm{N}''\nu^{(n)}]\lambda''\\&+[\rho^2\nu''' + \mathrm{A}'''\nu' + \mathrm{B}'''\nu'' + \mathrm{C}'''\nu''' + \ldots\ldots + \mathrm{N}'''\nu^{(n)}]\lambda'''\\&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&+[\rho^2\nu^{(n)} + \mathrm{A}^{(n)}\nu' + \mathrm{B}^{(n)}\nu'' + \mathrm{C}^{(n)}\nu''' + \ldots + \mathrm{N}^{(n)}\nu^{(n)}]\lambda^{(n)} = 0.\end{aligned}\right.$$

Donc, si l'on suppose que les quantités $\nu', \nu'', \nu''', \ldots, \nu^{(n)}$, ou plutôt leurs rapports, soient tels que les coefficients de $\lambda', \lambda'', \lambda''', \ldots, \lambda^{(n-1)}$ dans cette équation soient nuls chacun en particulier, celui de $\lambda^{(n)}$ le sera aussi; de sorte que l'on aura les n équations suivantes :

$$(k)\quad\left\{\begin{aligned}&\rho^2\nu' + \mathrm{A}'\nu' + \mathrm{B}'\nu'' + \mathrm{C}'\nu''' + \ldots + \mathrm{N}'\nu^{(n)} = 0,\\&\rho^2\nu'' + \mathrm{A}''\nu' + \mathrm{B}''\nu'' + \mathrm{C}''\nu''' + \ldots + \mathrm{N}''\nu^{(n)} = 0,\\&\rho^2\nu''' + \mathrm{A}'''\nu' + \mathrm{B}'''\nu'' + \mathrm{C}'''\nu''' + \ldots + \mathrm{N}'''\nu^{(n)} = 0,\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\&\rho^2\nu^{(n)} + \mathrm{A}^{(n)}\nu' + \mathrm{B}^{(n)}\nu'' + \mathrm{C}^{(n)}\nu''' + \ldots + \mathrm{N}^{(n)}\nu^{(n)} = 0.\end{aligned}\right.$$

Et il est bon de remarquer qu'en éliminant de ces équations les quantités $\nu', \nu'', \nu''', \ldots$, on aura une équation finale en ρ^2 qui sera nécessairement la même que celle qui résulte des équations (c) par l'évanouissement des quantités $\lambda', \lambda'', \lambda''', \ldots$; ce qui peut se voir aisément *à priori*.

Faisons maintenant $\rho = \rho_m$, nous aurons

$$\begin{aligned}&\mathrm{A}'\nu' + \mathrm{B}'\nu'' + \mathrm{C}'\nu''' + \ldots\ldots + \mathrm{N}'\nu^{(n)} = -\rho_m^2\nu',\\&\mathrm{A}''\nu' + \mathrm{B}''\nu'' + \mathrm{C}''\nu''' + \ldots\ldots + \mathrm{N}''\nu^{(n)} = -\rho_m^2\nu'',\\&\mathrm{A}'''\nu' + \mathrm{B}'''\nu'' + \mathrm{C}'''\nu''' + \ldots\ldots + \mathrm{N}'''\nu^{(n)} = -\rho_m^2\nu''',\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\&\mathrm{A}^{(n)}\nu' + \mathrm{B}^{(n)}\nu'' + \mathrm{C}^{(n)}\nu''' + \ldots + \mathrm{N}^{(n)}\nu^{(n)} = -\rho_m^2\nu^{(n)},\end{aligned}$$

et l'équation (i) deviendra

$$(\rho^2 - \rho_m^2)[\nu'\lambda' + \nu''\lambda'' + \nu'''\lambda''' + \ldots + \nu^{(n)}\lambda^{(n)}] = 0,$$

laquelle devant être vraie pour toutes les valeurs de ρ qui satisfont aux équations (e), d'où celle-ci est tirée, on aura, en général,

$$\nu'\lambda' + \nu''\lambda'' + \nu'''\lambda''' + \ldots + \nu^{(n)}\lambda^{(n)} = 0,$$

lorsque $\rho = \rho_1, \rho_2, \rho_3, \ldots, \rho_n$, excepté ρ_m, auquel cas l'équation se vérifie d'elle-même, à cause du facteur $\rho^2 - \rho_m^2$.

D'où l'on voit que les valeurs de $\nu', \nu'', \nu''', \ldots, \nu^{(n)}$, qui satisfont à la condition (h), sont les mêmes que celles qui résultent des équations (k), en y faisant $\rho = \rho_m$. Donc, si l'on dénote ces valeurs par $\nu'_m, \nu''_m, \nu'''_m, \ldots$, et qu'on les substitue dans l'équation (g), on aura

$$\mu^{(m)} = \frac{\nu'_m \Delta' + \nu''_m \Delta'' + \nu'''_m \Delta''' + \ldots + \nu_m^{(n)} \Delta^{(m)}}{\nu'_m \lambda'_m + \nu''_m \lambda''_m + \nu'''_m \lambda'''_m + \ldots + \nu_m^{(n)} \lambda_m^{(n)}}.$$

Mais les équations (f) demandent que les quantités $\Delta', \Delta'', \Delta''', \ldots, \Delta^{(n)}$ soient toutes nulles à l'exception de $\Delta^{(s)}$; donc, si l'on fait, pour abréger,

$$\nu'\lambda' + \nu''\lambda'' + \nu'''\lambda''' + \ldots + \nu^{(n)}\lambda^{(n)} = Q,$$

et qu'on dénote en général par Q_m la valeur de Q lorsque $\rho = \rho_m$, on aura, pour notre cas,

$$\mu^{(m)} = \frac{\nu_m^{(s)} \Delta^{(s)}}{Q_m},$$

et par conséquent

$$\mu' = \frac{\nu_1^{(s)} \Delta^{(s)}}{Q_1}, \quad \mu'' = \frac{\nu_2^{(s)} \Delta^{(s)}}{Q_2}, \ldots.$$

Donc enfin, substituant ces valeurs dans la formule (e), et faisant attention que

$$\Delta^{(s)} = \mu'\lambda_1^{(s)} + \mu''\lambda_2^{(s)} + \mu'''\lambda_3^{(s)} + \ldots + \mu^{(n)}\lambda_n^{(s)},$$

on aura

$$y^{(s)} = \frac{\nu_1^{(s)}}{Q_1}\theta_1 + \frac{\nu_2^{(s)}}{Q_2}\theta_2 + \frac{\nu_3^{(s)}}{Q_3}\theta_3 + \ldots + \frac{\nu_n}{Q_n}\theta_n.$$

Ainsi le problème ne dépend plus que de la résolution des équations (c) et (k).

31. Nous avons trouvé que la quantité $\nu'_m\lambda' + \nu''_m\lambda'' + \nu'''_m\lambda''' + \ldots + \nu''_m\lambda^{(n)}$

est nulle lorsque $\rho=\rho_1, \rho_2, \rho_3, \ldots, \rho_n$, excepté ρ_m; or il est facile de voir que les valeurs de $\frac{\lambda''}{\lambda'}, \frac{\lambda'''}{\lambda'}, \ldots, \frac{\lambda^{(n)}}{\lambda'}$, tirées des équations (c), seront exprimées par des fractions telles que $\frac{q''}{q'}, \frac{q'''}{q'}, \ldots, \frac{q^{(n)}}{q'}$, les quantités $q', q'', q''', \ldots$ étant de la forme

$$a+b\rho^2+c\rho^4+\ldots+h\rho^{2(n-1)};$$

de sorte que si l'on fait, ce qui est permis, $\lambda'=q'$, on aura $\lambda''=q''$, $\lambda'''=q''', \ldots$, et, par conséquent, la quantité

$$\nu'_m\lambda'+\nu''_m\lambda''+\nu'''_m\lambda'''+\ldots+\nu^{(n)}_m\lambda^{(n)}$$

deviendra de la forme

$$\alpha+\beta\rho^2+\gamma\rho^4+\ldots+\zeta\rho^{2(n-1)};$$

donc on aura

$$\nu'_m\lambda'+\nu''_m\lambda''+\nu'''_m\lambda'''+\ldots+\nu^{(n)}_m\lambda^{(n)}=\chi\left(1-\frac{\rho^2}{\rho_1^2}\right)\left(1-\frac{\rho^2}{\rho_2^2}\right)\cdots\left(1-\frac{\rho^2}{\rho_n^2}\right),$$

en prenant tous les facteurs depuis $1-\frac{\rho^2}{\rho_1^2}$ jusqu'à $1-\frac{\rho^2}{\rho_n^2}$, hormis $1-\frac{\rho^2}{\rho_m^2}$, et le coefficient χ étant égal à la valeur de

$$\nu'_m\lambda'+\nu''_m\lambda''+\ldots+\nu^{(n)}_m\lambda^{(n)},$$

lorsqu'on fait $\rho=0$ dans les quantités $\lambda', \lambda'', \lambda''', \ldots$.

Or, soit $P=0$ l'équation en ρ^2 tirée des équations (c) ou (k), on aura, en supposant que le terme tout connu de P soit 1,

$$P=\left(1-\frac{\rho^2}{\rho_1^2}\right)\left(1-\frac{\rho^2}{\rho_2^2}\right)\cdots\left(1-\frac{\rho^2}{\rho_n^2}\right);$$

donc

$$\chi P=[\nu'_m\lambda'+\nu''_m\lambda''+\nu'''_m\lambda'''+\ldots+\nu^{(n)}_m\lambda^{(n)}]\left(1-\frac{\rho^2}{\rho_m^2}\right).$$

Prenons les différences de part et d'autre, en faisant varier ρ, et supposons ensuite $\rho=\rho_m$, ce qui changera les quantités $\lambda', \lambda'', \lambda''', \ldots$ en λ'_m,

$\lambda''_m, \lambda'''_m, \ldots$, nous aurons

$$\chi\frac{dP}{d\rho} = -\frac{2}{\rho_m}\left[\nu'_m\lambda'_m + \nu''_m\lambda''_m + \nu'''_m\lambda'''_m + \ldots + \nu^{(n)}_m\lambda^{(n)}_m\right] = \frac{2Q_m}{\rho_m};$$

donc on aura, en général,

$$Q = -\frac{1}{2}\chi\rho\frac{dP}{d\rho},$$

ce qui pourra servir à abréger le calcul de la valeur de Q dans plusieurs occasions.

32. Examinons maintenant les différents cas qui peuvent arriver relativement aux racines de l'équation $P = 0$. Et d'abord il est clair que si toutes ces racines sont réelles, positives et inégales, les valeurs de ρ seront aussi réelles et inégales; ainsi ce cas n'aura aucune difficulté.

S'il y a des racines négatives, alors les valeurs correspondantes de ρ deviendront imaginaires de la forme $r\sqrt{-1}$, ce qui réduira les exponentielles $\frac{e^{\rho t} + e^{-\rho t}}{2}$ et $\frac{e^{\rho t} - e^{-\rho t}}{2\rho}$ à cette forme : $\cos rt$ et $\frac{\sin rt}{r}$; d'où il s'ensuit que si toutes les racines de l'équation $P = 0$ étaient réelles, négatives et inégales, les valeurs de $y', y'', y''', \ldots$ ne contiendraient que des sinus et des cosinus; nous verrons plus bas que ce cas est le seul où la solution soit bonne en général relativement à la question mécanique.

Passons au cas des racines égales, et supposons $\rho_2 = \rho_1$, il est facile de voir, par les formules du numéro précédent, que les valeurs de Q_1 et de Q_2 deviendront égales à zéro; de sorte que les deux premiers termes de la valeur de $y^{(s)}$ semblent devoir être infinis. Pour obvier à cet inconvénient, on supposera $\rho_2 = \rho_1 + \omega$, ω étant une quantité évanouissante, et à cause de

$$Q = -\frac{1}{2}\chi\rho\frac{dP}{d\rho} = -\frac{\chi\rho}{2\,d\rho}d\left[\left(1-\frac{\rho^2}{\rho_1^2}\right)\left(1-\frac{\rho^2}{\rho_2^2}\right)\left(1-\frac{\rho^2}{\rho_3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{\rho^2}{\rho_n^2}\right)\right],$$

on aura

$$Q = \chi\left(1-\frac{\rho_1^2}{\rho_2^2}\right)\left(1-\frac{\rho_1^2}{\rho_3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{\rho_1^2}{\rho_n^2}\right) = 2\chi\frac{\omega}{\rho_1}\left(1-\frac{\rho_1^2}{\rho_3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{\rho_1^2}{\rho_n^2}\right),$$

et de même

$$Q_2 = -2\chi\frac{\omega}{\rho_1}\left(1-\frac{\rho_1^2}{\rho_3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{\rho_1^2}{\rho_n^2}\right).$$

Donc, si l'on fait $\frac{dQ}{d\rho} = R$, et qu'on dénote par R_1 ce que devient R lorsque ρ devient ρ_1, on aura

$$Q_1 = -\frac{\omega}{\rho_1^2}R_1 \quad \text{et} \quad Q_2 = \frac{\omega}{\rho_1^2}R_1.$$

Or, en faisant

$$\rho_2 = \rho_1 + \omega,$$

on a

$$\nu_2^{(s)}\theta_2 = \nu_1^{(s)}\theta_1 + \frac{d[\nu_1^{(s)}\theta_1]}{d\rho_1}\omega;$$

donc

$$\frac{\nu_1^{(s)}\theta_1}{Q_1} + \frac{\nu_2^{(s)}\theta_2}{Q_2} = -\frac{\rho_1^2\nu_1^{(s)}\theta_1}{\omega R_1} + \frac{\rho_1^2\nu_1^{(s)}\theta_1}{\omega R_1} + \frac{\rho_1^2}{\omega R_1}\frac{d[\nu_1^{(s)}\theta_1]}{d\rho_1}\omega = \frac{\rho_1^2}{R_1}\frac{d[\nu_1^{(s)}\theta_1]}{d\rho_1}.$$

On résoudra de même le cas de trois racines égales, et ainsi des autres. Au reste, il est évident que les termes de la valeur de $y^{(s)}$ qui répondent aux racines égales contiendront toujours l'angle t, et de plus des exponentielles ordinaires si ces racines sont positives, et des sinus et des cosinus si elles sont négatives.

Enfin, s'il se trouvait des racines imaginaires, on les réduirait d'abord deux à deux à la forme $a + b\sqrt{-1}$ et $a - b\sqrt{-1}$, a et b étant des quantités réelles, de sorte que

$$\rho_1^2 = a + b\sqrt{-1}, \quad \rho_2^2 = a - b\sqrt{-1},$$

et ainsi de suite; ce qui donnerait

$$\rho_1 = f + g\sqrt{-1}, \quad \rho_2 = f - g\sqrt{-1},$$

et, par conséquent,

$$e^{\pm\rho_1 t} = e^{\pm ft}e^{\pm gt\sqrt{-1}} = e^{\pm ft}(\cos gt \pm \sin gt\sqrt{-1}),$$

et de même

$$e^{\pm\rho_2 t} = e^{\pm ft}(\cos gt \pm \sin gt\sqrt{-1}).$$

On ramènerait de même à la forme $p+q\sqrt{-1}$ et $p-q\sqrt{-1}$ les valeurs des quantités μ, ν et Q répondantes à ρ_1 et ρ_2, et on trouverait, après les substitutions et les réductions, que les imaginaires se détruiraient dans les deux termes $\frac{\nu_1^{(s)}}{Q_1}\theta_1+\frac{\nu_2^{(s)}}{Q_2}\theta_2$, lesquels contiendraient alors des sinus et des cosinus multipliés par des exponentielles ordinaires.

33. Au reste, quand on veut appliquer la solution précédente au mouvement d'un système quelconque de corps, on doit supposer, comme nous l'avons fait, que les quantités y', y'', y''',... soient assez petites pour qu'on puisse négliger, sans erreur sensible, dans les expressions des forces accélératrices des corps, les termes qui contiendraient les produits y'^2, $y'y''$,.... Ainsi il faudra, pour que la solution soit bonne *mécaniquement :* 1° que les valeurs initiales Y', Y'', Y''',..., V', V'', V''',... soient infiniment petites; 2° que les expressions de y', y'', y''',... ne contiennent aucun terme qui augmente à l'infini avec le temps t; par conséquent il faudra que les racines de l'équation $P=0$ soient toutes réelles, négatives et inégales, auquel cas la valeur de $y^{(s)}$ ne contiendra que des sinus et des cosinus (numéro précédent), ou au moins que les termes qui renfermeraient l'arc t disparaissent d'eux-mêmes.

Donc, 1° si ρ_1^2 est une quantité positive, il faudra que l'on ait

$$(l)\qquad \begin{cases} \lambda'_1 Y'+\lambda''_1 Y''+\lambda'''_1 Y'''+\ldots+\lambda_1^{(n)} Y^{(n)}=0,\\ \lambda'_1 V'+\lambda''_1 V''+\lambda'''_1 Y'''+\ldots+\lambda_1^{(n)} V^{(n)}=0,\end{cases}$$

ce qui fera évanouir le premier terme $\frac{\nu_1^{(s)}}{Q_1}\theta_1$ de la valeur de $y^{(s)}$.

De même, si ρ_1^2 et ρ_2^2 étaient toutes deux positives, mais inégales, on aurait, outre les deux conditions précédentes, encore ces deux-ci :

$$\lambda'_2 Y'+\lambda''_2 Y''+\lambda'''_2 Y'''+\ldots+\lambda_2^{(n)} Y^{(n)}=0,$$
$$\lambda'_2 V'+\lambda''_2 V''+\lambda'''_2 V'''+\ldots+\lambda_2^{(n)} V^{(n)}=0,$$

et il faudrait effacer les deux premiers termes de $y^{(s)}$, et ainsi de suite.

2° Si ρ_1^2 et ρ_2^2 sont égales et négatives, on aura les mêmes conditions (l), et les deux termes $\frac{\nu_1^{(s)}}{Q_1}\theta_1 + \frac{\nu_2^{(s)}}{Q_2}\theta_2$ deviendront, en faisant $\rho_1 = r_1\sqrt{-1}$,

$$\frac{r_1}{2R_1}\,\frac{d\left[\nu_1^{(s)}(\lambda'_1 Y' + \lambda''_1 Y'' + \lambda'''_1 Y''' + \ldots + \lambda_1^{(n)} Y^{(n)})\right]}{dr_1}\cos r_1 t$$

$$+ \frac{r_1}{2R_1}\,\frac{d\left[\frac{\nu_1^{(s)}}{r_1}(\lambda'_1 V' + \lambda''_1 V'' + \lambda'''_1 V''' + \ldots + \lambda_1^{(n)} V^{(n)})\right]}{dr_1}\sin r_1 t.$$

Mais si ρ_1^2 et ρ_2^2 étaient égales et positives, alors on aurait encore deux autres conditions à remplir, savoir

$$\frac{d\left[\nu_1^{(s)}(\lambda'_1 Y' + \lambda''_1 Y'' + \lambda'''_1 Y''' + \ldots + \lambda_1^{(n)} Y^{(n)})\right]}{d\rho_1} = 0,$$

$$\frac{d\left[\frac{\nu_1^{(s)}}{\rho_1}(\lambda'_1 V' + \lambda''_1 V'' + \lambda'''_1 V''' + \ldots + \lambda_1^{(n)} V^{(n)})\right]}{d\rho_1} = 0,$$

et ainsi du reste.

Mais il y a ici une remarque importante à faire : c'est que les équations (a) n'étant qu'approchées, l'équation $P = 0$ doit aussi être regardée comme telle, de sorte que lorsqu'on trouve des racines égales, on n'est pas en droit d'en conclure que les valeurs de ρ sont égales, mais seulement qu'elles ne diffèrent que par des quantités infiniment petites; d'où il s'ensuit qu'à la rigueur, l'égalité des racines de l'équation $P = 0$ ne suffit pas pour introduire des arcs de cercle dans les valeurs de y', y'', y''',..., en tant que ces quantités représentent les espaces parcourus dans les oscillations des corps. Cependant, comme la supposition de $\rho_2 = \rho_1 + \omega$, ω étant une quantité très-petite, rend aussi les quantités Q_1 et Q_2 très-petites du même ordre, comme on peut s'en assurer par ce qui a été dit dans le numéro précédent sur le cas des racines égales, il est clair que les quantités $\frac{\theta_1}{Q_1}$ et $\frac{\theta_2}{Q_2}$ contiendront des termes finis, et qu'ainsi il faudra, pour que les valeurs de y', y'', y''',... soient toujours très-petites, que les termes dont il s'agit disparaissent entièrement de l'expression de $y^{(s)}$, ce qui donnera, en négligeant les quantités infiniment petites du second ordre, les mêmes conditions et les mêmes résultats que ci-dessus. Il est clair que ce que nous venons de dire des racines égales doit avoir lieu de même, lorsqu'elles ne diffèrent que par des quantités très-petites.

3° Si ρ_1^2 et ρ_2^2 étaient imaginaires, alors réduisant les quantités λ'_1, λ''_1, $\lambda'''_1, \ldots$, et λ'_2, λ''_2, $\lambda'''_2, \ldots$ à la forme $p'+q'\sqrt{-1}$, $p''+q''\sqrt{-1}$, $p'''+q'''\sqrt{-1}, \ldots$, et $p'-q'\sqrt{-1}$, $p''-q''\sqrt{-1}$, $p'''-q'''\sqrt{-1}, \ldots$, on aurait les conditions suivantes :

$$p'\mathrm{Y}'+p''\mathrm{Y}''+p'''\mathrm{Y}'''+\ldots+p^{(n)}\mathrm{Y}^{(n)}=0,$$
$$p'\mathrm{V}'+p''\mathrm{V}''+p'''\mathrm{V}'''+\ldots+p^{(n)}\mathrm{V}^{(n)}=0,$$

et

$$q'\mathrm{Y}'+q''\mathrm{Y}''+q'''\mathrm{Y}'''+\ldots+q^{(n)}\mathrm{Y}^{(n)}=0,$$
$$q'\mathrm{V}'+q''\mathrm{V}''+q'''\mathrm{V}'''+\ldots+q^{(n)}\mathrm{V}^{(n)}=0.$$

On aura de pareilles conditions pour chaque paire de racines imaginaires.

34. De là on tire une méthode générale pour voir si l'état d'équilibre d'un système quelconque donné de corps est *stable*, c'est-à-dire si, les corps étant infiniment peu dérangés de cet état, ils y reviendront d'eux-mêmes, ou au moins tendront à y revenir.

On supposera le système dans un état infiniment proche de celui d'équilibre, et on cherchera les expressions des forces accélératrices des corps pour se remettre à cet état, lesquelles seront, aux infiniment petits du second ordre et des suivants près, de cette forme :

$$\mathrm{A}y'+\mathrm{B}y''+\mathrm{C}y'''+\ldots,$$

comme nous l'avons supposé dans les équations (a). On formera ensuite des équations telles que les équations (c), et on en tirera l'équation $\mathrm{P}=0$, dont ρ^2 sera l'inconnue, et qui sera nécessairement d'un degré égal à l'exposant du nombre des corps. Cela posé :

1° Si toutes les racines de cette équation sont réelles négatives et inégales, l'état d'équilibre sera *stable* en général, quel que soit le dérangement initial du système;

2° Si ces racines sont toutes réelles positives ou toutes imaginaires, ou en partie réelles positives, et en partie imaginaires, l'état d'équilibre n'aura aucune *stabilité*, et le système une fois dérangé de cet état ne pourra le reprendre;

3° Enfin, si les racines sont en partie réelles négatives et inégales, et en partie réelles négatives et égales, ou réelles et positives, ou imaginaires, l'état d'équilibre aura seulement une *stabilité relative et conditionnelle*, c'est-à-dire que cet état ne se rétablira, ou ne tendra à se rétablir, que lorsqu'il y aura, entre les distances et les vitesses initiales, les conditions marquées dans le numéro précédent; dans tous les autres cas il sera impossible que le système revienne de lui-même à son premier état.

35. Lorsque toutes les racines de l'équation $P = o$ sont réelles inégales et négatives, il est clair qu'en faisant $\rho^2 = -r^2$, chaque terme de la valeur de $y^{(s)}$ se réduira à la forme

$$\alpha \cos rt + \beta \sin rt,$$

laquelle représente, comme on sait, le mouvement d'un pendule simple de longueur $\frac{1}{r^2}$; d'où il est aisé de conclure que le mouvement de chaque corps sera composé de n mouvements pareils à ceux de n pendules dont les longueurs seraient

$$\frac{1}{r_1^2}, \quad \frac{1}{r_2^2}, \quad \frac{1}{r_3^2}, \dots, \quad \frac{1}{r_n^2}.$$

C'est le théorème que M. Daniel Bernoulli a déduit, par induction, de la considération du mouvement d'une corde chargée de plusieurs poids.

Si l'on veut que les oscillations des corps deviennent simples et isochrones, on supposera que l'état initial du système soit tel, que l'on ait

$$(m) \qquad \begin{cases} \lambda' Y' + \lambda'' Y'' + \lambda''' Y''' + \ldots + \lambda^{(n)} Y^{(n)} = o, \\ \lambda' V' + \lambda'' V'' + \lambda''' V''' + \ldots + \lambda^{(n)} V^{(n)} = o, \end{cases}$$

pour toutes les valeurs de ρ^2, hors une quelconque à volonté comme ρ_m^2; car alors les quantités θ_1, θ_2, θ_3,... seront nulles, à l'exception de θ_m, et par conséquent la valeur de $y^{(s)}$ se réduira à $\frac{\nu_m^{(s)}}{Q_m}\theta_m$. Mais, les équations (m) étant absolument semblables à l'équation (h) du n° **30**, il est clair qu'on aura pour la détermination des quantités Y', Y'', Y''',..., V', V'', V''',..., des équations analogues aux équations (k); d'où il s'ensuit que ces quantités seront en raison constante avec les quantités ν'_m, ν''_m, ν'''_m,..., $\nu_m^{(n)}$; de sorte qu'on aura

$$\frac{\lambda'_m Y' + \lambda''_m Y'' + \lambda'''_m Y''' + \ldots + \lambda_m^{(n)} Y^{(n)}}{Y^{(s)}} = \frac{\lambda'_m V' + \lambda''_m V'' + \lambda'''_m V''' + \ldots + \lambda_m^{(n)} V^{(n)}}{V^{(s)}}$$

$$= \frac{\lambda'_m \nu'_m + \lambda''_m \nu''_m + \lambda'''_m \nu'''_m + \ldots + \lambda_m^{(n)} \nu_m^{(n)}}{\nu_m^{(s)}} = \frac{Q_m}{\nu_m^{(s)}};$$

donc

$$y^{(s)} = Y^{(s)} \cos r_m t + V^{(s)} \frac{\sin r_m t}{r_m}.$$

Ainsi le mouvement des corps sera le même, dans ce cas, que s'ils étaient pesants et qu'ils fussent suspendus chacun à un fil de longueur $\frac{1}{r_m^2}$, la gravité étant prise pour l'unité des forces accélératrices; d'où l'on voit que le système est susceptible d'autant de différents mouvements isochrones que l'équation $P=0$ a de racines réelles négatives et inégales.

Des oscillations d'un fil fixe par une de ses extrémités, et chargé d'un nombre quelconque de poids.

36. Soit n le nombre des poids, que nous supposerons, pour plus de simplicité, égaux entre eux et également éloignés les uns des autres; imaginons que le fil ne fasse que des oscillations infiniment petites et dans le même plan; et soient nommées y', y'', y''',..., $y^{(n)}$ les distances des corps à la verticale, à commencer par le plus bas, et a la distance d'un corps à l'autre: on aura, comme il est très-aisé de le voir par les principes de la Dynamique, et comme on peut le déduire des formules

générales que j'ai données dans le Mémoire intitulé : *Application de la méthode précédente à différents problèmes de dynamique* (page 398),

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2y'}{dt^2}+\frac{y'-y''}{a}=0,\\
&\frac{d^2y''}{dt^2}+\frac{y''-y'''}{a}-\frac{y'-2y''+y'''}{a}=0,\\
&\frac{d^2y'''}{dt^2}+\frac{y'''-y^{\text{IV}}}{a}-2\frac{y''-2y'''+y^{\text{IV}}}{a}=0,\\
&\frac{d^2y^{\text{IV}}}{dt^2}+\frac{y^{\text{IV}}-y^{\text{V}}}{a}-3\frac{y'''-2y^{\text{IV}}+y^{\text{V}}}{a}=0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
&\frac{d^2y^{(n)}}{dt^2}+\frac{y^{(n)}}{a}-(n-1)\frac{y^{(n-1)}-2y^{(n)}}{a}=0,
\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2y'}{dt^2}+\frac{y'-y''}{a}=0,\\
&\frac{d^2y''}{dt^2}+\frac{-y'+3y''-2y'''}{a}=0,\\
&\frac{d^2y'''}{dt^2}+\frac{-2y''+5y'''-3y^{\text{IV}}}{a}=0,\\
&\frac{d^2y^{\text{IV}}}{dt^2}+\frac{-3y'''+7y^{\text{IV}}-4y^{\text{V}}}{a}=0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
&\frac{d^2y^{(n)}}{dt^2}+\frac{-(n-1)y^{(n-1)}+(2n-1)y^{(n)}}{a}=0.
\end{aligned}$$

Comparant ces équations avec les équations (a) du n° **30**, on trouvera que les équations (c) du même numéro deviennent celles-ci :

$$\begin{aligned}
&\rho^2\lambda'+\frac{\lambda'-\lambda''}{a}=0,\\
&\rho^2\lambda''+\frac{-\lambda'+3\lambda''-2\lambda'''}{a}=0,\\
&\rho^2\lambda'''+\frac{-2\lambda''+5\lambda'''-3\lambda^{\text{IV}}}{a}=0,\\
&\rho^2\lambda^{\text{IV}}+\frac{-3\lambda'''+7\lambda^{\text{IV}}-4\lambda^{\text{V}}}{a}=0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
&\rho^2\lambda^{(n)}+\frac{-(n-1)\lambda^{(n-1)}+(2n-1)\lambda^{(n)}}{a}=0,
\end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\lambda'' = (1 + a\rho^2)\lambda',$$

$$\lambda''' = \frac{-\lambda' + (3 + a\rho^2)\lambda''}{2} = \left(1 + 2a\rho^2 + \frac{a^2\rho^4}{2}\right)\lambda',$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\lambda^{\text{iv}} = \left(1 + 3a\rho^2 + \frac{3a^2\rho^4}{2} + \frac{a^3\rho^6}{2.3}\right)\lambda',$$

$$\lambda^{\text{v}} = \left(1 + 4a\rho^2 + \frac{6a^2\rho^4}{2} + \frac{4a^3\rho^6}{2.3} + \frac{a^4\rho^8}{2.3.4}\right)\lambda',$$

et ainsi de suite; de sorte qu'on aura en général

$$\lambda^{(m)} = \left[1 + (m-1)a\rho^2 + \frac{(m-1)(m-2)}{4}a^2\rho^4 + \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{4.9}a^3\rho^6 + \ldots\right]\lambda'.$$

Or il est visible que, pour satisfaire à la dernière équation

$$\rho^2\lambda^{(n)} + \frac{-(n-1)\lambda^{(n-1)} + (2n-1)\lambda^{(n)}}{a} = 0,$$

il faut supposer

$$\lambda^{(n+1)} = 0,$$

ce qui donne

$$1 + na\rho^2 + \frac{n(n-1)a^2}{4}\rho^4 + \frac{n(n-1)(n-2)a^3}{4.9}\rho^6 + \ldots = 0,$$

équation d'où l'on tirera n valeurs de ρ^2, qu'on désignera par ρ_1^2, ρ_2^2, $\rho_3^2, \ldots, \rho_n^2$, et qu'on substituera successivement dans l'expression de $\lambda^{(m)}$ pour avoir les valeurs de $\lambda_1^{(m)}, \lambda_2^{(m)}, \lambda_3^{(m)}, \ldots$.

A l'égard des quantités ν, on les trouvera de la même manière par le moyen des équations (k), lesquelles deviennent, dans le cas présent,

$$\rho^2\nu' + \frac{\nu' - \nu''}{a} = 0,$$

$$\rho^2\nu'' + \frac{-\nu' + 3\nu'' - 2\nu'''}{a} = 0,$$

$$\rho^2 \nu''' + \frac{-2\nu'' + 5\nu''' - 3\nu^{\text{IV}}}{a} = 0,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$\rho^2 \nu^{(n)} + \frac{-(n-1)\nu^{(n-1)} + (2n-1)\nu^{(n)}}{a},$$

d'où l'on tire, comme ci-dessus,

$$\nu^{(m)} = \left[1 + (m-1)a\rho^2 + \frac{(m-1)(m-2)}{4}a^2\rho^4 + \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{4.9}a^3\rho^6 + \dots\right]\nu',$$

ou bien, en supposant $\lambda' = \nu' = 1$ pour plus de simplicité,

$$\nu^{(m)} = \lambda^{(m)},$$

et, par conséquent,

$$\nu_1^{(m)} = \lambda_1^{(m)}, \quad \nu_2^{(m)} = \lambda_2^{(m)}, \dots.$$

On aura donc

$$\begin{aligned} Q &= \lambda'^2 + \lambda''^2 + \lambda'''^2 + \dots + \lambda^{(n)2} \\ &= 1 + (1 + a\rho^2)^2 + \left(1 + 2a\rho^2 + \frac{a^2}{2}\rho^4\right)^2 + \dots \\ &\quad + \left[1 + (n-1)a\rho^2 + \frac{(n-1)(n-2)a^2}{4}\rho^4 + \dots\right]^2. \end{aligned}$$

Mais on peut trouver une expression plus simple de cette quantité par la méthode du n° 31. Car on a d'abord

$$P = 1 + na\rho^2 + \frac{n(n-1)a^2}{4}\rho^4 + \frac{n(n-1)(n-2)a^3}{4.9}\rho^6 + \dots,$$

d'où l'on tire

$$\frac{1}{2}\rho\frac{dP}{d\rho} = na\rho^2 + \frac{n(n-1)a^2}{2}\rho^4 + \frac{n(n-1)(n-2)a^3}{4.3}\rho^6 + \dots.$$

Or, en faisant $\rho = 0$, on a

$$\lambda' = 1, \quad \lambda'' = 1, \quad \lambda''' = 1, \dots;$$

donc

$$\begin{aligned}
\chi &= \nu' + \nu'' + \nu''' + \ldots + \nu^{(n)} \\
&= 1 \\
&+ 1 + a\rho^2 \\
&+ 1 + 2a\rho^2 + \frac{a^2}{2}\rho^4 \\
&+ 1 + 3a\rho^2 + \frac{3a^2}{2}\rho^4 + \frac{a^3}{2.3}\rho^6 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ 1 + (n-1)a\rho^2 + \frac{(n-1)(n-2)a^2}{4}\rho^4 + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)a^3}{4.9}\rho^6 + \ldots \\
&= n + \frac{n(n-1)a}{2}\rho^2 + \frac{n(n-1)(n-2)a^2}{4.3}\rho^4 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)a^3}{4.9.4}\rho^6 + \ldots,
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
Q = -\frac{1}{2}\chi\rho\frac{dP}{d\rho} = -a\rho^2\Big[n &+ \frac{n(n-1)}{2}a\rho^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{4.3}a^2\rho^4 \\
&+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4.9.4}a^3\rho^6 + \ldots\Big]^2.
\end{aligned}$$

Ces deux expressions de Q ne sont pas à la vérité identiques, mais elles deviennent égales lorsque ρ est égal à ρ_1, ρ_2, ρ_3...; ce qui suffit pour notre objet.

Faisant donc ces substitutions dans la dernière formule du n° **30**, on aura l'expression générale des quantités y, et le problème sera résolu.

Au reste, quoiqu'il soit difficile, peut-être impossible, de déterminer en général les racines de l'équation $P = 0$, on peut cependant s'assurer, par la nature même du problème, que ces racines sont nécessairement toutes réelles inégales et négatives; car sans cela les valeurs de y', y'', y''',... pourraient croître à l'infini, ce qui serait absurde.

37. Si l'on cherche quelles doivent être les distances et les vitesses initiales des corps pour que chacun d'eux ne fasse que des vibrations isochrones et analogues à celles d'un pendule simple, on trouvera (n° 35), en prenant l pour la longueur de ce pendule,

$$Y^{(s)} = \left[1 - \frac{(s-1)a}{l} + \frac{(s-1)(s-2)a^2}{4l^2} - \frac{(s-1)(s-2)(s-3)a^3}{4.9l^3} + \ldots\right] Y',$$

$$V^{(s)} = \left[1 - \frac{(s-1)a}{l} + \frac{(s-1)(s-2)a^2}{4l^2} - \frac{(s-1)(s-2)(s-3)a^3}{4.9l^3} + \ldots\right] V';$$

et la valeur de l devra se déterminer par l'équation

$$1 - \frac{na}{l} + \frac{n(n-1)a^2}{4l^2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{4.9l^3} + \ldots = 0.$$

Des vibrations d'une corde tendue et chargée d'un nombre quelconque de poids.

38. Quoique j'aie déjà résolu ce problème dans mes *Recherches sur le son*, imprimées dans le premier volume de ces Mémoires, je crois pouvoir le redonner ici, non-seulement pour faire voir comment ma méthode générale s'y applique, mais encore parce qu'il me donnera lieu de faire de nouvelles réflexions sur les vibrations des cordes sonores, qui pourront être utiles à l'éclaircissement de cette matière épineuse et délicate.

Supposons une corde chargée de n poids égaux qui la divisent en $n+1$ parties égales que nous ferons chacune égale à a, et tendue par un poids qui soit à la somme de ceux dont la corde est chargée comme c^2 est à 1 ; nommant $y', y'', y''', \ldots, y^{(n)}$ les distances des poids à l'axe de la corde, et faisant, pour abréger,

$$\frac{nc^2}{a} = k^2,$$

on aura

$$\frac{d^2y'}{dt^2} - k^2(-2y' + y'') = 0,$$

$$\frac{d^2y''}{dt^2} - k^2(y' - 2y'' + y''') = 0,$$

$$\frac{d^2y'''}{dt^2} - k^2(y'' - 2y''' + y^{\text{IV}}) = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{d^2y^{(n)}}{dt^2} - k^2(y^{(n-1)} - 2y^{(n)}) = 0.$$

Donc, en comparant ces équations avec les équations générales du n° 30, on aura les équations suivantes en $\lambda', \lambda'', \lambda''', \ldots,$

$$\begin{gathered}
\rho^2\lambda' - k^2(-2\lambda' + \lambda'') = 0,\\
\rho^2\lambda'' - k^2(\lambda' - 2\lambda'' + \lambda''') = 0,\\
\rho^2\lambda''' - k^2(\lambda'' - 2\lambda''' + \lambda^{\text{IV}}) = 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\rho^2\lambda^{(n)} - k^2(\lambda^{(n-1)} - 2\lambda^{(n)}) = 0;
\end{gathered}$$

d'où l'on tire, en supposant $1 + \frac{\rho^2}{2k^2} = \cos\varphi$,

$$\lambda'' = \frac{\sin 2\varphi}{\sin\varphi}\lambda', \quad \lambda''' = \frac{\sin 3\varphi}{\sin\varphi}\lambda', \ldots,$$

et en général

$$\lambda^{(m)} = \frac{\sin m\varphi}{\sin\varphi}\lambda'.$$

Et pour la détermination de l'angle φ, c'est-à-dire de la quantité ρ, on aura l'équation

$$\lambda^{(n+1)} = \frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi}\lambda' = 0;$$

laquelle donne

$$\varphi = \frac{m\pi}{n+1},$$

π exprimant l'angle de 180 degrés, et m un nombre quelconque entier depuis zéro jusqu'à n inclusivement. De sorte qu'on aura

$$\rho = k\sqrt{2\cos\varphi - 2} = 2k\sin\frac{1}{2}\varphi\sqrt{-1} = 2k\sin\frac{m\pi}{2(n+1)}\sqrt{-1};$$

ce qui donnera toutes les valeurs de ρ que nous avons désignées par ρ_1, $\rho_2, \rho_3, \ldots, \rho_n$, en faisant m successivement égal à $1, 2, 3, \ldots, n$.

On trouvera des équations entièrement semblables en $\nu', \nu'', \nu''', \ldots$, d'où l'on tirera pareillement

$$\nu^{(m)} = \frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi}.$$

De plus on aura

$$Q = \frac{\nu'\lambda'}{\sin^2\varphi}(\sin^2\varphi + \sin^2 2\varphi + \sin^3 2\varphi + \ldots + \sin^2 n\varphi)$$

$$= \frac{\nu'\lambda'}{\sin^2\varphi}\left[\frac{1}{2}n - \frac{1}{2}(\cos 2\varphi + \cos 4\varphi + \cos 6\varphi + \ldots + \cos 2n\varphi)\right]$$

$$= \frac{\nu'\lambda'}{\sin^2\varphi}\left[\frac{1}{2}n - \frac{1}{2}\left(\frac{\cos 2n\varphi - \cos 2(n+1)\varphi}{2(1-\cos 2\varphi)} - \frac{1}{2}\right)\right],$$

ou, à cause de $\varphi = \frac{m\pi}{n+1}$,

$$Q = \frac{(n+1)}{2\sin^2\varphi}\nu'\lambda'.$$

On trouverait la même valeur de Q par la méthode du n° **31**; mais le calcul serait alors tant soit peu plus long. Cependant, comme ce calcul peut servir à montrer la bonté de la méthode dont nous parlons, je n'ai pas cru devoir le supprimer, mais je l'ai renfermé entre deux crochets, afin que mes lecteurs puissent le passer s'ils le jugent à propos.

[On aura d'abord

$$P = \frac{\sin(n+1)\varphi}{(n+1)\sin\varphi}:$$

j'écris $P = \frac{\sin(n+1)\varphi}{(n+1)\sin\varphi}$ et non pas simplement $P = \frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi}$, afin que, lorsque $\rho = 0$, c'est-à-dire $\varphi = 0$, on ait $P = 1$, comme nous l'avons supposé; d'où l'on tire par la différentiation

$$\frac{dP}{d\varphi} = \frac{\cos(n+1)\varphi}{\sin\varphi} - \frac{\sin(n+1)\varphi\cos\varphi}{(n+1)\sin^2\varphi},$$

ou, à cause de $\sin(n+1)\varphi = 0$,

$$\frac{dP}{d\varphi} = \frac{\cos(n+1)\varphi}{\sin\varphi};$$

or l'équation $1 + \frac{\rho^2}{2k^2} = \cos\varphi$ donne

$$\frac{\rho^2}{2k^2} = \cos\varphi - 1,$$

et prenant les différences logarithmiques,

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{\sin\varphi}{1-\cos\varphi}\,d\varphi;$$

donc

$$\frac{1}{2}\rho\frac{dP}{d\rho} = \frac{(1-\cos\varphi)\cos(n+1)\varphi}{2\sin^2\varphi} = \frac{\cos(n+1)\varphi}{2(1+\cos\varphi)}.$$

Maintenant on a $\varphi = 0$, lorsque $\rho = 0$, et par conséquent

$$\lambda'' = 2\lambda', \quad \lambda''' = 3\lambda', \ldots;$$

donc

$$\begin{aligned}\chi &= \lambda'[\nu' + 2\nu'' + 3\nu''' + \ldots + n\nu^{(n)}]\\ &= \frac{\nu'\lambda'}{\sin\varphi}(\sin\varphi + 2\sin 2\varphi + 3\sin 3\varphi + \ldots + n\sin n\varphi)\\ &= \frac{\nu'\lambda'}{\sin\varphi}\,\frac{(n+1)\sin n\varphi - n\sin(n+1)\varphi}{2(1-\cos\varphi)},\end{aligned}$$

et, à cause de $\sin(n+1)\varphi = 0$,

$$\chi = \nu'\lambda'\,\frac{(n+1)\sin n\varphi}{2\sin\varphi(1-\cos\varphi)};$$

donc

$$Q = -\frac{1}{2}\chi\rho\frac{dP}{d\rho} = -\frac{(n+1)\sin\varphi\cos(n+1)\varphi}{4\sin^3\varphi}\nu'\lambda',$$

et, à cause de $\sin(2n+1)\varphi = -\sin\varphi$,

$$Q = -\frac{(n+1)[\sin(2n+1)\varphi - \sin\varphi]}{4\sin^3\varphi}\nu'\lambda' = \frac{n+1}{2\sin^2\varphi}\nu'\lambda'.]$$

Donc, faisant ces substitutions dans l'expression de y' (n° 30), et supposant en général

$$Y_m = Y'\sin\frac{m\pi}{n+1} + Y''\sin\frac{2m\pi}{n+1} + Y'''\sin\frac{3m\pi}{n+1} + \ldots + Y^{(n)}\sin\frac{nm\pi}{n+1}$$

et

$$V_m = V' \sin \frac{m\pi}{n+1} + V'' \sin \frac{2m\pi}{n+1} + V''' \sin \frac{3m\pi}{n+1} + \ldots + V^{(n)} \sin \frac{nm\pi}{n+1},$$

on aura

$$\begin{aligned}
y^{(s)} = {} & \frac{2 \sin \frac{s\pi}{n+1}}{n+1} \left\{ Y_1 \cos \left[2tk \sin \frac{\pi}{2(n+1)} \right] + \frac{V_1}{2k \sin \frac{\pi}{2(n+1)}} \sin \left[2tk \sin \frac{\pi}{2(n+1)} \right] \right\} \\
& + \frac{2 \sin \frac{2s\pi}{n+1}}{n+1} \left\{ Y_2 \cos \left[2tk \sin \frac{2\pi}{2(n+1)} \right] + \frac{V_2}{2k \sin \frac{2\pi}{2(n+1)}} \sin \left[2tk \sin \frac{2\pi}{2(n+1)} \right] \right\} \\
& + \frac{2 \sin \frac{3s\pi}{n+1}}{n+1} \left\{ Y_3 \cos \left[2tk \sin \frac{3\pi}{2(n+1)} \right] + \frac{V_3}{2k \sin \frac{3\pi}{2(n+1)}} \sin \left[2tk \sin \frac{3\pi}{2(n+1)} \right] \right\} \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& + \frac{2 \sin \frac{ns\pi}{n+1}}{n+1} \left\{ Y_n \cos \left[2tk \sin \frac{n\pi}{2(n+1)} \right] + \frac{V_n}{2k \sin \frac{n\pi}{2(n+1)}} \sin \left[2tk \sin \frac{n\pi}{2(n+1)} \right] \right\}.
\end{aligned}$$

Application de la solution précédente aux cordes sonores.

39. Je supposerai ici, pour plus de simplicité, que les vitesses initiales $V', V'', V''', \ldots$ soient nulles, moyennant quoi la valeur de $y^{(s)}$ ne contiendra plus que des termes de cette forme

$$\frac{2 \sin \frac{ms\pi}{n+1}}{n+1} Y_m \cos \left[2tk \sin \frac{m\pi}{2(n+1)} \right],$$

m étant successivement $1, 2, 3, \ldots, n$.

Cela posé, on sait que

$$\varphi = \sin\varphi + \alpha \sin^3\varphi + \beta \sin^5\varphi + \gamma \sin^7\varphi + \ldots,$$

en faisant

$$\alpha = \frac{1.1}{2.3}, \quad \beta = \frac{3.3}{4.5}, \quad \gamma = \frac{5.5}{6.7}\beta, \ldots;$$

donc

$$\sin\varphi = \varphi - \alpha\sin^3\varphi - \beta\sin^5\varphi - \gamma\sin^7\varphi - \ldots;$$

donc, supposant $\varphi = \frac{m\pi}{2(n+1)}$, et faisant, pour abréger,

$$\sin\frac{m\pi}{2(n+1)} = x,$$

on aura

$$\sin\frac{m\pi}{2(n+1)} = \frac{m\pi}{2(n+1)} - \alpha x^3 - \beta x^5 - \gamma x^7 - \ldots,$$

et, par conséquent,

$$\begin{aligned}\cos\left[2tk\sin\frac{m\pi}{2(n+1)}\right] &= \cos\left(\frac{mkt}{n+1}\pi - 2\alpha ktx^3 - 2\beta ktx^5 - 2\gamma ktx^7 - \ldots\right)\\ &= \cos\left(\frac{mkt}{n+1}\pi\right)\cos(2\alpha ktx^3 + 2\beta ktx^5 + \ldots)\\ &\quad + \sin\left(\frac{mkt}{n+1}\pi\right)\sin(2\alpha ktx^3 + 2\beta ktx^5 + \ldots).\end{aligned}$$

Or

$$\cos(2\alpha ktx^3 + 2\beta ktx^5 + \ldots) = 1 - 2\alpha^2k^2t^2x^6 - 2\alpha\beta k^2t^2x^8 - 2\beta^2k^2t^2x^{10} - \ldots,$$

et

$$\sin(2\alpha ktx^3 + 2\beta ktx^5 + \ldots) = 2\alpha ktx^3 + 2\beta ktx^5 + 2\gamma ktx^7 + \left(2\delta kt - \frac{4\alpha^3k^3t^3}{3}\right)x^9 + \ldots;$$

de plus

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^6\ldots,$$

et, par conséquent,

$$\left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \ldots\right)\sqrt{1-x^2} = 1;$$

donc, on aura aussi

$$\begin{aligned}\sin(2\alpha ktx^3 + 2\beta ktx^5 + \ldots) = \Big\{&2\alpha ktx^2 + (\alpha + 2\beta)ktx^4 + \left(\frac{3\alpha}{4} + \beta + 2\gamma\right)ktx^6\\ &+ \left[\left(\frac{3.5\alpha}{4.6} + \frac{3\beta}{4} + \gamma + 2\delta\right)kt - \frac{4\alpha^3}{3}k^3t^3\right]x^8 + \ldots\Big\}\,x\sqrt{1-x^2},\end{aligned}$$

où l'on remarquera que

$$x\sqrt{1-x^2} = \sin\frac{m\pi}{2(n+1)}\cos\frac{m\pi}{2(n+1)} = \frac{1}{2}\sin\frac{m\pi}{n+1}.$$

Maintenant (n° 38)

$$Y_m = Y'\sin\frac{m\pi}{n+1} + Y''\sin\frac{2m\pi}{n+1} + Y'''\sin\frac{3m\pi}{n+1} + \ldots + Y^{(n)}\sin\frac{nm\pi}{n+1};$$

donc, si l'on multiplie cette quantité par x^2, c'est-à-dire par

$$\left[\sin\frac{m\pi}{2(n+1)}\right]^2 = \frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{m\pi}{n+1}\right),$$

et qu'on développe les produits des sinus et des cosinus, on aura

$$\begin{aligned}
Y_m x^2 = \frac{1}{4}\Big\{ & Y'\left(2\sin\frac{m\pi}{n+1} - \sin\frac{2m\pi}{n+1}\right)\\
& + Y''\left(2\sin\frac{2m\pi}{n+1} - \sin\frac{3m\pi}{n+1} - \sin\frac{m\pi}{n+1}\right)\\
& + Y'''\left(2\sin\frac{3m\pi}{n+1} - \sin\frac{4m\pi}{n+1} - \sin\frac{2m\pi}{n+1}\right)\\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
& + Y^{(n)}\left[2\sin\frac{nm\pi}{n+1} - \sin\frac{(n+1)m\pi}{n+1} - \sin\frac{(n-1)m\pi}{n+1}\right]\Big\}\\
= -\frac{1}{4}\Big[& (Y''-2Y')\sin\frac{m\pi}{n+1} + (Y'''-2Y''+Y)\sin\frac{2m\pi}{n+1}\\
& + (Y^{\text{IV}}-2Y'''+Y'')\sin\frac{3m\pi}{n+1} + \ldots + [-2Y^{(n)}+Y^{(n-1)}]\sin\frac{nm\pi}{n+1}\Big],
\end{aligned}$$

à cause de $\sin\frac{(n+1)m\pi}{n+1} = \sin m\pi = 0$.

Qu'on dénote par $\Delta^2 Y$ les différences secondes des quantités Y dans la suite $Y', Y'', Y''', \ldots, Y^{(n)}$, de sorte que l'on ait en général

$$\Delta^2 Y^{(s)} = Y^{(s+1)} - 2Y^{(s)} + Y^{(s-1)},$$

et supposant

$$Y^0 = 0 \quad \text{et} \quad Y^{(n+1)} = 0$$

(ce qui est permis, à cause que les quantités $Y', Y'', Y''', \ldots, Y^{(n)}$ sont les seules données), afin que

$$\Delta^2 Y' = Y'' - 2Y' \quad \text{et} \quad \Delta^2 Y^{(m)} = -2Y^{(m)} + Y^{(m-1)},$$

on aura

$$Y^{(m)} x^2 = -\frac{1}{4}\left[\Delta^2 Y' \sin\frac{m\pi}{n+1} + \Delta^2 Y'' \sin\frac{2m\pi}{n+1} + \Delta^2 Y''' \sin\frac{3m\pi}{n+1} + \ldots + \Delta^2 Y^{(n)} \sin\frac{nm\pi}{n+1}\right].$$

Si l'on fait de même

$$\begin{aligned}\Delta^4 Y^{(s)} &= \Delta^2 Y^{(s+1)} - 2\Delta^2 Y^{(s)} + \Delta^2 Y^{(s-1)}\\ &= Y^{(s+2)} - 4Y^{(s+1)} + 6Y^{(s)} - 4Y^{(s-1)} + Y^{(s-2)},\end{aligned}$$

et qu'on suppose ensuite

$$\Delta^2 Y^0 = 0 \quad \text{et} \quad \Delta^2 Y^{(n+1)} = 0,$$

on trouvera

$$Y_m x^4 = \frac{1}{16}\left[\Delta^4 Y' \sin\frac{m\pi}{n+1} + \Delta^4 Y'' \sin\frac{2m\pi}{n+1} + \Delta^4 Y''' \sin\frac{3m\pi}{n+1} + \ldots + \Delta^4 Y^{(n)} \sin\frac{nm\pi}{n+1}\right].$$

En général on aura

$$Y_m x^{2r} = \pm\frac{1}{2^r}\left[\Delta^{2r} Y' \sin\frac{m\pi}{n+1} + \Delta^{2r} Y'' \sin\frac{2m\pi}{n+1} + \Delta^{2r} Y''' \sin\frac{3m\pi}{n+1} + \ldots + \Delta^{2r} Y^{(n)} \sin\frac{nm\pi}{n+1}\right]$$

(le signe supérieur étant pour le cas de r pair, et l'inférieur pour celui de r impair), pourvu qu'on suppose

$$Y^0 = 0, \quad \Delta^2 Y^0 = 0, \quad \Delta^4 Y^0 = 0, \ldots, \quad Y^{(n+1)} = 0, \quad \Delta^2 Y^{(n+1)} = 0, \quad \Delta^4 Y^{(n+1)} = 0, \ldots,$$

conditions auxquelles on peut satisfaire en imaginant la suite des Y continuée de part et d'autre à l'infini, de manière que les termes Y^0 et $Y^{(n-1)}$ soient nuls, et que les termes également distants de ceux-ci soient égaux et de signes contraires.

Donc, si l'on fait ces substitutions, et qu'on fasse, pour abréger,

$$\frac{2\alpha^2 k^2 t^2}{2^6}\Delta^6 Y^{(s)} - \frac{2\alpha\beta k^2 t^2}{2^8}\Delta^8 Y^{(s)} + \ldots = P^{(s)},$$

$$-\frac{\alpha kt}{2^2}\Delta^2 Y^{(s)} + \frac{1}{2}(\alpha + 2\beta)\frac{kt}{2^4}\Delta^4 Y^{(s)} - \frac{1}{2}\left(\frac{3\alpha}{4} + \beta + 2\gamma\right)\frac{kt}{2^6}\Delta^6 Y^{(s)} + \ldots = Q^{(s)},$$

et de plus

$$P'\sin\frac{m\pi}{n+1} + P''\sin\frac{2m\pi}{n+1} + P'''\sin\frac{3m\pi}{n+1} + \ldots + P^{(n)}\sin\frac{nm\pi}{n+1} = P_m,$$

$$Q'\sin\frac{m\pi}{n+1} + Q''\sin\frac{2m\pi}{n+1} + Q'''\sin\frac{3m\pi}{n+1} + \ldots + Q^{(n)}\sin\frac{nm\pi}{n+1} = Q_m,$$

on aura

$$\begin{aligned}
&\frac{2\sin\dfrac{ms\pi}{n+1}}{n+1} Y_m \cos\left[2tk\sin\frac{m\pi}{2(n+1)}\right] \\
&= \frac{2\sin\dfrac{ms\pi}{n+1}}{n+1}(Y_m + P_m)\cos\frac{mkt}{n+1}\pi + \frac{2\sin\dfrac{ms\pi}{n+1}}{n+1} Q_m \sin\frac{m\pi}{n+1}\sin\frac{mkt}{n+1}\pi \\
&= \frac{Y_m + P_m}{n+1}\left[\sin\frac{m(s+kt)}{n+1}\pi + \sin\frac{m(s-kt)}{n+1}\pi\right] \\
&\quad + \frac{Q_m}{2(n+1)}\left[\sin\frac{m(s+1+kt)}{n+1}\pi - \sin\frac{m(s-1+kt)}{n+1}\pi\right. \\
&\qquad\left. - \sin\frac{m(s+1-kt)}{n+1}\pi + \sin\frac{m(s-1-kt)}{n+1}\pi\right].
\end{aligned}$$

Donc, si l'on fait m successivement égal à 1, 2, 3,..., n, et qu'on suppose en général

$$\begin{aligned}
\varphi(x) = {} & 2\frac{Y_1 + P_1}{n+1}\sin x\pi + 2\frac{Y_2 + P_2}{n+1}\sin 2x\pi + 2\frac{Y_3 + P_3}{n+1}\sin 3x\pi + \ldots \\
& + 2\frac{Y_n + P_n}{n+1}\sin nx\pi,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi(x) = {} & 2\frac{Q_1}{n+1}\sin x\pi + 2\frac{Q_2}{n+1}\sin 2x\pi + 2\frac{Q_3}{n+1}\sin 3x\pi + \ldots \\
& + 2\frac{Q_n}{n+1}\sin nx\pi,
\end{aligned}$$

φ et ψ dénotant des fonctions, on aura (numéro précédent)

$$y^{(s)} = \frac{1}{2}\left[\varphi\left(\frac{s+kt}{n+1}\right) + \varphi\left(\frac{s-kt}{n+1}\right)\right]$$
$$+\frac{1}{4}\left[\psi\left(\frac{s+1+kt}{n+1}\right) - \psi\left(\frac{s-1+kt}{n+1}\right) - \psi\left(\frac{s+1-kt}{n+1}\right) + \psi\left(\frac{s-1-kt}{n+1}\right)\right].$$

D'où l'on voit que pour avoir la valeur d'une y quelconque, comme $y^{(s)}$, après un temps quelconque t, il n'y aura qu'à tracer deux courbes, dont les ordonnées répondant aux abscisses x soient $\varphi(x)$ et $\psi(x)$, et prendre ensuite dans la première de ces courbes

$$\frac{1}{2}\,\text{ord. absc.}\,\frac{s+kt}{n+1} + \frac{1}{2}\,\text{ord. absc.}\,\frac{s-kt}{n+1},$$

et dans la seconde

$$\frac{1}{4}\,\text{ord. absc.}\,\frac{s+1+kt}{n+1} - \frac{1}{4}\,\text{ord. absc.}\,\frac{s-1+kt}{n+1}$$
$$- \frac{1}{4}\,\text{ord. absc.}\,\frac{s+1-kt}{n+1} + \frac{1}{4}\,\text{ord. absc.}\,\frac{s-1-kt}{n+1}.$$

Substituons maintenant dans les expressions de $\varphi(x)$ et de $\psi(x)$ les valeurs de $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots, Y_n$, $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$, et $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots, Q_n$, et supposant en général

$$\chi(u, x) = \sin u\pi \sin x\pi + \sin 2u\pi \sin 2x\pi + \sin 3u\pi \sin 3x\pi + \ldots$$
$$+ \sin nu\pi \sin nx\pi,$$

nous aurons

$$\varphi(x) = 2\frac{Y'+P'}{n+1}\chi\left(\frac{1}{n+1}, x\right) + 2\frac{Y''+P''}{n+1}\chi\left(\frac{2}{n+1}, x\right)$$
$$+ 2\frac{Y'''+P'''}{n+1}\chi\left(\frac{3}{n+1}, x\right) + \ldots + 2\frac{Y^{(n)}+P^{(n)}}{n+1}\chi\left(\frac{n}{n+1}, x\right)$$

et

$$\psi(x) = 2\frac{Q'}{n+1}\chi\left(\frac{1}{n+1}, x\right) + 2\frac{Q''}{n+1}\chi\left(\frac{2}{n+1}, x\right)$$
$$+ 2\frac{Q'''}{n+1}\chi\left(\frac{3}{n+1}, x\right) + \ldots + 2\frac{Q^{(n)}}{n+1}\chi\left(\frac{n}{n+1}, x\right).$$

Or

$$\begin{aligned}
&2\cos u\pi\,\chi(u,\,x)\\
&\quad= 2\cos u\pi\,\sin u\pi\,\sin x\pi + 2\cos u\pi\,\sin 2u\pi\,\sin 2x\pi\\
&\qquad + 2\cos u\pi\,\sin 3u\pi\,\sin 3x\pi + \ldots + 2\cos u\pi\,\sin nu\pi\,\sin nx\pi\\
&\quad= \sin 2u\pi\,\sin x\pi + (\sin u\pi + \sin 3u\pi)\sin 2x\pi\\
&\qquad + (\sin 2u\pi + \sin 4u\pi)\sin 3x\pi + \ldots\\
&\qquad + [\sin(n-1)u\pi + \sin(n+1)u\pi]\sin nx\pi\\
&\quad= \sin 2x\pi\,\sin u\pi + (\sin x\pi + \sin 3x\pi)\sin 2u\pi\\
&\qquad + (\sin 2x\pi + \sin 4x\pi)\sin 3u\pi + \ldots\\
&\qquad + [\sin(n-1)x\pi + \sin(n+1)x\pi]\sin nu\pi\\
&\qquad + \sin(n+1)u\pi\,\sin nx\pi - \sin(n+1)x\pi\,\sin nu\pi\\
&\quad= 2\cos x\pi\,\chi(u,\,x) + \sin(n+1)u\pi\,\sin nx\pi - \sin(n+1)x\pi\,\sin nu\pi.
\end{aligned}$$

Donc

$$\chi(u,\,x) = \frac{\sin(n+1)u\pi\,\sin nx\pi - \sin(n+1)x\pi\,\sin nu\pi}{2(\cos u\pi - \cos x\pi)}.$$

Soient

$$u = \frac{m}{n+1}, \quad x = \frac{s}{n+1},$$

m et s étant des nombres entiers, on aura

$$\sin(n+1)u\pi = \sin m\pi = 0, \quad \sin(n+1)x\pi = \sin s\pi = 0;$$

par conséquent,

$$\chi\left(\frac{m}{n+1},\,\frac{s}{n+1}\right) = 0.$$

Il en faut excepter le cas où $s = m$, car alors le numérateur et le dénominateur de la formule deviennent égaux chacun à zéro. Pour trouver la valeur de $\chi(u,\,x)$ dans ce cas, on fera $x = u + \omega$, ω étant une quantité évanouissante, et l'on aura, en effaçant ce qui se détruit,

$$\chi(u,\,x) = \frac{n\sin(n+1)u\pi\,\cos nu\pi}{2\sin u\pi} - \frac{(n+1)\cos(n+1)u\pi\,\sin nu\pi}{2\sin u\pi}.$$

Donc, faisant $u = x = \frac{m}{n+1}$,

$$\chi\left(\frac{m}{n+1}, \frac{m}{n+1}\right) = -\frac{(n+1)\cos m\pi \sin\frac{nm\pi}{n+1}}{2\sin\frac{m\pi}{n+1}}.$$

Or

$$\cos m\pi \sin\frac{nm}{n+1}\pi = \frac{1}{2}\sin\frac{2n+1}{n+1}m\pi - \frac{1}{2}\sin\frac{m}{n+1}\pi,$$

et

$$\sin\frac{2n+1}{n+1}m\pi = \sin\left(2m - \frac{m}{n+1}\right)\pi = -\sin\frac{m}{n+1}\pi$$

(à cause que m est un nombre entier); donc

$$\cos m\pi \sin\frac{nm}{n+1}\pi = -\sin\frac{m}{n+1}\pi;$$

et, par conséquent,

$$\chi\left(\frac{m}{n+1}, \frac{m}{n+1}\right) = \frac{n+1}{2}.$$

On aura donc

$$\varphi\left(\frac{s}{n+1}\right) = Y^{(s)} + P^{(s)} \quad \text{et} \quad \psi\left(\frac{s}{n+1}\right) = Q^{(s)};$$

c'est-à-dire que les deux courbes qui représentent les fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ doivent être telles, que les ordonnées répondant aux abscisses $\frac{s}{n+1}$ soient $Y^{(s)} + P^{(s)}$ et $Q^{(s)}$.

Ayant donc divisé l'axe de la corde, que je suppose égal à 1, en $n+1$ parties égales, on appliquera à chaque abscisse $\frac{s}{n+1}$ deux ordonnées, l'une égale à $Y^{(s)} + P^{(s)}$, et l'autre égale à $Q^{(s)}$, et l'on fera passer par les extrémités de chacune de ces deux suites d'ordonnées deux courbes représentées par l'équation

$$y = \alpha \sin x\pi + \beta \sin 2x\pi + \gamma \sin 3x\pi + \ldots + \omega \sin nx\pi,$$

y étant l'ordonnée qui répond à l'abscisse x, et α, β, γ,..., ω des coefficients arbitraires; on aura de cette manière les courbes qui serviront à déterminer, pour un temps quelconque t, la figure du polygone vibrant, comme nous l'avons enseigné plus haut.

A l'égard de la continuation de ces courbes, il est clair qu'elles s'étendront de part et d'autre à l'infini, et seront composées de branches égales, semblables et alternativement situées au-dessus et au-dessous de l'axe, de sorte qu'il ne faudra que tracer les branches qui répondent à l'axe 1, et les transporter ensuite alternativement au-dessus et au-dessous de l'axe prolongé à l'infini de part et d'autre.

40. Supposons présentement que le nombre n des corps soit très-grand, et que, par conséquent, la distance a d'un corps à l'autre soit très-petite, la longueur de toute la corde étant égale à 1; il est clair que les différences $\Delta^2 Y$, $\Delta^4 Y$,... deviendront très-petites du second ordre, du quatrième,...; donc, puisque $k = \sqrt{\frac{nc^2}{a}} = \frac{c}{a}$, à cause de $n = \frac{1}{a}$, les quantités $k\Delta^2 Y$, $k\Delta^4 Y$, $k^2\Delta^6 Y$,... seront très-petites du premier ordre, du troisième, du quatrième,..., et par conséquent les quantités P et Q pourront être regardées et traitées comme nulles sans erreur sensible.

Ainsi, dans cette hypothèse, on aura à très-peu près le mouvement de la corde, en faisant passer par les sommets des ordonnées très-proches Y', Y'', Y''',..., lesquelles représentent la figure initiale du polygone vibrant, une courbe dont l'équation soit

$$y = \alpha \sin \pi x + \beta \sin 2\pi x + \gamma \sin 3\pi x + \ldots + \omega \sin n\pi x,$$

et que j'appellerai *génératrice*, et prenant ensuite pour l'ordonnée du polygone vibrant, qui répond à une abscisse quelconque $\frac{s}{n+1} = x$, la demi-somme de deux ordonnées de cette courbe, desquelles l'une réponde à l'abscisse

$$\frac{s+kt}{n+1} = x + ct,$$

et l'autre réponde à l'abscisse

$$\frac{s-kt}{n+1} = x - ct;$$

et cette détermination sera toujours d'autant plus exacte que le nombre n sera plus grand. Or il est évident que plus le nombre des poids est grand, plus le polygone initial doit s'approcher de la courbe circonscrite; d'où il s'ensuit qu'en supposant le nombre des poids infini, ce qui est le cas de la corde vibrante, on pourra regarder la figure initiale même de la corde comme une branche de la courbe génératrice, et qu'ainsi pour avoir cette courbe il n'y aura qu'à transporter la courbe initiale alternativement au-dessus et au-dessous de l'axe à l'infini (numéro précédent).

41. On pourrait douter s'il ne faut pas que la courbe initiale de la corde soit aussi comprise dans la même équation

$$y = \alpha \sin \pi x + \beta \sin 2\pi x + \ldots.$$

Il est certain que si l'on veut que la courbe génératrice soit la même *géométriquement* que la courbe initiale, il faut que celle-ci soit renfermée dans l'équation $y = \alpha \sin \pi x + \beta \sin 2\pi x + \ldots.$ Je dis : la même géométriquement, car il suffit que la différence de ces deux courbes soit moindre qu'aucune grandeur donnée, pour qu'elles puissent être prises pour les mêmes. Or il est clair que, quelle que soit la courbe initiale, on peut toujours faire passer, par une infinité de points infiniment proches de cette courbe, une autre courbe de la forme

$$y = \alpha \sin \pi x + \beta \sin 2\pi x + \ldots,$$

de manière que la différence entre les deux courbes soit aussi petite qu'on voudra, quoique cette différence ne puisse devenir absolument nulle que dans le cas où la courbe initiale sera aussi de la même forme; dans tous les autres cas cette courbe initiale ne sera qu'une espèce d'asymptote dont la courbe génératrice pourra s'approcher à l'infini, sans qu'elles puissent jamais coïncider entièrement.

Pour confirmer ce que je viens de dire, je vais faire voir comment on peut trouver une infinité de telles courbes, qui coïncident avec une courbe donnée en un nombre quelconque de points aussi près les uns des autres qu'on voudra. Pour cela je prends l'équation

$$y = \frac{2Y_1}{n+1}\sin x\pi + \frac{2Y_2}{n+1}\sin 2x\pi + \frac{2Y_3}{n+1}\sin 3x\pi + \ldots + \frac{2Y_n}{n+1}\sin nx\pi,$$

dans laquelle

$$Y_m = Y'\sin\frac{m\pi}{n+1} + Y''\sin\frac{2m\pi}{n+1} + Y'''\sin\frac{3m\pi}{n+1} + \ldots + Y^{(n)}\sin\frac{nm\pi}{n+1},$$

et, par ce que j'ai démontré dans le n° 39, j'aurai, lorsque $x = \frac{s}{n+1}$,

$$y = Y^{(s)}$$

Soient maintenant

$$n+1 = \frac{1}{dX} \quad \text{et} \quad \frac{s}{n+1} = X,$$

on aura

$$Y_m = \int Y \sin mX\pi = (n+1)\int Y \sin mX\pi\, dX,$$

cette intégrale étant prise depuis $X = 0$ jusqu'à $X = 1$; par conséquent

$$\begin{aligned} y = {} & 2\int Y\sin X\pi\, dX \sin x\pi + 2\int Y\sin 2X\pi\, dX \sin 2x\pi \\ & + 2\int Y \sin 3X\pi\, dX \sin 3x\pi + \ldots + 2\int Y\sin nX\pi\, dX\sin nx\pi, \end{aligned}$$

de sorte que, lorsque $x = X$, on aura $y = Y$, Y étant l'ordonnée qui répond à l'abscisse X.

Or, soient Z une fonction quelconque de X, et z une pareille fonction de x, il est clair qu'en mettant dans l'équation précédente YZ au lieu de Y, et yz au lieu de y, on aura aussi, lorsque $X = x$,

$$yz = YZ,$$

c'est-à-dire, à cause de $z = Z$ dans ce cas,

$$y = Y.$$

D'où il s'ensuit que si l'on a une courbe quelconque rapportée à un axe égal à 1, et dont les coordonnées soient X et Y, et qu'on décrive sur le même axe une autre courbe dont l'équation, en prenant x et y pour les coordonnées, soit

$$y = \frac{2}{z}\int \mathrm{ZY}\sin \mathrm{X}\pi\, d\mathrm{X} + \frac{2}{z}\int \mathrm{ZY}\sin 2\mathrm{X}\pi\, d\mathrm{X} + \frac{2}{z}\int \mathrm{ZY}\sin 3\mathrm{X}\pi\, d\mathrm{X} + \ldots + \frac{2}{z}\int \mathrm{ZY}\sin n\mathrm{X}\pi\, d\mathrm{X},$$

ces deux courbes coïncideront dans tous les points qui répondent aux abscisses

$$x = \mathrm{X} = \frac{s}{n+1},$$

s et n étant des nombres entiers, quelle que soit d'ailleurs la fonction Z; or on peut rendre n et s si grands que, les points de coïncidence soient aussi près les uns des autres qu'on voudra.

Au reste il ne faut pas manquer d'observer que la construction donnée ci-dessus, pour représenter le mouvement de la corde vibrante, n'est exacte qu'autant qu'il est permis de négliger les quantités P et Q comme nous l'avons fait (n° 40). Or il est clair que ces quantités seront toujours nulles d'elles-mêmes, si $\frac{d^m y}{dx^m}$ ne fait de saut nulle part dans la courbe initiale, ni dans les branches alternatives; ainsi, pourvu que cette condition soit observée, on pourra toujours déterminer le mouvement de la corde, quelle que soit d'ailleurs la nature de la courbe initiale.

Nouvelle manière d'intégrer par approximation l'équation

$$(\mathrm{A}) \qquad \frac{d^2y}{dt^2} + \mathrm{K}^2 y + \mathrm{L} + i\mathrm{M}y^2 + i^2\mathrm{N}y^3 + \ldots = 0,$$

dans laquelle K, L, M, N,... *sont des constantes quelconques, et i marque un coefficient très-petit.*

42. On sait que l'intégrale de l'équation

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \mathrm{K}^2y + \mathrm{L} + a\cos\alpha t + b\cos\beta t + \ldots = 0$$

est

$$y = f\cos Kt + \frac{g}{K}\sin Kt + \frac{L}{K^2}(\cos Kt - 1) + \frac{a}{K^2 - \alpha^2}(\cos Kt - \cos\alpha t)$$
$$+ \frac{b}{K^2 - \beta^2}(\cos Kt - \cos\beta t) + \ldots,$$

f et g étant deux constantes arbitraires dont l'une exprime la valeur de y, et l'autre celle de $\frac{dy}{dt}$, lorsque $t = 0$.

Si $\alpha = K$, on trouvera, en faisant $\alpha = R + \omega$ et regardant ω comme une quantité évanouissante, que les termes

$$\frac{a}{K^2 - \alpha^2}(\cos Kt - \cos\alpha t)$$

se réduisent à celui-ci :

$$-\frac{a}{2K}t\sin Kt.$$

43. Cela posé, pour intégrer l'équation (A) suivant la méthode ordinaire d'approximation, on négligera d'abord les termes affectés de i, et l'on aura pour première équation approchée

$$\frac{d^2y}{dt^2} + K^2y + L = 0,$$

et, par conséquent,

$$y = f\cos Kt + \frac{g}{K}\sin Kt + \frac{L}{K^2}(\cos Kt - 1).$$

On substituera ensuite cette première valeur de y dans le terme iMy^2, en négligeant le terme suivant i^2Ny^3, et faisant, pour plus de simplicité,

$$g = 0 \quad \text{et} \quad f + \frac{L}{K^2} = F;$$

on aura la nouvelle équation

$$\frac{d^2y}{dt^2} + K^2y + L + iM\left(\frac{F^2}{2} + \frac{L^4}{K^4}\right) - 2i\frac{MLF}{K}\cos Kt + i\frac{MF^2}{2}\cos 2Kt = 0,$$

dont l'intégrale sera

$$y = f\cos Kt + \frac{L'}{K^2}(\cos Kt - 1) + i\,\frac{MLF}{K^3}\,t\sin Kt - i\,\frac{MF^2}{2.3\,K^2}(\cos Kt - \cos 2Kt),$$

en supposant

$$g = 0 \quad \text{et} \quad L + iM\left(\frac{F^2}{2} + \frac{L^2}{K^4}\right) = L'.$$

44. Mais voici une difficulté. L'expression de y qu'on vient de trouver renferme un terme multiplié par t, et si l'on continuait le calcul de la même manière, on trouverait encore des termes multipliés par t^2, t^3,...; cependant il est certain que la valeur de y ne doit point contenir de pareils termes. Pour le démontrer je reprends l'équation (A) et j'en tire, en multipliant par $2dy$ et intégrant,

$$\text{(B)} \qquad \frac{dy^2}{dt^2} + K^2y^2 + 2Ly + H + \frac{2iM}{3}y^3 + \frac{i^2N}{2}y^4 \ldots = 0,$$

H étant une constante qu'on déterminera par les valeurs données de y et de $\frac{dy}{dt}$, lorsque $t = 0$; de sorte qu'on aura, en général,

$$H = -g^2 - K^2f^2 - 2Lf - \frac{2iM}{3}f^3 - \frac{i^2N}{2}f^4 \ldots.$$

Je fais $\frac{dy}{dt} = x$, j'ai

$$x^2 + K^2y^2 + 2Ly + H + \frac{2iM}{3}y^3 + \frac{i^2N}{2}y^4 \ldots = 0,$$

équation qui peut être regardée comme appartenant à une courbe dont x et y soient les coordonnées. Or, puisque i est une quantité très-petite, il est clair qu'on aura à peu près

$$x^2 + K^2y^2 + 2Ly + H = 0,$$

d'où l'on tire

$$y = \frac{-L + \sqrt{L^2 - K^2H - K^2x^2}}{K^2}.$$

Ces deux racines donnent, comme l'on voit, une ovale dans laquelle la valeur de y est contenue entre ces deux limites :

$$y = \frac{-L + \sqrt{L^2 - K^2H}}{K^2} \quad \text{et} \quad y = \frac{-L - \sqrt{L^2 - K^2H}}{K^2}.$$

Pour trouver les autres racines, on supposera $y = \frac{z}{i}$, et après avoir fait disparaître les puissances de i qui se trouveront au dénominateur, on cherchera les valeurs de z par les règles ordinaires d'approximation. De cette manière on aura, en ne considérant d'abord que l'équation

$$x^2 + K^2y^2 + 2Ly + H + \frac{2iM}{3}y^3 = 0,$$

et poussant la précision jusqu'aux i^2,

$$z = -\frac{3K^2}{2M} + \frac{2iL}{K} - \frac{8i^2L^2M}{3K^6} - \frac{2i^2M(H + x^2)}{3K^4},$$

et, par conséquent,

$$y = -\frac{3K^2}{2iM} + \frac{2L}{K^2} - \frac{8iL^2M}{3K^6} - \frac{2iM(H + x^2)}{3K^4},$$

ce qui donne une branche parabolique infiniment éloignée de l'axe. On tirera de même de l'équation

$$x^2 + K^2y^2 + 2Ly + H + \frac{2iM}{3}y^3 + \frac{i^2N}{2}y^4 = 0,$$

$$y = \frac{\alpha}{i} + \beta + i(\gamma + \delta x^2),$$

où

$$\alpha = \frac{-\frac{2M}{3} \pm \sqrt{\frac{4M^2}{9} - 2K^2}}{N},$$

$$\beta = -\frac{4L\alpha}{4N\alpha^3 + 4M\alpha^2 + 4K^2\alpha},$$

$$\gamma = -\frac{(6N^2\alpha^2 + 4M\alpha + 2K^2)\beta^2 + 4L\beta + 2C}{4N\alpha^3 + 4M\alpha^2 + 4K^2\alpha},$$

$$\delta = -\frac{2}{4N\alpha^3 + 4M\alpha^2 + 4K^2\alpha},$$

ce qui donnera, à cause de l'ambiguïté du radical $\sqrt{\frac{4M^2}{9} - 2K^2}$, deux branches paraboliques éloignées à l'infini de l'axe, et ainsi de suite.

De là il est aisé de conclure que la valeur de y ne peut jamais passer du fini à l'infini. Donc, puisque t peut devenir infinie, ce qui est évident par la nature même de l'équation (A), il s'ensuit que la valeur de y en t ne doit point contenir de termes qui croissent avec t; donc, etc.

45. Voyons donc comment on pourrait faire disparaître de l'expression de y les termes qui contiendraient des puissances de t, et qui rendraient cette expression très-fautive.

Qu'on suppose, dans l'équation (A),

$$y = y' + \lambda + i\mu + i^2\nu + \ldots,$$

λ, μ, ν,... étant des constantes indéterminées et y' une nouvelle variable, et négligeant les termes qui seraient affectés de i^3,..., on aura une équation de cette forme :

$$(\mathrm{C}) \quad \frac{d^2y'}{dt^2} + \mathrm{R}^2y' + \mathrm{A} + i(\mathrm{B} + \mathrm{M}y'^2) + i^2(\mathrm{C} + 3\mathrm{N}\lambda y'^2 + \mathrm{N}y'^3) + \ldots = 0,$$

dans laquelle

$$\mathrm{R}^2 = \mathrm{K}^2 + 2i\mathrm{M}\lambda + i^2(2\mathrm{M}\mu + 3\mathrm{N}\lambda^2),$$

$$\mathrm{A} = \mathrm{L} + \mathrm{K}^2\lambda, \quad \mathrm{B} = \mathrm{K}^2\mu + \mathrm{M}\lambda^2, \quad \mathrm{C} = \mathrm{K}^2\nu + 2\mathrm{M}\mu\lambda + \mathrm{N}\lambda^3,$$

ce qui donnera pour première équation approchée

$$\frac{d^2y'}{dt^2} + \mathrm{R}^2y' + \mathrm{A} = 0;$$

d'où on aura, en supposant $y' = f'$ et $\frac{dy'}{dt} = 0$, lorsque $t = 0$,

$$y' = f' \cos \mathrm{R}t + \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{R}^2}(\cos \mathrm{R}t - 1).$$

Substituant ensuite cette première valeur de y' dans le terme $i\mathrm{M}y'^2$

de l'équation (C), et négligeant les termes affectés de i^2, on aura

$$\frac{d^2y'}{dt^2} + R^2y' + A + i\left[B + M\frac{A^2}{R^4} + \frac{M}{2}\left(f' + \frac{A}{R^2}\right)^2\right]$$
$$- 2iM\frac{A}{R^2}\left(f' + \frac{A}{R^2}\right)\cos Rt + i\frac{M}{2}\left(f' + \frac{A}{R^2}\right)^2\cos 2Rt = 0.$$

On fera $A = 0$, moyennant quoi le terme qui contient $\cos Rt$ disparaîtra, et l'équation se réduira à celle-ci :

$$\frac{d^2y'}{dt^2} + R^2y' + i\left(B + \frac{Mf'^2}{2}\right) + i\frac{Mf'^2}{2}\cos 2Rt = 0,$$

dont l'intégrale sera

$$y' = f'\cos Rt + i\left(\frac{B}{R^2} + \frac{Mf'^2}{2R^2}\right)(\cos Rt - 1) - i\frac{Mf'^2}{2.3R^2}(\cos Rt - \cos 2Rt).$$

Si l'on veut se contenter de cette approximation, on négligera dans la valeur de R les termes de l'ordre de i^2, et l'on aura

$$R^2 = K^2 + 2iM\lambda;$$

or la supposition de $A = 0$ donne $\lambda = -\frac{L}{K^2}$, donc on aura

$$R^2 = K^2 - 2i\frac{LM}{K^2}.$$

A l'égard de la quantité μ qui entre dans la valeur de B, on pourra la supposer égale à zéro, de sorte qu'on aura

$$B = M\lambda^2 = \frac{L^2M}{K^4}.$$

Ainsi la valeur de y sera, aux quantités de l'ordre de i^2 près,

$$-\frac{L}{K^2} + y'.$$

Mais si l'on voulait pousser le calcul plus loin, il faudrait substituer l'expression précédente de y' dans les termes iMy'^2, $3i^2N\lambda y'^2$ et $i^2Ny'^3$

de l'équation (C), en négligeant les quantités qui se trouveraient affectées de i^3, et faire disparaître ensuite le terme qui contiendrait $\cos R t$, en supposant égal à zéro son coefficient

$$i^2\left[-2Mf'\left(\frac{B}{R^2}+\frac{Mf'^2}{2R^2}\right)+\frac{M^2f'^3}{2.3R^2}+\frac{3Nf'^3}{4}\right],$$

ce qui donnerait

$$B=-\frac{5Mf'^2}{12}+\frac{3NR^2f'^2}{8M}.$$

De cette manière on aurait une nouvelle valeur de y' qui ne contiendrait, comme la précédente, que des cosinus d'angles, et ainsi de suite.

La valeur de B qu'on vient de trouver donnera, à cause de $B=K^2\mu+M\lambda^2$,

$$\mu=\left(\frac{3NR^2}{8MK^2}-\frac{5M}{12K^2}\right)f'^2-\frac{ML^2}{K^6}=\left(\frac{3N}{8M}-\frac{5M}{12K^2}\right)f'^2-\frac{ML^2}{K^6},$$

en mettant au lieu de R^2 sa valeur approchée K^2; d'où l'on aura

$$\begin{aligned}R^2&=K^2+2iM\lambda+i^2(2M\mu+3N\lambda^2)\\&=K^2-2i\frac{ML}{K^2}+i^2\left[\left(\frac{3N}{4}-\frac{5M^2}{6K^2}\right)f'^2+\frac{3NL^2}{K^4}-\frac{2M^2L^2}{K^6}\right];\end{aligned}$$

c'est la valeur de R^2 aux quantités de l'ordre de i^3 près.

46. Je vais présentement donner une méthode particulière pour intégrer ces sortes d'équations différentielles aussi exactement qu'on voudra par approximation, méthode qui aura sur la précédente l'avantage de donner directement, et sans aucune supposition précaire, la vraie forme de l'intégrale.

Je supposerai ici, pour plus de simplicité, qu'on ne veuille avoir égard qu'aux quantités de l'ordre de i et de i^2; mais on verra aisément que la méthode aura lieu quelque loin qu'on veuille pousser l'approximation.

Soient $y^2=u$ et $y^3=v$; l'équation proposée (A) deviendra

$$\text{(D)}\qquad \frac{d^2y}{dt^2}+K^2y+L+iMu+i^2Nv=0.$$

Or

$$\frac{d^2u}{dt^2} = 2y\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy^2}{dt^2};$$

donc, si l'on multiplie l'équation (A) par $2y$, et l'équation (B) du n° 44 par 2, et qu'ensuite on les ajoute ensemble, on aura

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 4K^2y^2 + 6Ly + 2H + \frac{10iM}{3}y^3 + 6i^2Ny^4 = 0.$$

Mais, comme la quantité u est déjà multipliée par i dans l'équation (D), il est clair que pour ne pas introduire dans la valeur de y des termes de l'ordre de i^3, il faut rejeter dans la valeur de u, et par conséquent aussi dans celle de $\frac{d^2u}{dt^2}$, les termes de l'ordre de i^2; effaçant donc le terme $6i^2Ny^4$, et mettant dans les autres u à la place de y^2 et v à la place de y^3, on aura

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 4K^2u + 6Ly + 2H + \frac{10iM}{3}v = 0.$$

On a de même

$$\frac{d^2v}{dt^2} = 3y^2\frac{d^2y}{dt^2} + 6y\frac{dy^2}{dt^2};$$

donc, multipliant l'équation (A) par $3y^2$, et l'équation (B) par $6y$, et les ajoutant ensemble, on aura

$$\frac{d^2v}{dt^2} + 9K^2y^3 + 15Ly^2 + 6Hy + 7iMy^4 + \ldots = 0.$$

Or, v étant multipliée par i^2 dans l'équation (D), on rejettera dans la valeur de $\frac{d^2v}{dt^2}$ tous les termes affectés de i, de sorte qu'on aura, en mettant u au lieu de y^2 et v au lieu de y^3,

$$\frac{d^2v}{dt^2} + 9K^2v + 15Lu + 6Hy = 0.$$

Nous avons donc, entre les trois variables y, u, v, ces trois équations du second ordre :

$$
(\mathrm{E})\qquad\left\{\begin{aligned}
&\frac{d^2y}{dt^2}+\mathrm{K}^2y+\mathrm{L}+i\mathrm{M}u+i^2\mathrm{N}v=0,\\
&\frac{d^2u}{dt^2}+4\mathrm{K}^2u+6\mathrm{L}y+2\mathrm{H}+\frac{10i\mathrm{M}}{3}v=0,\\
&\frac{d^2v}{dt^2}+9\mathrm{K}^2v+15\mathrm{L}u+6\mathrm{H}y=0,
\end{aligned}\right.
$$

lesquelles sont intégrables par la méthode du n° 26.

Suivant cette méthode je multiplie la première par $\lambda e^{\rho t}\,dt$, la seconde par $\mu e^{\rho t}\,dt$, la troisième par $\nu e^{\rho t}\,dt$ (n° 29), λ, μ, ν et ρ étant des constantes indéterminées, ensuite je les ajoute ensemble, et j'en prends l'intégrale en faisant disparaître, par des intégrations par parties, les différences des variables y, u, v de dessous le signe $\int$; j'aurai donc

$$
\begin{aligned}
&\left[\lambda\frac{dy}{dt}+\mu\frac{du}{dt}+\nu\frac{dv}{dt}-(\lambda y+\mu u+\nu v)\rho+\frac{\lambda\mathrm{L}+2\mu\mathrm{H}}{\rho}\right]e^{\rho t}\\
&\quad+\int\Big[(\lambda\rho^2+\lambda\mathrm{K}^2+6\mu\mathrm{L}+6\nu\mathrm{H})y+(i\lambda\mathrm{M}+\mu\rho^2+4\mu\mathrm{K}^2+15\nu\mathrm{L})u\\
&\qquad\qquad+\left(i^2\lambda\mathrm{N}+\frac{10i}{3}\mu\mathrm{M}+\nu\rho^2+9\nu\mathrm{K}^2\right)v\Big]e^{\rho t}\,dt=\text{const.}
\end{aligned}
$$

J'égale à zéro les coefficients des variables y, u, v, qui sont sous les signes $\int$, ce qui me donne ces trois équations :

$$
(\mathrm{F})\qquad\left\{\begin{aligned}
&\lambda\rho^2+\lambda\mathrm{K}^2+6\mu\mathrm{L}+6\nu\mathrm{H}=0,\\
&i\lambda\mathrm{M}+\mu\rho^2+4\mu\mathrm{K}^2+15\nu\mathrm{L}=0,\\
&i^2\lambda\mathrm{N}+\frac{10i}{3}\mu\mathrm{M}+\nu\rho^2+9\nu\mathrm{K}^2=0,
\end{aligned}\right.
$$

par le moyen desquelles je détermine les quantités λ, μ, ν et ρ.

De cette manière j'ai

$$
(\mathrm{G})\qquad\left[\lambda\frac{dy}{dt}+\mu\frac{du}{dt}+\nu\frac{dv}{dt}-(\lambda y+\mu u+\nu v)\rho+\frac{\lambda\mathrm{L}+2\mu\mathrm{H}}{\rho}\right]e^{\rho t}=\text{const.}
$$

Or, pour peu qu'on examine les équations (F), il est aisé de reconnaître que la quantité μ doit être de l'ordre de i, et celle de ν de l'ordre de i^2.

Soient donc

$$\mu = i\lambda\alpha \quad \text{et} \quad \nu = i^2\lambda\beta,$$

on aura, en divisant la première équation par λ, la seconde par $i\lambda$, et la troisième par $i^2\lambda$, les trois suivantes :

$$\rho^2 + K^2 + 6i\alpha L + 6i^2\beta H = 0,$$
$$M + \alpha(\rho^2 + 4K^2) + 15i\beta L = 0,$$
$$N + \frac{10}{3}\alpha M + \beta(\rho^2 + 9K^2) = 0.$$

La première donne

$$\rho^2 = -K^2 - 6i\alpha L - 6i^2\beta H,$$

et mettant cette valeur de ρ^2 dans les deux autres, on aura

$$M + \alpha(3K^2 - 6i\alpha L - 6i^2\beta H) + 15i\beta L = 0,$$
$$N + \frac{10}{3}\alpha M + \beta(8K^2 - 6i\alpha L - 6i^2\beta H) = 0.$$

Négligeons d'abord les termes affectés de i, et nous aurons

$$M + 3\alpha K^2 = 0, \quad N + \frac{10}{3}\alpha M + 8\beta K^2 = 0,$$

d'où l'on tire

$$\alpha = -\frac{M}{3K^2} \quad \text{et} \quad \beta = -\frac{N}{8K^2} - \frac{10\alpha M}{3.8K^2} = -\frac{N}{8K^2} + \frac{10M^2}{9.8K^4}.$$

Substituant ensuite ces valeurs dans les termes de l'ordre de i, et négligeant ceux de l'ordre de i^2, on aura

$$M + 3\alpha K^2 - 6iL\left(\frac{M}{3K^2}\right)^2 + 15iL\left(-\frac{N}{8K^2} + \frac{10M^2}{9.8K^4}\right) = 0,$$
$$N + \frac{10}{3}\alpha M + 8\beta K^2 - 6iL\left(-\frac{M}{3K^2}\right)\left(-\frac{N}{8K^2} + \frac{10M^2}{9.8K^4}\right) = 0,$$

d'où l'on tirera de nouvelles valeurs plus exactes de α et de β, lesquelles seront

$$\alpha = -\frac{M}{3K^2} + \frac{6iL}{3K^2}\left(\frac{M}{3K^2}\right)^2 - \frac{15iL}{3K^2}\left(-\frac{N}{8K^2} + \frac{10M^2}{9.8K^4}\right),$$

$$\beta = -\frac{N}{8K^2} + \frac{10M^2}{8.9K^4} - \frac{10.6iLM}{9.8K^4}\left(\frac{M}{3K^2}\right)^2 + \frac{15iLM}{9.8K^4}\left(-\frac{N}{8K^2} + \frac{10M^2}{9.8K^4}\right)$$
$$+ \frac{6iL}{8K^2}\left(-\frac{M}{3K^2}\right)\left(-\frac{N}{8K^2} + \frac{10M^2}{9.8K^4}\right),$$

et ainsi de suite; mais comme $\mu = i\lambda\alpha$ et $\nu = i^2\lambda\beta$, il est clair que pour notre objet il suffira d'avoir la valeur de α aux quantités de l'ordre de i^2 près, et celle de β aux quantités de l'ordre de i près; de sorte qu'on pourra se contenter de prendre

$$\alpha = -\frac{M}{3K^2} + \frac{iL}{K^4}\left(\frac{5N}{8} - \frac{17M^2}{36K^2}\right)$$

et

$$\beta = -\frac{N}{8K^2} + \frac{10M^2}{9.8K^4}.$$

Ayant trouvé les valeurs de α et de β, on les substituera dans l'équation $\rho^2 = -K^2 - 6i\alpha L - 6i^2\beta H$, et l'on aura, en ordonnant les termes par rapport à i,

$$\rho^2 = -K^2 + \frac{2iLM}{K^2} - \frac{i^2L^2}{K^4}\left(\frac{15N}{4} - \frac{17M^2}{6K^2}\right) + \frac{i^2H}{K^2}\left(\frac{3N}{4} - \frac{5M^2}{6K^2}\right).$$

Soit $\rho = R\sqrt{-1}$, en sorte que $\rho^2 = -R^2$, et l'on aura

$$R^2 = K^2 - \frac{2iLM}{K^2} + \frac{i^2L^2}{K^4}\left(\frac{15N}{4} - \frac{17M^2}{6K^2}\right) - \frac{i^2H}{K^2}\left(\frac{3N}{4} - \frac{5M^2}{6K^2}\right);$$

d'où

$$R = K - i\frac{LM}{K^3} + i^2\frac{L^2}{K^5}\left(\frac{15N}{8} - \frac{10M^2}{3K^2}\right) - i^2\frac{H}{K^3}\left(\frac{3N}{8} - \frac{15M^2}{12K^2}\right).$$

Reprenons maintenant l'équation (G), et substituons-y $R\sqrt{-1}$ au lieu de ρ, $i\lambda\alpha$ au lieu de μ, $i^2\lambda\beta$ au lieu de ν, y^2 au lieu de u, et y^3 au lieu de v, nous aurons, en prenant C pour la constante,

$$\lambda e^{Rt\sqrt{-1}}\left[(1+2i\alpha y+3i^2\beta y^2)\frac{dy}{dt} - \left(y+i\alpha y^2+i^2\beta y^3+\frac{L-2i\alpha H}{R^2}\right)R\sqrt{-1}\right]=C.$$

Or, soient, lorsque $t=0$,

$$y=f \quad \text{et} \quad \frac{dy}{dt}=g,$$

on aura

$$C=\lambda(1+2i\alpha f+3i^2\beta f^2)g-\lambda\left(f+i\alpha f^2+i^2\beta f^3+\frac{L-2i\alpha H}{R^2}\right)R\sqrt{-1}.$$

Donc, si l'on fait

$$F=f+i\alpha f^2+i^2\beta f^3+\frac{L-2i\alpha H}{R^2}, \quad G=(1-2i\alpha f+3i^2\beta f^2)g,$$

et qu'on divise toute l'équation par $\lambda e^{Rt\sqrt{-1}}$, on aura

$$\begin{aligned}(1+2i\alpha y+3i^2\beta y^2)\frac{dy}{dt}&-\left(y+i\alpha y^2+i^2\beta y^3+\frac{L-2i\alpha H}{R^2}\right)R\sqrt{-1}\\ &=(G-FR\sqrt{-1})\,e^{-Rt\sqrt{-1}}\\ &=(G\cos Rt-FR\sin Rt)-(FR\cos Rt+G\sin Rt)\sqrt{-1};\end{aligned}$$

et prenant le radical $\sqrt{-1}$ en moins,

$$\begin{aligned}(1+2i\alpha y+3i^2\beta y^2)\frac{dy}{dt}&+\left(y+i\alpha y^2+i^2\beta y^3+\frac{L-2i\alpha H}{R^2}\right)R\sqrt{-1}\\ &=(G\cos Rt-FR\sin Rt)+(FR\cos Rt+G\sin Rt)\sqrt{-1};\end{aligned}$$

donc, retranchant la première de ces équations de la seconde, et divisant ensuite par $2R\sqrt{-1}$, on aura

$$(\mathrm{H}) \qquad y+i\alpha y^2+i^2\beta y^3+\frac{L-2i\alpha H}{R^2}=F\cos Rt+\frac{G}{R}\sin Rt.$$

C'est l'intégrale de l'équation (A), en n'ayant égard qu'aux quantités de l'ordre de i et de i^2.

Si l'on veut avoir la valeur de y, on n'aura qu'à résoudre l'équation (H) par approximation, en observant de négliger dans cette opération les quantités qui se trouveraient multipliées par des puissances de i plus hautes que la seconde.

Pour y parvenir plus aisément on fera

$$y = T + iT' + i^2 T'',$$

et, substituant cette valeur dans l'équation (H), on égalera à zéro les termes homogènes, c'est-à-dire ceux qui sont affectés de la même puissance de i; ce qui donnera

$$T = F \cos Rt + \frac{G}{R} \sin Rt - \frac{L - 2i\alpha H}{R^2},$$
$$T' = -\alpha T^2, \quad T'' = -2\alpha T T' - \beta T^3;$$

d'où il est clair que la valeur de y ne contiendra que des sinus et des cosinus d'angles multiples de t.

En supposant $g = 0$, on verra que la valeur de R^2 trouvée ci-dessus s'accorde entièrement avec celle du n° 45; il n'y aura, pour s'en convaincre, qu'à mettre, au lieu de H et de f', leurs valeurs approchées $-(K^2 f + 2Lf)$ et $f + \frac{L}{K^2}$ (n^{os} 44 et 45).

Du mouvement d'un corps qui décrit une orbite à peu près circulaire, en vertu d'une force centrale proportionnelle à une fonction quelconque de la distance.

47. Soient r le rayon vecteur de l'orbite, t le temps écoulé depuis le commencement du mouvement, φ l'angle parcouru par le rayon r durant le temps t, Δr la fonction de la distance r qui exprime la force centrale, a la distance initiale, c la vitesse de projection, et b l'angle de la ligne de projection avec le rayon vecteur; on aura, en prenant dt constant, ces deux équations

$$d\frac{r^2 d\varphi}{dt} = 0, \quad \frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{r\, d\varphi^2}{dt^2} + \Delta r = 0.$$

(*Voyez* l'Article IV du Mémoire qui a pour titre *Application de la méthode précédente, etc.*, page 370.)

La première étant intégrée donne $\frac{r^2 d\varphi}{dt}$ égale à une constante; mais lorsque $t=0$, on a

$$r=a \quad \text{et} \quad \frac{r\,d\varphi}{dt}=c\sin b;$$

donc

$$\frac{r^2 d\varphi}{dt}=ac\sin b \quad \text{et} \quad \frac{d\varphi}{dt}=\frac{ac\sin b}{r^2};$$

substituant donc cette valeur dans l'autre équation, on aura, pour les équations générales du mouvement du corps,

$$\frac{d^2 r}{dt^2}-\frac{a^2c^2\sin^2 b}{r^3}+\Delta r=0, \quad \frac{d\varphi}{dt}-\frac{ac\sin b}{r^2}=0.$$

Maintenant, puisqu'on suppose que l'orbite diffère peu d'un cercle, il est clair que r doit être presque égal à a, et que par conséquent on peut faire $r=a+iy$, i étant un coefficient très-petit, et y une nouvelle variable; ce qui donnera

$$\frac{d^2 r}{dt^2}=i\frac{d^2 y}{dt^2}, \quad \frac{1}{r^3}=\frac{1}{(a+iy)^3}=\frac{1}{a^3}-3i\frac{y}{a^4}+6i^2\frac{y^2}{a^5}-10i^3\frac{y^3}{a^6}+\ldots,$$

$$\Delta r=\Delta(a+iy)=\Delta a+i\Delta' a y+i^2\frac{\Delta'' a}{2}y^2+i^3\frac{\Delta''' a}{2.3}y^3+\ldots,$$

en supposant

$$\frac{d.\Delta r}{dr}=\Delta' r, \quad \frac{d.\Delta' r}{dr}=\Delta'' r,\ldots;$$

donc la première équation deviendra

$$i\frac{d^2 y}{dt^2}-\frac{c^2\sin^2 b}{a}\left(1-3i\frac{y}{a}+6i^2\frac{y^2}{a^2}-10i^3\frac{y^3}{a^3}+\ldots\right)$$
$$+\Delta a+i\Delta' a y+i^2\frac{\Delta'' a}{2}y^2+i^3\frac{\Delta''' a}{2.3}y^3+\ldots=0;$$

d'où l'on voit que $\Delta a-\frac{c^2\sin^2 b}{a}$ doit être nécessairement une quantité très-petite de l'ordre de i; de sorte qu'on peut supposer

$$\Delta a - \frac{c^2 \sin^2 b}{a} = i\,\mathrm{L},$$

moyennant quoi l'équation sera divisible par i, et deviendra, après la division,

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \left(\Delta' a + \frac{3c^2 \sin^2 b}{a^2}\right) y + \mathrm{L} + i\left(\frac{\Delta'' a}{2} - \frac{6c^2 \sin^2 b}{a^3}\right) y^2$$
$$+ i^2 \left(\frac{\Delta''' a}{2.3} + \frac{10 c^2 \sin^2 b}{a^4}\right) y^3 + \ldots = 0,$$

équation qui se réduit à la formule (A) du n° **42**, en supposant

$$\Delta' a + \frac{3c^2 \sin^2 b}{a^2} = \mathrm{K}^2, \quad \frac{\Delta'' a}{2} - \frac{6c^2 \sin^2 b}{a^3} = \mathrm{M}, \quad \frac{\Delta''' a}{2.3} + \frac{10 c^2 \sin^2 b}{a^4} = \mathrm{N}, \ldots$$

Ainsi l'on aura la valeur de y, et par conséquent celle de r en t; il faudra seulement observer que, quand $t = 0$, $r = a$ et $\frac{dr}{dt} = -c\cos b$, c'est-à-dire

$$y = 0 \quad \text{et} \quad i\frac{dy}{dt} = -c\cos b,$$

par conséquent

$$f = 0 \quad \text{et} \quad ig = -c\cos b;$$

d'où l'on voit que $\cos b$ doit être très-petit, et par conséquent l'angle de projection b presque droit; ce qui est d'ailleurs évident, à cause que l'orbite est supposée peu différente d'un cercle.

L'autre équation donnera, après la substitution de $a + iy$ au lieu de r,

$$\frac{d\varphi}{dt} - \frac{c \sin b}{a} + 2i\frac{c \sin b}{a^2} y - 3i^2 \frac{c\sin b}{a^3} y^2 + 4i^3 \frac{c \sin b}{a^4} y^3 - \ldots = 0.$$

Je substitue dans cette équation u au lieu de y^2, et v au lieu de y^3, ensuite j'y ajoute les trois équations (E) du n° **46**, multipliées la première par λ, la seconde par μ, la troisième par ν (λ, μ, ν étant des coefficients indéterminés), ce qui me donne, en ordonnant les termes,

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi}{dt} &+ \lambda\frac{d^2y}{dt^2} + \mu\frac{d^2u}{dt^2} + \nu\frac{d^2v}{dt^2} - \frac{c\sin b}{a} + \lambda L + 2\mu H \\ &+ \left(\frac{2ic\sin b}{a^2} + \lambda K^2 + 6\mu L + 6\nu H\right) y \\ &+ \left(-\frac{3i^2c\sin b}{a^3} + i\lambda M + 4\mu K^2 + 15\nu L\right) u \\ &+ \left(\frac{4i^3c\sin b}{a^4} + i^2\lambda N + \frac{10i\mu M}{3} + 9\nu K^2\right) v = 0.\end{aligned}$$

Je suppose à présent

$$(\mathrm{I})\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{2ic\sin b}{a^2} + \lambda K^2 + 6\mu L + 6\nu H = 0, \\ &-\frac{3i^2c\sin b}{a^3} + i\lambda M + 4\mu K^2 + 15\nu L = 0, \\ &\frac{4i^3c\sin b}{a^4} + i^2\lambda N + \frac{10i\mu M}{3} + 9\nu K^2 = 0, \end{aligned}\right.$$

ce qui réduit l'équation précédente à

$$\frac{d\varphi}{dt} + \lambda\frac{d^2y}{dt^2} + \mu\frac{d^2u}{dt^2} + \nu\frac{d^2v}{dt^2} - \frac{c\sin b}{a} + \lambda L + 2\mu H = 0,$$

dont l'intégrale est

$$\varphi + \lambda\frac{dy}{dt} + \mu\frac{du}{dt} + \nu\frac{dv}{dt} - \left(\frac{c\sin b}{a} - \lambda L - 2\mu H\right) t = \text{const.},$$

c'est-à-dire, en remettant y^2 au lieu de u, y^3 au lieu de v, et faisant attention que lorsque $t = 0$ on a $\varphi = 0$, $y = 0$ et $\frac{dy}{dt} = g$,

$$\varphi + (\lambda + 2\mu y + 3\nu y^2)\frac{dy}{dt} - \left(\frac{c\sin b}{a} - \lambda L - 2\mu H\right) t = \lambda g.$$

Et il ne s'agira plus que de tirer les valeurs de λ, μ, ν des équations (I); or, si l'on fait $\lambda = i\gamma$, $\mu = i^2\delta$, $\nu = i^3\varepsilon$, et qu'on divise la première équation par i, la seconde par i^2, la troisième par i^3, on aura

$$\frac{2c\sin b}{a^2}+\gamma K^2+6i\delta L+6i^2\varepsilon H=0,$$

$$-\frac{3c\sin b}{a^3}+\gamma M+4\delta K^2+15i\varepsilon L=0,$$

$$\frac{4c\sin b}{a^4}+\gamma N+\frac{10}{3}\delta M+9\varepsilon K^2=0,$$

d'où l'on tire, en négligeant ce qu'on doit négliger,

$$\gamma=-\frac{2c\sin b}{a^2K^2}+\frac{6iL}{K^2}\delta-\frac{6i^2H}{K^2}\varepsilon,$$

$$\delta=\frac{c\sin b}{a^2K^2}\left(\frac{3}{4a}+\frac{M}{2K^2}+\frac{9iLM}{8aK^4}+\frac{3iLM^2}{4K^6}\right)-\frac{15iL}{4K^2}\varepsilon,$$

$$\varepsilon=\frac{c\sin b}{a^2K^2}\left(-\frac{4}{9a^2}+\frac{2N}{9K^2}-\frac{5M}{18aK^2}-\frac{5M^2}{27K^4}\right).$$

Donc si l'on fait, pour abréger,

$$S=\frac{c\sin b}{a}-i\gamma L-2i^2\delta H,$$

on aura

$$\varphi=St+i\gamma g-i(\gamma+2i\delta y+3i^2\varepsilon y^2)\frac{dy}{dt}. \tag{K}$$

Or y est déjà connu en t, donc on connaîtra aussi φ en t.

Il est à remarquer que $St+i\gamma g$ représente l'angle du mouvement moyen; de sorte que si l'on nomme cet angle θ, et qu'on substitue dans les équations (H) et (K) $\frac{\theta-i\gamma g}{S}$ au lieu de t, on aura les formules qui feront trouver le lieu vrai du corps, son lieu moyen étant donné.

Il est visible que les absides de l'orbite se trouveront aux points où $dy=0$; or, si l'on différentie l'équation (H) et qu'on fasse ensuite $dy=0$, on aura

$$-RF\sin Rt+G\cos Rt=0,$$

c'est-à-dire

$$\operatorname{tang} Rt=\frac{G}{RF}.$$

Soit h le plus petit angle qui répond à la tangente $\frac{G}{RF}$, et l'on aura

$$Rt = h + \mu\pi,$$

π dénotant l'angle de 180 degrés, et μ un nombre quelconque entier; maintenant l'équation (K) donnera, lorsque $dy = 0$,

$$\varphi = St + i\gamma g;$$

donc, mettant au lieu de t sa valeur $\frac{h+\mu\pi}{R}$, on aura pour les lieux des absides

$$\varphi = i\gamma g + \frac{S}{R}(h + \mu\pi);$$

d'où l'on voit que la distance d'une abside à l'autre sera égale à l'angle $\frac{S}{R}\pi$, et que par conséquent le mouvement des absides sera de $\left(\frac{S}{R} - 1\right)$ 360 degrés à chaque révolution.

48. Si l'on veut connaître la figure de l'orbite décrite par les corps, il faudra éliminer t des équations (H) et (K) pour avoir une équation entre y et φ; mais il sera beaucoup plus simple de substituer d'abord dans l'équation $\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{r\,d\varphi^2}{dt^2} + \Delta r = 0$, au lieu de dt, sa valeur $\frac{r^2 d\varphi}{ac\sin b}$, ce qui donnera, en faisant $\frac{1}{r} = s$ et prenant $d\varphi$ constant,

$$\frac{d^2s}{d\varphi^2} + s - \frac{\Delta\frac{1}{s}}{s^2a^2c^2\sin^2 b} = 0,$$

et d'intégrer ensuite cette dernière équation par la méthode du n° 46.

En effet, puisque r est à peu près égale à a, par hypothèse, s sera à peu près égale à $\frac{1}{a}$, et par conséquent on pourra supposer

$$s = \frac{1}{a} + iy,$$

ce qui, en faisant

$$\frac{\Delta\frac{1}{s}}{s^2a^2t^2\sin^2 b} = \Gamma s,$$

et

$$\frac{1}{a} - \Gamma\frac{1}{a} = \mathrm{L}, \quad 1 - \Gamma'\frac{1}{a} = \mathrm{K}^2, \quad -\frac{1}{2}\Gamma''\frac{1}{a} = \mathrm{M}, \quad -\frac{1}{2.3}\Gamma'''\frac{1}{a} = \mathrm{N}, \ldots,$$

donnera

$$\frac{d^2y}{d\varphi^2} + \mathrm{K}^2 y + \mathrm{H} + i\mathrm{M}y^2 + i^2\mathrm{N}y^3 + \ldots = 0,$$

dont l'intégrale sera (n° 46)

$$y + i\alpha y^2 + i^2\beta y^3 = -\frac{\mathrm{L} - 2i\alpha\mathrm{H}}{\mathrm{R}^2} + \mathrm{F}\cos\mathrm{R}\varphi + \frac{\mathrm{G}}{\mathrm{R}}\sin\mathrm{R}\varphi.$$

Ainsi l'on aura y en φ; il faudra seulement observer que la quantité g n'exprimera plus ici la valeur de $\frac{dy}{dt}$ lorsque $t = 0$, mais celle de $\frac{dy}{d\varphi}$, c'est-à-dire $\frac{dr}{id\varphi}$, de sorte qu'on aura

$$ig = -\cot b.$$

Le coefficient R donnera la distance d'une abside à l'autre de $\frac{180^\circ}{\mathrm{R}}$, et l'on verra, après en avoir fait le calcul, que cette valeur s'accorde avec celle que nous avons trouvée ci-dessus.

Soit

$$\Delta r = \mathrm{A}r^{m-2},$$

on aura

$$\Gamma s = \frac{\mathrm{A}}{a^2c^2\sin^2 b}s^{-m},$$

donc

$$\Gamma\frac{1}{a} = \frac{\mathrm{A}a^{m-2}}{c^2\sin^2 b},$$

$$\Gamma'\frac{1}{a} = -m\frac{\mathrm{A}a^{m-1}}{c^2\sin^2 b},$$

$$\Gamma''\frac{1}{a} = m(m+1)\frac{\mathrm{A}a^{m}}{c^2\sin^2 b},$$

$$\Gamma'''\frac{1}{a} = -m(m+1)(m+2)\frac{\mathrm{A}a^{m+1}}{c^2\sin^2 b},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

on aura donc

$$\frac{1}{a} - \frac{A a^{m-2}}{c^2 \sin^2 b} = i L,$$

$$1 + m \frac{A a^{m-1}}{c^2 \sin^2 b} = K^2,$$

$$-\frac{m(m+1)}{2} \frac{A a^m}{c^2 \sin^2 b} = M,$$

$$\frac{m(m+1)(m+2)}{2.3} \frac{A a^{m+1}}{c^2 \sin^2 b} = N,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

donc, puisque $\frac{A a^{m-2}}{c^2 \sin^2 b} = \frac{1}{a} - iL$, on aura

$$K^2 = 1 + m(1 - iaL), \quad M = -\frac{m(m+1)a}{2}(1 - iaL),$$

$$N = \frac{m(m+1)(m+2)a^2}{2.3}(1 - iaL), \ldots;$$

faisant donc ces substitutions dans la valeur de R^2 du n° 46, et rejetant tous les termes qui contiendraient des puissances de i plus hautes que la seconde, on aura

$$\begin{aligned} R^2 &= 1 + m(1 - iaL) + im(m+1)aL \frac{1 - iaL}{1 + m(1 - iaL)} \\ &+ \frac{i^2 a^2 L^2}{(1+m)^2}\left[\frac{5m(m+1)(m+2)}{8} - \frac{17 m^2(m+1)}{24}\right] \\ &- \frac{i^2 a^2 H}{1+m}\left[\frac{m(m+1)(m+2)}{8} - \frac{5m^2(m+1)}{24}\right] \\ &= 1 + m + \frac{i^2 m(3-m)a^2}{12(1+m)}[L^2 - (1+m)H], \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$R = \sqrt{1+m} + \frac{i^2 m(3-m)a^2}{24(1+m)^{\frac{3}{2}}}[L^2 - (1+m)H],$$

ce qui donnera pour la distance d'une abside à l'autre

$$\left[\frac{1}{\sqrt{1+m}} - \frac{i^2 m(3-m)a^2}{24(1+m)^{\frac{5}{2}}}[L^2 - (1+m)H]\right] 180^\circ.$$

49. Supposons maintenant que l'on ait à intégrer l'équation

$$\frac{d^2y}{dt^3}+K^2y+L+i\left(My^2+M'\frac{dy^2}{dt^2}\right)+i^2\left(Ny^3+N'y\frac{dy^2}{dt^2}\right)+\ldots=0,$$

on pourra faire disparaître la quantité $\frac{dy^2}{dt^2}$ de la manière suivante.

Qu'on multiplie l'équation par $2dy$, et qu'on en prenne l'intégrale, en négligeant les termes affectés de i^2, on aura

$$\frac{dy^2}{dt^3}+K^2y^2+2Ly+H+i\left(\frac{2M}{3}y^3+2M'\int\frac{dy^2}{dt^2}dy\right)=0.$$

Or,

$$\int\frac{dy^2}{dt^2}dy=y\frac{dy^2}{dt^2}-2\int y\,dy\frac{d^2y}{dt^2},$$

et, en mettant au lieu de $\frac{dy^2}{dt^2}$ et de $\frac{d^2y}{dt^2}$ leurs valeurs approchées $-K^2y^2-2Ly-H$ et $-K^2y-L$,

$$\int\frac{dy^2}{dt^2}dy=-\frac{K^2}{3}y^3-Ly^2-Hy;$$

donc on aura

$$\frac{dy^2}{dt^2}+(K^2-2iLM')y^2+(2L-2iHM')y+H+i\left(\frac{2M}{3}-\frac{2K^2M'}{3}\right)y^3=0.$$

Substituant donc cette valeur de $\frac{dy^2}{dt^2}$ dans l'équation proposée, elle deviendra

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dt^2}&+[K^2-2iLM'+i^2H(2M'^2-N')]y+L-iHM'\\&+i(M-K^2M'+2iLM'^2)y^2+i^2\left(N-K^2N'-\frac{2MM'}{3}+\frac{2K^2M^2}{3}\right)y^3=0,\end{aligned}$$

laquelle est, comme on le voit, dans le cas de l'équation (A).

Par cette méthode on pourra faire disparaître toutes les puissances paires de $\frac{dy}{dt}$ qui se trouveront dans l'équation proposée. A l'égard des puissances impaires de $\frac{dy}{dt}$, il est facile de voir qu'elles donneront dans la valeur de y des arcs de cercle; d'où il s'ensuit que la solution ne pourra avoir lieu que tant que t ne sera pas fort grande, et qu'ainsi il sera permis de se servir de telle méthode d'approximation qu'on voudra. Cependant, comme il peut être quelquefois important de connaître la vraie forme de la valeur de y, qu'on chercherait vainement par les méthodes ordinaires, je vais donner le moyen d'y parvenir.

50. Soit en général l'équation

$$\frac{d^2y}{dt^2}+Ky+K'\frac{dy}{dt}+L+i\left(My^2+M'y\frac{dy}{dt}+M''\frac{dy^2}{dt^2}\right)$$
$$+i^2\left(Ny^3+N'y^2\frac{dy}{dt}+N''y\frac{dy^2}{dt^2}+N'''\frac{dy^3}{dt^3}\right)+\ldots=0.$$

On fera $\frac{dy}{dt}=z$, et l'on aura

$$\frac{d^2y}{dt^2}+Ky+K'z+L+i(My^2+M'yz+M''z^2)$$
$$+i^2(Ny^3+N'y^2z+N''yz^2+N'''z^3)+\ldots=0.$$

On différentiera cette équation, et l'on y substituera ensuite $\frac{d^2z}{dt^2}$ au lieu de $\frac{d^3y}{dt^3}$, z au lieu de $\frac{dy}{dt}$, et $\frac{d^2y}{dt^2}$ au lieu de $\frac{dz}{dt}$, ou plutôt sa valeur en y et z; de cette manière on aura une nouvelle équation en z de la forme suivante

$$\frac{d^2z}{dt^2}+ky+k'z+l+i(my^2+m'yz+m''z^2)$$
$$+i^2(ny^3+n'y^2z+n''yz^2+n'''z^3)+\ldots=0.$$

Toute la difficulté se réduira donc à intégrer ces deux équations; sur quoi voyez ci-après le n° 52.

51. Si l'équation proposée était du quatrième ordre, on la réduirait à deux du second, en faisant $\frac{d^2y}{dt^2}-z=0$, et substituant ensuite z au lieu de $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{dz}{dt}$ au lieu de $\frac{d^3y}{dt^3}$, et $\frac{d^2z}{dt^2}$ au lieu de $\frac{d^4y}{dt^4}$.

Mais si la proposée était du troisième ordre, alors il faudrait la réduire d'abord au quatrième par la différentiation, et ensuite à deux du second par la supposition de $\frac{d^2y}{dt^2}-z=0$, et ainsi du reste.

De l'intégration des équations

$$(L)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2}+F+Gy+Hz+i(Ky^2+Lyz+Mz^2) \\ \qquad +i^2(Ny^3+Py^2z+Qyz^2+Rz^3)+\ldots=0, \end{cases}$$

$$(M)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2z}{dt^2}+f+gy+hz+i(ky^2+lyz+mz^2) \\ \qquad +i^2(ny^3+py^2z+qyz^2+rz^3)+\ldots=0. \end{cases}$$

52. Nous commencerons par chercher la valeur des quantités $\frac{dy^2}{dt^2}$, $\frac{dz^2}{dt^2}$ et $\frac{dy\,dz}{dt^2}$, qui entrent dans les différentielles secondes de y^2, z^2, yz,...; or, comme nous nous proposons seulement de pousser l'approximation jusqu'aux quantités de l'ordre de i^2, il suffira d'avoir égard, dans les valeurs dont il s'agit, aux termes de l'ordre de i, parce que les quantités y^2, z^2, yz,... sont déjà elles-mêmes multipliées par i dans les équations proposées.

Je multiplie d'abord l'équation (L) par $2dy$, et j'en prends l'intégrale; j'ai, en négligeant les termes affectés de i^2,

$$(N)\quad \begin{cases} \dfrac{dy^2}{dt^2}+A+2Fy+Gy^2+2H\displaystyle\int z\,dy \\ \qquad +i\left(\dfrac{2K}{3}y^3+2L\displaystyle\int yz\,dy+2M\int z^2dy\right)=0. \end{cases}$$

Je multiplie de même l'équation (M) par $2dz$ et j'ai, après l'intégration,

$$\frac{dz^2}{dt^2}+B+2fz+2g\int y\,dz+hz^2+i\left(2k\int y^2dz+2l\int yz\,dz+\frac{2m}{3}z^3\right)=0,$$

ou bien, en mettant $yz-\int z\,dy$ au lieu de $\int y\,dz$, $y^2z-2\int yz\,dy$ au lieu de $\int y^2dz$, et $\frac{1}{2}yz^2-\frac{1}{2}\int z^2dy$ au lieu de $\int yz\,dz$,

$$(O)\quad \begin{cases} \dfrac{dz^2}{dt^2}+B+2fz+2gyz+hz^2-2g\displaystyle\int z\,dy \\ \qquad +i\left(2ky^2z+lyz^2+\dfrac{2m}{3}z^3-4k\displaystyle\int yz\,dy-l\int z^2dy\right)=0. \end{cases}$$

Enfin, multipliant l'équation (L) par dz et l'équation (M) par dy, les ajoutant ensemble et intégrant, on aura

$$(\mathrm{P})\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{dy\,dz}{dt^2}+\mathrm{C}+fy+\mathrm{F}z+\frac{g}{2}y^2+\mathrm{G}yz+\frac{\mathrm{H}}{2}z^2+(h-\mathrm{G})\int z\,dy\\ &\quad+i\left[\frac{k}{3}y^3+\mathrm{K}y^2z+\frac{\mathrm{L}}{2}yz^2+\frac{\mathrm{M}}{3}z^3\right.\\ &\qquad\qquad\left.+(l-2\mathrm{K})\int yz\,dy+\left(m-\frac{\mathrm{L}}{2}\right)\int z^2\,dy\right]=0.\end{aligned}\right.$$

Pour déterminer les constantes A, B, C, on supposera que, quand $t=0$, on ait $y=\gamma$, $z=\delta$, $\frac{dy}{dt}=\varepsilon$, $\frac{dz}{dt}=\eta$, $\int z\,dy=\Gamma$, $\int yz\,dy=\Delta$ et $\int z^2\,dy=\Lambda$, et l'on aura

$$\mathrm{A}=-\varepsilon^2-2\mathrm{F}\gamma-\mathrm{G}\gamma^2-2\mathrm{H}\Gamma-i\left(\frac{2\mathrm{K}}{3}\gamma^3+2\mathrm{L}\Delta+2\mathrm{M}\Lambda\right),$$

$$\begin{aligned}\mathrm{B}=&-\eta^2-2f\delta-2g\gamma\delta-h\delta^2+2g\Gamma\\ &-i\left(2k\gamma^2\delta+l\gamma\delta^2+\frac{2m}{3}\delta^3-4k\Delta-l\Lambda\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{C}=&-\varepsilon\eta-f\gamma-\mathrm{F}\delta-\frac{g}{2}\gamma^2-\mathrm{G}\gamma\delta-\frac{\mathrm{H}}{2}\delta^2-(h-\mathrm{G})\Gamma\\ &-i\left[\frac{k}{3}\gamma^3+\mathrm{K}\gamma^2\delta+\frac{\mathrm{L}}{2}\gamma\delta^2+\frac{\mathrm{M}}{3}\delta^3+(l-2\mathrm{K})\Delta+\left(m-\frac{\mathrm{L}}{2}\right)\Lambda\right].\end{aligned}$$

Cela posé, je fais

$$\begin{array}{cccc} y^2=u, & yz=u_1, & z^2=u_2, & \int z\,dy=u_3,\\ y^3=v, & y^2z=v_1, & yz^2=v_2 & z^3=v_3,\\ \int yz\,dy=v_4, & \int z^2\,dy=v_5, & y\int z\,dy=v_6, & z\int z\,dy=v_7; \end{array}$$

j'aurai, au lieu des équations (L) et (M), ces deux-ci :

$$(1)\quad \frac{d^2y}{dt^2}+\mathrm{F}+\mathrm{G}y+\mathrm{H}z+i(\mathrm{K}u+\mathrm{L}u_1+\mathrm{M}u_2)+i^2(\mathrm{N}v+\mathrm{P}v_1+\mathrm{Q}v_2+\mathrm{R}v_3)=0,$$

$$(2)\quad \frac{d^2z}{dt^2}+f+gy+hz+i(ku+lu_1+mu_2)+i^2(nv+pv_1+qv_2+rv_3)=0.$$

Maintenant on a :

$$1^{\circ}\quad \frac{d^2u}{dt^2}=2y\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy^2}{dt^2};$$

donc $2y\times(\mathrm{L})+2(\mathrm{N})$ donnera, en négligeant les termes de l'ordre de i,

$$\begin{aligned}&\frac{d^2u}{dt^2}+2\mathrm{A}+6\mathrm{F}y+4\mathrm{G}y^2+2\mathrm{H}yz+4\mathrm{H}\int z\,dy\\&\quad+i\left(\frac{10\mathrm{K}}{3}y^3+2\mathrm{L}y^2z+2\mathrm{M}yz^2+4\mathrm{L}\int yz\,dy+4\mathrm{M}\int z^2\,dy\right)=0,\end{aligned}$$

et, en faisant les substitutions précédentes,

$$(3)\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{d^2u}{dt^2}+2\mathrm{A}+6\mathrm{F}y+4\mathrm{G}u+2\mathrm{H}u_1+4\mathrm{H}u_3\\&\quad+i\left(\frac{10\mathrm{K}}{3}v+2\mathrm{L}v_1+2\mathrm{M}v_2+4\mathrm{L}v_4+4\mathrm{M}v_5\right)=0.\end{aligned}\right.$$

$$2^{\circ}\quad \frac{d^2u_1}{dt^2}=z\frac{d^2y}{dt^2}+y\frac{d^2z}{dt^2}+2\frac{dy\,dz}{dt^2};$$

donc $z\times(\mathrm{L})+y\times(\mathrm{M})+2(\mathrm{P})$ donnera

$$(4)\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{d^2u_1}{dt^2}+2\mathrm{C}+3fy+3\mathrm{F}z+2gu+(3\mathrm{G}+h)u_1+2\mathrm{H}u_2+2(h-\mathrm{G})u_3\\&\quad+i\left[\frac{5k}{3}v+(3\mathrm{K}+l)v_1+(2\mathrm{L}+m)v_2+\frac{5\mathrm{M}}{3}v_3\right.\\&\qquad\qquad\left.+(2l-4\mathrm{K})v_4+(2m-\mathrm{L})v_5\right]=0.\end{aligned}\right.$$

$$3^{\circ}\quad \frac{d^2u_2}{dt^2}=2z\frac{d^2z}{dt^2}+2\frac{dz^2}{dt^2};$$

donc $2z\times(\mathrm{M})+2(\mathrm{O})$ donnera

$$(5)\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{d^2u_2}{dt^2}+2\mathrm{B}+6fz+6gu_1+4hu_2-4gu_3\\&\quad+i\left(6kv_1+4lv_2+\frac{10m}{3}v_3-8kv_4-2lv_5\right)=0.\end{aligned}\right.$$

$$4^{\circ}\quad \frac{d^2u_3}{dt^2}=z\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy\,dz}{dt^2};$$

donc $z \times (\mathrm{L}) + (\mathrm{P})$ donnera

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2 u_3}{dt^2} + \mathrm{C} + fy + 2\mathrm{F}z + \frac{g}{2}u + 2\mathrm{G}u_1 + \frac{3\mathrm{H}}{2}u_2 + (h - \mathrm{G})u_3 \\ &\quad + i\left[\frac{k}{3}v + 2\mathrm{K}v_1 + \frac{3\mathrm{L}}{2}v_2 + \frac{4\mathrm{M}}{3}v_3 + (l - 2\mathrm{K})v_4 + \left(m - \frac{\mathrm{L}}{2}\right)v_5\right] = 0. \end{aligned}\right.$$

$$5^{\circ}\quad \frac{d^2 v}{dt^2} = 3y^2\frac{d^2 y}{dt^2} + 6y\frac{dy^2}{dt^2};$$

donc $3y^2 \times (\mathrm{L}) + 6y \times (\mathrm{N})$ donnera, en rejetant les termes affectés de i, à cause que la variable v est déjà elle-même multipliée par i^2 dans les équations (1) et (2),

$$(7)\quad \frac{d^2 v}{dt^2} + 6\mathrm{A}y + 15\mathrm{F}u + g\mathrm{G}v + 3\mathrm{H}v_1 + 12\mathrm{H}v_6 = 0.$$

$$6^{\circ}\quad \frac{d^2 v_1}{dt^2} = 2yz\frac{d^2 y}{dt^2} + y^2\frac{d^2 z}{dt^2} + 2z\frac{dy^2}{dt^2} + 4y\frac{dy\,dz}{dt^2};$$

donc $2yz \times (\mathrm{L}) + y^2 \times (\mathrm{M}) + 2z \times (\mathrm{N}) + 4y \times (\mathrm{P})$ donnera, en négligeant par la même raison que ci-devant les termes de l'ordre de i,

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2 v_1}{dt^2} + 4\mathrm{C}y + 2\mathrm{A}z + 5fu + 10\mathrm{F}u_1 + 3gv \\ &\quad + (8\mathrm{G} + h)v_1 + 4\mathrm{H}v_2 + 4(h - \mathrm{G})v_6 + 4\mathrm{H}v_7 = 0. \end{aligned}\right.$$

$$7^{\circ}\quad \frac{d^2 v_2}{dt^2} = z^2\frac{d^2 y}{dt^2} + 2yz\frac{d^2 z}{dt^2} + 2y\frac{dz^2}{dt^2} + 4z\frac{dy\,dz}{dt^2};$$

donc $z^2 \times (\mathrm{L}) + 2yz \times (\mathrm{M}) + 2y \times (\mathrm{O}) + 4z \times (\mathrm{P})$ donnera

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2 v_2}{dt^2} + 2\mathrm{B}y + 4\mathrm{C}z + 10fu_1 + 5\mathrm{F}u_2 + 8gv_1 \\ &\quad + (5\mathrm{G} + 4h)v_2 + 3\mathrm{H}v_3 - 4gv_6 + 4(h - \mathrm{G})v_7 = 0. \end{aligned}\right.$$

$$8^{\circ}\quad \frac{d^2 v_3}{dt^2} = 3z^2\frac{d^2 z}{dt^2} + 6z\frac{dz^2}{dt^2};$$

donc $3z^2 \times (\mathrm{M}) + 6z \times (\mathrm{O})$ donnera

$$(10)\quad \frac{d^2 v_3}{dt^2} + 6\mathrm{B}z + 15fu_2 + 15gv_2 + ghv_3 - 12gv_7 = 0.$$

9° $\frac{d^2v_4}{dt^2} = yz\frac{d^2y}{dt^2} + z\frac{dy^2}{dt^2} + y\frac{dy\,dz}{dt^2}$;

donc $yz \times (\mathrm{L}) + z \times (\mathrm{N}) + y \times (\mathrm{P})$ donnera

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2v_4}{dt^2} + \mathrm{C}y + \mathrm{A}z + fu + 4\mathrm{F}u_1 + \frac{g}{2}v \\ &\quad + 3\mathrm{G}v_1 + \frac{3\mathrm{H}}{2}v_2 + (h - \mathrm{G})v_6 + 2\mathrm{H}v_7 = 0. \end{aligned}\right.$$

10° $\frac{d^2v_5}{dt^2} = z^2\frac{d^2y}{dt^2} + 2z\frac{dy\,dz}{dt^2}$;

donc $z^2 \times (\mathrm{L}) + 2z \times (\mathrm{P})$ donnera

$$(12)\quad \frac{d^2v_5}{dt^2} + 2\mathrm{C}z + 2fu_1 + 3\mathrm{F}u_2 + gv_1 + 3\mathrm{G}v_2 + 2\mathrm{H}v_3 + 2(h - \mathrm{G})v_7 = 0.$$

11° $\frac{d^2v_6}{dt^2} = \left(yz + \int z\,dy\right)\frac{d^2y}{dt^2} + 2z\frac{dy^2}{dt^2} + y\frac{dy\,dz}{dt^2}$;

donc $\left(yz + \int z\,dy\right) \times (\mathrm{L}) + 2z \times (\mathrm{N}) + y \times (\mathrm{P})$ donnera

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2v_6}{dt^2} + \mathrm{C}y + 2\mathrm{A}z + fu + 6\mathrm{F}u_1 + \mathrm{F}u_3 \\ &\quad + \frac{g}{2}v + 4\mathrm{G}v_1 + \frac{3\mathrm{H}}{2}v_2 + hv_6 + 5\mathrm{H}v_7 = 0. \end{aligned}\right.$$

12° $\frac{d^2v_7}{dt^2} = z^2\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{d^2z}{dt^2}\int z\,dy + 3z\frac{dy\,dz}{dt^2}$;

donc $z^2 \times (\mathrm{L}) + (\mathrm{M}) \times \int z\,dy + 3z \times (\mathrm{P})$ donnera

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2v_7}{dt^2} + 3\mathrm{C}z + 3fu_1 + 4\mathrm{F}u_2 + fu_3 \\ &\quad + \frac{3g}{2}v_1 + 4\mathrm{G}v_2 + \frac{5\mathrm{H}}{2}v_3 + gv_6 + (4h - 3\mathrm{G}) = 0. \end{aligned}\right.$$

Ayant ainsi autant d'équations que de variables, l'intégration qui doit donner la valeur de y et de z est facile par la méthode du n° **26**; de sorte que, si l'on multiplie l'équation (1) par $e^{\rho t}$, l'équation (2) par $\lambda e^{\rho t}$, l'équation (3) par $i\mu e^{\rho t}$, l'équation (4) par $i\mu_1 e^{\rho t}$, l'équation (5) par $i\mu_2 e^{\rho t}$, l'équation (6) par $i\mu_3 e^{\rho t}$, l'équation (7) par $i^2\nu e^{\rho t}$, l'équation (8) par $i^2\nu_1 e^{\rho t}$, l'équation (9) par $i^2\nu_2 e^{\rho t}$, l'équation (10) par $i^2\nu_3 e^{\rho t}$, l'équation (11) par $i^2\nu_4 e^{\rho t}$, l'équation (12) par $i^2\nu_5 e^{\rho t}$, l'équation (13) par $i^2\nu_6 e^{\rho t}$ et l'équation (14) par $i^2\nu_7 e^{\rho t}$, et qu'on achève le reste comme dans le n° 46, on aura, en faisant, pour abréger,

$$\theta = y + \lambda z + i(\mu u + \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + \mu_3 u_3) + i^2(\nu v + \nu_1 v_1 + \nu_2 v_2 + \nu_3 v_3 + \nu_4 v_4 + \nu_5 v_5 + \nu_6 v_6 + \nu_7 v_7)$$

et

$$\varkappa = \mathrm{F} + \lambda f + i(2\mu\mathrm{A} + 2\mu_1\mathrm{C} + 2\mu_2\mathrm{B} + \mu_3\mathrm{C}),$$

on aura, dis-je,

$$(\mathrm{Q}) \qquad \left(\frac{d\theta}{dt} - \rho\theta + \frac{\varkappa}{\rho}\right) e^{\rho t} = \text{const.},$$

et ensuite

$$\rho^2 + \mathrm{G} + g\lambda + i(6\mathrm{F}\mu + 3f\mu_1 + f\mu_3) + i^2(6\mathrm{A}\nu + 4\mathrm{C}\nu_1 + 2\mathrm{B}\nu_2 + \mathrm{C}\nu_4 + \mathrm{C}\nu_6) = 0,$$

$$\mathrm{H} + (\rho^2 + h)\lambda + i(3\mathrm{F}\mu_1 + 6f\mu_2 + 2\mathrm{F}\mu_3) + i^2(2\mathrm{A}\nu_1 + 4\mathrm{C}\nu_2 + 6\mathrm{B}\nu_3 + \mathrm{A}\nu_4 + 2\mathrm{C}\nu_5 + 2\mathrm{A}\nu_6 + 3\mathrm{C}\nu_7) = 0,$$

$$\mathrm{K} + k\lambda + (\rho^2 + 4\mathrm{G})\mu + 2g\mu_1 + \frac{g}{2}\mu_3 + i(15\mathrm{F}\nu + 5f\nu_1 + f\nu_4 + f\nu_6) = 0,$$

$$\mathrm{L} + l\lambda + 2\mathrm{H}\mu + (\rho^2 + 3\mathrm{G} + h)\mu_1 + 6g\mu_2 + 2\mathrm{G}\mu_3 + i(10\mathrm{F}\nu_1 + 10f\nu_2 + 4\mathrm{F}\nu_4 + 2f\nu_5 + 6\mathrm{F}\nu_6 + 3f\nu_7) = 0,$$

$$\mathrm{M} + m\lambda + 2\mathrm{H}\mu_1 + (\rho^2 + 4h)\mu_2 + \frac{3\mathrm{H}}{2}\mu_3 + i(5\mathrm{F}\nu_2 + 15f\nu_3 + 3\mathrm{F}\nu_5 + 4\mathrm{F}\nu_7) = 0,$$

$$4\mathrm{H}\mu + 2(h - \mathrm{G})\mu_1 - 4g\mu_2 + (\rho^2 + h - \mathrm{G})\mu_3 + i(\mathrm{F}\nu_6 + f\nu_7) = 0,$$

$$\mathrm{N} + n\lambda + \frac{10\mathrm{K}}{3}\mu + \frac{5k}{3}\mu_1 + \frac{k}{3}\mu_3 + (\rho^2 + 9\mathrm{G})\nu + 3g\nu_1 + \frac{g}{2}\nu_4 + \frac{g}{2}\nu_6 = 0,$$

$$\mathrm{P} + p\lambda + 2\mathrm{L}\mu + (3\mathrm{K} + l)\mu_1 + 6k\mu_2 + 2\mathrm{K}\mu_3 + 3\mathrm{H}\nu + (\rho^2 + 8\mathrm{G} + h)\nu_1 + 8g\nu_2 + 3\mathrm{G}\nu_4 + g\nu_5 + 4\mathrm{G}\nu_6 + \frac{3g}{2}\nu_7 = 0,$$

$$Q + q\lambda + 2M\mu + (2L + m)\mu_1 + 4l\mu_2 + \frac{3L}{2}\mu_3$$
$$+ 4H\nu_1 + (\rho^2 + 5G + 4h)\nu_2 + 15g\nu_3 + \frac{3H}{2}\nu_4 + 3G\nu_5 + \frac{3H}{2}\nu_6 + 4G\nu_7 = 0,$$

$$R + r\lambda + \frac{5M}{3}\mu_1 + \frac{10m}{3}\mu_2 + \frac{4M}{3}\mu_3 + 3H\nu_2 + (\rho^2 + 9h)\nu_3 + 2H\nu_5 + \frac{5H}{2}\nu_7 = 0,$$

$$4L\mu + (2l - 4K)\mu_1 - 8k\mu_2 + (l - 2K)\mu_3 + \rho^2\nu_4 = 0,$$

$$4M\mu + (2m - L)\mu_1 - 2l\mu_2 + \left(m - \frac{L}{2}\right)\mu_3 + \rho^2\nu_5 = 0,$$

$$12H\nu + 4(h - G)\nu_1 - 4g\nu_2 + (h - G)\nu_4 + (\rho^2 + h)\nu_6 + g\nu_7 = 0,$$

$$4H\nu_1 + 4(h - G)\nu_2 - 12g\nu_3 + 2H\nu_4 + 2(h - G)\nu_5 + h\nu_6 + (\rho^2 + 4h - 3G)\nu_7 = 0,$$

équations par lesquelles on déterminera les quatorze inconnues ρ, λ, μ, μ_1, μ_2, μ_3, ν, ν_1, ν_2, ν_3, ν_4, ν_5, ν_6, ν_7, en ayant attention de pousser les valeurs des deux premières jusqu'aux quantités de l'ordre de i^2, celles des quatre suivantes jusqu'aux quantités de l'ordre de i seulement, et enfin de rejeter dans les valeurs des sept dernières toutes les quantités affectées de i.

Or je remarque : 1° que la quantité ρ ne paraissant que sous la forme quadrative, elle aura nécessairement deux valeurs, l'une positive et l'autre négative; de sorte que si l'on suppose que ρ désigne la racine positive, on pourra écrire partout indifféremment $+\rho$ et $-\rho$; 2° que si l'on représente les deux premières équations par

$$\rho^2 + G + g\lambda + i\alpha = 0 \quad \text{et} \quad H + (\rho^2 + h)\lambda + i\beta = 0,$$

on aura, en éliminant λ,

$$(\mathrm{R}) \qquad \rho^4 + (G + h + i\alpha)\rho^2 + Gh - Hg + i(\alpha h - \beta g) = 0,$$

d'où l'on tirera deux valeurs de ρ^2.

Soient maintenant, lorsque $t = 0$,

$$\theta = D \quad \text{et} \quad \frac{d\theta}{dt} = E,$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}D = \gamma + \lambda\delta + i(\mu\gamma^2 + \mu_1\gamma\delta + \mu_2\delta^2 + \mu_3\Gamma)\\ + i^2(\nu\gamma^3 + \nu_1\gamma^2\delta + \nu_2\gamma\delta^2 + \nu_3\delta^3 + \nu_4\Delta + \nu_5\Lambda + \nu_6\gamma\Gamma + \nu_7\delta\Gamma)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}E = \varepsilon + \lambda\eta + i[2\mu\gamma\varepsilon + \mu_1(\delta\varepsilon + \gamma\eta) + 2\mu_2\delta\eta + \mu_3\delta\varepsilon]\\ + i^2[3\nu\gamma^2\delta + \nu_1(2\gamma\delta\varepsilon + \gamma^2\eta) + \nu_2(\delta^2\varepsilon + 2\gamma\delta\eta) + 3\nu_3\delta^2\eta + \nu_4\gamma\delta\varepsilon + \nu_5\delta^2\varepsilon\\ + \nu_6(\Gamma\varepsilon + \gamma^2\delta\varepsilon) + \nu_7(\Gamma\eta + \gamma\delta^2\varepsilon)];\end{aligned}$$

l'équation (Q) donnera, en divisant par $e^{\rho t}$,

$$\frac{d\theta}{dt} - \rho\theta + \frac{\varkappa}{\rho} = \left(E - \rho D + \frac{\varkappa}{\rho}\right)e^{-\rho t},$$

et prenant la quantité ρ en $-$,

$$\frac{d\theta}{dt} + \rho\theta - \frac{\varkappa}{\rho} = \left(E + \rho D - \frac{\varkappa}{\rho}\right)e^{\rho t},$$

d'où l'on tire

$$\theta = \frac{\varkappa}{\rho^2} + \left(D - \frac{\varkappa}{\rho^2}\right)\frac{e^{\rho t} + e^{-\rho t}}{2} + E\frac{e^{\rho t} - e^{-\rho t}}{2\rho}$$

ou bien

$$\theta = \frac{\varkappa}{\rho^2} + \left(D - \frac{\varkappa}{\rho^2}\right)\cos(t\sqrt{-\rho^2}) + \frac{E}{\sqrt{-\rho^2}}\sin(t\sqrt{-\rho^2}).$$

Soient maintenant ρ'^2 et ρ''^2 les deux racines de l'équation (R), et θ', θ'', λ', λ'', μ', μ'',..., les valeurs correspondantes de θ, λ, μ,...; on aura, en remettant au lieu de u, u_1, u_2,..., leurs valeurs y^2, yz, z^2,..., ces deux équations

$$\begin{aligned}y + \lambda' z + i\left(\mu' y^2 + \mu'_1 yz + \mu'_2 z^2 + \mu'_3\int z\,dy\right)\\ + i^2\left(\nu' y^3 + \nu'_1 y^2 z + \nu'_2 yz^2 + \nu'_3 z^3 + \nu'_4\int yz\,dy\right.\\ \left. + \nu'_5\int z^2 dy + \nu'_6 y\int dzy + \nu'_7 z\int z\,dy\right) = \theta',\end{aligned}$$

$$y + \lambda'' z + i\left(\mu'' y^2 + \mu''_1 yz + \mu''_2 z^2 + \mu''_3 \int z\,dy\right)$$
$$+ i^2\left(\nu'' y^3 + \nu''_1 y^2 z + \nu''_2 yz^2 + \nu''_3 z^3 + \nu''_4 \int yz\,dy\right.$$
$$\left. + \nu''_5 \int z^2\,dy + \nu''_6 y \int z\,dy + \nu''_7 z \int z\,dy\right) = \theta'',$$

d'où l'on tirera par approximation les valeurs de y et de z.

Il est évident que pour que les valeurs de y et de z ne contiennent que des sinus et des cosinus, il faut que les racines de l'équation (R) soient toutes deux réelles et négatives; par conséquent il faut que l'on ait

1° $$(G + h + i\alpha)^2 > 4[Gh - Hg + i(\alpha h - \beta g)],$$

2° $$G + h + i\alpha > 0, \quad GhHg + i(\alpha h - \beta g) > 0.$$

Si ces trois conditions n'ont point lieu à la fois, alors les valeurs de y et de z contiendront des exponentielles réelles, et par conséquent la solution ne sera bonne que tant que t ne sera pas fort grande.

On pourrait ajouter que les expressions de y et de z renfermeraient l'angle t, si les deux valeurs de ρ^2 étaient égales; car alors, supposant $\rho'' = \rho' + \omega$, et regardant ω comme une quantité évanouissante, on trouverait que la seconde des deux équations ci-dessus se réduirait à celle-ci

$$\frac{d\lambda'}{d\rho'} z + i\left(\frac{d\mu'}{d\rho'} y^2 + \frac{d\mu'_1}{d\rho'} yz + \frac{d\mu'_2}{d\rho'} z^2 + \frac{d\mu'_3}{d\rho'} \int z\,dy\right)$$
$$+ i^2\left(\frac{d\nu'}{d\rho'} y^3 + \frac{d\nu'_1}{d\rho'} y^2 z + \frac{d\nu'_2}{d\rho'} yz^2 + \frac{d\nu'_3}{d\rho'} z^3 + \frac{d\nu'_4}{d\rho'} \int yz\,dy\right.$$
$$\left. + \frac{d\nu'_5}{d\rho'} \int z^2\,dy + \frac{d\nu'_6}{d\rho'} y \int z\,dy + \frac{d\nu'_7}{d\rho'} z \int dy\right) = \frac{d\theta'}{d\rho'},$$

dans laquelle la quantité $\frac{d\theta'}{d\rho'}$ contient nécessairement des termes multipliés par l'angle t. Mais comme l'équation (R) n'est qu'approchée, quand il arriverait que

$$(G + h + i\alpha)^2 = 4[Gh - Hg + i(\alpha h - \beta g)],$$

ce qui est la condition des racines égales, on n'en pourrait conclure autre chose, sinon que les deux valeurs de ρ^2 seraient égales aux quantités de l'ordre de i^3 près, et que par conséquent il faudrait pousser l'approximation jusqu'aux quantités de ce même ordre. Ce ne serait qu'après avoir poussé l'approximation fort loin et avoir reconnu que les valeurs de ρ sont toujours égales, qu'on pourrait à la rigueur faire usage de l'équation que nous venons de donner.

53. On voit aisément que la méthode précédente est générale pour tel nombre d'équations qu'on voudra, pourvu que ces équations soient analogues aux équations (L) et (M), c'est-à-dire que les produits de deux dimensions soient affectés de i, ceux de trois soient affectés de i^2, et ainsi de suite.

Cette méthode serait surtout utile pour déterminer aussi près qu'on voudrait le mouvement d'un système quelconque de corps qui agiraient les uns sur les autres, et qui ne feraient que de très-petites oscillations autour de leurs points d'équilibre. Car nommant iy, iz,..., les espaces parcourus par ces corps dans leurs oscillations, on trouverait des équations de la forme de celle dont je viens de parler; au reste nous avons déjà donné (nº 30) la solution générale de ce problème pour le cas des oscillations infiniment petites.

54. Si les équations proposées contenaient des termes de la forme

$$i\int z\,dy,\quad i^2\int yz\,dy,\quad i^2\int z^2dy,\quad i^2y\int z\,dy,\quad i^2z\int z\,dy,$$

l'intégration n'aurait aucune difficulté de plus; il faudrait seulement avoir attention de changer les expressions

$$\int dy\int z\,dy\quad\text{et}\quad\int dz\int z\,dy$$

qui se trouveraient dans les équations (N), (O), (P) en leurs équivalentes

$$y\int z\,dy-\int yz\,dy\quad\text{et}\quad z\int z\,dy-\int z^2dy.$$

55. Si elles contenaient des termes de la forme

$$i\frac{dy^2}{dt^2},\quad i\frac{dy\,dz}{dt^2},\quad i\frac{dz^2}{dt^2},\quad i^2 y\frac{dy^2}{dt^2},\quad i^2 y\frac{dy\,dz}{dt^2},\ldots,$$

on les ferait disparaître par des procédés semblables à ceux que nous avons suivis dans le n° 49. Il en serait de même de tous les termes qui contiendraient des produits de $\frac{dy}{dt}$ et $\frac{dz}{dt}$ de dimensions paires; mais s'il se trouvait des produits de dimensions impaires de ces mêmes quantités, alors on ferait chacune d'elles égale à une nouvelle variable, et on achèverait le reste comme dans le n° 50.

56. Enfin, si l'on avait des équations du troisième ordre et au delà, on les réduirait toujours au second par la méthode du n° 51.

De l'intégration de l'équation

$$\text{(S)}\qquad \frac{d^2y}{dt^2}+K^2y+i\left(My\cos Ht+N\frac{dy}{dt}\sin Ht\right)=T,$$

dans laquelle T *est une fonction quelconque de t.*

57. Je remarque d'abord que si T était égal à zéro, l'équation serait dans le cas du n° 55, car il n'y aurait qu'à faire $\cos Ht = z$, ce qui donnerait

$$\sin Ht = -\frac{1}{H}\frac{dz}{dt}\quad \text{et}\quad \frac{d^2z}{dt^2}+H^2z=0.$$

Or, puisque l'indéterminée y n'y passe pas le premier degré, il est clair qu'on pourra faire disparaitre le terme tout connu T par la méthode du n° 1. En effet, si l'on multiplie l'équation proposée par $z\,dt$, et qu'on pratique les autres opérations que prescrit cette méthode, on aura les deux équations suivantes :

$$\frac{d^2z}{dt^2}+K^2z+i\left[\left(M\cos Ht-\frac{d(N\sin Ht)}{dt}\right)z-N\sin Ht\frac{dz}{dt}\right]=0,$$

$$\frac{dy}{dt}z-y\frac{dz}{dt}=\int Tz\,dt,$$

dont la première est réductible au cas du n° 55, et dont l'autre étant intégrée donnera $y = \int \frac{dt}{z^2} \int \mathrm{T} z\, dt$.

Au reste, ces sortes d'équations peuvent encore s'intégrer par une méthode particulière et fort simple que je vais exposer.

Je fais

$$y \cos \mathrm{H}t = u, \quad y \cos 2\mathrm{H}t = v, \ldots,$$
$$y \sin \mathrm{H}t = U, \quad y \sin 2\mathrm{H}t = V, \ldots,$$

ce qui me donne

$$\frac{dy}{dt} \cos \mathrm{H}t = \frac{du}{dt} + \mathrm{H}U, \quad \frac{dy}{dt} \cos 2\mathrm{H}t = \frac{dv}{dt} + 2\mathrm{H}V, \ldots,$$
$$\frac{dy}{dt} \sin \mathrm{H}t = \frac{dU}{dt} - \mathrm{H}u, \quad \frac{dy}{dt} \sin 2\mathrm{H}t = \frac{dV}{dt} - 2\mathrm{H}v, \ldots,$$

et ensuite

$$\frac{d^2y}{dt^2} \cos \mathrm{H}t = \frac{d^2u}{dt^2} + 2\mathrm{H}\frac{dU}{dt} - \mathrm{H}^2 u,$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} \cos 2\mathrm{H}t = \frac{d^2v}{dt^2} + 4\mathrm{H}\frac{dV}{dt} - 4\mathrm{H}^2 v,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} \sin \mathrm{H}t = \frac{d^2U}{dt^2} - 2\mathrm{H}\frac{du}{dt} - \mathrm{H}^2 U,$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} \sin 2\mathrm{H}t = \frac{d^2V}{dt^2} - 4\mathrm{H}\frac{dv}{dt} - 4\mathrm{H}^2 V,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Cela posé, j'aurai d'abord, au lieu de l'équation (S), celle-ci :

$$(1) \qquad \frac{d^2y}{dt^2} + \mathrm{K}^2 y + i\left[(\mathrm{M} - \mathrm{HN})u + \mathrm{N}\frac{dU}{dt}\right] = \mathrm{T}.$$

De plus, la même équation (S) étant multipliée successivement par $\cos \mathrm{H}t$ et par $\sin \mathrm{H}t$ donnera

$$\frac{d^2y}{dt^2} \cos \mathrm{H}t + \mathrm{K}^2 y \cos \mathrm{H}t + i\left[\mathrm{M}y\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\mathrm{H}t\right) + \frac{1}{2}\mathrm{N}\frac{dy}{dt}\sin 2\mathrm{H}t\right]$$
$$= \mathrm{T} \cos \mathrm{H}t$$

et

$$\frac{d^2y}{dt^2}\sin \mathrm{H}t + \mathrm{K}^2 y \sin \mathrm{H}t + i\left[\frac{1}{2}\mathrm{M}y\sin 2\mathrm{H}t + \mathrm{N}\frac{dy}{dt}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\mathrm{H}t\right)\right]$$
$$= \mathrm{T}\sin \mathrm{H}t,$$

c'est-à-dire, en faisant les substitutions ci-dessus,

$$(2)\quad \frac{d^2u}{dt^2} + 2\mathrm{H}\frac{dU}{dt} + (\mathrm{K}^2 - \mathrm{H}^2)u + i\left[\frac{\mathrm{M}}{2}y + \left(\frac{\mathrm{M}}{2} - \mathrm{NH}\right)v + \frac{\mathrm{N}}{2}\frac{dV}{dt}\right] = \mathrm{T}\cos \mathrm{H}t,$$

$$(3)\quad \frac{d^2U}{dt^2} - 2\mathrm{H}\frac{du}{dt} + (\mathrm{K}^2 - \mathrm{H}^2)U + i\left[\left(\frac{\mathrm{M}}{2} - \mathrm{NH}\right)V - \frac{\mathrm{N}}{2}\frac{dv}{dt}\right] = \mathrm{T}\sin \mathrm{H}t.$$

Si l'on voulait n'avoir égard, dans la valeur de y, qu'aux quantités de l'ordre de i, on négligerait dans les valeurs de u et de U, et par conséquent aussi dans les équations (2) et (3), tous les termes affectés de i, moyennant quoi ces équations ne contiendraient plus que les trois variables y, u et U, de sorte qu'avec l'équation (1) elles suffiraient pour résoudre le problème; mais si l'on veut pousser l'approximation jusqu'aux quantités de l'ordre de i^2, comme nous l'avons fait dans les problèmes précédents, alors on conservera tous les termes des équations (2) et (3), et on multipliera de nouveau l'équation (S) par $\cos 2\mathrm{H}t$ et par $\sin 2\mathrm{H}t$; ce qui donnera, après les substitutions, deux équations en v et en V, dans lesquelles on pourra négliger les termes affectés de i, parce que les quantités v et V sont déjà elles-mêmes multipliées par i dans les équations (2) et (3); ainsi l'on aura

$$(4)\qquad \frac{d^2v}{dt^2} + 4\mathrm{H}\frac{dV}{dt} + (\mathrm{K}^2 - 4\mathrm{H}^2)v = \mathrm{T}\cos 2\mathrm{H}t,$$

$$(5)\qquad \frac{d^2V}{dt^2} - 4\mathrm{H}\frac{dv}{dt} + (\mathrm{K}^2 - 4\mathrm{H}^2)V = \mathrm{T}\sin 2\mathrm{H}t,$$

et l'intégration de l'équation proposée sera réduite à celle de cinq équations (1), (2), (3), (4) et (5), lesquelles sont, comme on voit, dans le cas du n° 29.

Ayant donc multiplié la première de ces équations par $\lambda e^{\rho t}dt$, la seconde par $\mu e^{\rho t}dt$, la troisième par $\mathfrak{M} e^{\rho t}dt$, la quatrième par $\nu e^{\rho t}dt$, et la cinquième par $\mathfrak{N} e^{\rho t} dt$, on les ajoutera ensemble, et on en prendra l'intégrale en faisant disparaître de dessous le signe $\int$ les différences des variables y, u, U,...; après quoi on chassera les expressions intégrales $\int y e^{\rho t} dt$, $\int u e^{\rho t} dt$, $\int U e^{\rho t} dt$,..., en égalant à zéro leurs coefficients, ce qui donnera

$$(\rho^2 + K^2)\lambda + i\left(\frac{M}{2}\mu - \frac{N}{2}\mathfrak{M}\rho\right) = 0,$$

$$i(M - NH)\lambda + (\rho^2 + K^2 - H^2)\mu + 2H\mathfrak{M}\rho = 0,$$

$$- iN\lambda\rho - 2H\mu\rho + (\rho^2 + K^2 - H^2)\mathfrak{M} = 0,$$

$$i\left(\frac{M}{2} - NH\right)\mu + \frac{iN}{2}\mathfrak{M}\rho + (\rho^2 + K^2 - 4H^2)\nu + 4H\mathfrak{N}\rho = 0,$$

$$- \frac{iN}{2}\mu\rho + i\left(\frac{M}{2} - NH\right)\mathfrak{M} - 4H\nu\rho + (\rho^2 + K^2 - 4H^2)\mathfrak{N} = 0.$$

De cette manière on aura l'équation intégrale

$$\begin{aligned}
&\left[\lambda\frac{dy}{dt} + \mu\frac{du}{dt} + \mathfrak{M}\frac{dU}{dt} + \nu\frac{dv}{dt} + \mathfrak{N}\frac{dV}{dt} + \left(-\lambda\rho + \frac{iN}{2}\mathfrak{M}\right)y\right.\\
&\quad + (-\mu\rho - 2H\mathfrak{M})u + (iN\lambda + 2H\mu - \mathfrak{M}\rho)U\\
&\quad \left. + \left(-\frac{iN}{2}\mathfrak{M} - \nu\rho - 4H\mathfrak{N}\right)v + \left(\frac{iN}{2}\mu + 4H\nu - \mathfrak{N}\rho\right)V\right]e^{\rho t}\\
&= \int T(\lambda + \mu\cos Ht + \mathfrak{M}\sin Ht + \nu\cos 2Ht + \mathfrak{N}\sin 2Ht)e^{\rho t}\,dt.
\end{aligned}$$

Soit $\rho^2 = -R^2$, de sorte que $\rho = R\sqrt{-1}$, et

$$\mu = i\alpha\lambda, \quad \nu = i^2\beta\lambda, \quad \mathfrak{M} = i\mathcal{A}\rho\lambda, \quad \mathfrak{N} = i^2\mathcal{B}\rho\lambda,$$

et l'on aura premièrement

$$- R^2 + K^2 + i^2\left(\frac{M}{2}\alpha + \frac{N}{2}R^2\alpha\right) = 0,$$

$$M - NH + (- R^2 + K^2 - H^2)\alpha - 2HR^2\mathcal{A} = 0,$$

$$- N - 2H\alpha + (- R^2 + K^2 - H^2)\mathcal{A} = 0,$$

$$\left(\frac{M}{2}-NH\right)\alpha-\frac{N}{2}R^2\mathcal{A}+(-R^2+K^2-4H^2)\beta-4HR^2\mathcal{B}=0,$$

$$-\frac{N}{2}\alpha+\left(\frac{M}{2}-NH\right)\mathcal{A}-4H\beta+(-R^2+K^2-4H^2)\mathcal{B}=0,$$

d'où l'on tire

$$R^2=\frac{K^2+\frac{1}{2}i^2M\alpha}{1-\frac{1}{2}i^2N\mathcal{A}},$$

$$\alpha=\frac{(M-NH)(R^2-K^2+H^2)+2NHR^2}{(R^2-K^2+H^2)^2-4H^2R^2},$$

$$\mathcal{A}=\frac{N(R^2-K^2+H^2)+2(M-NH)H}{(R^2-K^2+H^2)^2-4H^2R^2},$$

$$\beta=\frac{\left(\frac{1}{2}M-NH\right)(R^2-K^2+4H^2)+2NHR^2}{(R^2-K^2+4H^2)^2-16H^2R^2}\alpha$$
$$-\frac{\frac{1}{2}N(R^2-K^2+4H^2)R^2+4\left(\frac{1}{2}M-NH\right)HR}{(R^2-K^2+4H^2)^2-16H^2R^2}\mathcal{A},$$

$$\mathcal{B}=\frac{\left(\frac{1}{2}M-NH\right)(R^2-K^2+4H^2)+2NHR^2}{(R^2-K^2+4H^2)^2-16H^2R^2}\mathcal{A}$$
$$-\frac{\frac{1}{2}N(R^2-K^2+4H^2)+4\left(\frac{1}{2}M-NH\right)H}{(R^2-K^2+4H^2)^2-16H^2R^2}\alpha;$$

et ensuite

$$\left\{\frac{dy}{dt}+i\alpha\frac{du}{dt}+i(N+2H\alpha+R^2\mathcal{A})U+i^2\beta\frac{dv}{dt}+i^2\left(\frac{N}{2}\alpha+4H\beta+R^2\mathcal{B}\right)V\right.$$
$$-\left[\left(1-\frac{iN}{2}\mathcal{A}\right)y+i(\alpha+2H\mathcal{A})u-i\mathcal{A}\frac{dU}{dt}\right.$$
$$\left.\left.+i^2\left(\frac{N}{2}\mathcal{A}+\beta+4H\mathcal{B}\right)v-i^2\mathcal{B}\frac{dV}{dt}\right]R\sqrt{-1}\right\}e^{Rt\sqrt{-1}}$$
$$=\int T\,[1+i\alpha\cos Ht+i^2\beta\cos 2Ht$$
$$+(i\mathcal{A}\sin Ht+i^2\mathcal{B}\sin 2Ht)R\sqrt{-1}]\,e^{Rt\sqrt{-1}}\,dt;$$

ou, divisant par $e^{Rt\sqrt{-1}}$, et changeant les exponentielles imaginaires en sinus et cosinus,

$$\frac{dy}{dt} + i\alpha\frac{du}{dt} + i(N + 2H\alpha + R^2 \mathcal{A})U + i^2\beta\frac{dv}{dt} + i^2\left(\frac{N}{2}\alpha + 4H\beta + R^2\mathcal{B}\right)V$$
$$- \left[\left(1 - \frac{iN}{2}\mathcal{A}\right)y + i(\alpha + 2H\mathcal{A})u - i\mathcal{A}\frac{dU}{dt}\right.$$
$$\left. + i^2\left(\frac{N}{2}\mathcal{A} + \beta + 4H\mathcal{B}\right)v - i^2\mathcal{B}\frac{dV}{dt}\right]R\sqrt{-1}$$
$$= \cos Rt\int T[(1 + i\alpha\cos Ht + i^2\beta\cos 2Ht)\cos Rt$$
$$- i(\mathcal{A}\sin Ht + i\mathcal{B}\sin 2Ht)R\sin Rt]\,dt$$
$$+ \sin Rt\int T[(1 + i\alpha\cos Ht + i^2\beta\cos 2Ht)\sin Rt$$
$$+ i(\mathcal{A}\sin Ht + i\mathcal{B}\sin 2Ht)R\cos Rt]\,dt$$
$$- \sin Rt\int T[(1 + i\alpha\cos Ht + i^2\beta\cos 2Ht)\cos Rt$$
$$- i(\mathcal{A}\sin Ht + i\mathcal{B}\sin 2Ht)R\sin Rt]\,dt\sqrt{-1}$$
$$+ \cos Rt\int T[(1 + i\alpha\cos Ht + i^2\beta\cos 2Ht)\sin Rt$$
$$+ i(\mathcal{A}\sin Ht + i\mathcal{B}\sin 2Ht)R\cos Rt]\,dt\sqrt{-1}.$$

Donc, si l'on remet pour u, U, v et V leurs valeurs, et qu'on compare les imaginaires avec les imaginaires, et les réelles avec les réelles, on aura

$$\left[1 - \frac{iN}{2}\mathcal{A} + i(\alpha + H\mathcal{A})\cos Ht + i^2\left(\frac{N}{2}\mathcal{A} + \beta + 2H\mathcal{B}\right)\cos 2Ht\right]y$$
$$- i(\mathcal{A}\sin Ht + i\mathcal{B}\sin 2Ht)\frac{dy}{dt}$$
$$= \sin Rt\int T\left[(1 + i\alpha\cos Ht + i^2\beta\cos 2Ht)\frac{\cos Rt}{R}\right.$$
$$\left. - i(\mathcal{A}\sin Ht + i\mathcal{B}\sin 2Ht)\sin Rt\right]dt$$
$$- \cos Rt\int T\left[(1 + i\alpha\cos Ht + i^2\beta\cos Ht)\frac{\sin Rt}{R}\right.$$
$$\left. + i(\mathcal{A}\sin Ht + i\mathcal{B}\sin 2Ht)\cos Rt\right]dt,$$

et

$$(1 + i\alpha \cos Ht + i^2\beta \cos 2Ht)\frac{dy}{dt}$$
$$+ i\left[(N + H\alpha + R^2\mathcal{A})\sin Ht + \left(\frac{N}{2}\alpha + 2H\beta + R^2\mathcal{B}\right)\sin 2Ht\right]y$$
$$= \cos Rt \int T[(1 + i\alpha \cos Ht + i^2\beta \cos 2Ht)\cos Rt$$
$$- i(\mathcal{A}\sin Ht + i\mathcal{B}\sin 2Ht)R\sin Rt]\,dt$$
$$+ \sin Rt \int T[(1 + i\alpha \cos Ht + i^2\beta \cos 2Ht)\sin Rt$$
$$+ i(\mathcal{A}\sin Ht + i\mathcal{B}\sin 2Ht)R\cos Rt]\,dt,$$

deux équations à l'aide desquelles on éliminera $\frac{dy}{dt}$.

De l'intégration des équations

$$\text{(T)}\qquad \frac{d^2y}{dt^2} + K^2 y + i\left(My'\cos Ht + N\frac{dy'}{dt}\sin Ht\right) = T,$$

$$\text{(U)}\qquad \frac{d^2y'}{dt^2} + K'^2 y' + i\left(M'y\cos Ht - N'\frac{dy}{dt}\sin Ht\right) = T'.$$

58. Soit fait, comme dans le numéro précédent,

$$y\cos Ht = u,\quad y\sin Ht = U,\quad y\cos 2Ht = v,\quad y\sin 2Ht = V,\ldots,$$

et de même

$$y'\cos Ht = u',\quad y'\sin Ht = U',\quad y'\cos 2Ht = v',\quad y'\sin 2Ht = V',\ldots,$$

on aura

$$\frac{dy}{dt}\cos Ht = \frac{du}{dt} + HU,\qquad \frac{dy}{dt}\cos 2Ht = \frac{dv}{dt} + 2HV,$$

$$\frac{dy}{dt}\sin Ht = \frac{dU}{dt} - Hu,\qquad \frac{dy}{dt}\sin 2Ht = \frac{dV}{dt} - 2Hv,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}\cos Ht = \frac{d^2u}{dt^2} + 2H\frac{dU}{dt} - H^2u,\qquad \frac{d^2y}{dt^2}\cos 2Ht = \frac{d^2v}{dt^2} + 4H\frac{dV}{dt} - 4H^2v,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}\sin Ht = \frac{d^2U}{dt^2} - 2H\frac{du}{dt} - H^2U,\qquad \frac{d^2y}{dt^2}\sin 2Ht = \frac{d^2V}{dt^2} - 4H\frac{dv}{dt} - 4H^2V,$$

et pareillement

$$\frac{dy'}{dt}\cos \mathrm{H}t = \frac{du'}{dt} + \mathrm{H}U', \qquad \frac{dy'}{dt}\cos 2\mathrm{H}t = \frac{dv'}{dt} + 2\mathrm{H}V',$$

$$\frac{dy'}{dt}\sin \mathrm{H}t = \frac{dU'}{dt} - \mathrm{H}u', \qquad \frac{dy'}{dt}\sin 2\mathrm{H}t = \frac{dV'}{dt} - 2\mathrm{H}v',$$

$$\frac{d^2y'}{dt^2}\cos \mathrm{H}t = \frac{d^2u'}{dt^2} + 2\mathrm{H}\frac{dU'}{dt} - \mathrm{H}^2u', \qquad \frac{d^2y'}{dt^2}\cos 2\mathrm{H}t = \frac{d^2v'}{dt^2} + 4\mathrm{H}\frac{dV'}{dt} - 4\mathrm{H}^2v',$$

$$\frac{d^2y'}{dt^2}\sin \mathrm{H}t = \frac{d^2U'}{dt^2} - 2\mathrm{H}\frac{du'}{dt} - \mathrm{H}^2U', \qquad \frac{d^2y'}{dt^2}\sin 2\mathrm{H}t = \frac{d^2V'}{dt^2} - 4\mathrm{H}\frac{dv'}{dt} - 4\mathrm{H}^2V'.$$

Cela posé, on aura d'abord, au lieu des équations (T) et (U), ces deux-ci :

$$(1) \qquad \frac{d^2y}{dt^2} + \mathrm{K}^2y + i\left[(\mathrm{M} - \mathrm{HN})u' + \mathrm{N}\frac{dU'}{dt}\right] = \mathrm{T},$$

$$(2) \qquad \frac{d^2y'}{dt^2} + \mathrm{K}'^2y' + i\left[(\mathrm{M}' - \mathrm{HN}')u - \mathrm{N}'\frac{dU}{dt}\right] = \mathrm{T}'.$$

Ensuite les mêmes équations (T) et (U) étant multipliées successivement par $\cos \mathrm{H}t$ et par $\sin \mathrm{H}t$ donneront (après les substitutions) ces quatre autres équations :

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d^2u}{dt^2} + 2\mathrm{H}\frac{dU}{dt} + (\mathrm{K}^2 - \mathrm{H}^2)u \\ &\quad + i\left[\frac{\mathrm{M}}{2}y' + \left(\frac{\mathrm{M}}{2} - \mathrm{NH}\right)v' + \frac{\mathrm{N}}{2}\frac{dV'}{dt}\right] = \mathrm{T}\cos \mathrm{H}t, \end{aligned} \right.$$

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d^2U}{dt^2} - 2\mathrm{H}\frac{du}{dt} + (\mathrm{K}^2 - \mathrm{H}^2)U \\ &\quad + i\left[\left(\frac{\mathrm{M}}{2} - \mathrm{NH}\right)V' + \frac{\mathrm{N}}{2}\frac{dy'}{dt} - \frac{\mathrm{N}}{2}\frac{dv'}{dt}\right] = \mathrm{T}\sin \mathrm{H}t, \end{aligned} \right.$$

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d^2u'}{dt^2} + 2\mathrm{H}\frac{dU'}{dt} + (\mathrm{K}'^2 - \mathrm{H}^2)u' \\ &\quad + i\left[\frac{\mathrm{M}'}{2}y + \left(\frac{\mathrm{M}'}{2} + \mathrm{N}'\mathrm{H}\right)v - \frac{\mathrm{N}'}{2}\frac{dV}{dt}\right] = \mathrm{T}'\cos \mathrm{H}t, \end{aligned} \right.$$

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d^2U'}{dt^2} - 2\mathrm{H}\frac{du'}{dt} + (\mathrm{K}'^2 - \mathrm{H}^2)U' \\ &\quad + i\left[\left(\frac{\mathrm{M}'}{2} + \mathrm{N}'\mathrm{H}\right)V - \frac{\mathrm{N}'}{2}\frac{dy}{dt} + \frac{\mathrm{N}'}{2}\frac{dv}{dt}\right] = \mathrm{T}'\sin \mathrm{H}t. \end{aligned} \right.$$

Enfin, multipliant encore l'une et l'autre des équations (T) et (U) par

$\cos 2\mathrm{H}t$ et par $\sin 2\mathrm{H}t$, et négligeant les termes affectés de i, on aura

$$(7)\qquad \frac{d^2 v}{dt^2} + 4\mathrm{H}\frac{dV}{dt} + (\mathrm{K}^2 - 4\mathrm{H}^2)\,v = \mathrm{T}\cos 2\mathrm{H}t,$$

$$(8)\qquad \frac{d^2 V}{dt^2} - 4\mathrm{H}\frac{dv}{dt} + (\mathrm{K}^2 - 4\mathrm{H}^2)\,V = \mathrm{T}\sin 2\mathrm{H}t,$$

$$(9)\qquad \frac{d^2 v'}{dt^2} + 4\mathrm{H}\frac{dV'}{dt} + (\mathrm{K}'^2 - 4\mathrm{H}^2)\,v' = \mathrm{T}'\cos 2\mathrm{H}t,$$

$$(10)\qquad \frac{d^2 V'}{dt^2} - 4\mathrm{H}\frac{dv'}{dt} + (\mathrm{K}'^2 - 4\mathrm{H}^2)\,V' = \mathrm{T}'\sin 2\mathrm{H}t.$$

On aura donc en tout dix inconnues et dix équations, et le problème ne dépendra plus que de l'intégration de ces équations.

En suivant notre méthode on multipliera l'équation (1) par λ, l'équation (2) par λ', l'équation (3) par μ, l'équation (4) par $\mathfrak{M}$, l'équation (5) par μ', l'équation (6) par $\mathfrak{M}'$, l'équation (7) par ν, l'équation (8) par $\mathfrak{N}$, l'équation (9) par ν', l'équation (10) par $\mathfrak{N}'$; et, après les avoir ajoutées ensemble, on multipliera la somme par $e^{\rho t}dt$, et on en prendra l'intégrale; ce qui donnera, en faisant disparaître de dessous le signe $\int$ les différences des variables y, u, V, u',..., et égalant ensuite à zéro les coefficients des termes où ces mêmes variables se trouveront sous le signe.

$$(\mathrm{V})\quad\left\{\begin{aligned}
&(\rho^2+\mathrm{K}^2)\lambda + i\left(\frac{\mathrm{M}'}{2}\mu' + \frac{\mathrm{N}'}{2}\mathfrak{M}'\rho\right) = 0,\\
&(\rho^2+\mathrm{K}'^2)\lambda' + i\left(\frac{\mathrm{M}}{2}\mu - \frac{\mathrm{N}}{2}\mathfrak{M}\rho\right) = 0,\\
&i(\mathrm{M}'+\mathrm{N}'\mathrm{H})\lambda' + (\rho^2+\mathrm{K}^2-\mathrm{H}^2)\mu + 2\mathrm{H}\mathfrak{M}\rho = 0,\\
&i\mathrm{N}'\lambda'\rho - 2\mathrm{H}\mu\rho + (\rho^2+\mathrm{K}^2-\mathrm{H}^2)\mathfrak{M} = 0,\\
&i(\mathrm{M}-\mathrm{N}\mathrm{H})\lambda + (\rho^2+\mathrm{K}'^2-\mathrm{H}^2)\mu' + 2\mathrm{H}\mathfrak{M}'\rho = 0,\\
&-i\mathrm{N}\lambda\rho - 2\mathrm{H}\mu'\rho + (\rho^2+\mathrm{K}'^2-\mathrm{H}^2)\mathfrak{M}' = 0,\\
&i\left(\frac{\mathrm{M}'}{2}+\mathrm{N}'\mathrm{H}\right)\mu' - \frac{i\mathrm{N}'}{2}\mathfrak{M}'\rho + (\rho^2+\mathrm{K}^2-4\mathrm{H}^2)\nu + 4\mathrm{H}\mathfrak{N}\rho = 0,\\
&\frac{i\mathrm{N}'}{2}\mu'\rho + i\left(\frac{\mathrm{M}'}{2}+\mathrm{N}'\mathrm{H}\right)\mathfrak{M}' - 4\mathrm{H}\nu\rho + (\rho^2+\mathrm{K}^2-4\mathrm{H}^2)\mathfrak{N} = 0,\\
&i\left(\frac{\mathrm{M}}{2}-\mathrm{N}\mathrm{H}\right)\mu + \frac{i\mathrm{N}}{2}\mathfrak{M}\rho + (\rho^2+\mathrm{K}'^2-4\mathrm{H}^2)\nu' + 4\mathrm{H}\mathfrak{N}'\rho = 0,\\
&-\frac{i\mathrm{N}}{2}\mu\rho + i\left(\frac{\mathrm{M}}{2}-\mathrm{N}\mathrm{H}\right)\mathfrak{M} - 4\mathrm{H}\nu'\rho + (\rho^2+\mathrm{K}'^2-4\mathrm{H}^2)\mathfrak{N}' = 0.
\end{aligned}\right.$$

et

$$(\mathrm{X})\quad\left\{\begin{aligned}
&\Big[\lambda\frac{dy}{dt}+\lambda'\frac{dy'}{dt}+\mu\frac{du}{dt}+\mathfrak{M}\frac{dU}{dt}+\mu'\frac{du'}{dt}\\
&\quad+\mathrm{M}'\frac{dU'}{dt}+\nu\frac{dv}{dt}+\mathfrak{N}\frac{dV}{dt}+\nu'\frac{dv'}{dt}+\mathfrak{N}'\frac{dV'}{dt}\\
&\quad+\left(-\lambda\rho-\frac{i\mathrm{N}'}{2}\mathfrak{M}'\right)y+\left(-\lambda'\rho+\frac{i\mathrm{N}}{2}\mathfrak{M}\right)y'\\
&\quad+(-\mu\rho-2\mathrm{H}\mathfrak{M})u+(-i\mathrm{N}'\lambda'+2\mathrm{H}\mu-\mathfrak{M}\rho)U\\
&\quad+(-\mu'\rho-2\mathrm{H}\mathfrak{M}')u'+(i\mathrm{N}\lambda+2\mathrm{H}\mu'-\mathfrak{M}'\rho)U'\\
&\quad+\left(\frac{i\mathrm{N}'}{2}\mathfrak{M}'-\nu\rho-4\mathrm{H}\mathfrak{N}\right)v+\left(-\frac{i\mathrm{N}'}{2}\mu'+4\mathrm{H}\nu-\mathfrak{N}\rho\right)V\\
&\quad+\left(-\frac{i\mathrm{N}}{2}\mathfrak{M}-\nu'\rho-4\mathrm{H}\mathfrak{N}'\right)v'+\left(\frac{i\mathrm{N}}{2}\mu+4\mathrm{H}\nu'-\mathfrak{N}'\rho\right)V'\Big]e^{\rho t}\\
&=\int[\mathrm{T}(\lambda+\mu\cos\mathrm{H}t+\mathfrak{M}\sin\mathrm{H}t+\nu\cos 2\mathrm{H}t+\mathrm{N}\sin 2\mathrm{H}t)\\
&\qquad+\mathrm{T}'(\lambda'+\mu'\cos\mathrm{H}t+\mathfrak{M}'\sin\mathrm{H}t+\nu'\cos 2\mathrm{H}t+\mathfrak{N}'\sin 2\mathrm{H}t)]e^{\rho t}dt.
\end{aligned}\right.$$

59. Qu'on multiplie la quatrième, la sixième, la huitième et la dixième des équations (V) par $\pm\sqrt{-1}$, et qu'on les ajoute ensuite chacune à sa précédente, on aura, au lieu des dix équations (V), les six suivantes :

$$(\rho^2+\mathrm{K}^2)\lambda+i\left(\frac{\mathrm{M}'}{2}\mu'+\frac{\mathrm{N}'}{2}\mathfrak{M}'\rho\right)=0,$$

$$(\rho^2+\mathrm{K}'^2)\lambda'+i\left(\frac{\mathrm{M}}{2}\mu-\frac{\mathrm{N}}{2}\mathfrak{M}\rho\right)=0,$$

$$i[\mathrm{M}'+\mathrm{N}'(\mathrm{H}\pm\rho\sqrt{-1})]\lambda'+[\mathrm{K}^2-(\mathrm{H}\pm\rho\sqrt{-1})^2](\mu\pm\mathfrak{M}\sqrt{-1})=0,$$

$$i[\mathrm{M}-\mathrm{N}(\mathrm{H}\pm\rho\sqrt{-1})]\lambda+[\mathrm{K}'^2-(\mathrm{H}\pm\rho\sqrt{-1})^2](\mu'\pm\mathfrak{M}'\sqrt{-1})=0,$$

$$\begin{aligned}&i[\mathrm{M}'+\mathrm{N}'(2\mathrm{H}\pm\rho\sqrt{-1})](\mu'\pm\mathfrak{M}'\sqrt{-1})\\&\quad+2[\mathrm{K}^2-(2\mathrm{H}\pm\rho\sqrt{-1})^2](\nu\pm\mathfrak{N}\sqrt{-1})=0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&i[\mathrm{M}-\mathrm{N}(2\mathrm{H}\pm\rho\sqrt{-1})](\mu\pm\mathfrak{M}\sqrt{-1})\\&\quad+2[\mathrm{K}'^2-(2\mathrm{H}\pm\rho\sqrt{-1})^2](\nu'\pm\mathfrak{N}'\sqrt{-1})=0.\end{aligned}$$

Les deux premières donnent, ou bien

$$(\mathrm{Y})\qquad -\rho^2=\mathrm{K}^2+\frac{i}{\lambda}\left(\frac{\mathrm{M}'}{2}\mu'+\frac{\mathrm{N}'}{2}\mathfrak{M}'\rho\right)$$

et

$$\lambda' = -i\,\frac{M\mu - N\mathfrak{M}\rho}{2(\rho^2+K^2)},$$

ou bien

$$-\rho^2 = K'^2 + \frac{i}{\lambda'}\left(\frac{M}{2}\mu - \frac{N}{2}\mathfrak{M}\rho\right)$$

et

$$\lambda = -i\,\frac{M'\mu' + N\mathfrak{M}'\rho}{2(\rho^2+K^2)}.$$

Dans le premier cas, la troisième équation deviendra, en substituant la valeur de λ',

$$\begin{aligned}&[K^2-(H\pm\rho\sqrt{-1})^2](\mu\pm\mathfrak{M}\sqrt{-1})\\ &\quad - i^2[M'+N'(H\pm\rho\sqrt{-1})]\,\frac{M'\mu'+N\mathfrak{M}'\rho}{2(\rho^2+K^2)} = 0,\end{aligned}$$

laquelle donnera séparément, à cause de l'ambiguïté du signe, $\mu = 0$ et $\mathfrak{M} = 0$; de sorte qu'on aura aussi $\lambda' = 0$, $\nu' = 0$ et $\mathfrak{N}' = 0$; et l'on aura ensuite, pour la détermination des quantités μ', $\mathfrak{M}'$, ν et $\mathfrak{N}$,

$$(\mathrm{Z})\quad\left\{\begin{aligned}&\mu'\pm\mathfrak{M}'\sqrt{-1} = -i\,\frac{M-N(H\pm\rho\sqrt{-1})}{K'^2-(H\pm\rho\sqrt{-1})}\lambda,\\ &\nu\pm\mathfrak{N}\sqrt{-1} = -i\,\frac{M'+N'(2H\pm\rho\sqrt{-1})}{2[K^2-(2H\pm\rho\sqrt{-1})^2]}(\mu'\pm\mathfrak{M}'\sqrt{-1}),\end{aligned}\right.$$

d'où l'on voit que les quantités μ' et $\mathfrak{M}'$ seront de l'ordre de i, et les quantités ν et $\mathfrak{N}$ de celui de i^2.

Dans le second cas on trouvera d'abord $\mu' = 0$, $\mathfrak{M}' = 0$, et par conséquent $\lambda = 0$, $\nu = 0$, et $\mathfrak{N} = 0$; ensuite on aura

$$\mu\pm\mathfrak{M}\sqrt{-1} = -i\,\frac{M'+N'(H\pm\rho\sqrt{-1})}{K^2-(H\pm\rho\sqrt{-1})^2}\lambda',$$

et

$$\nu'\pm\mathfrak{N}'\sqrt{-1} = -i\,\frac{M-N(2H\pm\rho\sqrt{-1})}{2[K'^2-(2H\pm\rho\sqrt{-1})^2]}(\mu\pm\mathfrak{M}\sqrt{-1}),$$

d'où l'on tirera μ, $\mathfrak{M}$, ν' et $\mathfrak{N}'$.

Ayant ainsi les valeurs de tous les coefficients, on achèvera le calcul comme on a fait dans le numéro précédent, et l'on aura, à l'aide des deux valeurs de ρ^2, deux équations finales qui serviront à trouver y et y'.

Il y a cependant un cas qui demande une discussion particulière; c'est celui où le coefficient H serait presque égal à $K - K'$, la différence n'étant que de l'ordre de i; nous allons l'examiner dans les numéros suivants.

Analyse du cas où H *est presque égal à* K — K'.

60. Soient

$$K = h + ik, \quad K' = h' + ik' \quad \text{et} \quad H = h - h',$$

en sorte que

$$H = K - K' + i(k - k').$$

Je fais

$$\rho\sqrt{-1} = h + im,$$

c'est-à-dire

$$\rho = -(h + im)\sqrt{-1},$$

ce qui me donne

$$\rho^2 + K^2 = -2ih(m - k) - 2i^2(m^2 - k^2),$$

et les équations (Y) et (Z) du numéro précédent se changeront en celles-ci :

$$(a)\qquad 2h(m - k) + i(m^2 - k^2) = \frac{1}{\lambda}\left[\frac{M'}{2}\mu' - \frac{N'(h + im)}{2}\mathfrak{M}'\sqrt{-1}\right],$$

$$(b)\qquad \mu' \pm \mathfrak{M}'\sqrt{-1} = -i\frac{M - N[h - h' \pm (h + im)]}{(h' + ik')^2 - [h - h' \pm (h + im)]^2}\lambda,$$

$$(c)\qquad \nu \pm \mathfrak{N}\sqrt{-1} = -\frac{i}{2}\,\frac{M' + N[2h - 2h' \pm (h + im)]}{(h + ik)^2 - [2h - 2h' \pm (h + im)]^2}(\mu' \pm \mathfrak{M}'\sqrt{-1}),$$

d'où l'on tirera les valeurs de m, μ', $\mathfrak{M}'$, ν et $\mathfrak{N}$.

L'équation (b) étant prise en — donnera

$$\mu' - \mathfrak{M}'\sqrt{-1} = -i\frac{M + N(h' + im)}{(h' + ik)^2 - (h' + im)^2}\lambda.$$

Or

$$[(h'+ik')^2-(h'+im)^2=2ih'(k'-m)+i^2(k'^2-m^2)]$$
$$=-i(m-k')[2h+i(m+k')];$$

donc, faisant cette substitution, et divisant ensuite le haut et le bas de la fraction par i, on aura

$$\mu'-\mathcal{M}'\sqrt{-1}=\frac{\mathrm{M}+\mathrm{N}(h'+im)}{(m-k')[2h'+i(m+k')]}\lambda,$$

équation dans laquelle je remarque que la quantité i ne se trouve plus qu'au premier degré; de sorte que cette équation ne doit être regardée comme exacte qu'aux quantités de l'ordre de i^2 près. C'est pourquoi il faudra négliger dans la suite toutes les quantités de ce même ordre.

Prenons maintenant l'équation (b) en $+$, et nous aurons, en rejetant les termes de l'ordre de i^2,

$$\mu'+\mathcal{M}'\sqrt{-1}=-i\frac{\mathrm{M}-\mathrm{N}(2h-h)}{h'^2-(2h-h')^2}\lambda.$$

Donc

$$\mu'=\frac{1}{2}\left\{\frac{\mathrm{M}+\mathrm{N}(h'+im)}{(m-k')[2h'+i(m+k')]}+i\frac{\mathrm{M}-\mathrm{N}(2h-h')}{4h(h-h')}\right\}\lambda,$$
$$\mathcal{M}'=\frac{1}{2}\left\{\frac{\mathrm{M}+\mathrm{N}(h'+im)}{(m-k')[2h'+i(m+k')]}-i\frac{\mathrm{M}-\mathrm{N}(2h-h')}{4h(h-h')}\right\}\lambda,$$

c'est-à-dire, en faisant

$$\alpha=\frac{\mathrm{N}m}{4h'(m-k')}-\frac{(\mathrm{M}+\mathrm{N}h')(m+k')}{8h'^2(m-k')}+\frac{\mathrm{M}-\mathrm{N}(2h-h')}{8h(h-h')}$$
$$\mathcal{A}=\frac{\mathrm{N}m}{4h'(m-k')}-\frac{(\mathrm{M}+\mathrm{N}h')(m+k')}{8h'^2(m-k')}+\frac{\mathrm{M}-\mathrm{N}(2h-h')}{8h(h-h')},$$
$$\mu'=\left[\frac{\mathrm{M}+\mathrm{N}h'}{4h'(m-k')}+i\alpha\right]\lambda,\quad \mathcal{M}'=\left[\frac{\mathrm{M}+\mathrm{N}h'}{4h'(m-k')}+i\mathcal{A}\right]\lambda\sqrt{-1}.$$

Ces valeurs étant substituées dans l'équation (a), il viendra

$$2h(m-k)+i(m^2-k^2)$$
$$=\frac{\mathrm{M}'(\mathrm{M}+\mathrm{N}h')}{8h'(m-k')}+i\alpha\frac{\mathrm{M}'}{2}+\frac{\mathrm{N}'(\mathrm{M}+\mathrm{N}h)(h+im)}{8h'(m-k')}+i\mathcal{A}\frac{\mathrm{N}'h}{2},$$

ou multipliant par $\frac{m-k'}{2h}$ et réduisant,

$$(m-k)(m-k') - \frac{(\mathrm{M}+\mathrm{N}h')(\mathrm{M}'+\mathrm{N}h)}{16hh'}$$
$$+ i\left[(m^2-k^2)(m-k') - \frac{(\mathrm{M}+\mathrm{N}h)\mathrm{N}'m}{16hh'} - \frac{(\alpha\mathrm{M}'+\mathcal{A}\mathrm{N}'h)(m-k')}{4h}\right] = 0.$$

De sorte que si l'on fait

$$\Delta = (m^2-k^2)(m-k') - \frac{(\mathrm{M}+\mathrm{N}h)\mathrm{N}'m}{16hh'} - \frac{(\alpha\mathrm{M}'+\mathcal{A}\mathrm{N}'h)(m-k')}{4h},$$

on aura

$$(d) \qquad (m-k)(m-k') - \frac{(\mathrm{M}+\mathrm{N}h')(\mathrm{M}'+\mathrm{N}'h)}{16hh'} + i\Delta = 0,$$

équation d'où l'on tirera deux valeurs de m que j'appellerai m_1 et m_2.

Si l'on néglige le terme $i\Delta$, on aura les premières valeurs approchées de m_1 et de m_2; et substituant ensuite ces valeurs dans l'expression de Δ. on aura les valeurs de m_1 et de m_2 aux quantités de l'ordre de i^2 près.

Enfin l'équation (c) donnera, en substituant les valeurs de μ' et de $\mathfrak{M}'$. et négligeant les termes de l'ordre de i^2,

$$\nu \pm \mathfrak{N}\sqrt{-1} = -i\,\frac{\mathrm{M}+\mathrm{N}(2h-2h'\pm h)}{h^2-(2h-2h'\pm h)^2}\,\frac{\mathrm{M}+\mathrm{N}h'}{8h'(m-k')}(1\mp 1)\lambda,$$

d'où, en faisant

$$\beta = -\frac{\mathrm{M}+\mathrm{N}(h-2h')}{4h'(h-h')}\,\frac{\mathrm{M}+\mathrm{N}h'}{8h'(m-k')},$$

on aura

$$\nu = i\beta\lambda, \quad \mathfrak{N} = i\beta\lambda\sqrt{-1}.$$

A l'égard des autres coefficients, savoir : λ', μ, $\mathfrak{M}$, ν' et $\mathfrak{N}'$, ils seront tous égaux à zéro, comme nous l'avons vu dans le numéro précédent.

61. On fera maintenant ces différentes substitutions dans l'équation

intégrale (X) du n° 58, et l'on aura, en rejetant les termes de l'ordre de i^2,

$$(e)\quad\left\{\begin{aligned}
&\left(\frac{dy}{dt}+\frac{M+Nh'}{4h'(m-k')}\left(\frac{du'}{dt}+\frac{dU'}{dt}\sqrt{-1}\right)\right.\\
&\quad+hy\sqrt{-1}+(h-2H)\frac{M+Nh'}{4h'(m-k')}(u'\sqrt{-1}-U')\\
&\quad+i\left\{\alpha\frac{du'}{dt}+\mathcal{A}\frac{dU'}{dt}\sqrt{-1}+\beta\left(\frac{dv}{dt}+\frac{dV}{dt}\sqrt{-1}\right)\right.\\
&\qquad+\left[m-\frac{N'(M+Nh')}{8h'(m-k')}\right]y\sqrt{-1}\\
&\qquad+\left[\frac{(M+Nh')m}{4h'(m-k')}+h\alpha-2H\mathcal{A}\right]u'\sqrt{-1}\\
&\qquad+\left[N+2H\alpha-\frac{(M+Nh')m}{4h'(m-k')}-h\mathcal{A}\right]U'\\
&\qquad\left.\left.+\left[\frac{N'(M+Nh')}{8h'(m-k')}+(h-4H)\beta\right](v\sqrt{-1}-V)\right\}\right)e^{(h+im)t\sqrt{-1}}\\
&=\int\left\{T+\frac{M+Nh'}{4h'(m-k')}T'(\cos Ht+\sin Ht\sqrt{-1})\right.\\
&\qquad+i\,[\beta T(\cos 2Ht+\sin 2Ht\sqrt{-1})\\
&\qquad\quad\left.+T'(\alpha\cos Ht+\mathcal{A}\sin Ht\sqrt{-1})]\right\}e^{-(h+im)t\sqrt{-1}}\,dt.
\end{aligned}\right.$$

Supposons que cette intégrale soit prise de telle manière qu'elle soit nulle lorsque $t=0$, et qu'alors on ait

$$y=f,\quad \frac{dy}{dt}=g,\quad y'=f',\quad \frac{dy'}{dt}=g',$$

et par conséquent

$$u'=f',\quad \frac{du'}{dt}=g',\quad U'=0,\quad \frac{dU'}{dt}=Hf',\quad v=f,\quad \frac{dv}{dt}=g,\quad V=0,$$

et (n° 58)

$$\frac{dV}{dt}=2Hf,$$

il est clair qu'il faudra ajouter au second membre de l'équation précédente, la quantité

$$g + \frac{M + Nh'}{4h'(m - k')}(g' + Hf'\sqrt{-1}) + hf\sqrt{-1} + (h - 2H)\frac{M + Nh'}{4h'(m - k')}f'\sqrt{-1}$$
$$+ i\left\{\alpha g' + \mathcal{A}Hf'\sqrt{-1} + \beta(g + 2Hf\sqrt{-1}) + \left[m - \frac{N'(M + Nh')}{8h'(m - k')}\right]f\sqrt{-1}\right.$$
$$+ \left[\frac{(M + Nh')m}{4h'(m - k')} + h\alpha - 2H\mathcal{A}\right]f'\sqrt{-1}$$
$$\left. + \left[\frac{N'(M + Nh')}{8h'(m - k')} + (h - 4H)\beta\right]f\sqrt{-1}\right\},$$

c'est-à-dire, à cause de $H = h - h'$,

$$g + hf\sqrt{-1} + \frac{M + Nh'}{4h'(m - k')}(g' + h'f'\sqrt{-1})$$
$$+ i\left\{\alpha g' + \beta g + \left[\frac{(M + Nh')m}{4h'(m - k')} + h\alpha - H\mathcal{A}\right]f'\sqrt{-1}\right.$$
$$\left. + [m - (h - 2h')\beta]f\sqrt{-1}\right\}.$$

62. Pour rendre le calcul plus simple, nous négligerons d'abord les termes de l'ordre de i; moyennant quoi l'équation (e) deviendra, en mettant $h - h'$ au lieu de H, et $e^{(h-h')t\sqrt{-1}}$ au lieu de $\cos Ht + \sin Ht\sqrt{-1}$,

$$(f)\quad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{dy}{dt} + \frac{M + Nh'}{4h'(m - k')}\left[\frac{du'}{dt} + (h - 2h')U'\right]\right. \\ &\quad \left. + \left\{hy + \frac{M + Nh'}{4h'(m - k')}\left[\frac{dU'}{dt} - (h - 2h')u'\right]\right\}\sqrt{-1}\right)e^{-(h+im)t\sqrt{-1}} \\ &\quad = g + \frac{M + Nh'}{4h'(m - k')}g' + \left[hf + \frac{M + Nh'}{4(m - h')}f'\right]\sqrt{-1} \\ &\quad + \int\left[Te^{-(h+im)t\sqrt{-1}} + \frac{M + Nh'}{4h'(m - h')}T'e^{-(h'+im)t\sqrt{-1}}\right]dt. \end{aligned}\right.$$

Si l'on multiplie cette équation par $e^{(h+im)t\sqrt{-1}}$, qu'ensuite, après avoir réduit les exponentielles imaginaires en sinus et cosinus, on compare la partie imaginaire du premier membre à la partie imaginaire du second, et qu'on fasse, pour abréger,

$$\theta = \sin[(h+im)t]\int \mathrm{T}\cos[(h+im)t]\,dt - \cos[(h+im)t]\int \mathrm{T}\sin[(h+im)t]\,dt,$$

$$\vartheta = \sin[(h+im)t]\int \mathrm{T}'\cos[(h'+im)t]\,dt - \cos[(h+im)t]\int \mathrm{T}'\sin[(h'+im)t]\,dt,$$

on aura l'équation suivante

$$\begin{aligned} hy &+ \frac{\mathrm{M}+\mathrm{N}h'}{4h'(m-k')}\left[\frac{dU'}{dt} - (h-2h')u'\right] \\ &= \left[hf + \frac{\mathrm{M}+\mathrm{N}h'}{4(m-k')}f'\right]\cos[(h+im)t] \\ &+ \left[g + \frac{\mathrm{M}+\mathrm{N}h'}{4h'(m-k')}g'\right]\sin[(h+im)t] + \theta + \frac{\mathrm{M}+\mathrm{N}h'}{4h'(m-k')}\vartheta, \end{aligned}$$

laquelle, en mettant successivement m_1 et m_2 à la place de m, et dénotant par θ_1 et θ_2, ϑ_1 et ϑ_2 les valeurs correspondantes de θ et de ϑ, en fournira deux autres, dont la seconde étant multipliée par $\frac{m_2 - k'}{h(m_1 - m_2)}$, et ensuite retranchée de la première aussi multipliée par $\frac{m_1 - k'}{h(m_1 - m_2)}$, on aura

$$(g)\quad \left\{ \begin{aligned} y &= \left[\frac{m_1 - k'}{m_1 - m_2}f + \frac{\mathrm{M}+\mathrm{N}h'}{4h(m_1 - m_2)}f'\right]\cos[(h+im_1)t] \\ &+ \left[\frac{m_1 - k'}{h(m_1 - m_2)}g + \frac{\mathrm{M}+\mathrm{N}h'}{4hh'(m_1 - m_2)}g'\right]\sin[(h+im_1)t] \\ &- \left[\frac{m_2 - k'}{m_1 - m_2}f + \frac{\mathrm{M}+\mathrm{N}h'}{4h(m_1 - m_2)}f'\right]\cos[(h+im_2)t] \\ &- \left[\frac{m_2 - k'}{h(m_1 - m_2)}g + \frac{\mathrm{M}+\mathrm{N}h'}{4hh'(m_1 - m_2)}g'\right]\sin[(h+im_2)t] \\ &+ \frac{m_1 - k'}{h(m_1 - m_2)}\theta_1 - \frac{m_2 - k'}{h(m_1 - m_2)}\theta_2 - \frac{\mathrm{M}+\mathrm{N}h'}{4hh'(m_1 - m_2)}(\vartheta_1 - \vartheta_2). \end{aligned} \right.$$

63. Il faudrait maintenant faire un calcul semblable pour trouver la valeur de y', en employant les autres formules du n° 59; mais sans entrer

dans un nouveau détail à cet égard, il suffira de considérer que les équations proposées (T) et (U), dans lesquelles $H = h - h'$, sont telles que l'une se change en l'autre, en marquant seulement d'un trait les lettres y, K, M, N, h, T, et effaçant celui des lettres y', K', M', N', h', T'; d'où il s'ensuit que pour avoir l'expression de y' il ne faudra que mettre dans celle de y, f', g', h', k', M', N', T' au lieu de f, g, h, k, M, N, T, et *vice versâ*.

A l'égard des valeurs de m, on remarquera qu'en négligeant le terme $i\Delta$, elles seront les mêmes pour les deux cas, puisque les quantités M, N, h, k et M', N', h', k' entrent de la même manière dans l'équation (d) du n° 60.

64. Ayant trouvé les premières valeurs de y et de y', si l'on veut avoir une plus grande précision et tenir compte aussi des quantités de l'ordre de i, on nommera ces valeurs y et y', et on désignera de même par u', U', v et V les valeurs correspondantes des quantités u', U', v et V; ensuite on supposera

$$y = \mathrm{y} + iy^{\star}, \quad u' = \mathrm{u}' + iu'^{\star}, \quad U' = \mathrm{U}' + iU'^{\star},$$

et l'on fera ces substitutions dans l'équation (e) du n° 61, en négligeant les termes de l'ordre de i^2; après quoi on effacera tous les termes qui ne seront point affectés de i, parce que ces termes se détruiront d'eux-mêmes, en vertu de l'équation (f), et l'on divisera les autres par i. De cette manière on aura

$$\begin{aligned}&\Bigg(\frac{dy^{\star}}{dt} + \frac{\mathrm{M} + \mathrm{N}h'}{4h'(m-k')}\left(\frac{du'^{\star}}{dt} + (h - 2h')U'^{\star}\right)\\ &\quad + \left[hy^{\star} + \frac{\mathrm{M} + \mathrm{N}h'}{4h(m-k')}\left(\frac{dU'^{\star}}{dt} - (h - 2h')u'^{\star}\right)\right]\sqrt{-1}\\ &\quad + \alpha\frac{d\mathrm{u}'}{dt} + \beta\frac{d\mathrm{v}}{dt} + \left(\mathrm{N} + 2\mathrm{H}\alpha - \frac{(\mathrm{M} + \mathrm{N}h')m}{4h(m-k')} - h\mathcal{A}\right)\mathrm{U}'\\ &\quad - \left(\frac{\mathrm{N}'(\mathrm{M} + \mathrm{N}h')}{8h'(m-k')} + (h - 4\mathrm{H})\beta\right)\mathrm{V}\end{aligned}$$

$$+\left[\mathcal{A}\frac{d\mathrm{U}'}{dt}+\beta\frac{d\mathrm{V}}{dt}+\left(m-\frac{\mathrm{N}'(\mathrm{M}+\mathrm{N}h')}{8h'(m-k')}\right)\mathrm{y}\right.$$
$$+\left(\frac{(\mathrm{M}+\mathrm{N}h')m}{4h'(m-k')}+h\alpha-2\mathrm{H}\mathcal{A}\right)\mathrm{u}'$$
$$\left.+\left(\frac{\mathrm{N}(\mathrm{M}+\mathrm{N}h')}{8h'(m-k')}+(h-4\mathrm{H})\beta\right)\mathrm{v}\right]\sqrt{-1}\Bigg]e^{-(h+im)t\sqrt{-1}}$$
$$=\alpha g'+\beta g+\left[\left(\frac{(\mathrm{M}+\mathrm{N}h')m}{4h'(m-k')}+h\alpha-\mathrm{H}\mathcal{A}\right)f'+\left(m-(h-2h')\beta\right)f\right]\sqrt{-1}$$
$$+\int\left[\beta\mathrm{T}(\cos 2\mathrm{H}t+\sin 2\mathrm{H}t\sqrt{-1})\right.$$
$$\left.+\mathrm{T}'(\alpha\cos\mathrm{H}t+\mathcal{A}\sin\mathrm{H}t\sqrt{-1})\right]e^{-(h+im)t\sqrt{-1}}dt.$$

On traitera cette équation comme on a fait ci-devant l'équation (f), et supposant, pour abréger,

$$\varphi=\sin[(h+im)t]\int\mathrm{T}\cos[(2h'-h+im)t]\,dt$$
$$-\cos[(h+im)t]\int\mathrm{T}\sin[(2h'-h+im)t]\,dt,$$

$$\chi=\sin[(h+im)t]\int\mathrm{T}'\cos[(h'+im)t]\,dt$$
$$-\cos[(h+im)t]\int\mathrm{T}'\sin[(h'+im)t]\,dt,$$

$$\psi=\sin[(h+im)t]\int\mathrm{T}'\cos[(2h-h'+im)t]\,dt$$
$$-\cos[(h+im)t]\int\mathrm{T}'\sin[(2h-h'+im)t]\,dt,$$

et de plus

$$\gamma=m-\frac{\mathrm{N}'(\mathrm{M}+\mathrm{N}h')}{8h'(m-k')},$$
$$\delta=\frac{(\mathrm{M}+\mathrm{N}h')m}{4h'(m-k')}+h\alpha-2\mathrm{H}\mathcal{A},$$
$$\varepsilon=\frac{\mathrm{N}'(\mathrm{M}+\mathrm{N}h')}{8h'(m-k')}+(h-4\mathrm{H})\beta,$$
$$\zeta=\alpha g'+\beta g,$$
$$\eta=\left[\frac{(\mathrm{M}+\mathrm{N}h)m}{4h'(m-k')}+h\alpha-\mathrm{H}\mathcal{A}\right]f'+[m-(h-2h')\beta]f,$$

on trouvera

$$y^* = \frac{m_1 - k'}{h(m_1 - m_2)}\Big[\eta_1 \cos[(h + im_1)t] + \zeta_1 \sin[(h + im_1)t]$$
$$+ \mathfrak{A}_1 \frac{dU'}{dt} + \beta_1 \frac{dV'}{dt} + \gamma_1 y + \delta_1 u' + \varepsilon_1 v$$
$$+ \beta_1 \varphi_1 + \frac{\alpha_1 + \mathfrak{A}_1}{2}\chi_1 + \frac{\alpha_1 - \mathfrak{A}_1}{2}\psi_1\Big]$$
$$- \frac{m_2 - k'}{h(m_1 - m_2)}\Big[\eta_2 \cos[(h + im_2)t] + \zeta_2 \sin[(h + im_2)t]$$
$$+ \mathfrak{A}_2 \frac{dU'}{dt} + \beta_2 \frac{dV'}{dt} + \gamma_2 y + \delta_2 u' + \varepsilon_2 v$$
$$+ \beta_2 \varphi_2 + \frac{\alpha_2 + \mathfrak{A}_1}{2}\chi_2 + \frac{\alpha_2 - \mathfrak{A}_1}{2}\psi_2\Big],$$

$\eta_1, \eta_2, \zeta_1, \zeta_2, \ldots$ étant les valeurs de $\eta, \zeta, \ldots$ qui répondent à m_1 et m_2.

Si l'on voulait encore pousser la précision plus loin, il faudrait alors reprendre les calculs du n° 58, et y avoir égard aux quantités de l'ordre de i^3 que nous y avons négligées.

65. Soit $T = AP$, A étant une quantité constante, et P une fonction de P telle, que

$$\frac{d^2P}{dt^2} + a^2 P = 0;$$

on aura donc

$$\int T \cos[(h + im)t]\,dt = A \int P \cos[(h + im)t]\,dt,$$

et

$$\int P \cos[(h + im)t]\,dt = -\frac{1}{a^2}\int \frac{d^2P}{dt^2}\cos[(h + im)t]\,dt$$
$$= -\frac{1}{a^2}\frac{dP}{dt}\cos[(h + im)t] - \frac{h + im}{a^2} P \sin[(h + im)t]$$
$$+ \frac{(h + im)^2}{a^2}\int P \cos[(h + im)t]\,dt$$

en intégrant par parties; donc, supposant que l'intégrale

$$\int P \cos[(h + im)t]\,dt$$

soit prise de manière qu'elle soit nulle lorsque $t=0$, et qu'alors on ait $\frac{dP}{dt}=\alpha$, on aura

$$\int P\cos[(h+im)t]\,dt$$
$$=\left[(h+im)P\sin[(h+im)t]+\frac{dP}{dt}\cos[(h+im)t]-\alpha\right]\frac{1}{(h+im)^2-a^2}.$$

On trouvera de même, en prenant β pour ce que devient P lorsque $t=0$,

$$\int P\sin[(h+im)t]\,dt$$
$$=\left[-(h+im)P\cos[(h+im)t]+\frac{dP}{dt}\sin[(h+im)t]+(h+im)\beta\right]\frac{1}{(h+im)^2-a^2}.$$

De sorte qu'on aura (n° 62)

$$\theta=\frac{A}{(h+im)^2-a^2}\left[(h+im)P-\alpha\sin[(h+im)t]-\beta(h+im)\cos[(h+im)t]\right].$$

Pareillement, si l'on a

$$T'=A'P' \quad \text{et} \quad \frac{d^2P'}{dt^2}+a'^2P'=0,$$

et que α', β' soient les valeurs de $\frac{dP'}{dt}$ et de P' quand $t=0$, on trouvera

$$\vartheta=\frac{A'}{(h'+im)-a'^2}\left[(h'+im)P\cos[(h-h')t]+\frac{dP}{dt}\sin[(h-h')t]\right.$$
$$\left.-\alpha'\sin[(h'+im)t]-\beta'(h'+im)\cos[(h'+im)t]\right].$$

Donc, si l'on a

$$T=AP+BQ+CR+\ldots$$

et

$$\frac{d^2P}{dt^2}+a^2P=0,\quad \frac{d^2Q}{dt^2}+b^2Q=0,\quad \frac{d^2R}{dt^2}+c^2R=0,\ldots;$$

et de même

$$T'=A'P'+B'Q'+C'R'+\ldots$$

et

$$\frac{d^2P'}{dt^2}+a'^2P'=0,\quad \frac{d^2Q'}{dt^2}+b'^2Q'=0,\quad \frac{d^2R'}{dt^2}+c'^2R'=0,\ldots,$$

et qu'on fasse

$$\Theta = \frac{A}{h^2 - a^2} P + \frac{B}{h^2 - b^2} Q + \frac{C}{h^2 - c^2} R + \ldots,$$

$$\Theta' = \frac{A'}{h'^2 - a'^2} P' + \frac{B'}{h'^2 - b'^2} Q' + \frac{C'}{h'^2 - c'^2} R' + \ldots,$$

et de plus

$$F = f - \Lambda, \quad G = g - \Gamma, \quad F' = f' - \Lambda', \quad G' = g' - \Gamma'$$

$\left(\Lambda, \Gamma, \Lambda'\right.$ et Γ' étant les valeurs de Θ, $\frac{d\Theta}{dt}$, Θ' et $\frac{d\Theta'}{dt}$, lorsque $\left.t = o\right)$, la formule (g) du n° 62 donnera, en négligeant les termes de l'ordre de i,

$$(\mathrm{h}) \quad \left\{ \begin{aligned} y = & \left[\frac{m_1 - k'}{m_1 - m_2} F + \frac{M + Nh'}{4h'(m_1 - m_2)} F'\right] \cos[(h + im_1)t] \\ & + \left[\frac{m_1 - k'}{h(m_1 - m_2)} G + \frac{M + Nh'}{4hh'(m_1 - m_2)} G'\right] \sin[(h + im_1)t] \\ & - \left[\frac{m_2 - k'}{m_1 - m_2} F + \frac{M + Nh'}{4h'(m_1 - m_2)} F'\right] \cos[(h + im_2)t] \\ & - \left[\frac{m_2 - k'}{h(m_1 - m_2)} G + \frac{M + Nh'}{4hh'(m_1 - m_2)} G'\right] \sin[(h + im_2)t] + \Theta. \end{aligned} \right.$$

Par là on aura la valeur de y lorsque les fonctions T et T' seront exprimées par des suites quelconques de différents sinus et cosinus d'angles multiples de t.

Il faut observer que si a était égal ou presque égal à h, il ne serait pas permis de négliger les termes affectés de i dans l'expression de θ, et l'on trouverait alors dans la valeur de y des termes dont les coefficients seraient très-grands; il en faudra dire autant du cas où a' ne serait que très-peu différent de h'; nous en laissons le détail au Lecteur.

Mais, si a était exactement égal à $h + im$, le dénominateur $a^2 - (h + im)^2$ de l'expression de θ deviendrait égal à zéro, et comme cette quantité n'est point infinie, le numérateur correspondant serait aussi égal à zéro dans ce cas-là; faisant donc

$$h + im = a + \omega,$$

et regardant ω comme une quantité évanouissante, on trouverait

$$\theta = -\frac{A}{2a}\left[\alpha t \cos at + \beta(\cos at - at \sin at) - P - a\frac{dP}{da}\right];$$

de sorte que la formule (h) contiendrait des termes multipliés par l'angle t. Il en serait de même si $a' = h' + im$. Au reste ces deux cas sont susceptibles de remarques analogues à celle que nous avons faite à la fin n° 52.

66. Comme les quantités m_1 et m_2 sont les racines d'une équation du second degré (n° 60), il peut arriver qu'elles soient égales ou imaginaires; ainsi il ne sera pas inutile de nous arrêter ici à discuter ces deux cas.

1° Si $m_2 = m_1$, je fais $m_2 = m_1 + \omega$ (ω étant une quantité évanouissante), ce qui me donne

$$\frac{m_1 - k'}{m_1 - m_2} = -\frac{m_1 - k'}{\omega}, \quad \frac{m_2 - k'}{m_1 - m_2} = -\frac{m_1 - k'}{\omega} - 1, \quad \frac{M + Nh'}{m_1 - m_2} = -\frac{M + Nh'}{\omega},$$

et

$$\cos[(h + im_2)t] = \cos[(h + im_1)t] - it\omega \sin[(h + im_1)t],$$
$$\sin[(h + im_2)t] = \sin[(h + im_1)t] + it\omega \cos[(h + im_1)t];$$

donc, faisant ces substitutions dans la formule (h), on aura, après avoir effacé ce qui se détruit,

$$\begin{aligned} y = {} & F\cos[(h + im_1)t] + \frac{G}{h}\sin[(h + im_1)t] \\ & + i\left[(m_1 - k')F + \frac{M + Nh'}{4h}F'\right] t \sin[(h + im_1)t] \\ & - i\left[\frac{m_1 - k'}{h}G + \frac{M + Nh'}{4hh'}G'\right] t \cos[(h + im_1)t] + \Theta. \end{aligned}$$

Mais il faut bien remarquer que, pour que cette équation ait lieu, il faut que les valeurs de m soient égales rigoureusement et sans rien négliger. (*Voyez* le numéro cité ci-dessus.)

2° Si m_1 et m_2 sont imaginaires, en sorte que

$$m_1 = \mu + \nu\sqrt{-1} \quad \text{et} \quad m_2 = \mu - \nu\sqrt{-1},$$

on aura

$$\frac{m_1 - k'}{m_1 - m_2} = \frac{\mu - k'}{2\nu\sqrt{-1}} + \frac{1}{2}, \quad \frac{m_2 - k'}{m_1 - m_2} = \frac{\mu - k'}{2\nu\sqrt{-1}} - \frac{1}{2}, \quad \frac{M + Nh'}{m_1 - m_2} = \frac{M + Nh'}{2\nu\sqrt{-1}};$$

ensuite on trouvera

$$\cos[(h + im_1)t] = \cos[(h + i\mu)t]\frac{e^{i\nu t} + e^{-i\nu t}}{2} + \sin[(h + i\mu)t]\frac{e^{i\nu t} - e^{-i\nu t}}{2\sqrt{-1}},$$

$$\sin[(h + im_1)t] = \sin[(h + i\mu)t]\frac{e^{i\nu t} + e^{-i\nu t}}{2} - \cos[(h + i\mu)t]\frac{e^{i\nu t} - e^{-i\nu t}}{2\sqrt{-1}},$$

et de même

$$\cos[(h + im_2)t] = \cos[(h + i\mu)t]\frac{e^{i\nu t} + e^{-i\nu t}}{2} - \sin[(h + i\mu)t]\frac{e^{i\nu t} - e^{-i\nu t}}{2\sqrt{-1}},$$

$$\sin[(h + im_2)t] = \sin[(h + i\mu)t]\frac{e^{i\nu t} + e^{-i\nu t}}{2} + \cos[(h + i\mu)t]\frac{e^{i\nu t} - e^{-i\nu t}}{2\sqrt{-1}}.$$

Ces substitutions faites, on verra que les imaginaires se détruiront dans la formule (h), et qu'elle deviendra

$$\begin{aligned} y = &\left[F\cos[(h + i\mu)t] + \frac{G}{h}\sin[(h + i\mu)t]\right]\frac{e^{i\nu t} + e^{-i\nu t}}{2} \\ &- \left[\left(\frac{\mu - k'}{\nu}F + \frac{M + Nh'}{4h\nu}F'\right)\sin[(h + i\mu)t]\right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{\mu - k'}{h\nu}G + \frac{M + Nh'}{4hh'\nu}G'\right)\cos[(h + i\mu)t]\right]\frac{e^{i\nu t} - e^{-i\nu t}}{2} + \Theta. \end{aligned}$$

Ainsi, dans le cas où l'équation (d) a ses deux racines imaginaires, la valeur de y contient nécessairement des exponentielles toutes réelles, et qui croissent à l'infini à mesure que t croît.

Application de la solution précédente à la théorie de Jupiter et de Saturne.

67. Soient I la masse du Soleil, J celle de Jupiter, r le rayon vecteur de l'orbite de cette planète projetée sur le plan de l'écliptique (plan que nous regarderons comme absolument fixe et immobile), φ l'angle décrit

par le rayon r, pendant le temps t, et q la tangente de la latitude héliocentrique de Jupiter.

Soient de même J′ la masse de Saturne, r' le rayon vecteur de son orbite réduit au plan de l'écliptique, φ' l'angle décrit par ce rayon durant le même temps t, et q' la tangente de la latitude héliocentrique de Saturne.

Enfin, soient la perpendiculaire menée du centre de Jupiter sur le plan de l'écliptique p, la perpendiculaire menée du centre de Saturne sur le même plan p', la distance de Jupiter au Soleil, c'est-à-dire le rayon mené du Soleil à Jupiter, u, la distance de Saturne au Soleil u', et la distance de Jupiter à Saturne v, en sorte que

$$p = rq,\quad p' = r'q',\quad u = \sqrt{r^2 + p^2} = r\sqrt{1 + q^2},\quad u' = r'\sqrt{1 + q'^2},$$

et

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{[r\sin(\varphi - \varphi')]^2 + [r' - r\cos(\varphi - \varphi')]^2 + (p - p')^2} \\ &= \sqrt{r^2(1 + q^2) - 2rr'[\cos(\varphi - \varphi') + qq'] + r'^2(1 + q'^2)}, \end{aligned}$$

et supposant

$$\begin{aligned} R &= J'\left[\frac{r - r'\cos(\varphi - \varphi')}{v^3} + \frac{r'\cos(\varphi - \varphi')}{u'^3}\right], \\ Q &= J'\left(\frac{r'}{v^3} - \frac{r'}{u'^3}\right) r\sin(\varphi - \varphi'), \\ P &= J'\left(\frac{p - p'}{v^3} + \frac{p'}{u'^3}\right), \\ R' &= J\left[\frac{r' - r\cos(\varphi' - \varphi)}{v^3} + \frac{r\cos(\varphi' - \varphi)}{u^3}\right], \\ Q' &= J\left(\frac{r}{v^3} - \frac{r}{u^3}\right) r'\sin(\varphi' - \varphi), \\ P' &= J\left(\frac{p' - p}{v^3} + \frac{p}{u^3}\right), \end{aligned}$$

on aura les six équations suivantes (*voyez* les Articles XIV et XVI du Mémoire intitulé : *Application de la méthode précédente, etc.*,

p. 385 et 389) :

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{r\,d\varphi^2}{dt^2} + (\mathrm{I}+\mathrm{J})\frac{r}{u^3} + \mathrm{R} = 0,$$

$$\frac{d(r^2 d\varphi)}{dt^2} + \mathrm{Q} = 0,$$

$$\frac{d^2 p}{dt^2} + (\mathrm{I}+\mathrm{J})\frac{p}{u^3} + \mathrm{P} = 0,$$

$$\frac{d^2 r'}{dt^2} - \frac{r'\,d\varphi'^2}{dt^2} + (\mathrm{I}+\mathrm{J}')\frac{r'}{u'^3} + \mathrm{R}' = 0,$$

$$\frac{d(r'^2 d\varphi')}{dt^2} + \mathrm{Q}' = 0,$$

$$\frac{d^2 p'}{dt^2} + (\mathrm{I}+\mathrm{J}')\frac{p'}{u'^3} + \mathrm{P}' = 0,$$

dont les trois premières représentent le mouvement de Jupiter dérangé par Saturne, et les trois autres celui de Saturne dérangé par Jupiter.

D'où l'on voit que, quand on aura calculé les dérangements de Jupiter, les mêmes formules serviront à calculer ceux de Saturne, puisqu'il n'y aura qu'à changer r', φ', p', u', J' en r, φ, p, u, J, et *vice versâ*.

68. Puisque $p = rq$, l'équation

$$\frac{d^2 p}{dt^2} + (\mathrm{I}+\mathrm{J})\frac{p}{u^3} + \mathrm{P} = 0$$

deviendra, en divisant par r,

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{2\,dq\,dr}{r\,dt^2} + q\frac{d^2 r}{r\,dt^2} + (\mathrm{I}+\mathrm{J})\frac{q}{u^3} + \frac{\mathrm{P}}{r} = 0,$$

et, mettant au lieu de $\frac{d^2 r}{dt^2}$ sa valeur tirée de la première équation, on aura, après avoir effacé ce qui se détruit,

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + q\frac{d\varphi^2}{dt^2} + \frac{2\,dq\,dr}{r\,dt^2} + \frac{\mathrm{P} - \mathrm{R}q}{r} = 0.$$

Ensuite l'équation $\frac{d(r^2 d\varphi)}{dt^2} + \mathrm{Q} = 0$ donnera

$$\frac{r^2 d\varphi}{dt} = c - \int \mathrm{Q}\,dt,$$

c étant une constante arbitraire; d'où l'on tire

$$\frac{d\varphi}{dt}=\frac{c-\int Q\,dt}{r^2}.$$

Donc les équations du mouvement de Jupiter seront, à cause de $u=r\sqrt{1+q^2}$,

$$(i)\quad \left\{\begin{aligned}&\frac{d^2r}{dt^2}-\frac{(c-\int Q\,dt)^2}{r^3}+\frac{I+J}{r^2(1+q^2)^{\frac{3}{2}}}+R=0,\\&\frac{d^2q}{dt^2}+q\frac{(c-\int Q\,dt)^2}{r^4}+\frac{2\,dq\,dr}{r\,dt^2}+\frac{P-Rq}{r}=0,\\&\frac{d\varphi}{dt}-\frac{c-\int Q\,dt}{r^2}=0.\end{aligned}\right.$$

69. Les équations (i) donneront r, q et φ en t; d'où l'on connaîtra le lieu de la planète à chaque instant. Si l'on voulait de plus avoir l'orbite qu'elle décrit, on n'aurait qu'à éliminer le temps t au moyen de l'équation

$$\frac{d(r^2d\varphi)}{dt^2}+Q=0,$$

laquelle étant multipliée par $2r^2d\varphi$, et ensuite intégrée, donne

$$\left(\frac{r^2d\varphi}{dt}\right)^2+2\int Q\,r^2\,d\varphi=C,$$

C étant une constante arbitraire; d'où l'on tire

$$dt=\frac{r^2d\varphi}{\sqrt{C-2\int Q\,r^2\,d\varphi}}.$$

Et cette valeur étant substituée dans les deux premières des équations (i), on aura, en prenant $d\varphi$ constant au lieu de dt, et faisant

$$\frac{1}{r}=s,\quad Rr^2+Q\frac{dr}{d\varphi}=U,\quad r^3\left(P-Rq+Q\frac{dq}{r\,d\varphi}\right)=V,$$

les équations suivantes :

$$\frac{d^2s}{d\varphi^2}+s+\frac{(I+J)(1+q^2)^{-\frac{3}{2}}+U}{C-2\int Qr^2d\varphi}=0,$$

$$\frac{d^2q}{d\varphi^2}+q+\frac{V}{C-2\int Qr^2d\varphi}=0.$$

70. Supposons que les forces perturbatrices R, Q, P soient nulles, en sorte que l'orbite soit décrite en vertu de la seule force $\frac{I+J}{u^2}$ tendant au centre du Soleil, et les équations que nous venons de trouver deviendront

$$\frac{d^2s}{d\varphi^2}+s-\frac{I+J}{C(1+q^2)^{\frac{3}{2}}}=0,\quad \frac{d^2q}{d\varphi^2}+q=0,$$

lesquelles étant intégrées donneront

$$q=\varepsilon\sin(\varphi-\alpha),\quad s=\frac{I+J}{D}\sqrt{1+q^2}+\eta\cos(\varphi-\omega),$$

ε, α, η et ω étant des constantes arbitraires, et D étant égal à $C(1+\varepsilon^2)$.

La première de ces deux formules nous montre que l'orbite est toute dans un plan fixe passant par le centre des rayons r, et coupant ce plan de manière que ε soit la tangente de l'inclinaison, et α le lieu du nœud ascendant.

La seconde fait voir que l'orbite est une ellipse dont le foyer est dans le centre même des rayons vecteurs r; et pour en déterminer l'espace et la position on considérera que si l'on nomme Φ et $\mathcal{A}$ les angles dont φ et α sont les projections, on aura, $\Phi-\mathcal{A}$ étant l'argument de latitude, et $\varphi-\alpha$ sa projection,

$$\frac{\cos(\varphi-\alpha)}{\cos(\Phi-\mathcal{A})}=\sqrt{1+q^2},\quad \frac{\sin(\varphi-\alpha)}{\sin(\Phi-\mathcal{A})}=\frac{\sqrt{1+q^2}}{\sqrt{1+\varepsilon^2}},$$

et par conséquent

$$\cos(\varphi-\alpha)=\sqrt{1+q^2}\cos(\Phi-\mathcal{A}),\quad \sin(\varphi-\alpha)=\frac{\sqrt{1+q^2}}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}\sin(\Phi-\mathcal{A});$$

donc

$$\begin{aligned}\cos(\varphi-\omega) &= \cos(\varphi-\alpha+\alpha-\omega)\\ &= \cos(\varphi-\alpha)\cos(\alpha-\omega)-\sin(\varphi-\alpha)\sin(\alpha-\omega)\\ &= \left[\cos(\alpha-\omega)\cos(\Phi-\mathcal{A})-\frac{\sin(\alpha-\omega)}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}\sin(\Phi-\mathcal{A})\right]\sqrt{1+q^2};\end{aligned}$$

et faisant, pour plus de simplicité,

$$\cos(\alpha-\omega)=\mathcal{C}\cos(\mathcal{A}-\mathcal{B}),\quad \frac{\sin(\alpha-\omega)}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}=\mathcal{C}\sin(\mathcal{A}-\mathcal{B}),$$

ce qui donne

$$\mathcal{C}=\sqrt{\frac{1+\varepsilon^2\cos(\alpha-\omega)^2}{1+\varepsilon^2}}\quad \text{et}\quad \operatorname{tang}(\mathcal{A}-\mathcal{B})=\frac{\operatorname{tang}(\alpha-\omega)}{\sqrt{1-\varepsilon^2}},$$

on aura

$$\cos(\varphi-\omega)=\mathcal{C}\cos(\Phi-\mathcal{B})\sqrt{1+q^2};$$

donc

$$\frac{s}{\sqrt{1+q^2}}=\frac{\mathrm{I}+\mathrm{J}}{\mathrm{D}}+\eta\mathcal{C}\cos(\Phi-\mathcal{B}).$$

Or $s=\frac{1}{r}$, et $r\sqrt{1+q^2}=u$ rayon vecteur de l'orbite réelle; donc l'équation de cette orbite sera

$$u=\frac{1}{\frac{\mathrm{I}+\mathrm{J}}{\mathrm{D}}+\eta\mathcal{C}\cos(\Phi-\mathcal{B})},$$

laquelle est visiblement celle d'une ellipse dont $\frac{\mathrm{I}+\mathrm{J}}{\mathrm{D}}$ est le paramètre et $\eta\mathcal{C}$ l'excentricité. A l'égard de la position du grand axe de cette ellipse, il est clair que $\Phi=\mathcal{B}$ donnera le lieu du périhélie, et pour avoir l'angle correspondant φ, que nous nommerons β, on observera que

$$\operatorname{tang}(\varphi-\alpha)=\frac{\operatorname{tang}(\Phi-\mathcal{A})}{\sqrt{1+\varepsilon}},$$

de sorte qu'on aura

$$\operatorname{tang}(\beta-\alpha)=\frac{\operatorname{tang}(\mathcal{B}-\mathcal{A})}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}=\frac{\operatorname{tang}(\omega-\alpha)}{1+\varepsilon^2}.$$

71. Imaginons maintenant que l'effet des forces perturbatrices consiste à faire varier les quantités ε, α, η et ϖ, en sorte que l'orbite soit représentée par une ellipse qui change continuellement d'espace et de position; nous aurons donc

$$1^{\circ}\quad q = \varepsilon\sin(\varphi-\alpha) \text{ et } \frac{dq}{d\varphi} = \varepsilon\cos(\varphi-\alpha) + \frac{d\varepsilon}{d\varphi}\sin(\varphi-\alpha) - \frac{d\alpha}{d\varphi}\varepsilon\cos(\varphi-\alpha);$$

or, puisqu'on a deux indéterminées ε et α, dont l'une peut être tout ce qu'on voudra, nous supposerons

$$\sin(\varphi-\alpha)\,d\varepsilon = \varepsilon\cos(\varphi-\alpha)\,d\alpha,$$

ce qui donnera

$$\frac{dq}{d\varphi} = \varepsilon\cos(\varphi-\alpha),$$

de sorte que la variation instantanée de la latitude sera la même que si le plan de l'orbite ne changeait point de position. Donc, en mettant $\frac{\varepsilon\cos(\varphi-\alpha)\,d\alpha}{\sin(\varphi-\alpha)}$ pour $d\varepsilon$,

$$\begin{aligned}\frac{d^2q}{d\varphi^2} &= -\varepsilon\sin(\varphi-\alpha) + \frac{d\varepsilon}{d\varphi}\cos(\varphi-\alpha) + \frac{d\alpha}{d\varphi}\varepsilon\sin(\varphi-\alpha)\\ &= -\varepsilon\sin(\varphi-\alpha) + \frac{\varepsilon\,d\alpha}{\sin(\varphi-\alpha)\,d\varphi}.\end{aligned}$$

Donc on aura, au lieu de l'équation

$$\frac{d^2q}{d\varphi^2} + q + \frac{V}{C - 2\int Qr^2\,d\varphi} = 0,$$

ces deux-ci :

$$\frac{\varepsilon\,d\alpha}{\sin(\varphi-\alpha)\,d\varphi} + \frac{V}{\frac{D}{1+\varepsilon^2} - 2\int Qr^2\,d\varphi} = 0,$$

$$\frac{d\varepsilon}{\varepsilon} - \frac{d\alpha}{\operatorname{tang}(\varphi-\alpha)} = 0,$$

par lesquelles on connaitra le mouvement de la ligne des nœuds, et la variation de l'inclinaison de l'orbite.

2° On aura

$$s = \frac{I + J}{D} \sqrt{1 + q^2} + \eta \cos(\varphi - \omega),$$

d'où l'on tire

$$\frac{ds}{d\varphi} = \frac{I + J}{D} \cdot \frac{q\,dq}{d\varphi \sqrt{1 + q^2}} - \eta \sin(\varphi - \omega) + \frac{d\eta}{d\varphi} \cos(\varphi - \omega) + \frac{d\omega}{d\varphi} \eta \sin(\varphi - \omega).$$

Supposons ici, à l'imitation de ce que nous venons de faire plus haut,

$$\cos(\varphi - \omega)\, d\eta = -\eta \sin(\varphi - \omega)\, d\omega,$$

de manière que l'on ait simplement

$$\frac{ds}{d\varphi} = \frac{I + J}{D} \frac{q\,dq}{d\varphi \sqrt{1 + q^2}} - \eta \sin(\varphi - \omega),$$

c'est-à-dire que la variation instantanée du rayon $r = \frac{1}{s}$ soit la même que si l'ellipse demeurait constante, et différentiant cette valeur de $\frac{ds}{d\varphi}$, on trouvera

$$\frac{d^2 s}{d\varphi^2} = \frac{I + J}{D} \left[\frac{dq^2 + q\,d^2 q}{d\varphi^2 \sqrt{1 + q^2}} - \frac{q^2\, dq^2}{d\varphi^2 (1 + q^2)^{\frac{3}{2}}} \right]$$
$$- \eta \cos(\varphi - \omega) - \frac{d\eta}{d\varphi} \sin(\varphi - \omega) + \frac{d\omega}{d\varphi} \eta \cos(\varphi - \omega);$$

or, à cause de $\frac{dq^2}{d\varphi^2} + q^2 = \varepsilon^2$,

$$\frac{dq^2}{d\varphi^2 \sqrt{1 + q^2}} - \frac{q^2\, dq^2}{d\varphi^2 (1 + q^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{dq^2}{d\varphi^2 (1 + q^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\varepsilon^2 - q^2}{(1 + q^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1 + \varepsilon^2}{(1 + q^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{\sqrt{1 + q^2}};$$

de plus

$$\frac{d^2 q}{d\varphi^2} = -q - \frac{V}{C - 2\int Q r^2\, d\varphi},$$

donc

$$\frac{q\,d^2 q}{d\varphi^2 \sqrt{1 + q^2}} = -\frac{q^2}{\sqrt{1 + q^2}} - \frac{q}{\sqrt{1 + q^2}} \frac{V}{C - 2\int Q r^2\, d\varphi}$$
$$= -\sqrt{1 + q^2} + \frac{1}{\sqrt{1 + q^2}} - \frac{q}{\sqrt{1 + q^2}} \frac{V}{C - 2\int Q r^2\, d\varphi};$$

donc on aura, à cause de $d\eta = -\dfrac{\eta\sin(\varphi-\omega)}{\cos(\varphi-\omega)}\,d\omega$,

$$\frac{d^2s}{d\varphi^2}=\frac{\mathrm{I}+\mathrm{J}}{\mathrm{D}}\left[\frac{1+\varepsilon^2}{(1+q^2)^{\frac{3}{2}}}-\sqrt{1+q^2}-\frac{q}{\sqrt{1+q^2}}\,\frac{V}{\mathrm{C}-2\int \mathrm{Q}r^2\,d\varphi}\right]$$
$$-\eta\cos(\varphi-\omega)+\frac{\eta\,d\omega}{d\varphi\cos(\varphi-\omega)}.$$

De sorte que l'équation

$$\frac{d^2s}{d\varphi^2}+s-\frac{(\mathrm{I}+\mathrm{J})(1+q^2)^{\frac{3}{2}}+U}{\mathrm{C}-2\int \mathrm{Q}r^2\,d\varphi}=0$$

se changera en ces deux-ci :

$$\frac{\eta\,d\omega}{\cos(\varphi-\omega)\,d\varphi}-\frac{\mathrm{U}+\dfrac{\mathrm{I}+\mathrm{J}}{\mathrm{D}}\left[2\dfrac{1+\varepsilon^2}{(1+q^2)^{\frac{3}{2}}}\displaystyle\int \mathrm{Q}r^2\,d\varphi+\dfrac{q}{\sqrt{1+q^2}}V\right]}{\dfrac{\mathrm{D}}{1+\varepsilon^2}-2\displaystyle\int \mathrm{Q}r^2\,d\varphi}=0,$$

$$\frac{d\eta}{\eta}+\operatorname{tang}(\varphi-\omega)\,d\varphi=0,$$

lesquelles serviront à trouver η et ω.

Au reste, dès qu'on aura trouvé r et q en φ, ou bien r, q et φ en t, on pourra, si l'on veut, trouver tout de suite les valeurs de α, ε, ω et η ; car les équations

$$q=\varepsilon\sin(\varphi-\alpha),\quad \frac{dq}{d\varphi}=\varepsilon\cos(\varphi-\alpha)$$

donneront

$$\varepsilon=\sqrt{q^2+\left(\frac{dq}{d\varphi}\right)^2},\quad \operatorname{tang}(\varphi-\alpha)=\frac{q\,d\varphi}{dq}.$$

Et de même, les équations

$$s=\frac{\mathrm{I}+\mathrm{J}}{\mathrm{D}}\sqrt{1+q^2}+\eta\cos(\varphi-\omega),\quad \frac{ds}{d\varphi}=\frac{\mathrm{I}+\mathrm{J}}{\mathrm{D}}\,\frac{q\,dq}{d\varphi\sqrt{1+q^2}}-\eta\sin(\varphi-\omega)$$

donneront, en faisant, pour abréger, $\mathrm{S}-\dfrac{\mathrm{I}+\mathrm{J}}{\mathrm{D}}\sqrt{1+q^2}=u$,

$$\eta=\sqrt{u^2+\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2},\quad \operatorname{tang}(\varphi-\omega)=-\frac{du}{u\,d\varphi}.$$

72. Les observations nous apprennent que le mouvement de Jupiter autour du Soleil est à peu près circulaire et uniforme, et que le plan de son orbite ne fait qu'un très-petit angle avec celui de l'écliptique; d'où il s'ensuit que si l'on nomme a la distance moyenne de Jupiter au Soleil, et h sa vitesse angulaire moyenne, on pourra supposer

$$r = a(1 + iy), \quad \varphi = ht + ix, \quad q = iz,$$

y, x, z étant des quantités variables, et i un coefficient très-petit, où il faut remarquer que les valeurs de y et de $\frac{dx}{dt}$ ne doivent renfermer aucun terme tout constant; autrement, contre l'hypothèse, a et h ne seraient plus les valeurs moyennes de r et de $\frac{d\varphi}{dt}$.

Cela posé, si l'on fait ces substitutions dans les équations (i) du n° 68, et qu'on divise la première par a, on aura, en poussant la précision jusqu'aux quantités de l'ordre de i^3,

$$\begin{aligned}
&i\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{\left(c - \int Q\,dt\right)^2}{a^4}(1 - 3iy + 6i^2y^2 - 10i^3y^3) \\
&\qquad + \frac{I + J}{a^3}\left(1 - 2iy + 3i^2y^2 - \frac{3}{2}i^2z^2 - 4i^3y^3 + 3i^3yz^2\right) + \frac{R}{a} = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&i\frac{d^2z}{dt^2} + i\frac{\left(c - \int Q\,dt\right)^2}{a^4}z(1 - 4iy + 10i^2y^2) \\
&\qquad + 2i^2\left(\frac{dz\,dy}{dt^2} - iy\frac{dz\,dy}{dt^2}\right) + \frac{P - Rq}{r} = 0,
\end{aligned}$$

$$h + i\frac{dx}{dt} - \frac{c - \int Q\,dt}{a^2}(1 - 2iy + 3i^2y^2 - 4i^3y^3) = 0.$$

On voit d'abord par ces équations que les quantités

$$-\frac{\left(c - \int Q\,dt\right)^2}{a^4} + \frac{I + J}{a^3} + \frac{R}{a}, \quad \frac{P - Rq}{r} \quad \text{et} \quad h - \frac{c - \int Q\,dt}{a^2}$$

doivent être chacune très-petites de l'ordre de i, pour que les hypothèses que nous avons faites puissent subsister.

Supposons donc

$$(k)\qquad \frac{c-\int Q\,dt}{a^2}=h+iX,\quad \frac{I+J}{a^3}+\frac{R}{a}=h^2+iY,\quad \frac{P-Rq}{r}=iZ,$$

et les équations précédentes étant divisées par i deviendront, en faisant $b=\frac{I+J}{a^3}$,

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dt^2}&+(3h^2-2b)y+Y-2hX-i(6h^2-3b)y^2-\frac{3}{2}ibz^2+6ihyX-iX^2\\ &+i^2(10h^2-4b)y^3+3i^2byz^2-12i^2hy^2X+3i^2yX^2=0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2z}{dt^2}&+h^2z+Z-4ih^2zy+2i\frac{dz\,dy}{dt^2}+2ihzX\\ &+10i^2h^2zy^2-2i^2\frac{dz\,dy}{dt^2}y-8i^2hzyX+i^2zX^2=0,\end{aligned}$$

$$\frac{dx}{dt}+2hy-X-3ihy^2+2iyX+4i^2hy^3-3i^2y^2X=0.$$

Si l'on nomme de même a' la distance moyenne de Saturne au Soleil, h' sa vitesse angulaire moyenne, et qu'on suppose

$$r'=a'(1+iy'),\quad \varphi'=h't+ix',\quad q'=iz',$$

on aura les mêmes équations que ci-devant, en marquant seulement les lettres d'un trait.

73. Il faut maintenant faire les mêmes substitutions dans les valeurs de P, Q, R, et premièrement dans celle de $\frac{1}{v^3}$ qui entre dans la valeur de ces quantités; mais, pour rendre le calcul plus simple, nous n'aurons égard dans cette opération qu'aux termes de l'ordre de i, une plus grande précision étant d'ailleurs inutile dans la présente recherche.

Mettons d'abord $a(1+iy)$ à la place de r, et $a'(1+iy')$ à la place de r', et nous aurons, en négligeant les termes q^2, qq' et q'^2, qui seraient du second ordre, et faisant, pour plus de simplicité, $\varphi-\varphi'=\theta$,

$$v=\sqrt{a^2(1+2iy)-2aa'(1+iy+iy')\cos\theta+a'^2(1+2iy')},$$

savoir

$$v=\sqrt{a^2-2aa'\cos\theta+a'^2+2i(a^2y+a'^2y')-2iaa'(y+y')\cos\theta},$$

d'où l'on tire par les séries

$$\begin{aligned}\frac{1}{v^3}&=[a^2-2aa'\cos\theta+a'^2]^{-\frac{3}{2}}\\&\quad-3i[a^2y+a'^2y'-aa'(y+y')\cos\theta][a^2-2aa'\cos\theta+a'^2]^{-\frac{5}{2}}.\end{aligned}$$

Or les quantités

$$[a^2-2aa'\cos\theta+a'^2]^{-\frac{3}{2}}\quad\text{et}\quad[a^2-2aa'\cos\theta+a'^2]^{-\frac{5}{2}}$$

étant irrationnelles, il est nécessaire de les réduire à une forme rationnelle, sans quoi l'intégration des équations proposées ne réussirait point.

Pour cela je remarque qu'en faisant $a'=\alpha a$, la question se réduit à changer en une fonction rationnelle une quantité de cette forme $(1-2\alpha\cos\theta+\alpha^2)^{-s}$, dans laquelle α est une fraction moindre que l'unité. Or, puisque

$$1-2\alpha\cos\theta+\alpha^2=[1-\alpha(\cos\theta+\sin\theta\sqrt{-1})][1-\alpha(\cos\theta-\sin\theta\sqrt{-1})],$$

on élèvera la quantité $1-\alpha(\cos\theta\pm\sin\theta\sqrt{-1})$ à la puissance $-s$; ce qui, à cause de

$$(\cos\theta\pm\sin\theta\sqrt{-1})^m=\cos m\theta\pm\sin m\theta\sqrt{-1},$$

donnera

$$\begin{aligned}&[1-\alpha(\cos\theta\pm\sin\theta\sqrt{-1})]^{-s}\\&\quad=1+s\alpha(\cos\theta\pm\sin\theta\sqrt{-1})+\frac{s(s+1)}{2}\alpha^2(\cos2\theta\pm\sin2\theta\sqrt{-1})\\&\qquad+\frac{s(s+1)(s+2)}{2.3}\alpha^3(\cos3\theta\pm\sin3\theta\sqrt{-1})+\ldots.\end{aligned}$$

De sorte que, si l'on fait

$$P=1+s\alpha\cos\theta+\frac{s(s+1)}{2}\alpha^2\cos2\theta+\frac{s(s+1)(s+2)}{2.3}\alpha^3\cos3\theta+\ldots,$$

$$Q=s\alpha\sin\theta+\frac{s(s+1)}{2}\alpha^2\sin2\theta+\frac{s(s+1)(s+2)}{2.3}\alpha^3\sin3\theta+\ldots,$$

on aura

$$[1-\alpha(\cos\theta+\sin\theta\sqrt{-1})]^{-s}=P+Q\sqrt{-1}$$

et

$$[1-\alpha(\cos\theta-\sin\theta\sqrt{-1})]^{-s}=P-Q\sqrt{-1}.$$

Donc

$$(1-2\alpha\cos\theta+\alpha^2)^{-s}=P^2+Q^2.$$

Or, si l'on fait les carrés des deux séries P et Q, et qu'on ajoute ensemble les termes qui auront le même coefficient, en faisant attention que

$$\cos m\theta\cos n\theta+\sin m\theta\sin n\theta=\cos(m-n)\theta,$$

on trouvera

$$(1-2\alpha\cos\theta+\alpha^2)^{-s}=\mathcal{A}+\mathcal{B}\cos\theta+\mathcal{C}\cos2\theta+\mathcal{D}\cos3\theta+\ldots,$$

les coefficients $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$,.., étant exprimés de la manière suivante :

$$\mathcal{A}=1+s^2\alpha^2+\left[\frac{s(s+1)}{2}\right]^2\alpha^4+\left[\frac{s(s+1)(s+2)}{2.3}\right]^2\alpha^6+\ldots,$$

$$\frac{\mathcal{B}}{2}=s\alpha+s\frac{s(s+1)}{2}\alpha^3+\frac{s(s+1)}{2}\,\frac{s(s+1)(s+2)}{2.3}\alpha^5+\ldots,$$

$$\frac{\mathcal{C}}{2}=\frac{s(s+1)}{2}\alpha^2+s\frac{s(s+1)(s+2)}{2.3}\alpha^4+\frac{s(s+1)}{2}\,\frac{s(s+1)(s+2)(s+3)}{2.3.4}\alpha^6+\ldots,$$

et ainsi de suite.

Au reste, quand on aura déterminé par ces séries les deux premiers coefficients $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, on trouvera tous les suivants d'une manière très-simple et très-facile; car, si l'on prend les différentielles logarithmiques de l'équation

$$(1-2\alpha\cos\theta+\alpha^2)^{-s}=\mathcal{A}+\mathcal{B}\cos\theta+\mathcal{C}\cos2\theta+\ldots,$$

et qu'après avoir multiplié les deux membres en croix on compare terme à terme, on aura, comme M. Euler l'a trouvé le premier dans ses *Recherches sur le mouvement de Saturne*,

$$\mathcal{C}=\frac{(1+\alpha^2)\mathcal{B}-2s\alpha\mathcal{A}}{(2-s)\alpha},$$

$$\mathcal{D} = \frac{2(1+\alpha^2)\mathcal{C} - (1+s)\alpha\mathcal{B}}{(3-s)\alpha},$$

$$\mathcal{E} = \frac{3(1+\alpha^2)\mathcal{D} - (2+s)\alpha\mathcal{C}}{(4-s)\alpha},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Connaissant ainsi tous les coefficients de la série qui représente $(1-2\alpha\cos\theta+\alpha^2)^{-s}$, on trouvera tout de suite ceux de la série qui exprime $(1-2\alpha\cos\theta+\alpha^2)^{-s-1}$; car, dénotant ces derniers par $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$, $\mathcal{R}$,..., il faudra que la série $\mathcal{P}+\mathcal{Q}\cos\theta+\mathcal{R}\cos2\theta+\dots$, étant multipliée par $1-2\alpha\cos\theta+\alpha^2$, devienne égale à la série $\mathcal{A}+\mathcal{B}\cos\theta+\mathcal{C}\cos2\theta+\dots$. La multiplication faite, on trouvera, en comparant les deux premiers termes,

$$\mathcal{A} = (1+\alpha^2)\mathcal{P} - \alpha\mathcal{Q} \quad \text{et} \quad \mathcal{B} = (1+\alpha^2)\mathcal{Q} - 2\alpha\mathcal{P} - \alpha\mathcal{R}.$$

Or $\mathcal{R}$ est donné en $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ de la même manière que $\mathcal{C}$ est donné en $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, de sorte qu'on aura, en mettant $s+1$ à la place de s,

$$\mathcal{R} = \frac{(1+\alpha^2)\mathcal{Q} - 2(s+1)\alpha\mathcal{P}}{(1-s)\alpha}.$$

Donc, substituant cette valeur de $\mathcal{R}$, on aura deux équations en $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$, d'où l'on tirera

$$\mathcal{P} = \frac{(1+\alpha^2)\mathcal{A} + \dfrac{s-1}{s}\alpha\mathcal{B}}{(1-\alpha^2)^2},$$

$$\mathcal{Q} = \frac{\dfrac{s-1}{s}(1+\alpha^2)\mathcal{B} + 4\alpha\mathcal{A}}{(1-\alpha^2)^2}.$$

Ensuite on aura

$$\mathcal{S} = \frac{2(1+\alpha^2)\mathcal{R} - (2+s)\alpha\mathcal{Q}}{(2-s)\alpha},$$

$$\mathcal{T} = \frac{3(1+\alpha^2)\mathcal{S} - (3+s)\alpha\mathcal{R}}{(3-s)\alpha},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Tout se réduit donc à trouver les valeurs de $\mathcal{A}$ et de $\mathcal{B}$, lorsque $s=\frac{3}{2}$;

or les séries ci-dessus donnent, pour ce cas,

$$\mathcal{A} = 1 + \frac{9}{4}\alpha^2 + \frac{9.25}{4.16}\alpha^4 + \frac{9.25.49}{4.16.36}\alpha^6 + \ldots,$$

$$\frac{\mathcal{B}}{2} = \frac{3}{2}\alpha + \frac{9.5}{4.4}\alpha^3 + \frac{9.25.7}{4.16.6}\alpha^5 + \ldots,$$

lesquelles, à cause de $\alpha = \frac{5}{9}$ environ, dans la théorie de Jupiter et de Saturne, seront assez convergentes pour qu'on puisse se contenter d'un petit nombre de termes.

Pour faciliter le calcul de ces deux séries, lesquelles peuvent aussi être d'usage dans plusieurs autres occasions, je vais donner ici les logarithmes des différentes puissances de α qui entrent dans les valeurs de $\mathcal{A}$ et de $\frac{\mathcal{B}}{2}$.

	LOGARITHMES des coefficients.		LOGARITHMES des coefficients.		LOGARITHMES des coefficients.
α	0,1760913	α^{15}	1,0207661	α^{29}	1,2880049
α^2	0,3521825	α^{16}	1,0470951	α^{30}	1,3022454
α^3	0,4490925	α^{17}	1,0705762	α^{31}	1,3156093
α^4	0,5460025	α^{18}	1,0940573	α^{32}	1,3289733
α^5	0,6129493	α^{19}	1,1152466	α^{33}	1,3415624
α^6	0,6798961	α^{20}	1,1364359	α^{34}	1,3541515
α^7	0,7310486	α^{21}	1,1557410	α^{35}	1,3660508
α^8	0,7822012	α^{22}	1,1750462	α^{36}	1,3779500
α^9	0,8235939	α^{23}	1,1927749	α^{37}	1,3892310
α^{10}	0,8649865	α^{24}	1,2105037	α^{38}	1,4005120
α^{11}	0,8997486	α^{25}	1,2268941	α^{39}	1,4112359
α^{12}	0,9345108	α^{26}	1,2432845	α^{40}	1,4219598
α^{13}	0,9644740	α^{27}	1,2585245	..	....
α^{14}	0,9944372	α^{28}	1,2737645	..	....

En examinant cette Table il est aisé de voir que les différences des logarithmes forment une progression décroissante; d'où il s'ensuit que si, après avoir pris la somme d'un nombre quelconque de termes de l'une ou de l'autre série, on en regarde le reste comme une progression géométrique, l'erreur sera toujours moindre que la somme de cette progression; ainsi il sera aisé de juger de la quantité de l'approximation.

74. Supposons donc

$$(a^2 - 2aa'\cos\theta + a'^2)^{-\frac{3}{2}} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{B}_1\cos\theta + \mathcal{C}_1\cos 2\theta + \mathcal{D}_1\cos 3\theta + \ldots$$

et

$$(a^2 - 2aa'\cos\theta + a'^2)^{-\frac{5}{3}} = \mathcal{P}_1 + \mathcal{Q}_1\cos\theta + \mathcal{R}_1\cos 2\theta + \mathcal{S}_1\cos 3\theta + \ldots$$

et nous aurons

$$\begin{aligned}
\frac{1}{v^3} = {} & \mathcal{A}_1 + \mathcal{B}_1\cos\theta + \mathcal{C}_1\cos 2\theta + \mathcal{D}_1\cos 3\theta + \ldots \\
& - 3iy\left[a^2\mathcal{P}_1 - aa'\frac{\mathcal{Q}_1}{2} + \left(a^2\mathcal{Q}_1 - aa'\mathcal{P}_1 - aa'\frac{\mathcal{R}_1}{2}\right)\cos\theta \right.\\
& \qquad\qquad \left. + \left(a^2\mathcal{R}_1 - aa'\frac{\mathcal{Q}_1 + \mathcal{S}_1}{2}\right)\cos 2\theta + \ldots\right] \\
& - 3iy'\left[a'^2\mathcal{P}_1 - aa'\frac{\mathcal{Q}_1}{2} + \left(a'^2\mathcal{Q}_1 - aa'\mathcal{P}_1 - aa'\frac{\mathcal{R}_1}{2}\right)\cos\theta \right.\\
& \qquad\qquad \left. + \left(a'^2\mathcal{R}_1 - aa'\frac{\mathcal{Q}_1 + \mathcal{S}_1}{2}\right)\cos 2\theta + \ldots\right],
\end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned}
\frac{1}{v^3} = {} & \mathcal{A}_1 + \mathcal{B}_1\cos\theta + \mathcal{C}_1\cos 2\theta + \mathcal{D}_1\cos 3\theta + \ldots \\
& + iy(\mathcal{P}_2 + \mathcal{Q}_2\cos\theta + \mathcal{R}_2\cos 2\theta + \mathcal{S}_2\cos 3\theta + \ldots) \\
& + iy'(\mathcal{P}_3 + \mathcal{Q}_3\cos\theta + \mathcal{R}_3\cos 2\theta + \mathcal{S}_3\cos 3\theta + \ldots),
\end{aligned}$$

en faisant, pour abréger,

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_2 &= 3\left(aa'\frac{\mathcal{Q}_1}{2} - a^2\mathcal{P}_1\right), \\
\mathcal{Q}_2 &= 3\left(aa'\frac{2\mathcal{P}_1 + \mathcal{R}_1}{2} - a^2\mathcal{Q}_1\right), \\
\mathcal{R}_2 &= 3\left(aa'\frac{\mathcal{Q}_1 + \mathcal{S}_1}{2} - a^2\mathcal{R}_1\right), \\
\mathcal{S}_2 &= 3\left(aa'\frac{\mathcal{R}_1 + \mathcal{T}_1}{2} - a^2\mathcal{S}_1\right), \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

$$\mathcal{P}_3 = 3\left(aa'\,\frac{\mathcal{Q}_1}{2} - a'^2\mathcal{P}_1\right),$$

$$\mathcal{Q}_3 = 3\left(aa'\,\frac{2\mathcal{P}_1 + \mathcal{R}_1}{2} - a'^2\mathcal{Q}_1\right),$$

$$\mathcal{R}_3 = 3\left(aa'\,\frac{\mathcal{Q}_1 + \mathcal{S}_1}{2} - a'^2\mathcal{R}_1\right),$$

$$\mathcal{S}_3 = 3\left(aa'\,\frac{\mathcal{R}_1 + \mathcal{T}_1}{2} - a'^2\mathcal{S}_1\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

75. Cela posé, on aura d'abord

$$\begin{aligned}\frac{r}{v^3} &= a(\mathcal{A}_1 + \mathcal{B}_1\cos\theta + \mathcal{C}_1\cos 2\theta + \mathcal{D}_1\cos 3\theta + \ldots)\\ &+ iya\,[\mathcal{A}_1 + \mathcal{P}_2 + (\mathcal{B}_1 + \mathcal{Q}_2)\cos\theta + (\mathcal{C}_1 + \mathcal{R}_2)\cos 2\theta + (\mathcal{D}_1 + \mathcal{S}_2)\cos 3\theta + \ldots]\\ &+ iy'a(\mathcal{P}_3 + \mathcal{Q}_3\cos\theta + \mathcal{R}_3\cos 2\theta + \mathcal{S}_3\cos 3\theta + \ldots),\end{aligned}$$

et de même

$$\begin{aligned}\frac{r'}{v^3} &= a'(\mathcal{A}_1 + \mathcal{B}_1\cos\theta + \mathcal{C}_1\cos 2\theta + \mathcal{D}_1\cos 3\theta + \ldots)\\ &+ iya'(\mathcal{P}_2 + \mathcal{Q}_2\cos\theta + \mathcal{R}_2\cos 2\theta + \mathcal{S}_2\cos 3\theta + \ldots)\\ &+ iy'a'\,[\mathcal{A}_1 + \mathrm{P}_3 + (\mathcal{B}_1 + \mathcal{Q}_3)\cos\theta + (\mathcal{C}_1 + \mathcal{R}_3)\cos 2\theta + (\mathcal{D}_1 + \mathcal{S}_3)\cos 3\theta + \ldots].\end{aligned}$$

Donc, multipliant cette dernière quantité par $\cos\theta$, on aura

$$\begin{aligned}\frac{r'}{v^3}\cos\theta = a'&\left[\frac{\mathcal{B}_1}{2} + \left(\mathcal{A}_1 + \frac{\mathcal{C}_1}{2}\right)\cos\theta + \frac{\mathcal{B}_1 + \mathcal{D}_1}{2}\cos 2\theta + \ldots\right.\\ &+ iya'\left[\frac{\mathcal{Q}_2}{2} + \left(\mathcal{P}_2 + \frac{\mathcal{R}_2}{2}\right)\cos\theta + \frac{\mathcal{Q}_2 + \mathcal{S}_2}{2}\cos 2\theta + \ldots\right]\\ &+ iy'a'\left[\frac{\mathcal{B}_1 + \mathcal{Q}_3}{2} + \left(\mathcal{A}_1 + \mathcal{P}_3 + \frac{\mathcal{C}_1 + \mathcal{R}_3}{2}\right)\cos\theta\right.\\ &\left.\qquad + \frac{\mathcal{B}_1 + \mathcal{Q}_3 + \mathcal{D}_1 + \mathcal{S}_3}{2}\cos 2\theta + \ldots\right].\end{aligned}$$

Or, en négligeant les termes de l'ordre de i^2,

$$\frac{r'}{u'^3} = \frac{1}{r'^2(1 + q'^3)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1 - 2y'}{a'^2},$$

et par conséquent

$$\frac{r'}{u'^3}\cos\theta = \frac{1}{a'^2}\cos\theta - 2iy'\frac{1}{a'^2}\cos\theta.$$

Donc si l'on fait

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_2 &= a^3\mathcal{A}_1 - a^2a'\,\frac{\mathcal{B}_1}{2},\\
\mathcal{B}_2 &= a^3\mathcal{B}_1 - a^2a'\,\frac{2\mathcal{A}_1 + \mathcal{C}_1}{2} + \frac{a^2}{a'^2},\\
\mathcal{C}_2 &= a^3\mathcal{C}_1 - a^2a'\,\frac{\mathcal{B}_1 + \mathcal{D}_1}{2},\\
\mathcal{D}_2 &= a^3\mathcal{D}_1 - a^2a'\,\frac{\mathcal{C}_1 + \mathcal{E}_1}{2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;\\
\mathcal{P}_4 &= a^3(\mathcal{A}_1 + \mathcal{P}_2) - a^2a'\,\frac{\mathcal{Q}_2}{2},\\
\mathcal{Q}_4 &= a^3(\mathcal{B}_1 + \mathcal{Q}_2) - a^2a'\,\frac{2\mathcal{P}_2 + \mathcal{R}_2}{2},\\
\mathcal{R}_4 &= a^3(\mathcal{C}_1 + \mathcal{R}_2) - a^2a'\,\frac{\mathcal{Q}_2 + \mathcal{S}_2}{2},\\
\mathcal{S}_4 &= a^3(\mathcal{D}_1 + \mathcal{S}_2) - a^2a'\,\frac{\mathcal{R}_2 + \mathcal{T}_2}{2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;\\
\mathcal{P}_5 &= a^3\mathcal{P}_3 - a^2a'\left(\frac{\mathcal{B}_1}{2} + \frac{\mathcal{Q}_3}{2}\right),\\
\mathcal{Q}_5 &= a^3\mathcal{Q}_3 - a^2a'\left(\frac{2\mathcal{A}_1 + \mathcal{C}_1}{2} + \frac{2\mathcal{P}_3 + \mathcal{R}_3}{2}\right) - \frac{2a}{a'^2},\\
\mathcal{R}_5 &= a^3\mathcal{R}_3 - a^2a'\left(\frac{\mathcal{B}_1 + \mathcal{D}_1}{2} + \frac{\mathcal{Q}_3 + \mathcal{S}_3}{2}\right),\\
\mathcal{S}_5 &= a^3\mathcal{S}_3 - a^2a'\left(\frac{\mathcal{C}_1 + \mathcal{E}_1}{2} + \frac{\mathcal{R}_3 + \mathcal{T}_3}{2}\right),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

on aura (nº **67**)

$$\begin{aligned}
\mathrm{R} = {}& \frac{\mathrm{J}'}{a^2}(\mathcal{A}_2 + \mathcal{B}_2\cos\theta + \mathcal{C}_2\cos 2\theta + \mathcal{D}_2\cos 3\theta + \ldots)\\
&+ i\,\frac{\mathrm{J}'}{a^2}\,y\,(\mathcal{P}_4 + \mathcal{Q}_4\cos\theta + \mathcal{R}_4\cos 2\theta + \mathcal{S}_4\cos 3\theta + \ldots)\\
&+ i\,\frac{\mathrm{J}'}{a^2}\,y'(\mathcal{P}_5 + \mathcal{Q}_5\cos\theta + \mathcal{R}_5\cos 2\theta + \mathcal{S}_5\cos 3\theta + \ldots).
\end{aligned}$$

Maintenant on aura

$$\frac{r'}{v^3}\sin\theta = a'\left[\left(\mathcal{A}_1 - \frac{\mathcal{C}_1}{2}\right)\sin\theta + \frac{\mathcal{B}_1 - \mathcal{D}_1}{2}\sin 2\theta + \ldots\right]$$

$$+ iya'\left[\left(\mathcal{P}_2 - \frac{\mathcal{R}_2}{2}\right)\sin\theta + \frac{\mathcal{Q}_2 - \mathcal{S}_2}{2}\sin 2\theta + \ldots\right]$$

$$+ iy'a'\left[\left(\mathcal{A}_1 + \mathcal{P}_3 - \frac{\mathcal{C}_1 + \mathcal{R}_3}{2}\right)\sin\theta + \left(\frac{\mathcal{B}_1 + \mathcal{Q}_3}{2} - \frac{\mathcal{D}_1 + \mathcal{S}_3}{2}\right)\sin 2\theta + \ldots\right]$$

et

$$\frac{r'}{u'^3}\sin\theta = \frac{1}{a'^2}\sin\theta - 2iy'\frac{1}{a'^2}\sin\theta.$$

Donc, si l'on multiplie ces deux quantités par $r = a(i + iy)$, et qu'on fasse

$$\mathcal{A}_3 = a^2a'\,\frac{2\mathcal{A}_1 - \mathcal{C}_1}{2} - \frac{a^2}{a'^2},$$

$$\mathcal{B}_3 = a^2a'\,\frac{\mathcal{B}_1 - \mathcal{D}_1}{2},$$

$$\mathcal{C}_3 = a^2a'\,\frac{\mathcal{C}_1 - \mathcal{E}_1}{2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

$$\mathcal{P}_6 = a^2a'\left(\frac{2\mathcal{A}_1 - \mathcal{C}_1}{2} + \frac{2\mathcal{P}_2 - \mathcal{R}_2}{2}\right) - \frac{a^2}{a'^2},$$

$$\mathcal{Q}_6 = a^2a'\left(\frac{\mathcal{B}_1 - \mathcal{D}_1}{2} + \frac{\mathcal{Q}_2 - \mathcal{S}_2}{2}\right),$$

$$\mathcal{R}_6 = a^2a'\left(\frac{\mathcal{C}_1 - \mathcal{E}_1}{2} + \frac{\mathcal{R}_2 - \mathcal{T}_2}{2}\right),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

$$\mathcal{P}_7 = a^2a'\left(\frac{2\mathcal{A}_1 - \mathcal{C}_1}{2} + \frac{2\mathcal{P}_3 - \mathcal{R}_3}{2}\right) + \frac{2a^2}{a'^2},$$

$$\mathcal{Q}_7 = a^2a'\left(\frac{\mathcal{B}_1 - \mathcal{D}_1}{2} + \frac{\mathcal{Q}_3 - \mathcal{S}_3}{2}\right),$$

$$\mathcal{R}_7 = a^2a'\left(\frac{\mathcal{C}_1 - \mathcal{E}_1}{2} + \frac{\mathcal{R}_3 - \mathcal{T}_3}{2}\right),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

ou aura (numéro cité)

$$Q = \frac{J'}{a}(\mathcal{A}_3\sin\theta + \mathcal{B}_3\sin 2\theta + \mathcal{C}_3\sin 3\theta + \ldots)$$

$$+ i\frac{J'}{a}y(\mathfrak{P}_6 \sin\theta + \mathfrak{Q}_6 \sin 2\theta + \mathfrak{R}_6 \sin 3\theta + \ldots)$$

$$+ i\frac{J'}{a}y'(\mathfrak{P}_7 \sin\theta + \mathfrak{Q}_7 \sin 2\theta + \mathfrak{R}_7 \sin 3\theta + \ldots).$$

Enfin on a

$$\frac{p-p'}{v^3} = i\left(z\frac{r}{v^3} - z'\frac{r'}{v^3}\right) \quad \text{et} \quad \frac{p'}{u'^3} = iz'\frac{1}{r'^2(1+q'^2)};$$

d'où, en négligeant les termes de l'ordre de i^2, on aura

$$\mathrm{P} = i\mathrm{J}'\left[(za - z'a')(\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{B}_1 \cos\theta + \mathfrak{C}_1 \cos 2\theta + \ldots) + \frac{z'}{a'^2}\right].$$

De sorte que, si l'on fait

$$\mathfrak{A}_4 = a^3\mathfrak{A}_1 - \mathfrak{A}_2, \qquad \mathfrak{B}_4 = a^3\mathfrak{B}_1 - \mathfrak{B}_2, \qquad \mathfrak{C}_4 = a^3\mathfrak{C}_1 - \mathfrak{C}_2, \ldots,$$

$$\mathfrak{A}_5 = \frac{a^2}{a'^2} - a^2a'\mathfrak{A}_1, \qquad \mathfrak{B}_5 = -a^2a'\mathfrak{B}_1, \qquad \mathfrak{C}_5 = -a^2a'\mathfrak{C}_1, \ldots,$$

on aura, aux quantités de l'ordre de i^2 près,

$$\frac{\mathrm{P} - \mathrm{R}q}{r} = i\frac{\mathrm{J}'}{a^3}z(\mathfrak{A}_4 + \mathfrak{B}_4 \cos\theta + \mathfrak{C}_4 \cos 2\theta + \mathfrak{D}_4 \cos 3\theta + \ldots)$$

$$+ i\frac{\mathrm{J}'}{a^3}z'(\mathfrak{A}_5 + \mathfrak{B}_5 \cos\theta + \mathfrak{C}_5 \cos 2\theta + \mathfrak{D}_5 \cos 3\theta + \ldots).$$

Et il ne restera plus, pour achever les substitutions, qu'à mettre au lieu de θ, c'est-à-dire au lieu de $\varphi - \varphi'$, sa valeur $(h-h')t + i(x-x')$, ou bien, en faisant $h - h' = \mathrm{H}$, $\mathrm{H}t + i(x-x')$, ce qui est très-facile, car il n'y aura qu'à mettre partout dans les expressions précédentes $\mathrm{H}t$ à la place de θ, et ajouter ensuite à la valeur de R la quantité

$$-i\frac{\mathrm{J}'}{a^2}(x-x')(\mathfrak{B}_2 \sin \mathrm{H}t + 2\mathfrak{C}_2 \sin 2\mathrm{H}t + 3\mathfrak{D}_2 \sin 3\mathrm{H}t + \ldots),$$

et à celle de Q la quantité

$$i\frac{\mathrm{J}'}{a}(x-x')(\mathfrak{A}_3 \cos \mathrm{H}t + 2\mathfrak{B}_3 \cos 2\mathrm{H}t + 3\mathfrak{C}_3 \cos 3\mathrm{H}t + \ldots).$$

76. On sait que les masses de Jupiter et de Saturne sont très-petites

par rapport à celle du Soleil, en sorte qu'on peut supposer $\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{I}} = i\mathrm{m}$ et $\frac{\mathrm{J}'}{\mathrm{I}} = i\mathrm{m}'$; donc, puisque $b = \frac{\mathrm{I}+\mathrm{J}}{a^2}$ (n° 72), on aura

$$\mathrm{J}' = i\,\frac{\mathrm{m}'}{1+i\mathrm{m}}\,a^3 b,$$

où, faisant $\frac{\mathrm{m}'}{1+i\mathrm{m}}\,b = \mathrm{n}$,

$$\mathrm{J}' = ia^3\mathrm{n};$$

d'où il s'ensuit que les quantités P, Q, R sont très-petites de l'ordre de i, et qu'ainsi, pour satisfaire aux équations (k) du numéro cité, il est nécessaire de supposer $\frac{c}{a^2}$ presque égal à h, et $\frac{\mathrm{I}+\mathrm{J}}{a^3}$ ou bien b presque égal à h^2.

Soit donc

$$\frac{c}{a^2} - h = i\mathrm{f} \quad \text{et} \quad b - h^2 = i\mathrm{g},$$

et les équations (k) donneront, après avoir substitué les valeurs de R, Q et $\frac{\mathrm{P}-\mathrm{R}q}{r}$, trouvées ci-dessus, et divisé le tout par i,

$$\begin{aligned}
\mathrm{X} = \mathrm{f} &+ \frac{\mathrm{n}}{\mathrm{H}}\left(\mathcal{A}_3 \cos \mathrm{H}t + \frac{1}{2}\mathcal{B}_3 \cos 2\mathrm{H}t + \ldots\right) \\
&- i\mathrm{n}\int y\,(\mathcal{P}_6 \sin \mathrm{H}t + \mathcal{Q}_6 \sin 2\mathrm{H}t + \ldots)\,dt \\
&- i\mathrm{n}\int y'(\mathcal{P}_7 \sin \mathrm{H}t + \mathcal{Q}_7 \sin 2\mathrm{H}t + \ldots)\,dt \\
&- i\mathrm{n}\int (x - x')(\mathcal{A}_3 \cos \mathrm{H}t + \mathcal{B}_3 \cos 2\mathrm{H}t + \ldots)\,dt,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Y} = \mathrm{g} &+ \mathrm{n}(\mathcal{A}_2 + \mathcal{B}_2 \cos \mathrm{H}t + \mathcal{C}_2 \cos 2\mathrm{H}t + \ldots) \\
&+ i\mathrm{n}y\,(\mathcal{P}_4 + \mathcal{Q}_4 \cos \mathrm{H}t + \mathcal{R}_4 \cos 2\mathrm{H}t + \ldots) \\
&+ i\mathrm{n}y'(\mathcal{P}_5 + \mathcal{Q}_5 \cos \mathrm{H}t + \mathcal{R}_5 \cos 2\mathrm{H}t + \ldots) \\
&- i\mathrm{n}(x - x')(\mathcal{B}_2 \sin \mathrm{H}t + \mathcal{C}_2 \sin 2\mathrm{H}t + \ldots),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Z} = i\mathrm{n}z\,&(\mathcal{A}_4 + \mathcal{B}_4 \cos \mathrm{H}t + \mathcal{C}_4 \cos 2\mathrm{H}t + \ldots) \\
+ i\mathrm{n}z'&(\mathcal{A}_5 + \mathcal{B}_5 \cos \mathrm{H}t + \mathcal{C}_5 \cos 2\mathrm{H}t + \ldots).
\end{aligned}$$

77. Ayant ainsi les valeurs de X, Y et Z, il ne s'agira plus que de les substituer dans les équations du n° 72. Or, si l'on met $h^2 + i\mathrm{g}$ au lieu de b, qu'on néglige les quantités affectées de $i^2\mathrm{n}$ et de $i\mathrm{n}^2$ (parce que n est aussi une quantité fort petite, comme on le verra plus bas), et, qu'après avoir ajouté ensemble les coefficients des termes analogues, on fasse

$$\mathcal{A}_6 = \mathcal{B}_2 - \frac{2(h+i\mathrm{f})}{\mathrm{H}}\mathcal{A}_3,$$

$$\mathcal{B}_6 = \mathcal{C}_2 - \frac{2(h+i\mathrm{f})}{2\mathrm{H}}\mathcal{B}_3,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\mathcal{A}_7 = \mathcal{B}_4 + \frac{2h}{\mathrm{H}}\mathcal{A}_3,$$

$$\mathcal{B}_7 = \mathcal{C}_4 + \frac{2h}{2\mathrm{H}}\mathcal{B}_3,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\mathcal{P}_8 = \mathcal{Q}_4 + \frac{6h}{\mathrm{H}}\mathcal{A}_3,$$

$$\mathcal{Q}_8 = \mathcal{R}_4 + \frac{6h}{2\mathrm{H}}\mathcal{B}_3,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et ensuite

$$\begin{aligned}
\Phi = {} & \mathcal{A}_6 \cos \mathrm{H}t + \mathcal{B}_6 \cos 2\mathrm{H}t + \ldots + iy(\mathcal{P}_8 \cos \mathrm{H}t + \mathcal{Q}_8 \cos 2\mathrm{H}t + \ldots) \\
& + iy'(\mathcal{P}_5 + \mathcal{Q}_5 \cos \mathrm{H}t + \mathcal{R}_5 \cos 2\mathrm{H}t + \ldots) \\
& + 2ih\int y(\mathcal{P}_6 \sin \mathrm{H}t + \mathcal{Q}_6 \sin 2\mathrm{H}t + \ldots)\,dt \\
& + 2ih\int y'(\mathcal{P}_7 \sin \mathrm{H}t + \mathcal{Q}_7 \sin 2\mathrm{H}t + \ldots)\,dt \\
& - i(x - x')(\mathcal{B}_2 \sin \mathrm{H}t + \mathcal{C}_2 \sin 2\mathrm{H}t + \ldots) \\
& + 2ih\int (x - x')(\mathcal{A}_3 \cos \mathrm{H}t + \mathcal{B}_3 \cos 2\mathrm{H}t + \ldots)\,dt,
\end{aligned}$$

$$\Psi = z(\mathcal{A}_7 \cos \mathrm{H}t + \mathcal{B}_7 \cos 2\mathrm{H}t + \ldots) + z'(\mathcal{A}_5 + \mathcal{B}_5 \cos \mathrm{H}t + \mathcal{C}_5 \cos 2\mathrm{H}t + \ldots),$$

$$\begin{aligned}
\Xi = {} & -\frac{1}{\mathrm{H}}\left(\mathcal{A}_3 \cos \mathrm{H}t + \frac{\mathcal{B}_3}{2}\cos 2\mathrm{H}t + \ldots\right) + \frac{2i}{\mathrm{H}}y\left(\mathcal{A}_3 \cos \mathrm{H}t + \frac{\mathcal{B}_3}{2}\cos 2\mathrm{H}t + \ldots\right) \\
& + i\int y(\mathcal{P}_6 \sin \mathrm{H}t + \mathcal{Q}_6 \sin 2\mathrm{H}t + \ldots)\,dt
\end{aligned}$$

$$+ i\int y'(\mathfrak{P}_7 \sin Ht + \mathfrak{Q}_7 \sin 2Ht + \ldots)\,dt$$

$$+ i\int (x - x')(\mathcal{A}_3 \cos Ht + \mathcal{B}_3 \cos 2Ht + \ldots)\,dt,$$

on aura les équations suivantes :

$$(l)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2 y}{dt^2} + [h^2 + i(6h\mathrm{f} - 2\mathrm{g} + 3i\mathrm{f}^2 + \mathrm{n}\mathfrak{P}_4)]y \\ &\quad + \mathrm{g} - 2h\mathrm{f} - i\mathrm{f}^2 + \mathrm{n}\mathcal{A}_2 - 3i[h^2 + i(4h\mathrm{f} - \mathrm{g})]y^2 \\ &\qquad - \frac{3}{2}i(h^2 + i\mathrm{g})z^2 + 6i^2h^2y^3 + 3i^2h^2yz^2 + \mathrm{n}\Phi = 0, \end{aligned}\right.$$

$$(m)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2 z}{dt^2} + [h^2 + i(2h\mathrm{f} + i\mathrm{f}^2 + \mathrm{n}\mathcal{A}_4)]z - 4i(h^2 + 2ih\mathrm{f})zy \\ &\qquad + 2i\frac{dz\,dy}{dt^2} + 10i^2h^2zy^2 - 2i^2y\frac{dz\,dy}{dt^2} + i\mathrm{n}\Psi = 0, \end{aligned}\right.$$

$$(n)\quad \frac{dx}{dt} + 2(h + i\mathrm{f})y - \mathrm{f} - 3i(h + i\mathrm{f})y^2 + 4i^2hy^3 + \mathrm{n}\Xi = 0.$$

Telles sont les équations du mouvement de Jupiter, en tant qu'il est altéré par l'action de Saturne.

On trouvera des équations semblables pour le mouvement de Saturne dérangé par Jupiter; il ne faudra pour cela que mettre x', y', z' à la place de x, y, z, et *vice versâ*, et marquer toutes les autres lettres d'un trait, à l'exception de H, laquelle étant égale à $h - h'$ deviendra $h' - h$, c'est-à-dire simplement négative.

78. Je remarque maintenant que les équations (l) et (m) peuvent se réduire à ces formes plus simples :

$$\frac{d^2\mathrm{y}}{dt^2} + \mathrm{K}^2\mathrm{y} + \mathrm{n}\mathcal{Y} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^2\mathrm{z}}{dt^2} + \mathrm{L}^2\mathrm{z} + i\mathrm{n}\mathcal{Z} = 0,$$

en supposant

$$\mathrm{y} = y + \alpha + i(\beta y^2 + \gamma z^2) + i^2\left(\delta y^3 + \varepsilon yz^2 + \eta z\frac{dy\,dz}{dt^2}\right)$$

et

$$\mathrm{z} = z + i\left(\mu zy + \nu\frac{dz\,dy}{dt^2}\right) + i^2\left(\pi z^3 + \rho zy^2 + \sigma y\frac{dz\,dy}{dt^2}\right).$$

Pour le prouver, et déterminer en même temps les valeurs de α, β, $\gamma,\ldots$, μ, ν, $\pi,\ldots$; je prends d'abord les différentielles secondes de y et de z; j'ai

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y}{dt^2} &+ i\beta\left(2y\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy^2}{dt^2}\right) + i\gamma\left(2z\frac{d^2z}{dt^2} + 2\frac{dz^2}{dt^2}\right)\\ &+ i^2\delta\left(3y^2\frac{d^2y}{dt^2} + 6y\frac{dy^2}{dt^2}\right) + i^2\varepsilon\left(z^2\frac{d^2y}{dt^2} + 2zy\frac{d^2z}{dt^2} + 2y\frac{dz^2}{dt^2} + 4z\frac{dy\,dz}{dt^2}\right)\\ &+ i^2\eta\left(2\frac{dz^2}{dt^2}\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy\,dz}{dt^2}\frac{d^2z}{dt^2} + z\frac{dz}{dt}\frac{d^3y}{dt^3} + z\frac{dy}{dt}\frac{d^3z}{dt^3} + 2z\frac{d^2y}{dt^2}\frac{d^2z}{dt^2}\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2z}{dt^2} &+ i\mu\left(y\frac{d^2z}{dt^2} + z\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dz\,dy}{dt^2}\right)\\ &+ i\nu\left(\frac{dy}{dt}\frac{d^3z}{dt^3} + \frac{dz}{dt}\frac{d^3y}{dt^3} + 2\frac{d^2z}{dt^2}\frac{d^2y}{dt^2}\right) + i^2\pi\left(3z^2\frac{d^2z}{dt^2} + 6z\frac{dz^2}{dt^2}\right)\\ &+ i^2\rho\left(y^2\frac{d^2z}{dt^2} + 2zy\frac{d^2y}{dt^2} + 2z\frac{dy^2}{dt^2} + 4y\frac{dz\,dy}{dt^2}\right)\\ &+ i^2\sigma\left(2\frac{dy^2}{dt^2}\frac{d^2z}{dt^2} + 3\frac{dz\,dy}{dt^2}\frac{d^2y}{dt^2} + y\frac{dy}{dt}\frac{d^3z}{dt^3} + y\frac{dz}{dt}\frac{d^3y}{dt^3} + 2y\frac{d^2z}{dt^2}\frac{d^2y}{dt^2}\right).\end{aligned}$$

Ensuite je substitue à la place de $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$, $\frac{d^3y}{dt^3}$, $\frac{d^3z}{dt^3}$, $\frac{dy^2}{dt^2}$, $\frac{dz^2}{dt^2}$ leurs valeurs tirées des équations (l) et (m), en négligeant les quantités qui seraient affectées de i^3, ou de i^2n; et pour avoir les valeurs de $\frac{dy^2}{dt^2}$ et $\frac{dz^2}{dt^2}$ (car les autres se déduisent aisément des équations citées), je multiplie l'équation (l) par $2dy$, et l'équation (m) par $2dz$, et ensuite je les intègre, ce qui me donne, en négligeant les quantités de l'ordre de i^2 et de in, parce que $\frac{dy^2}{dt^2}$ et $\frac{dz^2}{dt^2}$ ne se trouvent que dans des termes déjà affectés de i,

$$\begin{aligned}\frac{dy^2}{dt^2} &+ [h^2 + i(6hf - 2g)]y^2 + 2(g - 2hf - if^2 + n\mathcal{A}_2)\\ &+ A - 2ih^2y^3 - 3ih^2\int z^2\,dy + 2n\int \Phi\,dy = 0,\end{aligned}$$

$$\frac{dz^2}{dt^2} + (h^2 + 2ihf)z^2 + B - 8ih^2\int yz\,dz + 4i\int\frac{dz^2}{dt^2}dy + 2in\int\Psi\,dz = 0,$$

A et B étant des constantes.

Je conserve exprès le terme $2in\int \Psi dz$, parce que la quantité Ψ contient un terme de cette forme $\mathfrak{B}_5 z' \cos \mathrm{H}t$, lequel étant multiplié par dz, et ensuite intégré, après avoir substitué les valeurs de z et de z' en t, se trouvera divisé par des quantités de l'ordre de i.

Or l'équation (m) donne, en rejetant tous les termes affectés de i,

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + h^2 z = 0,$$

et par conséquent

$$\int z \frac{d^2 z}{dt^2} dy + h^2 \int z^2 dy = 0;$$

mais, en mettant au lieu de $\frac{dz^2}{dt^2}$ et de $\frac{d^2 y}{dt^2}$ leurs valeurs approchées $-h^2 z^2 - \mathrm{B}$ et $-h^2 y - \mathrm{g} + 2h\mathrm{f}$, car on peut négliger ici tous les termes affectés de i et de n,

$$\begin{aligned}\int z \frac{d^2 z}{dt^2} dy &= z\frac{dy\,dz}{dt^2} - \int\left(\frac{dz^2}{dt^2} dy + z\frac{d^2 y}{dt^2} dz\right)\\ &= z\frac{dy\,dz}{dt^2} + h^2\int z^2 dy + \mathrm{B}y + h^2\int yz\,dz + \frac{\mathrm{g} - 2h\mathrm{f}}{2} z^2,\end{aligned}$$

et, à cause de $\int yz\,dz = \frac{1}{2} yz^2 - \frac{1}{2}\int z^2 dy$,

$$\int z \frac{d^2 z}{dt^2} dy = z\frac{dy\,dz}{dt^2} + \frac{h^2}{2}\int z^2 dy + \mathrm{B}y + \frac{h^2}{2} yz^2 + \frac{\mathrm{g} - 2h\mathrm{f}}{2} z^2.$$

Donc on aura

$$\frac{3}{2} h^2 \int z^2 dy + \frac{h^2}{2} yz^2 + z\frac{dy\,dz}{dt^2} + \mathrm{B}y + \frac{\mathrm{g} - 2h\mathrm{f}}{2} z^2 = 0;$$

d'où l'on tire

$$\int z^2 dy = -\frac{1}{3} yz^2 - \frac{2}{3h^2} z\frac{dy\,dz}{dt^2} - \frac{2\mathrm{B}}{3h^2} y - \frac{\mathrm{g} - 2h\mathrm{f}}{3h^2} z^2.$$

Donc, si l'on met cette valeur dans la première des deux équations ci-dessus, et qu'on substitue $-h^2\int z^2 dy - \mathrm{B}y$ dans la seconde à la place de $\int \frac{dz^2}{dt^2} dy$, et $\mathcal{B}_5 \int (\cos \mathrm{H}t)\, z'\, dz$ à la place de $\int \Psi\, dz$, on aura, après les réductions,

$$(o)\left\{\begin{aligned}&\frac{dy^2}{dt^2} + [h^2 + i(6h\mathrm{f} - 2\mathrm{g})]y^2 + 2[\mathrm{g} - 2h\mathrm{f} - i(\mathrm{f}^2 - \mathrm{B}) + \mathrm{n}\mathcal{A}_2]y\\ &\qquad + \mathrm{A} + i(\mathrm{g} - 2h\mathrm{f})z^2 - 2ih^2y^3 + ih^2yz^2 + 2iz\frac{dy\,dz}{dt^2} + 2\mathrm{n}\int \Phi\, dy = 0,\end{aligned}\right.$$

$$(p)\quad \frac{dz^2}{dt^2} + (h^2 + 2ih\mathrm{f})z^2 + \mathrm{B} - 4i\mathrm{B}y - 4ih^2yz^2 + 2i\mathrm{n}\mathcal{B}_5 \int (\cos \mathrm{H}t)z'\, dz = 0.$$

Ces substitutions faites, on trouvera, en ordonnant les termes,

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dt^2} = \Big[&- h^2 - i(6h\mathrm{f} - 2\mathrm{g} + 3i\mathrm{f}^2 + \mathrm{n}\mathcal{P}_4)\\ &- 6i\beta\left(\mathrm{g} - 2h\mathrm{f} - i\mathrm{f}^2 + \frac{2}{3}i\mathrm{B} + \mathrm{n}\mathcal{A}_2\right)\\ &+ 8i^2\gamma\mathrm{B} - 6i^2\delta\mathrm{A} - 2i^2\varepsilon\mathrm{B} + 2i^2\eta h^2\mathrm{B}\Big]y\\ &- (\mathrm{g} - 2h\mathrm{f} - i\mathrm{f}^2 + \mathrm{n}\mathcal{A}_2) - 2i\beta\mathrm{A} - 2i\gamma\mathrm{B} + 2i^2\eta(\mathrm{g} - 2h\mathrm{f})\mathrm{B}\\ &+ \Big[3ih^2 + 3i^2(4h\mathrm{f} - \mathrm{g}) - 4i\beta[h^2 + i(6h\mathrm{f} - 2\mathrm{g})] - 15i^2\delta(\mathrm{g} - 2h\mathrm{f})\Big]y^2\\ &+ \Big[\frac{3}{2}i(h^2 + i\mathrm{g}) - 2i^2\beta(\mathrm{g} - 2h\mathrm{f}) - 4i\gamma(h^2 + 2ih\mathrm{f})\\ &\qquad\qquad - i^2\varepsilon(\mathrm{g} - 2h\mathrm{f}) - 4i^2\eta h^2(\mathrm{g} - 2h\mathrm{f})\Big]z^2\\ &+ (-6i^2h^2 + 10i^2\beta h^2 - 9i^2\delta h^2)y^3\\ &+ (-3i^2h^2 + i^2\beta h^2 + 16i^2\gamma h^2 - 5i^2\varepsilon h^2 + 4i^2\eta h^4)yz^2\\ &+ (-4i^2\beta - 4i^2\gamma + 4i^2\varepsilon - 5i^2\eta h^2)z\frac{dy\,dz}{dt^2}\\ &+ \mathrm{n}\Big[-\Phi - 2i\beta\Phi y - 4i\beta\int \Phi\, dy - 4i^2\gamma\mathcal{B}_5\int (\cos \mathrm{H}t)z'\, dz\Big],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2z}{dt^2} = [&- h^2 - i(2h\mathrm{f} + i\mathrm{f}^2 + \mathrm{n}\mathcal{A}_4) - i\mu(\mathrm{g} - 2h\mathrm{f} - i\mathrm{f}^2 + \mathrm{n}\mathcal{A}_2)\\ &+ 2i\nu(\mathrm{g} - 2h\mathrm{f} - i\mathrm{f}^2 + \mathrm{n}\mathcal{A}_2)(h^2 + 2ih\mathrm{f})\\ &\qquad - 3i^2\nu h^2(2\mathrm{A} + \mathrm{B}) - 6i^2\pi\mathrm{B} - 2i^2\rho\mathrm{A} + 2i^2\sigma h^2\mathrm{A}]z\\ &+ \Big[4i(h^2 + 2ih\mathrm{f}) - 2i\mu[h^2 + i(4h\mathrm{f} - \mathrm{g})]\\ &\qquad + 2i\nu[h^2 + i(6h\mathrm{f} - 2\mathrm{g})](h^2 + 2ih\mathrm{f}) - 20i^2\nu h^2(\mathrm{g} - 2h\mathrm{f})\\ &\qquad\qquad - 6i^2\rho(\mathrm{g} - 2h\mathrm{f}) + 6i^2\sigma h^2(\mathrm{g} - 2h\mathrm{f})\Big]zy\end{aligned}$$

$$+\left[-2i+2i\mu-i\nu[2h^2+i(20hf-8g)]-3i^2\sigma(g-2hf)\right]\frac{dy\,dz}{dt^2}$$
$$+\left(\frac{3}{2}i^2\mu h^2-6i^2\nu h^4-9i^2\pi h^2\right)z^3$$
$$+(-10i^2h^2+7i^2\mu h^2-20i^2\nu h^4-5i^2\rho h^2+4i^2\sigma h^4)y^2z$$
$$+(2i^2-2i^2\mu+16i^2\nu h^2+4i^2\rho-5i^2\sigma h^2)y\frac{dy\,dz}{dt^2}$$
$$+\mathrm{n}\left(-i\Psi-i\mu z\Phi-i\nu\frac{d\Phi\,dz}{dt^1}+2i\nu h^2 z\Phi\right).$$

Je mets donc ces valeurs de y, z, $\frac{d^2y}{dt^2}$ et $\frac{d^2z}{dt^2}$ dans les équations

$$\frac{d^2y}{dt^2}+K^2y+n\mathfrak{Y}=0,\quad \frac{d^2z}{dt^2}+L^2z+in\mathfrak{z}=0,$$

et ensuite j'égale à zéro les termes homogènes, ce qui me donne les équations suivantes :

$$-h^2-i(6hf-2g+3if^2+\mathrm{n}\mathcal{P}_4)-6i\beta\left(g-2hf-if^2+\frac{2}{3}iB+\mathrm{n}\mathcal{A}_2\right)$$
$$+8i^2\gamma B-6i^2\delta A-2i^2\varepsilon B+2i^2\eta h^2B+K^2=0,$$

$$-(g-2hf-if^2+\mathrm{n}\mathcal{A}_2)-2i\beta A-2i\gamma B+2i^2\eta(g-2hf)B+\alpha K^2=0,$$

$$3h^2+3i(4hf-g)-4\beta[h^2+i(6hf-2g)]-15i\delta(g-2hf)+\beta K^2=0,$$

$$\frac{3}{2}(h^2+ig)-2i\beta(g-2hf)-4\gamma(h^2+2ihf)-i\varepsilon(g-2hf)$$
$$+4i\eta h^2(g-2hf)+\gamma K^2=0,$$

$$-6h^2+10\beta h^2-9\delta h^2+\delta K^2=0,$$

$$-3h^2+\beta h^2+16\gamma h^2-5\varepsilon h^2+4\eta h^4+\varepsilon K^2=0,$$

$$-4\beta-4\gamma+4\varepsilon-5\eta h^2+\eta K^2=0,$$

$$-\Phi-2i\beta\Phi y-4i\beta\int\Phi\,dy-4i^2\gamma\mathcal{B}_5\int(\cos Ht)\,z'\,dz+\mathfrak{Y}=0,$$

$$-h^2-i(2hf+if^2+\mathrm{n}\mathcal{A}_4)-i\mu(g-2hf-if^2+\mathrm{n}\mathcal{A}_2)$$
$$+2i\nu(g-2hf-if^2+\mathrm{n}\mathcal{A}_2)(h^2+2ihf)$$
$$-3i^2\nu h^2(2A+B)-6i^2\pi B-2i^2\rho A+2i^2\sigma h^2A+L^2=0,$$

$$4(h^2+2ih\mathrm{f})-2\mu[h^2+i(4h\mathrm{f}-\mathrm{g})]+2\nu[h^2+i(6h\mathrm{f}-2\mathrm{g})](h^2+2ih\mathrm{f})$$
$$-20i\nu h^2(\mathrm{g}-2h\mathrm{f})-6i\rho(\mathrm{g}-2h\mathrm{f})+6i\sigma h^2(\mathrm{g}-2h\mathrm{f})+\mu\mathrm{L}^2=0,$$
$$-2+2\mu-\nu[2h^2+i(20h\mathrm{f}-8\mathrm{g})]-3i\sigma(\mathrm{g}-2h\mathrm{f})+\nu\mathrm{L}^2=0,$$
$$\frac{3}{2}\mu h^2-6\nu h^4-9\pi h^2+\pi\mathrm{L}^2=0,$$
$$-10h^2+7\mu h^2-20\nu h^4-5\rho h^2+4\sigma h^4+\rho\mathrm{L}^2=0,$$
$$2-2\mu+16\nu h^2+4\rho-5\sigma h^2+\sigma\mathrm{L}^2=0,$$
$$-\Psi-(\mu-2\nu h^2)z\Phi-\nu\frac{d\Phi\,dz}{dt^2}+\mathfrak{Z}=0,$$

par où l'on déterminera les valeurs des coefficients K^2, α, β, γ, δ, ε, η, L^2, μ, ν, π, ρ, σ, ainsi que celles de $\mathfrak{Y}$ et de $\mathfrak{Z}$, en ayant soin de pousser les valeurs de K^2, L^2 et α jusqu'aux quantités de l'ordre de i^2 et $i\mathrm{n}$, celles de β, γ, μ, ν jusqu'aux quantités de l'ordre de i et de n seulement, et enfin de négliger dans les autres toutes les quantités affectées de i et de n.

79. Si l'on regarde la quantité α comme connue, et qu'on s'en serve pour déterminer g, on aura

$$\mathrm{g}=\alpha\mathrm{K}^2+2h\mathrm{f}-\mathrm{n}\mathcal{A}_2+i(\mathrm{f}^2-2\beta\mathrm{A}-2\gamma\mathrm{B})+2i^2\eta\alpha\mathrm{K}^2\mathrm{B};$$

ensuite, supposant

$$\mathrm{K}=h+ik \quad\text{et}\quad \mathrm{L}=h+il,$$

on trouvera

$$k=\mathrm{f}+2h\alpha+\frac{i}{2h}(4h\mathrm{f}\alpha+15h^2\alpha^2-5\mathrm{A}-\mathrm{B})+\frac{\mathrm{n}}{2h}(\mathfrak{P}_4+2\mathcal{A}_2),$$
$$l=\mathrm{f}+2h\alpha+\frac{i}{2h}(4h\mathrm{f}\alpha+15h^2\alpha^2-5\mathrm{A}-\mathrm{B})+\frac{\mathrm{n}}{2h}\mathcal{A}_4,$$
$$\beta=1+\frac{i}{2}\alpha,\quad \gamma=\frac{1}{2}+i\alpha\eta h^2,\quad \delta=\frac{1}{2},\quad \varepsilon=\frac{3}{2}+\eta h^2,$$
$$\mu=i(15+2\sigma h^2)\alpha,\quad \nu=-\frac{2}{h^2}+i\left(\frac{4\mathrm{f}}{h^3}+\frac{6+\sigma h^2}{h^2}\alpha\right),\quad \pi=\frac{3}{2},\quad \rho=\frac{15}{2}+\sigma h^2,$$
$$\mathfrak{Y}=\Phi+2i\beta\Phi y+4i\beta\int\Phi\,dy+4i^2\gamma\mathcal{B}_5\int(\cos\mathrm{H}t)\,z'\,dz,$$
$$\mathfrak{Z}=\Psi+(\mu-2\nu h^2)\Phi z+\nu\frac{d\Phi\,dz}{dt^2}.$$

Et l'on remarquera qu'il restera encore deux indéterminées η et σ, lesquelles pourront être supposées égales à tout ce qu'on voudra, selon ce qu'on jugera plus commode.

A l'égard des quantités α et f, il faudra les prendre de telle manière que les deux conditions exprimées dans le n° **72** aient lieu, c'est-à-dire que les valeurs de y et de $\frac{dx}{dt}$ ne renferment aucun terme tout constant; ainsi ce ne sera qu'après avoir trouvé les expressions générales de y et de $\frac{dx}{dt}$ en t, qu'on pourra déterminer les constantes α et f.

Au reste, comme il n'est pas absolument nécessaire que la quantité a représente exactement la distance moyenne de la planète, on pourra, si l'on veut, se contenter de remplir la seconde des deux conditions dont nous venons de parler, et pour lors on aura encore une nouvelle indéterminée α à volonté.

Enfin, pour déterminer A et B, on substituera d'abord dans les équations (o) et (p) les valeurs de y et z en t, et on fera ensuite des équations séparées des termes dans lesquels t n'entre pas, les autres étant censés se détruire d'eux-mêmes. Or, en mettant au lieu de y et z leurs valeurs approchées $\mathrm{y} - \alpha$ et z, et négligeant tous les termes affectés de i, ainsi que ceux qui contiennent des sinus et des cosinus, on a, à cause de $\mathrm{g} - 2h\mathrm{f}$ égal à très-peu près à αh^2,

$$\frac{d\mathrm{y}^2}{dt^2} + h^2\mathrm{y}^2 - \alpha h^2 + \mathrm{A} = 0$$

et

$$\frac{d\mathrm{z}^2}{dt^2} + h^2\mathrm{z}^2 + \mathrm{B} = 0.$$

De sorte qu'en ne prenant, dans les valeurs de y^2, $\frac{d\mathrm{y}^2}{dt^2}$, z^2 et $\frac{d\mathrm{z}^2}{dt^2}$, que les termes constants, et omettant les autres, on aura

$$\mathrm{A} = \alpha^2 h^2 - h^2\mathrm{y}^2 - \frac{d\mathrm{y}^2}{dt^2}$$

et

$$\mathrm{B} = -h^2\mathrm{z}^2 - \frac{d\mathrm{z}^2}{dt^2}.$$

80. Pour mettre nos formules sous une forme plus commode et plus simple, nous ferons $\alpha = 0$, $\eta = 0$ et $\sigma = -\frac{11}{2h^2}$; moyennant quoi nous aurons

$$y + i\left(y^2 + \frac{1}{2}z^2\right) + i^2\left(\frac{1}{2}y^3 + \frac{3}{2}yz^2\right) = \mathrm{y}$$

et

$$z - 2i\left(1 - \frac{2i\mathrm{f}}{h}\right)\frac{dz\,dy}{h^2dt^2} + i^2\left(\frac{3}{2}z^3 + 2zy^2 - \frac{11}{2}y\frac{dy\,dz}{h^2dt^2}\right) = \mathrm{z};$$

d'où l'on tire, en ne poussant la précision que jusqu'aux quantités de l'ordre de i^2,

$$(q) \qquad y = \mathrm{y} - i\left(\mathrm{y}^2 + \frac{1}{2}\mathrm{z}^2\right) + i^2\left(\frac{3}{2}\mathrm{y}^3 - \frac{1}{2}\mathrm{y}\mathrm{z}^2 - 2\mathrm{z}\frac{d\mathrm{y}\,d\mathrm{z}}{h^2dt^2}\right),$$

$$z = \mathrm{z} + 2i\left(1 - \frac{2i\mathrm{f}}{h}\right)\frac{d\mathrm{z}\,d\mathrm{y}}{h^2dt^2}$$
$$- i^2\left[\frac{3}{2}\mathrm{z}^3 + 2\mathrm{z}\mathrm{y}^2 - \frac{3}{2}\mathrm{y}\frac{d\mathrm{z}\,d\mathrm{y}}{h^2dt^2} + 2\mathrm{z}\frac{d\mathrm{z}^2}{h^2dt^2} = 4\frac{d\mathrm{y}\,d(d\mathrm{z}\,d\mathrm{y})}{h^4dt^4}\right],$$

ou bien, en mettant pour $\frac{d^2\mathrm{y}}{dt^2}$ et $\frac{d^2\mathrm{z}}{dt^2}$ leurs valeurs approchées $-h^2\mathrm{y}$ et $-h^2\mathrm{z}$,

$$(r) \qquad \left\{\begin{aligned} z &= \mathrm{z} + 2i\left(1 - \frac{2i\mathrm{f}}{h}\right)\frac{d\mathrm{z}\,d\mathrm{y}}{h^2dt^2} \\ &\quad - i^2\left(\frac{3}{2}\mathrm{z}^3 + 2\mathrm{z}\mathrm{y}^2 + \frac{5}{2}\mathrm{y}\frac{d\mathrm{z}\,d\mathrm{y}}{h^2dt^2} + 2\mathrm{z}\frac{d\mathrm{z}^2}{h^2dt^2} + 4\mathrm{z}\frac{d\mathrm{y}^2}{h^2dt^2}\right). \end{aligned}\right.$$

Et si l'on substitue cette valeur de y dans l'équation (n) du n° 77, on aura

$$(s) \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -2(h + i\mathrm{f})\mathrm{y} + \mathrm{f} + i(h + i\mathrm{f})(5\mathrm{y}^2 + \mathrm{z}^2) \\ &\quad - i^2h\left(13\mathrm{y}^3 + 2\mathrm{y}\mathrm{z}^2 - 4\mathrm{z}\frac{d\mathrm{y}\,d\mathrm{z}}{h^2dt^2}\right) - \mathrm{n}\Xi, \end{aligned}\right.$$

équation facile à intégrer dès qu'on aura les valeurs de y et z en t. On se souviendra seulement qu'il faudra, avant l'intégration, égaler à zéro tous les termes constants.

De plus, si l'on veut avoir l'expression du rayon vecteur u de l'orbite réelle, on fera

$$u = a(1 + iv),$$

et comme $u = r\sqrt{1+q^2}$, on trouvera

$$v = y + \frac{i}{2}z^2 + \frac{i^2}{2}yz^2,$$

et mettant au lieu de y et z leurs valeurs en y et z,

$$v = \mathrm{y} - i\mathrm{y}^2 + \frac{3}{2}i^2\mathrm{y}^3.$$

Ainsi le problème ne dépendra plus que de l'intégration des équations

$$(t) \qquad \frac{d^2\mathrm{y}}{dt^2} + \mathrm{K}^2\mathrm{y} + \mathrm{n}\mathfrak{Y} = 0,$$

$$(u) \qquad \frac{d^2\mathrm{z}}{dt^2} + \mathrm{L}^2\mathrm{z} + i\mathrm{n}\mathfrak{Z} = 0.$$

81. Si l'on fait $n = 0$, on aura le cas ordinaire où l'orbite est une ellipse immobile.

On trouvera donc pour ce cas

$$\mathrm{y} = \Delta\cos(\mathrm{K}t - \mathcal{A}) \quad \text{et} \quad \mathrm{z} = \Lambda\sin(\mathrm{L}t - \mathcal{C}),$$

Δ, Λ, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{C}$ étant des constantes.

Donc : 1° $\mathrm{A} = -h^2\Delta^2$ et $\mathrm{B} = -h^2\Delta^2$ (n° 79); 2° si l'on substitue ces valeurs de y et de z dans le second membre de l'équation (s), et qu'après avoir développé les puissances des sinus et des cosinus on égale à zéro tous les termes constants, on aura, aux quantités de l'ordre de i^2 près,

$$\mathrm{f} + ih\left(\frac{5}{2}\Delta^2 + \frac{1}{2}\Lambda^2\right) = 0;$$

d'où

$$f = -ih\left(\frac{5}{2}\Delta^2 + \frac{1}{2}\Lambda^2\right).$$

De sorte qu'on trouvera (à cause de $\alpha = 0$ et de $\mathrm{n} = 0$) $k = 0$ et $l = 0$, et par conséquent $\mathrm{K} = h$ et $\mathrm{L} = h$ (n° 79).

Si l'on n'eût pas supposé $\alpha = 0$, on eût eu

$$A = h^2(\alpha^2 - \Delta^2), \quad B = -h^2\Lambda^2$$

et

$$2(h + i\mathrm{f})\alpha + \mathrm{f} + 5ih\left(\frac{1}{2}\Delta^2 + \alpha\right) + \frac{ih}{2}\Lambda^2 = 0;$$

d'où

$$\mathrm{f} = -2h\alpha - ih\alpha^2 - \frac{ih}{2}(5\Delta^2 + \Lambda^2),$$

et l'on trouverait, après les substitutions, que tous les termes des valeurs de k et de l se détruiraient d'eux-mêmes, de manière que ces quantités seraient aussi nulles, comme elles le doivent être dans ce cas; ce qui pourrait servir, s'il en était besoin, à confirmer la bonté de nos formules.

Il ne s'agira donc plus que de mettre, dans les équations du numéro précédent, $\Delta\cos(ht - \mathcal{A})$ à la place de y, et $\Lambda\sin(ht - \mathcal{C})$ à la place de z, ce qui n'aura aucune difficulté; d'ailleurs ce cas est si connu des Géomètres qu'il serait superflu de nous y arrêter. Je me contenterai d'observer :

1° Que les absides de l'orbite se trouveront aux points où $dy = 0$, et par conséquent où $\sin(ht - \mathcal{A}) = 0$, ce qui donnera pour l'aphélie

$$\cos(ht - \mathcal{A}) = 1 \quad \text{et} \quad v = \Delta - i\Delta^2 + \frac{3}{2}i^2\Delta^3,$$

et pour le périhélie

$$\cos(ht - \mathcal{A}) = -1 \quad \text{et} \quad v = -\Delta - i\Delta^2 - \frac{3}{2}i^2\Delta^3;$$

d'où il s'ensuit que le demi-axe de l'ellipse sera égal à $a(1 - i^2\Delta^2)$, et l'excentricité à $i\Delta\dfrac{1 + \frac{3}{2}i^2\Delta^2}{1 - i^2\Delta^2} = i\Delta\left(1 + \frac{5}{2}i^2\Delta^2\right)$, soit $i\Delta$ à très-peu près;

2° Que par conséquent l'angle $ht - \mathcal{A}$ représentera l'anomalie moyenne, et $\mathcal{A}$ le lieu de l'aphélie;

3° Que les limites, c'est-à-dire les plus grandes latitudes, seront aux points où $dz = \dfrac{2iz\,dy}{1 - 2iy}$, et par conséquent, en négligeant les quantités de l'ordre de i^2, aux points où $\frac{\cos(ht-\mathcal{E})}{\sin(ht-\mathcal{E})} = 2i\frac{dy}{h\,dt}$, c'est-à-dire où $\cos(ht-\mathcal{E}) = 2i\frac{dy}{h\,dt}$; d'où la plus grande valeur de z sera

$$\Lambda\left(1 - 2i^2h^2\Delta^2 - \frac{3}{2}i^2h^2\Lambda^2\right);$$

de sorte qu'on aura pour la tangente de l'inclinaison de l'orbite

$$i\Lambda\left(1 - 2i^2h^2\Delta^2 - \frac{3}{2}i^2h^2\Lambda^2\right) \doteq i\Delta$$

à très-peu près;

4° Que, comme $\frac{d^2y}{dt^2} + h^2y = 0$, on aura, à cause de $\frac{dx}{dt} = -2hy$, en négligeant les termes affectés de i,

$$\frac{dy}{dt} = -h^2\int y\,dt = \frac{h}{2}x;$$

donc on aura dans les limites

$$\frac{\cos(ht-\mathcal{E})}{\sin(ht-\mathcal{E})} = ix;$$

et par conséquent,

$$\cos(ht-\mathcal{E}) - ix\sin(ht-\mathcal{E}) = 0,$$

ou bien

$$\cos(ht+ix-\mathcal{E}) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\cos(\varphi-\mathcal{E}) = 0;$$

ce qui montre que $\mathcal{E}$ est le lieu du nœud ascendant, et qu'ainsi l'angle $ht-\mathcal{E}$ dénote la distance moyenne de la planète au nœud.

82. Il est bon de remarquer que si l'on voulait résoudre le problème du n° 78 d'une manière plus générale, en donnant à tous les termes des équations (l) et (m) des coefficients indéterminés, on trouverait, après en avoir fait le calcul, deux équations de condition entre ces mêmes coefficients; de sorte que la solution ne pourrait avoir lieu que quand ces équations seraient identiques d'elles-mêmes; or c'est précisément ce qui arrive dans notre cas, et c'est là la raison pourquoi il reste deux coefficients indéterminés η et σ. Au reste il est facile de voir que cet inconvénient ne vient que de ce que nous avons conservé la quantité $\frac{dy\,dz}{dt^2}$ au lieu d'y substituer sa valeur tirée des équations (l) et (m), comme nous l'avons pratiqué dans le n° 52. Ainsi il sera très-aisé d'y remédier, et de donner par là à notre méthode toute la généralité dont elle est susceptible.

83. Revenons maintenant à notre sujet, et voyons comment il faut s'y prendre pour intégrer les équations (t) et (u). Pour cela on commencera par mettre dans les expressions de $\mathfrak{Y}$ et $\mathfrak{Z}$, à la place de y, z et x leurs valeurs approchées y, z et $-2h\int \mathrm{y}\,dt$ tirées des équations (q), (r), (s), et de même à la place de y', z', x' les valeurs correspondantes y', z' et $-2h'\int \mathrm{y}'dt$; puis on cherchera, par l'intégration, les valeurs de y, z et de y', z', en y négligeant d'abord tous les termes affectés de i et n; et ces premières valeurs étant ensuite substituées dans $\mathfrak{Y}$ et $\mathfrak{Z}$ serviront à déterminer plus exactement les mêmes quantités y, z, y', z'.

Or il semble d'abord qu'on pourrait se contenter de prendre pour premières valeurs approchées de y et z celles que nous avons trouvées plus haut (n° 81), savoir

$$\mathrm{y} = \Delta\cos(\mathrm{K}t - \mathcal{A}), \quad \mathrm{z} = \Lambda\sin(\mathrm{L}t - \mathcal{E}),$$

et par conséquent aussi

$$\mathrm{y}' = \Delta'\cos(\mathrm{K}'t - \mathcal{A}'), \quad \mathrm{z}' = \Lambda'\sin(\mathrm{L}'t - \mathcal{E}').$$

Mais ces valeurs étant substituées dans les quantités $\mathfrak{Y}$ et $\mathfrak{Z}$, on verra, après le développement des produits des différents sinus et cosinus, qu'on aura des termes de cette forme :

$$\cos[(ht + ik')t - \mathcal{A}'] \quad \text{et} \quad \sin[(ht + il')t - \mathcal{E}'],$$

lesquels étant de l'ordre de in dans les équations différentielles se trouveront divisés, après l'intégration, par des quantités du même ordre; de sorte qu'ils appartiendront aussi aux premières valeurs de y et z.

Le terme $i\mathfrak{Q}_5 y' \cos Ht$, par exemple, qui se trouve dans la quantité Φ, donnera par la substitution de la valeur de y' le terme

$$\frac{i\mathfrak{Q}_5}{2}\Delta'\cos[(h+ik')t-\mathcal{A}'],$$

à cause de $K'=h'+ik'$ et de $H=h-h'$; de sorte que la quantité $\mathfrak{T}$ contiendra le terme

$$\frac{i\mathrm{n}\mathfrak{Q}_5}{2}\Delta'\cos[(h+ik')t-\mathcal{A}'],$$

lequel étant intégré (n° 42) donnera dans la valeur de y le nouveau terme

$$\frac{i\mathrm{n}\mathfrak{Q}_5}{2[(h+ik')^2-K^2]}\Delta\cos[(h+ik')t-\mathcal{A}'];$$

or, en mettant $h+ik$ au lieu de K, et négligeant les termes de l'ordre de i^2,

$$(h+ik')^2-K^2=2i(k'-k)h;$$

de plus on a (n° 79), à cause de $\alpha=0$ et $f=\frac{i}{h}\left(\frac{5}{2}A+\frac{1}{2}B\right)$ (n° 81),

$$k=\frac{\mathrm{n}}{2h}(\mathfrak{P}_4+2\mathcal{A}_2),$$

et de même

$$k'=\frac{\mathrm{n}'}{2h'}(\mathfrak{P}'_4+2\mathcal{A}'_2);$$

donc le terme dont il s'agit deviendra

$$\frac{\mathfrak{Q}_5}{2\frac{\mathrm{n}'h}{\mathrm{n}h'}(\mathfrak{P}'_4+2\mathcal{A}'_2)-2(\mathfrak{P}_4+2\mathcal{A}_2)}\Delta\cos[(h+ik')t-\mathcal{A}'],$$

lequel appartient, comme on voit, à la première valeur de y.

On trouvera de même dans la première valeur de y' un terme contenant $\cos[(h'+ik)t-\mathcal{A}]$, et qui étant substitué dans le même terme $in\mathfrak{Q}_5 y'\cos Ht$ de la quantité $\mathfrak{Y}$ donnera un terme de cette forme : $\cos[(h+ik)t-\mathcal{A}]$, savoir : $\cos(Kt-\mathcal{A})$; de sorte que la nouvelle valeur de y renfermera un arc de cercle (n° 42).

Le même inconvénient aura lieu, comme il est aisé de s'en assurer, par rapport à tous les termes de $\mathfrak{Y}$ et de $\mathfrak{Z}$ qui renferment y' ou z' multipliés par $\cos Ht$ ou par $\sin Ht$. Tels sont dans la quantité $\mathfrak{Y}$ les termes

$$i\Big[\mathfrak{Q}_5 y'\cos Ht + 2h\mathfrak{P}_7\int y'\sin Ht\,dt - 2h'\mathcal{B}_2\int y'\,dt\times\sin Ht + 4hh'\mathcal{A}_3\int\Big(\int y'\,dt\times\cos Ht\Big)dt\Big],$$

et dans la quantité $\mathfrak{Z}$ le terme $\mathcal{B}_5 z'\cos Ht$. Ainsi il sera nécessaire d'avoir égard à ces termes dans la première approximation des valeurs de y et z.

On aura donc en premier lieu l'équation suivante en y :

$$\frac{d^2y}{dt^2}+K^2y+in\Big[\mathfrak{Q}_5 y'\cos Ht + 2h\mathfrak{P}_7\int y'\sin Ht\,dt - 2h'\mathcal{B}_2\int y'\,dt\times\sin Ht + 4hh'\mathcal{A}_3\int\Big(\int y\,dt\times\cos Ht\Big)dt\Big]=0,$$

ou bien, parce que

$$\int\Big(\int y'\,dt\times\cos Ht\Big)dt=\frac{1}{H}\int y'\,dt\times\sin Ht-\frac{1}{H}\int y'\sin Ht\,dt,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}+K^2y+in\Big[\mathfrak{Q}_5 y'\cos Ht+\Big(\frac{4hh'}{H}\mathcal{A}_3-2h'\mathcal{B}_2\Big)\int y'\,dt\times\sin Ht - \Big(\frac{4hh'}{H}\mathcal{A}_3-2h\mathfrak{P}_7\Big)\int y'\sin Ht\,dt\Big]=0.$$

Or on a, aux quantités de l'ordre de n près,

$$\frac{d^2y}{dt^2}+K^2y=0;$$

donc on aura aussi, dans la même hypothèse,

$$\frac{d^2y'}{dt^2}+K'^2y'=0;$$

donc : 1° $\frac{dy'}{dt} + K'^2 \int y'\,dt = 0$, d'où

$$\int y'\,dt = -\frac{dy'}{K'^2 dt};$$

2° $\int \frac{d^2y'}{dt^2} \sin Ht\,dt + K'^2 \int y' \sin Ht\,dt = 0$; mais

$$\int \frac{d^2y'}{dt^2} \sin Ht\,dt = \frac{dy'}{dt} \sin Ht - Hy' \cos Ht - H^2 \int y' \sin Ht\,dt;$$

donc

$$\frac{dy'}{dt} \sin Ht = Hy' \cos Ht + (K'^2 - H^2) \int y' \sin Ht\,dt;$$

par conséquent

$$\int y' \sin Ht\,dt = \frac{\left(\frac{dy'}{dt} \sin Ht - Hy' \cos Ht\right)}{H^2 - K'^2}.$$

Donc, substituant ces valeurs dans l'équation précédente, elle deviendra

$$\frac{d^2y}{dt^2} + K^2 y + in\left[\left(\mathcal{Q}_5 + \frac{4hh'}{H^2 - K'^2}\mathcal{A}_3 - \frac{2hH}{H^2 - K'^2}\mathcal{P}_7\right) y' \cos Ht \right.$$
$$\left. + \left(\frac{2h}{H^2 - K'^2}\mathcal{P}_7 - \frac{4hh'H}{(H^2 - K'^2)K'^2}\mathcal{A}_3 + \frac{2h'}{K'^2}\mathcal{B}_2\right)\frac{dy'}{dt} \sin Ht\right] = 0.$$

Ensuite on aura cette équation en z :

$$\frac{d^2z}{dt^2} + L^2 z + in\,\mathcal{B}_5\, z' \cos Ht = 0.$$

On trouvera de même des équations semblables en y′ et z′, suivant la remarque du n° 77, et l'on aura ainsi quatre équations, lesquelles s'intégreront, comme on le voit, par la méthode du n° 58.

84. Puisque $H = h - h'$ (n° 85) et $K = h + ik$, $L = h + il$ (n° 79), et de même $K' = h' + ik'$, $L' = h' + il'$, on aura le cas du n° 60.

Donc : 1° si l'on fait

$$M = \mathrm{n}\left(\mathfrak{Q}_5 + \frac{4hh'}{H^2 - K'^2}\mathcal{A}_3 - \frac{2hH}{H^2 - K'^2}\mathfrak{P}_7\right),$$

$$N = \mathrm{n}\left[\frac{2h}{H^2 - K'^2}\mathfrak{P}_7 - \frac{4hh'H}{(H^2 - K'^2)K'^2}\mathcal{A}_3 + \frac{2h'}{K'^2}\mathfrak{B}_2\right],$$

et de même

$$M' = \mathrm{n}'\left(\mathfrak{Q}'_5 + \frac{4h'h}{H^2 - K^2}\mathcal{A}'_3 + \frac{2h'H}{H^2 - K^2}\mathfrak{P}'_7\right),$$

$$N' = \mathrm{n}'\left[\frac{2h'}{H^2 - K^2}\mathfrak{P}'_7 + \frac{4h'hH}{(H^2 - K^2)K^2}\mathcal{A}'_3 + \frac{2h}{K^2}\mathfrak{B}'_2\right],$$

ensuite

$$P = \frac{M + Nh'}{4h}, \quad P' = \frac{M' + N'h}{4h'},$$

et qu'on appelle m_1, m_2 les racines de l'équation

$$(m - k)(m - k') - PP' = 0,$$

en sorte que

$$m_1 = \frac{k + k' + \sqrt{(k - k')^2 + 4PP'}}{2},$$

$$m_2 = \frac{k + k' - \sqrt{(k - k')^2 + 4PP'}}{2},$$

on trouvera (nos 62 et 65) que la première valeur approchée de y sera de cette forme :

$$(v)\quad \left\{\begin{aligned} y = {} & \frac{(m_1 - k')F + PF'}{m_1 - m_2}\cos(h + im_1)t + \frac{(m_1 - k')G + PG'}{m_1 - m_2}\sin(h + im_1)t \\ & - \frac{(m_2 - k')F + PF'}{m_1 - m_2}\cos(h + im_2)t - \frac{(m_2 - k')G + PG'}{m_1 - m_2}\sin(h + im_2)t. \end{aligned}\right.$$

2° Si l'on fait de même

$$Q = \frac{\mathrm{n}\mathfrak{B}_5}{4h}, \quad Q' = \frac{\mathrm{n}'\mathfrak{B}'_5}{4h'},$$

et qu'on nomme n_1, n_2 les racines de l'équation

$$(n - l)(n - l') - QQ' = 0,$$

en sorte que

$$n_1 = \frac{l + l' + \sqrt{(l - l')^2 + 4QQ'}}{2}, \quad n_2 = \frac{l + l' - \sqrt{(l - l')^2 + 4QQ'}}{2},$$

on aura

$$(x) \quad \left\{ \begin{aligned} z = {} & \frac{(n_1 - l')B + QB'}{n_1 - n_2} \cos(h + in_1)t + \frac{(n_1 - l')C + QC'}{n_1 - n_2} \sin(h + in_1)t \\ & - \frac{(n_2 - l')B + QB'}{n_1 - n_2} \cos(h + in_2)t + \frac{(n_2 - l')C + QC'}{n_1 - n_2} \sin(h + in_2)t, \end{aligned} \right.$$

F, F′, G, G′, B, B′, C, C′ étant des constantes qu'il faudra déterminer par les observations.

Telles sont les premières valeurs approchées de y et z, et, pour avoir celles de y′ et z′, il n'y aura qu'à marquer simplement d'un trait toutes les lettres qui ne le sont point et *vice versâ*.

Si l'on voulait maintenant pousser l'approximation plus loin, et déterminer plus exactement les quantités y, z, y′, z′, on substituerait d'abord les valeurs qu'on vient de trouver, dans les termes de $\mathfrak{y}$ et de $\mathfrak{z}$ que nous avons négligés; après quoi il n'y aurait plus qu'à suivre la méthode qui a été exposée dans le n° **64**.

Le peu de temps qui me reste ne me permettant pas d'entrer dans ce détail, je me contenterai d'avoir établi les principes nécessaires pour résoudre le problème dont il s'agit, et je me bornerai à examiner ici, d'après les formules données ci-dessus, les inégalités des mouvements de Jupiter et de Saturne qui font varier l'excentricité et la position de l'aphélie de ces deux planètes, aussi bien que l'inclinaison et le lieu du nœud de leurs orbites, et qui produisent surtout une altération apparente dans leurs moyens mouvements, inégalités que les observations ont fait connaître depuis longtemps, mais que personne jusqu'ici n'a encore entrepris de déterminer avec toute l'exactitude qu'on peut exiger dans un sujet si important.

85. Soit

$$m_1 + m_2 = 2\mu h \quad \text{et} \quad m_1 - m_2 = 2\nu h.$$

en sorte que

$$\mu = \frac{k+k'}{2h} \quad \text{et} \quad \nu = \frac{\sqrt{(k-k')^2+4PP'}}{2h};$$

supposons de plus

$$F_1 = \frac{(k-k')F+2PF'}{2h\nu},$$

$$G_1 = \frac{(k-k')G+2PG'}{2h\nu},$$

et nous aurons, au lieu de l'équation (v), celle-ci :

$$\begin{aligned} y = {} & F\cos(1+i\mu)ht\cos i\nu ht - F_1\sin(1+i\mu)ht\sin i\nu ht \\ & + G\sin(1+i\mu)ht\cos i\nu ht + G_1\cos(1+i\mu)ht\sin i\nu ht. \end{aligned}$$

Soient maintenant

$$F = \delta\cos\alpha, \quad G = \delta\sin\alpha,$$
$$F_1 = \delta_1\cos\alpha_1, \quad G_1 = \delta_1\sin\alpha_1,$$

on aura

$$y = \delta\cos[(1+i\mu)ht-\alpha]\cos i\nu ht - \delta_1\sin[(1+i\mu)ht-\alpha_1]\sin i\nu ht.$$

Soient encore

$$\alpha_1 = \alpha + \eta \quad \text{et} \quad \delta_1 = \beta\delta,$$

on aura

$$\sin[(1+i\mu)ht-\alpha_1] = \sin[(1+i\mu)ht-\alpha]\cos\eta - \cos[(1+i\mu)ht-\alpha]\sin\eta;$$

donc

$$\begin{aligned} y = {} & \delta(\cos i\nu ht + \beta\sin\eta\sin i\nu ht)\cos[(1+i\mu)ht-\alpha] \\ & - \delta\beta\cos\eta\sin i\nu ht\sin[(1+i\mu)ht-\alpha]. \end{aligned}$$

Enfin, soit

$$\frac{\cos i\nu ht + \beta\sin\eta\sin i\nu ht}{\beta\cos\eta\sin i\nu ht} = \frac{\cos\psi}{\sin\psi},$$

c'est-à-dire

$$\cot\psi = \frac{\cot i\nu ht}{\beta\cos\eta} + \tang\eta,$$

et nous aurons

$$y = \delta\sqrt{(\cos i\nu ht + \beta\sin\eta\sin i\nu ht)^2 + (\beta\cos\eta\sin i\nu ht)^2} \times \cos[(1+i\mu)ht + \psi - \alpha],$$

ou bien, en faisant

$$\Delta = \delta\sqrt{\frac{1+\beta^2}{2}+\frac{1-\beta^2}{2}\cos 2i\nu ht+\beta\sin\eta\sin 2i\nu ht} \quad \text{et} \quad \mathcal{A} = \alpha-\psi-i\mu ht,$$

$$y = \Delta\cos(ht-\mathcal{A}).$$

De même, si l'on fait

$$n_1+n_2 = 2\rho h, \quad n_1-n_2 = 2\sigma h,$$

en sorte que

$$\rho = \frac{l+l'}{2h}, \quad \sigma = \frac{\sqrt{(l-l')^2+4QQ'}}{2h},$$

ensuite

$$B_1 = \frac{(l-l')B+2QB'}{2h\sigma}, \quad C_1 = \frac{(l-l')C+2QC'}{2h\sigma},$$

et de plus

$$B = -\lambda\sin\varepsilon, \quad C = \lambda\cos\varepsilon,$$

$$B_1 = -\lambda_1\sin\varepsilon_1, \quad C_1 = \lambda_1\cos\varepsilon_1,$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon+\omega, \quad \lambda_1 = \gamma\lambda,$$

$$\cot\zeta = \frac{\cot i\sigma ht}{\gamma\cos\omega}+\operatorname{tang}\omega,$$

enfin

$$\Lambda = \lambda\sqrt{\frac{1+\gamma^2}{2}+\frac{1-\gamma^2}{2}\cos 2i\sigma ht+\gamma\sin\omega\sin 2i\sigma ht} \quad \text{et} \quad \mathcal{E} = \varepsilon-\zeta-i\rho ht,$$

on aura par l'équation (x)

$$z = \Lambda\sin(ht-\mathcal{E}).$$

Voilà donc les valeurs de y et de z réduites à la même forme que celles du n° 71; d'où il est aisé de conclure que l'orbite de Jupiter est une ellipse, dans laquelle l'excentricité est $i\Delta$, le lieu de l'aphélie $\mathcal{A}$, la tangente de l'inclinaison à l'écliptique $i\Lambda$, et le lieu du nœud ascendant $\mathcal{E}$. Il en sera de même de l'orbite de Saturne, en marquant seulement les lettres d'un trait.

86. Il faudrait présentement substituer ces valeurs de y et de z dans les équations (q), (r) et (s) du n° 80, pour en déduire les expressions

des quantités y, z et x, et par conséquent celles de r, q et φ (n° 72); mais sans entrer dans ce détail, il suffira de remarquer :

1° Que les quantités μ, ν, ρ et σ étant de l'ordre de n, comme on le verra ci-après, les variations des quantités Δ, Λ, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{E}$ seront de l'ordre de in; d'où il s'ensuit que les expressions de y et de z seront à très-peu près les mêmes, c'est-à-dire aux quantités de l'ordre de i^2n près, que si ces quantités étaient constantes. De sorte que pour avoir le rayon vecteur de l'orbite, ainsi que la tangente de l'inclinaison, pour un instant quelconque, il n'y aura qu'à calculer l'un et l'autre par les méthodes ordinaires, d'après les éléments $i\Delta$, $i\Lambda$, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{E}$ regardés comme constants.

2° Que, si l'on dénote par $\left(\frac{dx}{dt}\right)$ la valeur de $\frac{dx}{dt}$, en supposant Δ, Λ, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{E}$ constantes, on aura, abstraction faite du terme nΞ qu'on doit négliger ici,

$$\frac{dx}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}\right) + \mathrm{f} + i(h + i\mathrm{f})\left(\frac{5}{2}\Delta^2 + \frac{1}{2}\Lambda^2\right) = 0,$$

parce que, dans l'hypothèse de Δ et Λ constantes, les termes tous constants $\mathrm{f} + i(h + i\mathrm{f})\left(\frac{5}{2}\Delta^2 + \frac{1}{2}\Delta^2\right)$ doivent être supposés nuls, comme nous l'avons fait (n° 81); or, dans le cas présent où les quantités Δ et Λ sont en partie constantes et en partie variables, on fera simplement

$$\mathrm{f} + i(h + i\mathrm{f})\left[\frac{5}{4}\delta^2(1 + \beta^2) + \frac{1}{4}\lambda^2(1 + \gamma^2)\right] = 0,$$

et on conservera dans la valeur de $\frac{dx}{dt}$ les termes variables qui entrent dans Δ^2 et Λ^2, savoir

$$\delta^2\left(\frac{1 - \beta^2}{2}\cos 2i\nu ht + \beta \sin\eta \sin 2i\nu ht\right)$$

et

$$\lambda^2\left(\frac{1 - \gamma^2}{2}\cos 2i\sigma ht + \gamma \sin\omega \sin 2i\sigma ht\right),$$

de sorte que l'on aura, en négligeant les quantités de l'ordre de i^3,

$$\mathrm{f} = -\frac{ih}{4}[5\delta^2(1 + \beta^2) + \lambda^2(1 + \gamma^2)],$$

et ensuite

$$\frac{dx}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}\right) + \frac{5ih}{2}\delta^2\left(\frac{1-\beta^2}{2}\cos 2i\nu ht + \beta\sin\eta\sin 2i\nu ht\right)$$
$$+ \frac{ih}{2}\lambda^2\left(\frac{1-\gamma^2}{2}\cos 2i\sigma ht + \gamma\sin\omega\sin 2i\sigma ht\right).$$

Pour intégrer cette équation, soit (x) la valeur de x, dans la supposition de Δ, Λ, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{E}$ constantes, et dénotons par $\mathrm{d}(x)$ la différentielle de (x) en faisant ces quantités seules variables, il est clair que la valeur complète de $\frac{d(x)}{dt}$ sera $\left(\frac{dx}{dt}\right) + \frac{\mathrm{d}(x)}{dt}$; de manière qu'on aura, en intégrant,

$$(x) = \int\left(\frac{dx}{dt}\right)dt + \int\mathrm{d}(x),$$

et par conséquent

$$\int\left(\frac{dx}{dt}\right)dt = (x) - \int\mathrm{d}(x).$$

Mais comme les différences des quantités Δ, Λ, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{E}$ sont de l'ordre de $i n$, la quantité $\int\mathrm{d}(x)$ sera aussi du même ordre, et par conséquent elle pourra être négligée, du moins dans la recherche présente; on aura donc simplement

$$\int\left(\frac{dx}{dt}\right)dt = (x);$$

donc

$$x = (x) + \frac{5\delta^2}{4\nu}\left[\frac{1-\beta^2}{2}\sin 2i\nu ht - \beta\sin\eta(\cos 2i\nu ht - 1)\right]$$
$$+ \frac{\lambda^2}{4\sigma}\left[\frac{1-\gamma^2}{2}\sin 2i\sigma ht - \gamma\sin\omega(\cos 2i\sigma ht - 1)\right],$$

et, par conséquent,

$$\varphi = ht + i(x) + \frac{5i\delta^2}{4\nu}\left[\frac{1-\beta^2}{2}\sin 2i\nu ht - \beta\sin\eta(\cos 2i\nu ht - 1)\right]$$
$$+ \frac{i\lambda^2}{4\sigma}\left[\frac{1-\gamma^2}{2}\sin 2i\sigma ht - \gamma\sin\omega(\cos 2i\sigma ht - 1)\right],$$

où l'on remarquera que ht est l'angle du mouvement moyen, et $i(x)$ l'équation du centre calculée à l'ordinaire, et combinée avec la réduction à l'écliptique.

Or, comme les coefficients $i\nu$ et $i\sigma$ sont extrêmement petits, il est visible que, tant que l'angle ht ne sera pas fort grand, on aura à très-peu près

$$\sin 2i\nu ht = 2i\nu ht, \quad \cos 2i\nu ht = 1,$$

et

$$\sin 2i\sigma ht = 2i\sigma ht, \quad \cos 2i\sigma ht = 1,$$

et, par conséquent,

$$\varphi = \left[1 + \frac{5}{4} i^2\delta^2(1-\beta^2) + \frac{1}{4} i^2\lambda^2(1-\gamma^2)\right] ht + i(x);$$

de sorte que le mouvement moyen sera augmenté en raison de $1 + \frac{5}{4} i^2\delta^2(1-\beta^2) + \frac{1}{4} i^2\lambda^2(1-\gamma^2)$ à 1.

Si donc on veut que le terme ht représente le moyen mouvement *apparent* de la planète, c'est-à-dire celui qui résulte des observations de sa révolution, il faudra faire simplement $f = -\frac{ih}{2}(5\delta^2 + \lambda^2)$; et l'on aura pour lors

$$\frac{dx}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}\right) + \frac{5ih}{2}\delta^2\left[\frac{1-\beta^2}{2}(\cos 2i\nu ht - 1) + \beta \sin\eta \sin 2i\nu ht\right]$$
$$+ \frac{ih}{2}\lambda^2\left[\frac{1-\gamma^2}{2}(\cos 2i\sigma ht - 1) + \gamma \sin\omega \sin 2i\sigma ht\right],$$

d'où l'on trouvera

$$\varphi = ht + i(x) + \frac{5i\delta^2}{4\nu}\left[\frac{1-\beta^2}{2}(\sin 2i\nu ht - 2i\nu ht) - \beta\sin\eta(\cos 2i\nu ht - 1)\right]$$
$$+ \frac{i\lambda^2}{4\sigma}\left[\frac{1-\gamma^2}{2}(\sin 2i\sigma ht - 2i\sigma ht) - \gamma\sin\omega(\cos 2i\sigma ht - 1)\right].$$

Ainsi, tant que les angles $2i\nu ht$ et $2i\sigma ht$ seront fort petits, ce qui aura lieu pendant un certain nombre de révolutions, on aura à très-peu près

$$\varphi = ht + i(x);$$

c'est-à-dire que la longitude de la planète sera aussi la même que celle qu'on trouverait par les méthodes ordinaires d'après les éléments $i\Delta$, $i\Lambda$, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{E}$ supposés constants.

87. Pour faire maintenant usage de nos formules, on remarquera :

1° Que n est égal à $\dfrac{\mathrm{m}'}{1+i\mathrm{m}}b$ (n° 76) ou à très-peu près à $\mathrm{m}'h^2$, en sorte que

$$i\mathrm{n} = i\mathrm{m}'h^2 = \frac{\mathrm{J}'}{\mathrm{I}}h^2 \quad \text{et} \quad i\mathrm{n}' = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{I}}h'^2.$$

2° Que l'on aura, par le n° 79,

$$\mathrm{A} = h^2(\alpha^2 - \Delta^2) \quad \text{et} \quad \mathrm{B} = -h^2\Lambda^2,$$

c'est-à-dire, en ne prenant, comme on le doit, que les termes constants des valeurs de Δ^2 et de Λ^2,

$$\mathrm{A} = h^2\left[\alpha^2 - \frac{1}{2}\delta^2(1+\beta^2)\right] \quad \text{et} \quad \mathrm{B} = -\frac{1}{2}h^2\lambda^2(1+\gamma^2),$$

ce qui donnera

$$k = \frac{\mathrm{n}}{2h}(\mathcal{P}_4 + 2\mathcal{A}_2) \quad \text{et} \quad l = \frac{\mathrm{n}}{2h}\mathcal{A}_4,$$

à cause de $\alpha = 0$ et de $\mathrm{f} = -\dfrac{ih}{4}[5\delta^2(1+\beta^2) + \lambda^2(1+\gamma^2)]$, de sorte qu'on aura

$$ik = \frac{\mathrm{J}'}{2\mathrm{I}}h(\mathcal{P}_4 + 2\mathcal{A}_2), \quad il = \frac{\mathrm{J}'}{2\mathrm{I}}h\mathcal{A}_4,$$

et de même

$$ik' = \frac{\mathrm{J}}{2\mathrm{I}}h'(\mathcal{P}'_4 + 2\mathcal{A}'_2), \quad il' = \frac{\mathrm{J}}{2\mathrm{I}}h'\mathcal{A}'_4.$$

Si l'on voulait employer l'autre valeur de f, savoir $-\dfrac{ih}{2}(5\delta^2 + \lambda^2)$, il faudrait alors mettre, dans les valeurs de A et de B, δ^2 au lieu de Δ^2, et λ^2 au lieu de Λ^2, et l'on trouverait les mêmes expressions de k et de l que ci-devant.

3° Que $\dfrac{\mathrm{I}+\mathrm{J}}{a^3} = b = h^2 + ig$ (n° 76), est à très-peu près égal à h^2.

parce que g est déjà une quantité très-petite (nº 79). Donc on aura aussi

$$\frac{\mathrm{I}+\mathrm{J}'}{a'^3}=h'^2,$$

et, par conséquent,

$$\frac{\mathrm{I}+\mathrm{J}'}{\mathrm{I}+\mathrm{J}}\frac{a^3}{a'^3}=\frac{h'^2}{h^2},$$

ou bien, à cause que les masses J et J′ de Jupiter et de Saturne sont très-petites par rapport à celle du Soleil I,

$$\frac{a^3}{a'^3}=\frac{h'^2}{h^2},$$

de sorte qu'on aura

$$\frac{a}{a'}=\left(\frac{h'}{h}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Cela posé, on commencera par déterminer, suivant la méthode du nº 73, les coefficients $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$,..., et $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$, $\mathcal{R}$,...; après quoi on cherchera les valeurs des quantités $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$, $\mathcal{A}_4$, $\mathcal{B}_2$, $\mathcal{B}_5$, $\mathcal{P}_4$, $\mathcal{P}_7$,..., $\mathcal{Q}_5$, ainsi que celles de $\mathcal{A}'_2$, $\mathcal{A}'_3$, $\mathcal{A}'_4$,..., qui entrent dans les expressions de k, l, P, Q et de k', l', P′, Q′. Or, en faisant $s=\frac{3}{2}$ et $\frac{a}{a'}=\mathrm{a}$ (je mets ici a au lieu de α, parce que j'aurai occasion dans la suite de faire servir cette dernière lettre à un autre usage), on aura, par le numéro cité,

$$(1-2\mathrm{a}\cos\theta+\mathrm{a}^2)^{-\frac{3}{2}}=\mathcal{A}+\mathcal{B}\cos\theta+\mathcal{C}\cos2\theta+\ldots;$$

donc, ayant supposé (nº 74)

$$(a^2-2aa'\cos\theta+a'^2)^{-\frac{3}{2}}=\mathcal{A}_1+\mathcal{B}_1\cos\theta+\mathcal{C}_1\cos2\theta+\ldots,$$

on aura

$$\mathcal{A}_1=\frac{\mathcal{A}}{a'^3},\quad \mathcal{B}_1=\frac{\mathcal{B}}{a'^3},\quad \mathcal{C}_1=\frac{\mathcal{C}}{a'^3},\ldots.$$

On trouvera de même

$$\mathcal{P}=\frac{\mathcal{P}}{a'^5},\quad \mathcal{Q}_1=\frac{\mathcal{Q}}{a'^5},\quad \mathcal{R}_1=\frac{\mathcal{R}}{a'^5},\ldots,$$

et l'on remarquera que les quantités $\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_1, \mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{P}_1, \mathcal{Q}_1, \mathcal{R}_1, \ldots$, restent nécessairement les mêmes, en changeant a en a' et a' en a, de sorte qu'on aura aussi

$$\mathcal{A}'_1 = \frac{\mathcal{A}}{a'^3},\quad \mathcal{B}'_1 = \frac{\mathcal{B}}{a'^3},\ldots,\quad \mathcal{P}'_1 = \frac{\mathcal{P}}{a'^5},\quad \mathcal{Q}'_1 = \frac{\mathcal{Q}}{a'^5},\ldots.$$

Faisant donc ces substitutions dans les formules du n° 75, et mettant partout a au lieu de $\frac{a}{a'}$, on trouvera d'abord

$$\mathcal{A}_2 = \mathrm{a}^3\mathcal{A} - \mathrm{a}^2\frac{\mathcal{B}}{2},$$

$$\mathcal{A}_3 = \mathrm{a}^2\frac{2\mathcal{A} - \mathcal{C}}{2} - \mathrm{a}^2,$$

$$\mathcal{A}_4 = \mathrm{a}^3\mathcal{A} - \mathcal{A}_2 = \mathrm{a}^2\frac{\mathcal{B}}{2},$$

$$\mathcal{B}_2 = \mathrm{a}^3\mathcal{B} - \mathrm{a}^2\frac{2\mathcal{A} + \mathcal{C}}{2} + \mathrm{a}^2,$$

$$\mathcal{B}_5 = -\mathrm{a}^2\mathcal{B},$$

ensuite on aura (n° 74)

$$\mathcal{P}_2 = \frac{3}{a'^3}\left(\mathrm{a}\frac{\mathcal{Q}}{2} - \mathrm{a}^2\mathcal{P}\right),$$

$$\mathcal{Q}_2 = \frac{3}{a'^3}\left(\mathrm{a}\frac{2\mathcal{P} + \mathcal{R}}{2} - \mathrm{a}^2\mathcal{Q}\right),$$

$$\mathcal{R}_2 = \frac{3}{a'^3}\left(\mathrm{a}\frac{\mathcal{Q} + \mathcal{S}}{2} - \mathrm{a}^2\mathcal{R}\right),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

$$\mathcal{P}_3 = \frac{3}{a'^3}\left(\mathrm{a}\frac{\mathcal{Q}}{2} - \mathcal{P}\right),$$

$$\mathcal{Q}_3 = \frac{3}{a'^3}\left(\mathrm{a}\frac{2\mathcal{P} + \mathcal{R}}{2} - \mathcal{Q}\right),$$

$$\mathcal{R}_3 = \frac{3}{a'^3}\left(\mathrm{a}\frac{\mathcal{Q} + \mathcal{S}}{2} - \mathcal{R}\right),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

ou bien, en faisant pour plus de simplicité

$$\mathrm{p} = 3\left(\mathrm{a}\frac{\mathcal{Q}}{2} - \mathrm{a}^2\mathcal{P}\right),$$

$$q = 3\left(a\frac{2\mathfrak{P}+\mathfrak{R}}{2} - a^2\mathfrak{Q}\right),$$

$$r = 3\left(a\frac{\mathfrak{Q}+\mathfrak{S}}{2} - a^2\mathfrak{R}\right),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

$$p_1 = 3\left(a\frac{\mathfrak{Q}}{2} - \mathfrak{P}\right),$$

$$q_1 = 3\left(a\frac{2\mathfrak{P}+\mathfrak{R}}{2} - \mathfrak{Q}\right),$$

$$r_1 = 3\left(a\frac{\mathfrak{Q}+\mathfrak{S}}{2} - \mathfrak{R}\right),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

on aura

$$\mathfrak{P}_2 = \frac{p}{a'^3},\quad \mathfrak{Q}_2 = \frac{q}{a'^3},\quad \mathfrak{R}_2 = \frac{r}{a'^3},\ldots,$$

$$\mathfrak{P}_3 = \frac{p_1}{a'^3},\quad \mathfrak{Q}_3 = \frac{q_1}{a'^3},\quad \mathfrak{R}_3 = \frac{r_1}{a'^3},\ldots.$$

De là on trouvera, par les formules du n° 75,

$$\mathfrak{P}_4 = a^3(\mathcal{A} + p) - a^2\frac{q}{2},$$

$$\mathfrak{P}_7 = a^2\left(\frac{2\mathcal{A} - \mathcal{C}}{2} + \frac{2p_1 - r_1}{2}\right) + 2a^2$$

et

$$\mathfrak{Q}_5 = a^3 q_1 - a^2\left(\frac{2\mathcal{A} + \mathcal{C}}{2} + \frac{2p_1 + r_1}{2}\right) - 2a^2.$$

On trouvera de même les autres quantités $\mathcal{A}'_2$, $\mathcal{B}'_3,\ldots$; il n'y aura pour cela qu'à mettre, dans les formules des numéros cités, a' au lieu de a et a au lieu de a', et marquer ensuite toutes les autres lettres d'un trait, ce qui donnera, après les substitutions,

$$\mathcal{A}'_2 = \mathcal{A} - a\frac{\mathcal{B}}{2},$$

$$\mathcal{A}'_3 = a\frac{2\mathcal{A} - \mathcal{C}}{2} - \frac{1}{a^2},$$

$$\mathcal{A}'_4 = \mathcal{A} - \mathcal{A}'_2 = a\frac{\mathcal{B}}{2},$$

$$\mathcal{B}'_2 = \mathcal{B} - a\frac{2\mathcal{A} + \mathcal{C}}{2} + \frac{1}{a^2},$$

$$\mathcal{B}'_5 = -a\mathcal{B},$$

et ensuite

$$\mathfrak{P}'_2 = \frac{\mathrm{p}_1}{a'^3},\quad \mathfrak{Q}'_2 = \frac{\mathrm{q}_1}{a'^3},\quad \mathfrak{R}'_2 = \frac{\mathrm{r}_1}{a'^3},\ldots,$$

$$\mathfrak{P}'_3 = \frac{\mathrm{p}}{a'^3},\quad \mathfrak{Q}'_3 = \frac{\mathrm{q}}{a'^3},\quad \mathfrak{R}'_3 = \frac{\mathrm{r}}{a'^3},\ldots,$$

d'où

$$\mathfrak{P}'_4 = \mathcal{A} + \mathrm{p}_1 - \mathrm{a}\frac{\mathrm{q}_1}{2},$$

$$\mathfrak{P}'_7 = \mathrm{a}\left(\frac{2\mathcal{A} - \mathcal{C}}{2} + \frac{2\mathrm{p} - \mathrm{r}}{2}\right) + \frac{2}{\mathrm{a}^2},$$

$$\mathfrak{Q}'_5 = \mathrm{q} - \mathrm{a}\left(\frac{2\mathcal{A} + \mathcal{C}}{2} + \frac{2\mathrm{p} + \mathrm{r}}{2}\right) - \frac{2}{\mathrm{a}^2}.$$

Enfin on trouvera par le n° 84, en mettant à la place de H $h - h'$, à la place de K et de K′ leurs valeurs approchées h et h', et, à la place de in et de in′, $\frac{J'}{I}h^2$ et $\frac{J}{I}h'^2$,

$$iP = \frac{J'}{4I}h(\mathfrak{Q}_5 - 4\mathcal{A}_3 - 2\mathfrak{P}_7 + 2\mathfrak{B}_2),$$

$$iP' = \frac{J}{4I}h'(\mathfrak{Q}'_5 - 4\mathcal{A}'_3 - 2\mathfrak{P}'_7 + 2\mathfrak{B}'_2),$$

$$iQ = \frac{J'}{4I}h\mathfrak{B}_5,$$

$$iQ' = \frac{J}{4I}h'\mathfrak{B}'_5.$$

Par ces valeurs de iP, iP', iQ, iQ', et par les valeurs de ik, ik', il, il' trouvées ci-dessus, on trouvera les valeurs de $i\mu$, $i\nu$, $i\rho$, $i\sigma$ (n° 85), et, ces mêmes valeurs étant ensuite multipliées par $\frac{h}{h'}$, on aura celles de $i\mu'$, $i\nu'$, $i\rho'$, $i\sigma'$.

Maintenant on aura par le même numéro

$$\tang \alpha_1 = \frac{G_1}{F_1} = \frac{(k-k)G + 2PG'}{(k-k')F + 2PF'} = \frac{(k-k')\delta\sin\alpha + 2P\delta'\sin\alpha'}{(k-k')\delta\cos\alpha + 2P\delta'\cos\alpha'},$$

et

$$\delta_1 = \sqrt{F_1^2 + G_1^2} = \frac{\sqrt{(k-k')^2\delta^2 + 4(k-k')P\delta\delta'(\sin\alpha\sin\alpha' + \cos\alpha\cos\alpha') + 4P^2\delta'^2}}{2h\nu}.$$

Soit $\alpha' - \alpha = A$, c'est-à-dire $\alpha' = \alpha + A$, et l'on aura

$$\tang \alpha_1 = \frac{[(k-k')\delta + 2P\delta' \cos A]\sin\alpha + 2P\delta' \sin A \cos\alpha}{[(k-k')\delta + 2P\delta' \cos A]\cos\alpha - 2P\delta' \sin A \sin\alpha},$$

$$\delta_1 = \frac{\sqrt{(k-k')^2\delta^2 + 4(k-k')P\delta\delta' \cos A + 4P^2\delta'^2}}{2hv}.$$

Donc, si l'on fait

$$(k-k')\delta + 2P\delta' \cos A = \delta s \cos u \quad \text{et} \quad 2P\delta' \sin A = \delta s \sin u,$$

on aura :

$$1^\circ \quad \tang\alpha_1 = \frac{\cos u \sin\alpha + \sin u \cos\alpha}{\cos u \cos\alpha - \sin u \sin\alpha} = \frac{\sin(u+\alpha)}{\cos(u+\alpha)} = \tang(u+\alpha);$$

donc $\alpha_1 = u + \alpha$, et par conséquent $\eta = u$.

$$2^\circ \quad \delta s = \sqrt{[(k-k')\delta + 2P\delta' \cos A]^2 + (2P\delta' \sin A)^2} = 2hv\delta_1 = 2hv\beta\delta;$$

donc

$$\beta = \frac{s}{2hv}.$$

Donc, si l'on fait, pour plus de simplicité, $\frac{\delta'}{\delta} = \mathrm{b}$, on aura

$$\beta = \frac{\sqrt{(k-k'+2P\mathrm{b}\cos A)^2 + (2P\mathrm{b}\sin A)^2}}{2hv},$$

$$\sin\eta = \frac{P\mathrm{b}\sin A}{hv\beta}, \quad \cos\eta = \frac{k-k'+2P\mathrm{b}\cos A}{2hv\beta}.$$

Et, pour avoir les valeurs de β', $\sin\eta'$ et $\cos\eta'$, il n'y aura qu'à mettre k' au lieu de k, α' au lieu de α, δ' au lieu de δ, et *vice versâ*, et marquer ensuite toutes les autres lettres d'un trait; ce qui donnera, à cause de $\mathrm{b} = \frac{\delta'}{\delta}$ et $A = \alpha' - \alpha$,

$$\beta' = \frac{\sqrt{\left(k'-k+\frac{2P'}{\mathrm{b}}\cos A\right)^2 + \left(\frac{2P'}{\mathrm{b}}\sin A\right)^2}}{2h'v'},$$

$$\sin\eta' = -\frac{P'\sin A}{\mathrm{b}h'v'\beta'}, \quad \cos\eta' = \frac{k'-k+\frac{2P'}{\mathrm{b}}\cos A}{2h'v'\beta'}.$$

Si l'on fait de même

$$\varepsilon' - \varepsilon = E \quad \text{et} \quad \frac{\lambda'}{\lambda} = c,$$

on trouvera, par des procédés semblables,

$$\gamma = \frac{\sqrt{(l - l' + 2Qc\cos E)^2 + (2Qc\sin E)^2}}{2h\sigma},$$

$$\sin\omega = \frac{Qc\sin E}{h\sigma\gamma}, \quad \cos\omega = \frac{l - l' + 2Qc\cos E}{2h\sigma\gamma},$$

et ensuite

$$\gamma' = \frac{\sqrt{\left(l' - l + \frac{2Q'}{c}\cos E\right)^2 + \left(\frac{2Q'}{c}\sin E\right)^2}}{2h'\sigma'},$$

$$\sin\omega' = -\frac{Q'\sin E}{ch'\sigma'\gamma'}, \quad \cos\omega' = \frac{l' - l + \frac{2Q'}{c}\cos E}{2h'\sigma'\gamma'}.$$

88. Pour déterminer maintenant les constantes δ, λ, α, ε et δ', λ', α', ε', on remarquera qu'en supposant $t = 0$ on a

$$\Delta = \delta, \quad \Lambda = \lambda, \quad \mathcal{A} = \alpha, \quad \mathcal{E} = \varepsilon,$$

et par conséquent aussi

$$\Delta' = \delta', \quad \Lambda' = \lambda', \quad \mathcal{A}' = \alpha', \quad \mathcal{E}' = \varepsilon'.$$

On cherchera donc les éléments de la théorie de Jupiter et de Saturne pour une certaine époque, par exemple pour le commencement de l'année 1750, et l'on fera :

$i\delta$ = l'excentricité de Jupiter,

$i\lambda$ = la tangente de l'inclinaison de son orbite par rapport à l'écliptique,

α = la longitude de l'aphélie,

ε = la longitude du nœud ascendant,

et de même

$i\delta'$ = l'excentricité de Saturne,

$i\lambda' =$ la tangente de son inclinaison à l'écliptique,
$\alpha' =$ la longitude de l'aphélie,
$\varepsilon' =$ la longitude du nœud.

A l'égard des constantes h et h', on les déterminera à l'aide des mouvements moyens de Jupiter et de Saturne; car on aura

$$\frac{h}{h'} = \frac{\text{mouv. moy. Jup.}}{\text{mouv. moy. Sat.}}.$$

89. Voilà toutes les quantités qu'il est nécessaire de connaître pour déterminer les perturbations de Jupiter et de Saturne, en vertu de leur action réciproque. Nous allons remettre ici sous les yeux du lecteur les principales altérations du mouvement de ces deux planètes.

Soient T et T' les moyens mouvements de Jupiter et de Saturne comptés depuis l'époque pour laquelle on a déterminé les éléments de ces deux planètes, et on trouvera :

1° Qu'au bout du temps qui répond au mouvement moyen T, l'excentricité de Jupiter se trouvera augmentée en raison de

$$\sqrt{\frac{1+\beta^2}{2} + \frac{1-\beta^2}{2}\cos 2\, i\sigma \mathrm{T} + \beta \sin\eta \sin 2\, i\nu \mathrm{T}} \quad \text{à } 1.$$

2° Que la tangente de l'inclinaison de l'orbite sera pareillement augmentée en raison de

$$\sqrt{\frac{1+\gamma^2}{2} + \frac{1-\gamma^2}{2}\cos 2\, i\sigma \mathrm{T} + \gamma \sin\omega \sin 2\, i\sigma \mathrm{T}} \quad \text{à } 1.$$

3° Que le lieu de l'aphélie se trouvera moins avancé d'un arc égal à

$$i\mu \mathrm{T} + \operatorname{arc\,cot}\left(\frac{\cot i\nu \mathrm{T}}{\beta \cos\eta} + \operatorname{tang}\eta\right).$$

4° Que le lieu du nœud sera aussi moins avancé d'un arc égal à

$$i\rho \mathrm{T} + \operatorname{arc\,cot}\left(\frac{\cot i\sigma \mathrm{T}}{\gamma \cos\omega} + \operatorname{tang}\omega\right).$$

5° Que le mouvement de Jupiter par rapport à l'écliptique sera altéré d'une quantité égale à

$$\frac{5i\delta^2}{4\nu}\left[\frac{1-\beta^2}{2}(\sin 2i\nu T - 2i\nu T) - \beta\sin\eta(\cos 2i\nu T - 1)\right]$$
$$+\frac{i\lambda^2}{4\sigma}\left[\frac{1-\gamma^2}{2}(\sin 2i\sigma T - 2i\sigma T) - \gamma\cos\omega(\cos 2i\sigma T - 1)\right],$$

c'est-à-dire qu'il faudra ajouter à sa longitude un angle égal à cette quantité.

On en dira autant de Saturne, avec cette seule différence qu'il faudra marquer les lettres d'un trait.

90. Nous verrons plus bas, dans le numéro suivant, que les coefficients $i\nu$ et $i\sigma$ sont égaux environ à $\frac{1}{10000}$; de sorte que durant plusieurs révolutions les angles $2i\nu T$ et $2i\sigma T$ seront assez petits pour qu'on puisse supposer, sans erreur sensible,

$$\sin 2i\nu T = 2i\nu T,\quad \sin 2i\sigma T = 2i\sigma T \quad\text{et}\quad \cos 2i\nu T = 1,\quad \cos 2i\sigma T = 1.$$

Donc :

1° L'augmentation de l'excentricité de Jupiter sera à très-peu près dans la raison de

$$1 + i\nu\beta\sin\eta \times T \quad \text{à } 1,$$

c'est-à-dire de

$$1 + \frac{iP}{h}\,\mathrm{b}\sin A \times T \quad \text{à } 1;$$

de sorte que la valeur de $i\delta$ croîtra de la quantité $i\delta'\frac{iP}{h}\sin A \times T$. Or on sait que dans les ellipses qui sont peu excentriques, la plus grande équation est à très-peu près égale au double de l'excentricité; d'où il s'ensuit que la plus grande équation de Jupiter ira en augmentant, et que sa variation sera, au bout de n révolutions à compter depuis l'époque donnée, de

$$2i\delta'\frac{iP}{h}\sin A \times 360^{\circ} \times n.$$

2° La tangente de l'inclinaison de Jupiter à l'écliptique croîtra de même d'une quantité égale à $i\lambda' \frac{iQ}{h} \sin E \times T$, et comme cette tangente est fort petite, ainsi qu'on le verra plus bas, on aura pour la variation de l'inclinaison de Jupiter à l'écliptique pendant n révolutions

$$i\lambda' \frac{iQ}{h} \sin E \times 360^\circ \times n.$$

3° Le mouvement de l'aphélie sera représenté à très-peu près par

$$-\left(i\mu + \frac{i\nu\beta\cos\eta}{1 + i\nu\beta\sin\eta \times T}\right)T,$$

ou encore par

$$-(i\mu + i\nu\beta\cos\eta)T + (i^2\nu^2\beta^2\cos\eta\sin\eta)T^2,$$

c'est-à-dire par

$$-\left(\frac{ik}{h} + \frac{iP}{h} b\cos A\right)T + \frac{iP}{h} b\sin A\left(\frac{ik - ik'}{2h} + \frac{iP}{h} b\cos A\right)T^2,$$

où l'on voit que le terme

$$-\left(\frac{ik}{h} + \frac{iP}{h} b\cos A\right)T$$

exprime le mouvement moyen et uniforme de l'aphélie, et que le terme

$$\frac{iP}{h} b\sin A\left(\frac{ik - ik'}{2h} + \frac{iP}{h} b\cos A\right)T^2$$

donne une inégalité du mouvement de l'aphélie, laquelle augmente comme les carrés des temps.

Ainsi, le mouvement moyen de l'aphélie de Jupiter sera, pour n révolutions de cette planète, de

$$-\left(\frac{ik}{h} + \frac{iP}{h} b\cos A\right) \times 360^\circ \times n,$$

et l'inégalité croissante du mouvement de cet aphélie sera de

$$\frac{iP}{h} b\sin A\left(\frac{ik - ik'}{2h} + \frac{iP}{h} b\cos A\right) \times \frac{360^\circ}{57^\circ 17' 44''} \times 360^\circ \times n^2.$$

4° Le mouvement des nœuds de Jupiter sera composé de même de deux parties, dont l'une croîtra uniformément et donnera le mouvement moyen du nœud de

$$-\left(\frac{il}{h}+\frac{iQ}{h}c\cos E\right)\times 360^\circ\times n,$$

et dont l'autre suivra la loi du carré du temps et donnera une inégalité croissante de

$$\frac{iQ}{h}c\sin E\left(\frac{il-il'}{2h}+\frac{iQ}{h}c\cos E\right)\times\frac{360^\circ}{57^\circ 17' 44''}\times 360^\circ\times n^2.$$

5° Le mouvement de Jupiter en longitude sera sujet à une altération de

$$\left(\frac{5i^3\delta^2\nu}{2}\beta\sin\eta+\frac{i^3\lambda^2\nu}{2}\gamma\sin\omega\right)T^2$$

à très-peu près, c'est-à-dire de

$$\left(\frac{5}{2}i\delta.i\delta'\frac{iP}{h}\sin A+\frac{1}{2}i\lambda.i\lambda'\frac{iQ}{h}\sin E\right)T^2;$$

ce qui donne, comme on voit, dans le mouvement de cette planète, une inégalité croissante comme les carrés des temps, et qui sera au bout de n révolutions de

$$\left(\frac{5}{2}i\delta.i\delta'\frac{iP}{h}\sin A+\frac{1}{2}i\lambda.i\lambda'\frac{iQ}{h}\sin E\right)\times\frac{360^\circ}{57^\circ 17' 44''}\times 360^\circ\times n^2.$$

On trouvera de la même manière :

1° Que, pendant n révolutions de Saturne à compter depuis la même époque, la plus grande équation de cette planète variera de

$$-2i\delta\frac{iP'}{h'}\sin A\times 360^\circ\times n.$$

2° Que l'inclinaison de son orbite à l'écliptique variera dans le même temps de

$$-i\lambda\frac{iQ'}{h'}\sin E\times 360^\circ\times n.$$

3° Que le mouvement moyen et uniforme de l'aphélie de Saturne sera exprimé par

$$-\left(\frac{ik'}{h'} + \frac{i\mathrm{P}'}{h'}\frac{1}{\mathrm{b}}\cos\mathrm{A}\right) \times 360^\circ \times n,$$

et que de plus le mouvement de cet aphélie sera sujet à une inégalité croissant comme les carrés des temps, laquelle sera, pour n révolutions, de

$$-\frac{i\mathrm{P}'}{h'}\frac{1}{\mathrm{b}}\sin\mathrm{A}\left(\frac{ik' - ik}{2h'} + \frac{i\mathrm{P}'}{h'}\frac{1}{\mathrm{b}}\cos\mathrm{A}\right) \times \frac{360^\circ}{57^\circ 17' 44''} \times 360^\circ \times n^2.$$

4° Que le mouvement moyen des nœuds de Saturne sera de

$$-\left(\frac{il'}{h'} + \frac{i\mathrm{Q}'}{h'}\frac{1}{\mathrm{c}}\cos\mathrm{E}\right) \times 360^\circ \times n,$$

et qu'il y aura aussi, dans le mouvement des nœuds de cette planète, une inégalité de la même espèce, laquelle sera représentée par

$$-\frac{i\mathrm{Q}'}{h'}\frac{1}{\mathrm{c}}\sin\mathrm{E}\left(\frac{il' - il}{2h'} + \frac{i\mathrm{Q}'}{h'}\frac{1}{\mathrm{c}}\cos\mathrm{E}\right) \times \frac{360^\circ}{57^\circ 17' 44''} \times 360^\circ \times n^2.$$

5° Qu'enfin le mouvement de Saturne en longitude sera sujet à une inégalité croissant comme les carrés des temps, et dont la valeur sera, au bout de n révolutions, de

$$-\left(\frac{5}{2}i\delta.i\delta'\frac{i\mathrm{P}'}{h'}\sin\mathrm{A} + \frac{1}{2}i\lambda.i\lambda'\frac{i\mathrm{Q}'}{h'}\sin\mathrm{E}\right) \times \frac{360^\circ}{57^\circ 17' 44''} \times 360^\circ \times n^2.$$

Au reste, il faut se ressouvenir que ces propositions cessent d'être exactes lorsqu'après un grand nombre de révolutions les angles $2i\nu\mathrm{T}$, $2i\sigma\mathrm{T}$ et $2i\nu'\mathrm{T}'$, $2i\sigma'\mathrm{T}'$ commencent à devenir considérables.

91. Suivant les Tables de M. Halley, le mouvement moyen de Jupiter en 100 années juliennes est $8^{\text{rév}}5^{\text{s}}\,6^\circ 28' 11''$, c'est-à-dire $10\,931\,291''$; d'où, retranchant la précession séculaire des équinoxes, laquelle est de $5034''$, on a pour le mouvement séculaire de Jupiter $10\,926\,257''$.

Les mêmes Tables donnent le mouvement moyen de Saturne en 100 ans de $3^{\text{rév}}4^{s}\,28^{\circ}6'0''$, c'est-à-dire de $4\,403\,160''$, d'où l'on trouve pour le mouvement séculaire de Saturne $4\,398\,126''$.

On aura donc

$$\frac{h'}{h} = \frac{4398126}{10926257} = 0,402528;$$

d'où l'on tire

$$a = 0,545169.$$

De là on trouvera

$$\begin{array}{ll} \mathfrak{A} = 2,178104, & \mathfrak{P} = 6,891711, \\ \mathfrak{B} = 3,183228, & \mathfrak{Q} = 12,403290, \\ \mathfrak{C} = 2,080116, & \mathfrak{R} = 9,890764, \\ \mathfrak{D} = 1,294032, & \mathfrak{S} = 7,315770, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}$$

et ensuite

$$\begin{array}{ll} \mathfrak{A}_2 = -\,0,120125, & \mathfrak{A}'_2 = \,1,310407, \\ \mathfrak{A}_3 = \,0,041029, & \mathfrak{A}'_3 = -\,2,744209, \\ \mathfrak{A}_4 = \,0,473042, & \mathfrak{A}'_4 = \,0,867697, \\ \mathfrak{B}_2 = -\,0,143482, & \mathfrak{B}'_2 = \,4,793425, \\ \mathfrak{B}_5 = -\,0,946083, & \mathfrak{B}'_5 = -\,1,735395, \\ p = \,3,997995, & p_1 = -10,532304, \\ q = \,8,300535, & q_1 = -17,850234, \\ r = \,7,306455, & r_1 = -13,546971, \\ \mathfrak{P}_4 = -\,0,232789, & \mathfrak{P}'_4 = -\,3,488506, \\ \mathfrak{P}_7 = -\,0,184498, & \mathfrak{P}'_7 = \,7,537649, \\ \mathfrak{Q}_5 = \,0,700695, & \mathfrak{Q}'_5 = -\,4,354384, \end{array}$$

Donc, à cause de

$$\frac{J}{I} = \frac{1}{1067} = 0,000\,937\,207$$

et de

$$\frac{J'}{I} = \frac{1}{3021} = 0,000\,331\,016,$$

on aura

$$\frac{ik}{h} = -0{,}000\,078\,292, \quad \frac{ik'}{h'} = -0{,}000\,406\,604,$$

$$\frac{il}{h} = 0{,}000\,078\,293, \quad \frac{il'}{h'} = 0{,}000\,406\,606,$$

$$\frac{i\mathrm{P}}{h} = 0{,}000\,051\,192, \quad \frac{i\mathrm{P}'}{h'} = 0{,}000\,265\,701,$$

$$\frac{i\mathrm{Q}}{h} = -0{,}000\,078\,293, \quad \frac{i\mathrm{Q}'}{h'} = -0{,}000\,406\,606,$$

et l'on trouvera

$$i\mu = -0{,}000\,120\,981, \quad i\mu' = -0{,}000\,300\,553,$$

$$i\nu = 0{,}000\,085\,425, \quad i\nu' = 0{,}000\,212\,221,$$

$$i\rho = 0{,}000\,120\,981, \quad i\rho' = 0{,}000\,300\,553,$$

$$i\sigma = 0{,}000\,120\,981, \quad i\sigma' = 0{,}000\,300\,553.$$

Or, selon M. Halley, on a pour l'année 1750

$$i\delta = \frac{25078}{520098} = 0{,}048218,$$

$$i\delta' = \frac{54381}{954007} = 0{,}057003,$$

$$i\lambda = \operatorname{tang} 1^\circ 19' 10'' = 0{,}023032,$$

$$i\lambda' = \operatorname{tang} 2^\circ 30' 10'' = 0{,}043710,$$

$$\alpha = 6^s\, 10^\circ 33' 46'', \quad \varepsilon = 3^s\, 8^\circ 15' 49'',$$

$$\alpha' = 8^s\, 29^\circ 39' 58'', \quad \varepsilon' = 3^s\, 21^\circ 20' 5'',$$

d'où l'on tire

$$\mathrm{b} = 1{,}182190, \quad \mathrm{A} = 79^\circ 6' 12'',$$

$$\mathrm{c} = 1{,}897725, \quad \mathrm{E} = 13^\circ 4' 16''.$$

Si donc on substitue ces valeurs numériques dans les formules du numéro précédent, on formera la Table suivante, dans laquelle n est le nombre des révolutions que Jupiter ou Saturne a achevées depuis le commencement de l'année 1750 que nous avons prise pour époque; de sorte qu'il faudra faire n positif pour les temps qui suivent cette époque, et négatif pour ceux qui la précèdent.

TABLE DE LA VARIATION DES ÉLÉMENTS DE JUPITER ET DE SATURNE, SUIVANT LA THÉORIE.

	JUPITER.	SATURNE.
Variation de la plus grande équation du centre.	$+\ 7'',4254\,n$	$-\ 32'',6086\,n$
Variation de l'inclinaison à l'écliptique.	$-\ 1'',0030\,n$	$+\ 2'',7449\,n$
Mouvement moyen de l'aphélie par rapport aux étoiles fixes.	$+86'',6311\,n$	$+471'',8632\,n$
Inégalité croissante dans le mouvement de l'aphélie.	$+\ 0'',0262\,n^2$	$+\ 0'',1141\,n^2$
Mouvement moyen des nœuds par rapport aux étoiles fixes.	$+86'',1075\,n$	$-256'',4655\,n$
Inégalité croissante dans le mouvement des nœuds.	$+\ 0'',0513\,n^2$	$-\ 0'',0405\,n^2$
Inégalité croissante dans le mouvement en longitude.	$+\ 2'',7402\,n^2$	$-\ 14'',2218\,n^2$

Addition pour les nos 78 et 79.

Nous avons dit dans le premier de ces deux numéros que la quantité $\int \Psi\, dz$ contient un terme qui, par l'intégration, se trouve divisé par des quantités de l'ordre de i, et nous avons, en conséquence, conservé les termes où cette quantité se trouvait multipliée par i^2n, en rejetant toutefois ceux où la même quantité aurait été multipliée par i^3n. Mais il est facile de se convaincre, par la substitution des valeurs de z et de z' (n° 84), que le diviseur du terme dont il s'agit sera réellement de l'ordre de in; de sorte que, si l'on veut avoir égard dans les valeurs de y et de z aux quantités de l'ordre de i^2, il n'est pas permis de négliger les termes de

84.

l'ordre de i^3n, où se trouve la quantité $\int \Psi dz$, car l'intégration réduira à l'ordre de i^2 les coefficients de ces termes. Il en sera de même de quelques termes de l'ordre de i qui se trouveront dans la quantité $n\int \Phi dy$.

Ainsi on trouve qu'il faut ajouter à la valeur de $\int \frac{dz^2}{dt^2}dy$ le terme $-2in\int dy\int \Psi dz$, et par conséquent à la valeur de $\int z^2 dy$ le terme $-\frac{4in}{3h^2}\int dy\int \Psi dz$; d'où il s'ensuit que le premier membre de l'équation (o) doit être augmenté du terme $4i^2$n$\int dy\int \Psi dz$, et que le premier membre de l'équation (p) doit être augmenté du terme $-8i^2$n$\int dy\int \Psi dz$.

De là on trouvera, après avoir achevé toutes les opérations, qu'il faudra ajouter (n° 79) à la valeur de Y les termes

$$8i^3(\beta-2\gamma)\int dy\int \Psi\, dz + 12i^2\delta y\int \Phi\, dy + 4i^3(\varepsilon-\eta h^2)y\int \Psi\, dz,$$

et à la valeur de Z les termes

$$12i^3\pi z\int \Psi\, dz + 4i^2(\rho-\sigma h^2)z\int \Phi\, dy.$$

Au reste cette omission n'influe point sur le reste de nos calculs.

SOLUTION

D'UN

PROBLÈME D'ARITHMÉTIQUE.

SOLUTION

D'UN

PROBLÈME D'ARITHMÉTIQUE.

(*Miscellanea Taurinensia*, t. IV, 1766-1769.)

Le problème que j'entreprends de résoudre dans ce Mémoire est celui-ci :

Étant donné un nombre quelconque entier et non carré, trouver un nombre entier et carré tel, que le produit de ces deux nombres augmenté d'une unité soit un nombre carré.

Ce problème est un de ceux que M. Fermat avait proposés, comme une espèce de défi, à tous les Géomètres anglais, et particulièrement à M. Wallis, qui a été le seul, que je sache, qui l'ait résolu, ou au moins qui en ait publié la solution (*voyez* le Chapitre XCVIII de son *Algèbre* et les Lettres XVII et XIX de son *Commercium Epistolicum*); mais la méthode de ce savant Géomètre ne consiste que dans une espèce de tâtonnement, par lequel on n'arrive au but que d'une manière assez incertaine, et sans savoir même si l'on y arrivera; d'ailleurs il faut démontrer surtout que la solution du problème est toujours possible, quel que soit le nombre donné, proposition qui est généralement regardée comme vraie, mais qui n'a pas encore été établie, que je sache, d'une manière solide et rigoureuse; il est vrai que M. Wallis a prétendu la prouver, mais par un raisonnement que les Mathématiciens trouveront bien peu satisfaisant, et qui n'est, ce me semble, dans le fond qu'une espèce de pétition de principe (*voyez* le Chapitre XIX de son *Algèbre*). Il s'ensuit de là que le problème dont il s'agit n'a pas encore été résolu d'une manière suffisante et qui ne laisse rien à désirer; c'est ce qui m'a déterminé à en faire l'objet de mes recherches, d'autant plus que la solution de ce problème est comme la clef de tous les autres problèmes de ce genre.

1. Soit a le nombre donné non carré, y^2 le carré cherché et x^2 un autre carré quelconque, la question se réduit à satisfaire à cette équation : $ay^2+1=x^2$, en ne prenant pour x et y que des nombres entiers; ainsi il s'agit de trouver deux nombres entiers x et y tels que

$$x^2-ay^2=1.$$

Qu'on tire la racine carrée de a par approximation, et l'on aura une fraction décimale qu'on pourra changer, par les méthodes connues, en une fraction continue, laquelle ira nécessairement à l'infini, à cause que $\sqrt{a}$ est une quantité irrationnelle par l'hypothèse.

Pour cela il n'y aura qu'à diviser d'abord le numérateur de la fraction trouvée par son dénominateur, ensuite le dénominateur par le reste, et ainsi de suite, en pratiquant la même opération, par laquelle on cherche la plus grande commune mesure de deux nombres, et nommant $q, q', q'', q''', \ldots$, les quotients qui résultent de ces différentes divisions, on aura

$$\sqrt{a}=q+\cfrac{1}{q'+\cfrac{1}{q''+\cfrac{1}{q'''+\ldots}}}$$

Or cette fraction continue étant interrompue successivement au premier terme, au second, au troisième, etc., donnera une infinité de fractions particulières que je désignerai par $\frac{m}{n}, \frac{M}{N}, \frac{m'}{n'}, \frac{M'}{N'}, \ldots$, auxquelles ajoutant la fraction $\frac{1}{0}$ on aura cette suite infinie de fractions :

$$\frac{1}{0}, \frac{m}{n}, \frac{M}{N}, \frac{m'}{n'}, \frac{M'}{N'}, \frac{m''}{n''}, \frac{M''}{N''}, \frac{m'''}{n'''}, \frac{M'''}{N'''}, \ldots,$$

qui seront telles que

$$\begin{array}{ll}
m = q, & n = 1, \\
M = q' m + 1, & N = q' n, \\
m' = q'' M + m, & n' = q'' N + n, \\
M' = q''' m' + M, & N' = q''' n' + N, \\
m'' = q^{\text{IV}} M' + m', & n'' = q^{\text{IV}} N' + n', \\
M'' = q^{\text{V}} m'' + M', & N'' = q^{\text{V}} n'' + N', \\
\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

Ces sortes de fractions ont plusieurs propriétés qui sont connues depuis longtemps des Géomètres, mais que nous croyons devoir rappeler ici en peu de mots, parce que nous en ferons un grand usage dans la suite.

1° Les numérateurs

$$1, \; m, \; M, \; m', \; M', \ldots,$$

forment une série qui va continuellement en augmentant; et il en est de même des dénominateurs

$$0, \; n, \; N, \; n', \; N', \ldots$$

2° Les fractions

$$\frac{m}{n}, \; \frac{m'}{n'}, \; \frac{m''}{n''}, \ldots,$$

sont toutes plus petites que la valeur de la fraction continue d'où elles résultent, valeur qui dans notre cas est $\sqrt{a}$, mais elles s'en approchent toujours de plus en plus. Au contraire, les fractions

$$\frac{1}{0}, \; \frac{M}{N}, \; \frac{M'}{N'}, \; \frac{M''}{N''}, \ldots,$$

sont toutes plus grandes que la même valeur, vers laquelle elles sont aussi constamment convergentes. Et chacune de ces fractions en particulier, soit qu'elle soit plus grande ou plus petite que $\sqrt{a}$, approche davantage de cette quantité que ne fait aucune des fractions précédentes, ni que pourrait faire aucune fraction quelconque dont le dénominateur serait plus petit.

3° Si l'on multiplie en croix toutes les fractions voisines, et qu'on retranche les produits l'un de l'autre, on aura dans toute l'étendue de la série

$$\begin{aligned}
1n \;\; &- 0m \;\; = 1,\\
Mn \;\; &- Nm \;\; = 1,\\
Mn' \;\; &- Nm' \;\; = 1;\\
M'n' \;\; &- N'm' \; = 1,\\
M'n'' &- N'm'' = 1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

d'où l'on voit que les nombres m, n, M, N, m', n',..., ne peuvent avoir d'autre diviseur commun que l'unité, et qu'ainsi les fractions dont il s'agit sont toutes réduites à leurs moindres termes.

2. Cela posé, puisque $\sqrt{a} < \frac{M}{N}$ et $> \frac{m'}{n'}$, si l'on fait $\sqrt{a} = \frac{M - \Delta}{N}$, on aura $\Delta > 0$, et $\frac{M - \Delta}{N} > \frac{m'}{n'}$; donc $\frac{\Delta}{N} < \frac{M}{N} - \frac{m'}{n'} < \frac{1}{Nn'}$, à cause de $Mn' - Nm' = 1$; donc $\Delta < \frac{1}{n'}$, et comme $n' > N$, on aura à plus forte raison $\Delta < \frac{1}{N}$. En supposant de même

$$\sqrt{a} = \frac{M' - \Delta'}{N'} = \frac{M'' - \Delta''}{N''}, \ldots,$$

on prouvera que

$$\begin{aligned}
\Delta' &> 0 \quad \text{et} \quad < \frac{1}{N'},\\
\Delta'' &> 0 \quad \text{et} \quad < \frac{1}{N''},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Pareillement, à cause de $\sqrt{a} > \frac{m}{n}$ et $< \frac{M}{N}$, si l'on fait $\sqrt{a} = \frac{m + \delta}{n}$ on aura $\delta > 0$ et $\frac{\delta}{n} < \frac{M}{N} - \frac{m}{n} < \frac{n}{Nn}$: donc aussi, à cause de $N > n$, $\delta < \frac{1}{n}$; et l'on prouvera de la même manière qu'en faisant

$$\sqrt{a} = \frac{m' + \delta'}{n} = \frac{m'' + \delta''}{n''}, \ldots,$$

on aura

$$\delta' > 0 \quad \text{et} \quad < \frac{1}{n'},$$

$$\delta'' > 0 \quad \text{et} \quad < \frac{1}{n''},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

3. Considérons maintenant la formule $x^2 - ay^2$, et substituons successivement dans cette formule les nombres $M, M', M'', \dots$, à la place de x, et les nombres correspondants $N, N', N'', \dots$, à la place de y, en nommant $Z, Z', Z'', \dots$, les quantités qui en résultent; nous aurons d'abord

$$M^2 - aN^2 = Z,$$

mais $a = \left(\frac{M - \Delta}{N}\right)^2$, donc

$$Z = 2M\Delta - \Delta^2;$$

donc, puisque $\Delta > 0$ et $< \frac{1}{N}$, on aura aussi $Z > 0$ et $< \frac{2M}{N}$; on aura de même

$$Z' = M'^2 - aN'^2 = 2M'\Delta' - \Delta'^2,$$

et par conséquent

$$Z' > 0 \quad \text{et} \quad < \frac{2M'}{N'},$$

et l'on prouvera de la même manière que

$$Z'' = M''^2 - aN''^2 > 0 \quad \text{et} \quad < \frac{2M''}{N''},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots \qquad \dots\dots$$

Mais les fractions $\frac{M}{N}, \frac{M'}{N'}, \frac{M''}{N''}, \dots$, forment une suite décroissante et convergente vers $\sqrt{a}$; donc les nombres $Z, Z', Z'', \dots$, qui résultent de la substitution de $M, M', M'', \dots$, à la place de x, et de $N, N', N'', \dots$, à la place de y dans la formule $x^2 - ay^2$, et qui sont par conséquent tous entiers, seront aussi nécessairement tous positifs et moindres que $\frac{2M}{N}$. Or ces nombres $Z, Z', Z'', \dots$, sont en nombre infini, parce que le nombre des fractions $\frac{M}{N}, \frac{M'}{N'}, \frac{M''}{N''}, \dots$, est infini; donc, puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de nombres entiers positifs, et moindre qu'un nombre donné, il faudra nécessairement qu'une infinité de ces nombres Z, Z′, Z″,..., soient égaux entre eux.

Ainsi l'on aura par ce moyen une infinité de nombres différents à substituer au lieu de x et de y dans la formule $x^2 - ay^2$, de manière qu'elle ait toujours une même valeur positive, et moindre que $\frac{2M}{N}$.

Si au lieu de substituer à la place de x et de y les nombres M, M′, M″,..., et N, N′, N″,..., on y substituait les nombres $m, m', m'',\ldots,$ et $n, n', n'',\ldots,$ et qu'on nommât $z, z', z'',\ldots,$ les valeurs résultantes de $x^2 - ay^2$, on aurait

$$z = m^2 - an^2,$$

ou, en mettant $\left(\frac{m+\delta}{n}\right)^2$ à la place de a,

$$z = -2m\delta - \delta^2,$$

d'où l'on voit que z sera négatif, et qu'à cause de $\delta < \frac{1}{n}$ on aura

$$-z < \frac{2m}{n} + 1.$$

On trouvera de même

$$z' = -2m'\delta' - \delta'^2,$$

et par conséquent

$$z' < 0 \quad \text{et} \quad -z' < \frac{2m'}{n'} + 1,$$

et ainsi de suite à l'infini.

D'où l'on conclura, comme ci-dessus, qu'il y a nécessairement une infinité de ces nombres $m, m' m'',\ldots,$ et $n, n', n'',\ldots,$ qui, étant substitués à la place de x et de y dans la formule $x^2 - ay^2$, la rendront égale à un même nombre entier négatif, et compris entre zéro et $-\frac{2m}{n} - 1$.

4. Nous dénoterons en général par $x, x', x'', x''',\ldots,$ et par $y, y', y'', y''',\ldots,$ tous les nombres qui étant substitués dans la formule $x^2 - ay^2$ la rendent égale à un même nombre quelconque entier positif ou négatif,

que nous appellerons R; en sorte que l'on ait les équations

$$\begin{aligned}
x^2 - ay^2 &= \mathrm{R},\\
x'^2 - ay'^2 &= \mathrm{R},\\
x''^2 - ay''^2 &= \mathrm{R},\\
x'''^2 - ay'''^2 &= \mathrm{R},\\
\ldots\ldots&\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

dont le nombre sera infini.

5. Lemme. — Le produit de ces deux quantités $x^2 - ay^2$ et $x'^2 - ay'^2$ est $(xx' \pm ayy')^2 - a(xy' \pm yx')^2$; car

$$\begin{aligned}
(x^2 - ay^2)(x'^2 - ay'^2) &= x^2x'^2 + a^2y^2y'^2 - ay^2x'^2 - ax^2y'^2\\
&= x^2x'^2 \pm 2axx'yy' + a^2y^2y'^2 - ax^2y'^2 \mp 2axyx'y' - ay^2x'^2\\
&= (xx' \pm ayy')^2 - a(xy' \pm yx')^2.
\end{aligned}$$

D'où l'on voit que le produit de deux quantités de cette forme $x^2 - ay^2$, a étant une quantité donnée, est toujours aussi de la même forme, et qu'ainsi le produit d'autant des quantités de cette forme qu'on voudra sera encore de la même forme.

Donc on aura

$$\begin{aligned}
(x^2 - ay^2)^2 &= (x^2 + ay^2)^2 - a(2xy)^2,\\
(x^2 - ay^2)^3 &= (x^3 + 3axy^2)^2 - a(3x^2y + ay^3)^2,
\end{aligned}$$

et ainsi des autres.

6. Supposons d'abord que R et a soient premiers entre eux, et multipliant ensemble deux quelconques des équations du n° 4, on aura (Lemme)

$$\mathrm{R}^2 = (xx' \pm ayy')^2 - a(xy' \pm yx')^2. \tag{A}$$

De plus, les mêmes équations donneront celle-ci :

$$\mathrm{R}(y'^2 - y^2) = x^2y'^2 - y^2x'^2,$$

savoir, à cause de $x^2y'^2 - y^2x'^2 = (xy' + yx')(xy' - yx')$,

$$\mathrm{R}(y'^2 - y^2) = (xy' + yx')(xy' - yx'). \tag{B}$$

Or : 1° soit R un nombre premier quelconque; il faudra, en vertu de l'équation (B), que $xy' + yx'$ ou $xy' - yx'$ soit divisible par R; soit donc

$$xy' \pm yx' = q\mathrm{R},$$

et l'équation (A) deviendra

$$\mathrm{R}^2 = (xx' \pm ayy')^2 - aq^2\mathrm{R}^2,$$

d'où l'on voit que $(xx' \pm ayy')^2$ est divisible par R^2, et que par conséquent $xx' \pm ayy'$ est divisible par R; donc faisant $xx' \pm ayy' = p\mathrm{R}$, et divisant ensuite toute l'équation par R^2, on aura

$$1 = p^2 - aq^2.$$

7. 2° Soit $\mathrm{R} = \mathrm{AB}$, A et B étant des nombres premiers, il faudra, en vertu de l'équation (B), que $xy' + yx'$ ou $xy' - yx'$ soit divisible par R ou bien que l'une de ces deux quantités soit divisible par A et l'autre par B.

Le premier cas rentre évidemment dans celui du numéro précédent, et donne par conséquent le même résultat.

Dans le second cas on aura

$$xy' \pm yx' = q\mathrm{B},$$

q n'étant point divisible par A, et l'équation (A) deviendra

$$\mathrm{A}^2\mathrm{B}^2 = (xx' \pm ayy')^2 - aq^2\mathrm{B}^2;$$

de sorte que $xx' \pm ayy'$ sera aussi divisible par B; donc faisant

$$xx' \pm ayy' = p\mathrm{B},$$

et divisant toute l'équation par B^2, on aura

$$\mathrm{A}^2 = p^2 - aq^2. \tag{C}$$

Or, comme q n'est pas divisible par A, et que a ne l'est pas non plus par hypothèse, p ne le sera pas, de sorte que A, p et q seront premiers entre eux.

Qu'on prenne maintenant une autre quelconque des équations du nº 4, comme $R = x''^2 - ay''^2$, et qu'on la combine avec l'équation $R = x^2 - ay^2$, en opérant sur ces deux équations comme nous venons de faire sur les équations $R = x^2 - ay^2$ et $R = x'^2 - ay'^2$; on aura des résultats analogues aux précédents, dont on tirera par conséquent des conclusions semblables. Ainsi il faudra que l'une ou l'autre de ces quantités $xy'' + yx''$, $xy'' - yx''$ soit divisible par R, ce qui se réduit au cas du nº 6; ou bien que l'une le soit par A, l'autre par B. Donc, faisant dans ce dernier cas

$$xy'' \pm yx'' = q'B,$$

et ensuite

$$xx'' \pm ayy'' = p'B,$$

on parviendra de même à l'équation

$$\text{(D)} \qquad A^2 = p'^2 - aq'^2,$$

dans laquelle A, p' et q' seront aussi premiers entre eux.

Or les deux équations (C) et (D) donneront ces deux-ci :

$$\text{(E)} \qquad A^4 = (pp' \pm aqq')^2 - a(pq' \pm qp')^2,$$

$$\text{(F)} \qquad A^2(q'^2 - q^2) = (pq' + qp')(pq' - qp').$$

Ainsi, à cause que A est un nombre premier, il faudra, en vertu de l'équation (F), que l'une ou l'autre des quantités $pq' + qp'$, $pq' - qp'$ soit divisible par A^2, ou bien que l'une et l'autre soient divisibles en même temps par A; mais alors il faudrait aussi que leur somme $2pq'$ fût divisible par A, ce qui ne peut être, à cause que ni p, ni q' n'est divisible par A, à moins que A ne soit égal à 2.

Supposons d'abord que A soit différent de 2, et l'on aura nécessairement

$$pq' \pm qp' = sA^2,$$

ce qui réduit l'équation (E) à celle-ci :

$$A^4 = (pp' \pm aqq')^2 - as^2 A^4,$$

par laquelle on voit que $pp' \pm aqq'$ doit aussi être divisible par A^2; de manière qu'on aura

$$pp' \pm aqq' = rA^2;$$

et par conséquent, en divisant toute l'équation par A^4,

$$1 = r^2 - as^2.$$

Si A était égal à 2, alors, comme q et q' sont premiers à A, ils seraient tous deux impairs; par conséquent leurs carrés seraient chacun un multiple de 8 augmenté d'une unité; de sorte que la différence de ces carrés serait nécessairement un multiple de 8; on aurait donc

$$q'^2 - q^2 = 8m,$$

et l'équation (F) deviendrait, à cause de $A = 2$,

$$32m = (pq' + qp')(pq' - qp');$$

ainsi il faudrait nécessairement que l'une ou l'autre des quantités $pq' + qp'$, $pq' - qp'$ fût divisible par 4, c'est-à-dire par A^2, comme dans le cas précédent.

8. 3° Soit $R = ABC$, A, B, C étant des nombres premiers, il faudra donc, en vertu de l'équation (B), que l'une ou l'autre des quantités $xy' + yx'$, $xy' - yx'$ soit divisible par R, ce qui rentre dans le cas du n° 6; ou bien que l'une soit divisible par A, et l'autre par BC. Soit donc

$$xy' \pm yx' = qBC,$$

et l'équation (A) deviendra

$$A^2B^2C^2 = (xx' \pm ayy')^2 - aq^2B^2C^2;$$

de sorte qu'il faudra aussi que $xx' \pm ayy'$ soit divisible par BC; donc, faisant

$$xx' \pm ayy' = p\text{BC},$$

et divisant toute l'équation par B^2C^2, on aura

$$\text{A}^2 = p^2 - aq^2.$$

Si l'on combine de même l'équation $\text{R} = x^2 - ay^2$ avec l'équation $\text{R} = x''^2 - ay''^2$ (nº 4), et que ni l'une ni l'autre des quantités $xy'' + yx''$, $xy'' - yx''$ ne soit divisible par R, on parviendra, par la même méthode, à une équation de cette forme :

$$k^2 = p^2 - aq'^2,$$

k étant l'un des facteurs de R. Donc, si $k = \text{A}$, on aura deux équations qu'on traitera comme on a fait ci-dessus pour les équations (C) et (D). Si $k = \text{B}$, on combinera les équations $\text{R} = x'^2 - ay'^2$ et $\text{R} = x''^2 - ay''^2$, et si cette combinaison ne donne pas le cas du nº 6, elle donnera nécessairement une équation de cette forme :

$$k'^2 = p''^2 - aq''^2,$$

k' étant l'un des trois facteurs de R.

Donc, si $k' = \text{A}$ ou $k' = \text{B}$, on aura deux équations analogues aux équations (C) et (D); mais, si $k' = \text{C}$, il faudra prendre une quatrième équation telle que $\text{R} = x'''^2 - ay'''^2$, et la combiner avec quelqu'une des précédentes pour avoir ou le cas du nº 6, ou au moins une nouvelle équation de cette forme :

$$k''^2 = p'''^2 - aq'''^2,$$

k'' étant égal à A ou à B ou à C; ainsi, quel que soit k'', on aura nécessairement deux équations analogues aux équations (C) et (D), par lesquelles on pourra résoudre le problème (nº 7).

En général il est évident, par tout ce que nous avons démontré jusqu'ici, qu'en multipliant ensemble deux quelconques des équations du nº 4, on aura nécessairement ou une équation de cette forme : $1 = p^2 - aq^2$ comme dans le nº 6, ou au moins une équation de cette autre forme :

$k^2 = p^2 - aq^2$, k étant l'un des trois facteurs de R. Donc, si l'on prend quatre des équations du n° 4, et qu'on en forme quatre produits différents, on parviendra nécessairement à l'équation

$$1 = p^2 - aq^2,$$

ou au moins à deux équations de la forme

$$k^2 = p^2 - aq^2, \quad k^2 = p'^2 - aq'^2,$$

qu'on traitera ensuite comme on a fait plus haut pour les équations (C) et (D).

9. 4° Soit $R = ABCD$, A, B, C, D étant des nombres premiers, il faudra, en vertu de l'équation (B), que l'une ou l'autre des quantités $xy' + yx'$, $xy' - yx'$ soit divisible par R; ou que l'une soit divisible seulement par BCD, et l'autre par A; ou enfin que l'une le soit seulement par CD, et l'autre par AB, ce qui donne trois cas différents.

Dans le premier cas on aura d'abord, comme dans le n° 6,

$$1 = p^2 - aq^2.$$

Dans le second cas on aura, comme dans le n° 7, en mettant BCD au lieu de B,

$$A^2 = p^2 - aq^2.$$

Dans le troisième cas on fera

$$xy' \pm yx' = q\,CD,$$

et l'équation (A) deviendra

$$A^2B^2C^2D^2 = (xx' \pm ayy')^2 - aq^2C^2D^2;$$

de sorte qu'on aura aussi

$$xx' \pm ayy' = p\,CD;$$

et par conséquent, en divisant toute l'équation par C^2D^2,

$$A^2B^2 = p^2 - aq^2.$$

Qu'on prenne donc cinq des équations du n° 4, et qu'on les multiplie ensemble deux à deux pour avoir sept produits différents (on pourrait à la vérité en avoir dix, mais il suffit ici d'en considérer sept), on aura nécessairement par ce moyen ou une équation de cette forme :

$$1 = p^2 - aq^2,$$

laquelle résout le problème ; ou au moins deux équations de cette forme :

$$A^2 = p^2 - aq^2, \quad A^2 = p'^2 - aq'^2$$

(A étant l'un quelconque des facteurs de R), et le problème se résoudra comme dans le n° 7 ; ou enfin deux équations de la forme

$$A^2B^2 = p^2 - aq^2, \quad A^2B^2 = p'^2 - aq'^2$$

(A et B étant deux quelconques des quatre facteurs de R) ; et, dans ce dernier cas, on prouvera aisément que les quatre quantités p, q, p' et q' seront premières à A et B.

Or, les équations

$$A^2B^2 = p^2 - aq^2 \quad \text{et} \quad A^2B^2 = p'^2 - aq'^2$$

donnent ces deux-ci :

$$\text{(G)} \qquad A^4B^4 = (pp' \pm aqq')^2 - a(pq' \pm qp')^2,$$

$$\text{(H)} \qquad A^2B^2(q'^2 - q^2) = (pq' + qp')(pq' - qp').$$

Et il faudra, en vertu de l'équation (H), que l'une ou l'autre des quantités $pq' + qp'$, $pq' - qp'$ soit divisible par A^2B^2, ou que l'une le soit seulement par A ou par B, et l'autre par AB^2 ou par A^2B, ou que l'une et l'autre le soient par AB ; ou enfin que l'une le soit seulement par A^2, et l'autre par B^2 ; ce qui donne, comme l'on voit, quatre cas différents.

Dans le premier cas on fera

$$pq' \pm qp' = sA^2B^2,$$

et l'équation (G) deviendra

$$A^4B^4 = (pp' \pm aqq')^2 - as^2A^4B^4;$$

donc on aura aussi

$$pp' \pm aqq' = r A^2 B^2,$$

et, divisant toute l'équation par A^4B^4, on aura

$$1 = r^2 - as^2.$$

A l'égard du second cas, il est clair que si les deux quantités $pq' + qp'$, $pq' - qp'$ étaient divisibles en même temps par A ou par B, il faudrait que leur somme $2pq'$ le fût aussi, ce qui ne peut être (à cause que p et q' sont premiers à A et B), à moins que l'on n'ait $A = 2$ ou $B = 2$; mais alors q et q' seraient nécessairement impairs, ce qui donnerait $q'^2 - q^2 = 8m$; de sorte que l'équation (H) deviendrait (en supposant $B = 2$)

$$32 m A^2 = (pq' + qp')(pq' - qp');$$

donc, puisque l'une des deux quantités $pq' + qp'$, $pq' - qp'$ est supposée divisible seulement par B, il faudra que l'autre le soit par $16A^2$, et par conséquent aussi par A^2B^2, ce qui se réduit au premier cas.

Le troisième cas ne peut point avoir lieu du tout, à cause que la somme des quantités $pq' + qp'$, $pq' - qp'$ n'étant point divisible par AB, il est impossible que chacune de ces quantités le soit.

Reste le quatrième cas, dans lequel on aura $pq' \pm qp' = sB^2$, s n'étant point divisible par A; on aura donc, dans ce cas, au lieu de l'équation (G), celle-ci :

$$A^4 B^4 = (pp' \pm aqq')^2 - as^2 B^4;$$

par conséquent, on aura aussi

$$pp' \pm aqq' = r B^2;$$

et, divisant toute l'équation par B^4, on aura

$$A^4 = r^2 - as^2,$$

et comme s et a ne sont point divisibles par A, r ne le sera pas non plus, de sorte que r et s seront premiers à A.

Ayant l'équation $A^4 = r^2 - as^2$, il faudra encore en avoir une autre semblable pour pouvoir résoudre le problème. Pour la trouver, on continuera à multiplier ensemble deux à deux les autres équations du n° 4, et il est facile de voir, par ce que nous venons de montrer, que si ces combinaisons ne donnent pas quelques-uns des cas qui ont déjà été résolus, elles donneront nécessairement à la fin deux équations de cette forme :

$$A^4 = r^2 - as^2, \quad A^4 = r'^2 - as'^2,$$

A étant l'un des quatre facteurs de R et r, s, r' et s' étant premiers à A.

En effet, puisque le nombre des équations du n° 4 est infini, et que le nombre des cas qui peuvent arriver est limité, il est évident que le même cas devra arriver une infinité de fois; de sorte que, si l'on ne trouve pas quelques-uns des cas que nous avons déjà résolus, on trouvera nécessairement deux, et même une infinité de cas tels que

$$A^4 = r^2 - as^2 \quad \text{et} \quad A^4 = r'^2 - as'^2;$$

mais il suffira d'en avoir deux pour que le problème soit résoluble.

On aura donc, par le moyen des deux équations dont il s'agit,

$$\text{(I)} \qquad A^8 = (rr' \pm ass')^2 - a(rs' \pm sr')^2,$$

$$\text{(K)} \qquad A^4(s'^2 - s^2) = (rs' + sr')(rs' - sr').$$

Donc il faudra, en vertu de l'équation (K), que l'une ou l'autre des quantités $rs' + sr'$, $rs' - sr'$ soit divisible par A^4, ou que toutes les deux soient divisibles à la fois par A; mais, dans ce dernier cas, il faudra aussi que leur somme $2rs'$ soit divisible par A, ce qui ne peut être à moins que A ne soit égal à 2. Or, supposant $A = 2$, on aura $s'^2 - s^2 = 8m$, ce qui réduira l'équation (K) à

$$2^7 m = (rs' + sr')(rs' - sr');$$

d'où l'on voit que si l'une des quantités $rs' + sr'$, $rs' - sr'$ est divisible seulement par A, l'autre le sera nécessairement par A^6, et par conséquent aussi par A^4.

Le cas où $rs' + sr'$ et $rs' - sr'$ seraient toutes deux divisibles par A^2 ne saurait avoir lieu, à cause que leur somme $2rs'$ ne peut jamais être divisible par A^2; de sorte qu'il ne restera que le cas où l'une ou l'autre de ces quantités sera divisible par A^4; ainsi on aura toujours

$$rs' \pm sr' = u A^4,$$

ce qui réduira l'équation (I) à celle-ci :

$$A^8 = (rr' \pm ass')^2 - au^2 A^8,$$

par laquelle on voit que $rr' \pm ass'$ sera aussi divisible par A^4. Faisant donc

$$rr' \pm ass' = t A^4,$$

et divisant toute l'équation par A^8, on aura

$$1 = t^2 - au^2.$$

On voit par là comment il faudrait s'y prendre si le nombre R était composé de cinq nombres premiers, ou d'autant de nombres premiers qu'on voudrait; et on voit en même temps que, pourvu que a et R soient premiers entre eux, on parviendra toujours à une équation de cette forme :

$$1 = x^2 - ay^2,$$

qui contient la solution du problème proposé; la difficulté ne consistera que dans la longueur du calcul, mais on pourra souvent l'abréger par les considérations suivantes.

10. Si le nombre R était une puissance quelconque d'un nombre premier, il ne serait pas nécessaire de le regarder comme le produit d'autant de nombres premiers qu'il y a d'unités dans l'exposant de la puissance donnée.

Car, soit $R = A^n$, A étant premier et différent de 2, je dis qu'il faudra, en vertu de l'équation (B), que l'une ou l'autre des quantités $xy' + yx'$, $xy' - yx'$ soit divisible par A^n; en effet, si l'une de ces quantités était divisible seulement par une puissance de A moindre que A^n, il faudrait que l'autre fût divisible par le complément de cette puissance; de sorte que les deux quantités dont il s'agit seraient divisibles en même temps par A; par conséquent leur somme $2xy'$ le serait aussi; donc, à cause de A premier et différent de 2, il faudrait que x ou y' fût divisible par A; mais, si x était divisible par A, il faudrait, en vertu de l'équation $A^n = x^2 - ay^2$, que y le fût aussi, a étant, par hypothèse, premier à A; ainsi x et y ne seraient pas premiers entre eux, ce qui répugne à la nature de ces quantités (n° 1).

On prouvera de même, par l'équation $A^n = x'^2 - ay'^2$, que y ne saurait être divisible par A. Donc il faudra nécessairement que l'on ait

$$xy' \pm yx' = qA^n,$$

ce qui réduira l'équation (A) à

$$A^{2n} = (xx' \pm ayy')^2 - aq^2A^{2n},$$

par laquelle on voit que $xx' \pm ayy'$ sera aussi divisible par A^n; ainsi, faisant $xx' \pm ayy' = pA^n$, et divisant l'équation par A^{2n}, on aura sur-le-champ

$$1 = p^2 - aq^2.$$

Si A était égal à 2, alors, puisque y et y' ne sont pas divisibles par A, ils seront nécessairement impairs; de sorte qu'on aurait $y'^2 - y^2 = 8m$, et l'équation (B) deviendrait

$$2^{n+3}m = (xy' + yx')(xy' - yx');$$

or, les quantités $xy' + yx'$, $xy' - yx'$ ne peuvent être divisibles en même temps par 4, parce qu'il faudrait que leur somme $2xy'$ le fût aussi, et que, par conséquent, x ou y' fût divisible par 2, ce qui ne se peut. Donc il faudra nécessairement que l'une de ces quantités soit divisible par 2^{n+2}, et par conséquent aussi par A^n; donc, etc.

On pourra abréger et simplifier de la même manière l'analyse des cas où

$$R = A^m B^n C^r \ldots,$$

A, B, C,... étant des nombres premiers.

11. Si l'on avait ces trois équations :

$$R = x^2 - ay^2, \quad R' = x'^2 - ay'^2 \quad \text{et} \quad R'' = x''^2 - ay''^2,$$

et que R et R′ fussent des nombres premiers quelconques, et $R'' = RR'$, on pourrait aussi par leur moyen résoudre le problème.

Car les équations $x^2 - ay^2 = R$ et $x''^2 - ay''^2 = RR'$ donneront ces deux-ci :

$$(L) \qquad R^2R' = (xx'' \pm ayy'')^2 - a(xy'' \pm yx'')^2,$$

$$(M) \qquad R(y''^2 - R'y^2) = (xy'' + yx'')(xy'' - yx'');$$

donc, à cause que R est premier, il faudra, en vertu de l'équation (M), que l'une ou l'autre des quantités $xy'' + yx''$, $xy'' - yx''$ soit divisible par R; donc, faisant

$$xy'' \pm yx'' = qR,$$

l'équation (L) deviendra

$$R^2R' = (xx'' \pm ayy'')^2 - aq^2R^2,$$

d'où l'on voit que $xx'' \pm ayy''$ sera aussi nécessairement divisible par R, de sorte qu'en faisant $xx'' \pm ayy'' = pR$, on aura, en divisant par R^2,

$$R' = p^2 - aq^2,$$

et il ne s'agira plus que de combiner cette équation avec l'équation

$$R' = x'^2 - ay'^2,$$

suivant la méthode du n° 6.

On pourrait traiter de la même manière les cas où l'on aurait

$$x^2 - ay^2 = R, \quad x'^2 - ay'^2 = R', \quad x''^2 - ay''^2 = R'' \quad \text{et} \quad x'''^2 - ay'''^2 = RR'R'',$$

R, R′, R″ étant des nombres premiers, et ainsi des autres.

12. Il est bon de remarquer encore que si les nombres R, dans les différentes équations du n° 4, étaient de signes différents, pourvu qu'ils fussent d'ailleurs égaux entre eux, les méthodes des numéros précédents réussiraient de même; il n'y aurait d'autre différence dans les résultats sinon qu'au lieu d'arriver toujours à une équation de cette forme: $1 = x^2 - ay^2$, on arriverait quelquefois à une équation de cette autre forme : $-1 = x^2 - ay^2$; mais alors il n'y aurait qu'à élever cette dernière équation au carré, et l'on aurait (n° 5)

$$1 = (x^2 + ay^2)^2 - a(2xy)^2.$$

13. Au reste, si l'on avait $R = \pm 2$ ou $R = \pm 4$, une seule équation suffirait pour résoudre le problème.

Soit: 1°

$$\pm 2 = x^2 - ay^2,$$

on aura, en prenant les carrés,

$$4 = (x^2 + ay^2)^2 - 4ax^2y^2;$$

mais $ay^2 = x^2 \mp 2$; donc $4 = 4(x^2 \mp 1)^2 - 4ax^2y^2$, et, divisant par 4,

$$1 = (x^2 \mp 1)^2 - a(xy)^2.$$

2° Soit

$$\pm 4 = x^2 - ay^2,$$

on aura, en carrant,

$$16 = (x^2 + ay^2)^2 - 4ax^2y^2;$$

mais $ay^2 = x^2 \mp 4$; donc, en substituant cette valeur et divisant toute l'équation par 4, on aura

$$4 = (x^2 \mp 2)^2 - ax^2y^2.$$

Cette équation étant multipliée par l'équation $\pm 4 = x^2 - ay^2$, on aura (n° 5), en prenant le signe $+$,

$$\pm 16 = [(x^2 \mp 2)x + axy^2]^2 - a[(x^2 \mp 2)y + x^2y]^2,$$

c'est-à-dire

$$\pm 16 = x^2(x^2 + ay^2 \mp 2)^2 - 4ay^2(x^2 \mp 1)^2;$$

mais $ay^2 = x^2 \mp 4$; donc, en substituant et divisant par 4, on aura

$$\pm 4 = x^2(x^2 \mp 3)^2 - ay^2(x^2 \mp 1)^2.$$

Or, puisque a est premier à R, et que R est ici un nombre pair, a sera nécessairement impair; donc l'équation $R = x^2 - ay^2$ ne pourra subsister à moins que x et y ne soient tous deux pairs ou impairs; mais ils ne peuvent être tous deux pairs, parce qu'ils sont supposés premiers l'un à l'autre; donc ils seront nécessairement tous deux impairs; donc x sera impair, et par conséquent $x^2 \mp 1$ et $x^2 \mp 3$ seront tous deux pairs; donc, faisant $x^2 \mp 1 = 2q$ et $x^2 \mp 3 = 2p$, et divisant l'équation précédente par 4, on aura celle-ci:

$$\pm 1 = (xp)^2 - a(yq)^2;$$

donc, lorsque $R = 4$, on aura

$$1 = (xp)^2 - a(yq)^2,$$

et, lorsque $R = -4$, on aura

$$-1 = (xp)^2 - a(yq)^2;$$

d'où, en prenant les carrés, il viendra

$$+1 = (x^2p^2 + ay^2q^2)^2 - a(2xypq)^2.$$

14. Nous avons supposé jusqu'ici que les nombres a et R étaient premiers l'un à l'autre; voyons maintenant comment il faudra s'y prendre lorsque ces nombres auront un diviseur commun.

Soit θ le plus grand diviseur commun de a et de R, en sorte que $a = \theta b$ et $R = \theta T$, b et T étant premiers entre eux, et l'équation

$$R = x^2 - ay^2$$

deviendra

$$\theta T = x^2 - \theta b y^2$$

(ce que nous disons de cette équation doit s'appliquer en général à toutes les équations du n° 4); d'où l'on voit qu'il faut nécessairement que le carré x^2 soit divisible par θ.

Supposons: 1° que θ ne soit ni carré, ni multiple d'un carré, il est évident que la racine x devra être elle-même divisible par θ; de sorte qu'en faisant $x = \theta u$, et divisant toute l'équation par θ, on aura

$$T = \theta u^2 - by^2.$$

Qu'on élève cette équation au carré, et l'on aura

$$T^2 = \theta^2 u^4 - 2b\theta u^2 y^2 + b^2 y^4 = (\theta u^2 + by^2)^2 - \theta b(2uy)^2,$$

savoir

$$T^2 = (\theta u^2 + by^2)^2 - a(2uy)^2,$$

équation dans laquelle a et T^2 seront premiers entre eux.

Or, dans l'équation $R = x^2 - ay^2$, R est nécessairement premier à y; autrement x^2 serait divisible par la plus grande commune mesure de ces deux quantités, et par conséquent x et y ne seraient plus premiers entre eux, contre l'hypothèse; donc T et θ seront aussi premiers à y; donc, dans l'équation $T = \theta u^2 - by^2$, T et u seront aussi premiers entre eux; autrement il faudrait que by^2 fût divisible par leur plus grande commune mesure, ce qui ne se peut à cause que b et y sont tous les deux premiers à T; donc, puisque T est premier à u et à y, il est clair que T^2 sera nécessairement premier à uy; donc, dans l'équation

$$T^2 = (\theta u^2 + by^2)^2 - a(2uy)^2,$$

$\theta u^2 + by^2$ et uy seront premiers entre eux; car, s'ils ne l'étaient pas, il faudrait que T fût divisible par leur commune mesure; ainsi T et uy ne seraient plus premiers l'un à l'autre.

Donc, si T est un nombre impair, on prendra, au lieu de l'équation $R = x^2 - ay^2$, celle-ci :

$$T^2 = (\theta u^2 + by^2)^2 - a(2uy)^2,$$

dans laquelle T^2 et a seront premiers entre eux, aussi bien que $\theta u^2 + by^2$ et $2uy$.

Et, si T est un nombre pair, alors $\theta u^2 + by^2$ sera aussi pair, et l'on aura l'équation

$$\left(\frac{T}{2}\right)^2 = \left(\frac{\theta u^2 + by^2}{2}\right)^2 - a(uy)^2,$$

dans laquelle $\left(\frac{T}{2}\right)^2$ et a seront premiers entre eux, comme aussi $\frac{\theta u^2 + by^2}{2}$ et uy.

2° Supposons maintenant que θ ait un facteur carré ϖ^2, en sorte que

$\theta = \varpi^2\gamma$, γ n'étant ni carré ni multiple d'un carré; en ce cas l'équation $R = x^2 - ay^2$ deviendra

$$\varpi^2\gamma T = x^2 - \varpi^2\gamma b y^2;$$

d'où l'on voit que le carré x^2 sera nécessairement divisible par $\varpi^2\gamma$, et que par conséquent sa racine x le sera par $\varpi\gamma$; ainsi, faisant $x = \varpi\gamma u$, on aura, après avoir divisé par $\varpi^2\gamma$,

$$T = \gamma u^2 - by^2.$$

Donc, si $\gamma = 1$, c'est-à-dire si θ est carré, on aura l'équation

$$T = u^2 - by^2,$$

dans laquelle T et b seront premiers entre eux, aussi bien que u et y; de sorte qu'à l'aide de cette équation et des autres semblables, on parviendra, par les méthodes des nos 6 et suivants, à une équation de cette forme :

$$1 = p^2 - bq^2 \quad \text{ou bien} \quad 1 = p^2 - \frac{a}{\varpi^2} q^2.$$

Si γ n'est pas égal à 1, on élèvera l'équation $T = \gamma u^2 - by^2$ au carré, et l'on aura

$$T^2 = (\gamma u^2 + by^2)^2 - \gamma b (2uy)^2,$$

et l'on prouvera, comme ci-dessus, que γb sera premier à T^2, et que $\gamma u^2 + by^2$ et uy seront premiers entre eux.

De sorte que, si T est impair, on aura, au lieu de l'équation $R = x^2 - ay^2$, celle-ci :

$$T^2 = (\gamma u^2 + by^2)^2 - \gamma b (2uy)^2,$$

où T^2 et γb seront premiers entre eux aussi bien que $\gamma u^2 + by^2$ et $2uy$.

Et, si T est pair, on aura l'équation

$$\left(\frac{T}{2}\right)^2 = \left(\frac{\gamma u^2 + by^2}{2}\right)^2 - \gamma b (uy)^2,$$

où $\left(\frac{T}{2}\right)^2$ et γb seront premiers entre eux aussi bien que $\frac{\gamma u^2 + by^2}{2}$ et uy.

Donc, par le moyen de ces équations et des autres semblables, on parviendra aussi à une équation de cette forme : $1 = p^2 - \gamma b q^2$, c'est-à-dire, à cause de $a = \gamma b \varpi^2$, de cette forme-ci :

$$1 = p^2 - \frac{a}{\varpi^2} q^2.$$

Or, connaissant deux valeurs quelconques de p et q qui satisfassent à l'équation $1 = p^2 - fq^2$, f étant quelconque, il est toujours possible de trouver par leur moyen deux autres valeurs de p et q qui satisfassent à la même équation, et qui soient telles que la valeur de q soit multiple d'un nombre quelconque donné, comme nous le verrons plus bas (n° 21); donc on pourra toujours déterminer p et q, de manière que q soit divisible par ϖ; de sorte qu'on aura

$$1 = p^2 - a\left(\frac{q}{\varpi}\right)^2,$$

comme le problème le demande.

15. Nous avons donc démontré, avec toute la rigueur et la généralité possibles, qu'un nombre quelconque entier et non carré a étant donné, il est toujours possible de trouver deux nombres x et y tels, que $1 = x^2 - ay^2$, et nous avons en même temps donné les moyens de trouver ces mêmes nombres.

Or, comme le carré, le cube, et en général toute puissance d'une quantité de cette forme $x^2 - ay^2$ est toujours aussi de la même forme (n° 5), il s'ensuit qu'en élevant l'équation $1 = x^2 - ay^2$ à une puissance quelconque, on aura une infinité d'autres équations semblables, de sorte qu'ayant trouvé par les méthodes précédentes, ou par quelque autre méthode que ce soit, une seule solution du problème, on pourra par son moyen en trouver d'autres à l'infini.

Pour renfermer toutes ces solutions dans une formule générale, supposons que p et q soient les valeurs trouvées de x et de y, en sorte que l'on ait $1 = p^2 - aq^2$; en élevant les deux membres de cette équation à une puissance quelconque m, on aura

$$1 = (p^2 - aq^2)^m,$$

équation qu'il s'agit de réduire à la forme de celle-ci :

$$1 = x^2 - ay^2.$$

Pour cela je remarque que

$$p^2 - aq^2 = (p + q\sqrt{a})(p - q\sqrt{a}),$$

de sorte que l'on aura

$$(p^2 - aq^2)^m = (p + q\sqrt{a})^m (p - q\sqrt{a})^m.$$

Or

$$(p + q\sqrt{a})^m = p^m + mp^{m-1}q\sqrt{a} + \frac{m(m-1)}{2}p^{m-2}q^2a + \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}p^{m-3}q^3a\sqrt{a} + \ldots;$$

donc, si l'on fait

$$x = p^m + \frac{m(m-1)}{2}p^{m-2}q^2a + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2.3.4}p^{m-4}q^4a^2 + \ldots,$$

$$y = mp^{m-1}q + \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}p^{m-3}q^3a + \frac{m(m-1)\ldots(m-4)}{2.3.4.5}p^{m-5}q^5a^2 + \ldots,$$

on aura

$$(p + q\sqrt{a})^m = x + y\sqrt{a};$$

et, prenant le radical $\sqrt{a}$ en $-$, on aura de même

$$(p - q\sqrt{a})^m = x - y\sqrt{a};$$

donc

$$(p^2 - aq^2)^m = (x - y\sqrt{a})(x - y\sqrt{a}) = x^2 - ay^2;$$

de sorte que l'on aura en général

$$x^2 - ay^2 = 1,$$

en prenant pour m un nombre quelconque entier et positif.

Au reste, les équations

$$(p + q\sqrt{a})^m = x + y\sqrt{a} \quad \text{et} \quad (p - q\sqrt{a})^m = x - y\sqrt{a}$$

donneront

$$x = \frac{(p+q\sqrt{a})^m + (p-q\sqrt{a})^m}{2},$$

$$y = \frac{(p+q\sqrt{a})^m - (p-q\sqrt{a})^m}{2\sqrt{a}},$$

expressions qui reviennent au même que les précédentes, mais qui ont l'avantage d'être sous une forme finie; ainsi, prenant successivement pour m tous les nombres naturels, on aura une infinité de solutions du problème proposé.

16. Les dernières expressions de x et de y font voir que ces quantités forment deux suites récurrentes, dont l'échelle de relation est $2p$, $-(p^2 - aq^2)$, ou bien (à cause de $p^2 - aq^2 = 1$) $2p$, -1; de sorte qu'en dénotant par x', x'', x''',... et y', y'', y''',... les valeurs de x et de y qui répondent à $m = 1, 2, 3,\ldots$, on aura les séries suivantes :

$$\begin{aligned}
x' &= p,\\
x'' &= 2p^2 - 1,\\
x''' &= 4p^3 - 3p,\\
x^{\text{iv}} &= 8p^4 - 8p^2 + 1,\\
x^{\text{v}} &= 16p^5 - 20p^3 + 5p,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

et en général, lorsque l'exposant est m,

$$x = 2^{m-1}p^m - m2^{m-3}p^{m-2} + \frac{m(m-3)}{2}2^{m-5}p^{m-4} - \frac{m(m-4)(m-5)}{2.3}2^{m-7}p^{m-6} + \frac{m(m-5)(m-6)(m-7)}{2.3.4}2^{m-9}p^{m-8} - \ldots,$$

et de même

$$\begin{aligned}
y' &= q,\\
y'' &= 2pq,\\
y''' &= (4p^2 - 1)q\\
y^{\text{iv}} &= (8p^3 - 4p)q,\\
y^{\text{v}} &= (16p^4 - 12p^2 + 1)q,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots;
\end{aligned}$$

et en général, lorsque l'exposant est m,

$$y = \left[2^{m-1}p^{m-1} - (m-2)\,2^{m-3}p^{m-3} + \frac{(m-3)(m-4)}{2}\,2^{m-5}p^{m-5} - \frac{(m-4)(m-5)(m-6)}{2.3}\,2^{m-7}p^{m-7} + \ldots\right] q.$$

On peut mettre encore les expressions générales de x et de y sous une autre forme beaucoup plus simple; mais il faut pour cela distinguer les cas où m est pair ou impair.

Soit : 1° m impair, on aura

$$x' = p,$$
$$x''' = -(3p - 4p^3),$$
$$x^{\mathrm{v}} = 5p - 20p^3 + 16p^5,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et en général

$$x = \pm\left[mp - \frac{m(m^2-1)}{2.3}p^3 + \frac{m(m^2-1)(m^2-9)}{2.3.4.5}p^5 - \frac{m(m^2-1)(m^2-9)(m^2-25)}{2.3.4.5.6.7}p^7 + \ldots\right],$$

le signe supérieur étant pour le cas de m multiple de 4 plus 1, et l'inférieur pour celui de m multiple de 4 plus 3.

Ensuite

$$y' = q,$$
$$y''' = -q(1 - 4p^2),$$
$$y^{\mathrm{v}} = q(1 - 12p^2 + 16p^4),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et en général

$$y = \pm q\left[1 - \frac{m^2-1}{2}p^2 + \frac{(m^2-1)(m^2-9)}{2.3.4}p^4 - \frac{(m^2-1)(m^2-9)(m^2-25)}{2.3.4.5.6}p^6 + \ldots\right],$$

où l'on observera, à l'égard des signes ambigus, la même règle que ci-dessus.

Soit : 2° m pair, et l'on aura

$$\begin{aligned}
x'' &= -(1-2p^2),\\
x^{\text{IV}} &= 1-8p^2+8p^4,\\
x^{\text{VI}} &= -(1-18p^2+48p^4-32p^6),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

et en général

$$x=\pm\left[1-\frac{m^2}{2}p^2+\frac{m^2(m^2-4)}{2.3.4}p^4-\frac{m^2(m^2-4)(m^2-16)}{2.3.4.5.6}p^6+\ldots\right].$$

Ensuite

$$\begin{aligned}
y'' &= 2pq,\\
y^{\text{IV}} &= -q(4p-8p^3),\\
y^{\text{VI}} &= q(6p-32p^3+32p^5),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

et en général

$$y=\mp q\left[mp-\frac{m(m^2-4)}{2.3}p^3+\frac{m(m^2-4)(m^2-16)}{2.3.4.5}p^5-\ldots\right].$$

A l'égard de l'ambiguïté des signes, on prendra le signe supérieur lorsque m est un multiple de 4, et l'inférieur lorsque m est un multiple de 4 plus 2.

De plus, puisque $p^2-aq^2=1$, on pourra substituer dans les formules précédentes $1+aq^2$ au lieu de p^2, et l'on aura celles-ci :

1° Pour le cas de m impair,

$$\begin{aligned}
x' &= p,\\
x''' &= p(1+4aq^2),\\
x^{\text{V}} &= p(1+12aq^2+16a^2q^4),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

et en général

$$x=p\left[1+\frac{m^2-1}{2}aq^2+\frac{(m^2-1)(m^2-9)}{2.3.4}a^2q^4+\frac{(m^2-1)(m^2-9)(m^2-25)}{2.3.4.5.6}a^3q^6+\ldots\right].$$

Ensuite

$$y' = q,$$
$$y''' = 3q + 4aq^3,$$
$$y^{\text{v}} = 5q + 20aq^3 + 16a^2q^5,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

et en général

$$y = mq + \frac{m(m^2-1)}{2.3}aq^3 + \frac{m(m^2-1)(m^2-9)}{2.3.4.5}a^2q^5$$
$$+ \frac{m(m^2-1)(m^2-9)(m^2-25)}{2.3.4.5.6.7}a^3q^7 + \dots.$$

2° Pour le cas de m pair,

$$x'' = 1 + 2aq^2,$$
$$x^{\text{iv}} = 1 + 8aq^2 + 8a^2q^4,$$
$$x^{\text{vi}} = 1 + 18aq^2 + 48a^2q^4 + 32a^3q^6,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

et en général

$$x = 1 + \frac{m^2}{2}aq^2 + \frac{m^2(m-4)}{2.3.4}a^2q^4 + \frac{m^2(m^2-4)(m^2-16)}{2.3.4.5.6}a^3q^6 + \dots$$

Ensuite

$$y'' = 2pq,$$
$$y^{\text{iv}} = p(4q + 8aq^3),$$
$$y^{\text{vi}} = p(6q + 32aq^3 + 32a^2q^5),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

et en général

$$y = p\left[mq + \frac{m(m^2-4)}{2.3}aq^3 + \frac{m(m^2-4)(m^2-16)}{2.3.4.5}a^2q^5 + \dots\right].$$

Ces dernières expressions de x et de y ont l'avantage de n'être composées que de termes tous positifs, ce qui les rend beaucoup plus simples et plus commodes pour le calcul.

17. Nous allons démontrer maintenant que si p et q sont les plus petites valeurs de x et y qui satisfassent à l'équation

$$x^2 - ay^2 = 1,$$

toutes les autres valeurs possibles de x et de y seront nécessairement renfermées dans les formules générales des deux numéros précédents.

Pour cela nous remarquerons d'abord que si l'on a

$$p^2 - aq^2 = 1, \quad p'^2 - aq'^2 = 1,$$

et que $p' > p$, on aura aussi $q' > q$; car retranchant la première équation de la seconde, on a

$$p'^2 - p^2 - a(q'^2 - q^2) = 0, \quad \text{ou bien} \quad p'^2 - p^2 = a(q'^2 - q^2);$$

donc si $p'^2 - p^2$ est positif, il faudra que $q'^2 - q^2$ le soit aussi; donc ....

Supposons maintenant que p et q soient les plus petites valeurs de x et y dans l'équation

$$x^2 - ay^2 = 1,$$

et que p' et q' soient les valeurs de x et de y qui sont immédiatement plus grandes que celles-là, en sorte qu'il n'y ait point de nombres plus petits que p' et q', qu'on puisse prendre pour x et y, autres que p et q. Cela posé :

Qu'on multiplie ensemble les deux équations

$$p^2 - aq^2 = 1 \quad \text{et} \quad p'^2 - aq'^2 = 1,$$

et l'on aura (n° **5**), en prenant seulement le signe inférieur,

$$(pp' - aqq')^2 - a(pq' - qp')^2 = 1;$$

d'où l'on voit que $pp' - aqq'$ sera aussi une des valeurs de x, et $pq' - qp'$ une des valeurs de y qui satisfont à la même équation

$$x^2 - ay^2 = 1.$$

Or je dis que $pp' - aqq'$ est > 0 et $< p'$. Car 1° soit $pp' - aqq' = z$, on aura

$$\frac{p}{q}\frac{p'}{q'} - a = \frac{z}{qq'};$$

mais les équations

$$p^2 - aq^2 = 1 \quad \text{et} \quad p'^2 - aq'^2 = 1$$

donnent

$$\frac{p^2}{q^2}=a+\frac{1}{q^2},\quad \frac{p'^2}{q'^2}=a+\frac{1}{q'^2};$$

donc

$$\frac{p^2}{q^2}\frac{p'^2}{q'^2}=a^2+a\left(\frac{1}{q^2}+\frac{1}{q'^2}\right)+\frac{1}{q^2q'^2},$$

et tirant la racine carrée,

$$\frac{p}{q}\frac{p'}{q'}=\sqrt{a^2+a\left(\frac{1}{q^2}+\frac{1}{q'^2}\right)+\frac{1}{q^2q'^2}},$$

d'où l'on voit que

$$\frac{p}{q}\frac{p'}{q'}>a;$$

de sorte que $\frac{p}{q}\frac{p'}{q'}-a$ sera toujours une quantité positive; par conséquent z sera aussi un nombre positif.

2° Soit $pp'-aqq'=p'+u$, on aura

$$\frac{p-1}{q}\frac{p'}{q'}-a=\frac{u}{qq'};$$

or

$$\frac{p-1}{q}=\sqrt{a+\frac{1}{q^2}}-\frac{1}{q}=\frac{a}{\sqrt{a+\frac{1}{q^2}}+\frac{1}{q}}\quad \text{et}\quad \frac{p'}{q'}=\sqrt{a+\frac{1}{q'^2}};$$

donc

$$\frac{p-1}{q}\frac{p'}{q'}=a\frac{\sqrt{a+\frac{1}{q'^2}}}{\sqrt{a+\frac{1}{q^2}}+\frac{1}{q}};$$

mais $q'>q$, donc $\sqrt{a+\frac{1}{q'^2}}<\sqrt{a+\frac{1}{q^2}}$ et à plus forte raison $<\sqrt{a+\frac{1}{q^2}}+\frac{1}{q}$; donc

$$\frac{p-1}{q}\frac{p'}{q'}<a;$$

donc $\frac{p-1}{q}\frac{p'}{q'}-a$ sera nécessairement une quantité négative; par conséquent u sera aussi négative; donc

$$pp' - aqq' < p'.$$

Donc il faudra par l'hypothèse que l'on ait $pp' - aqq' = p$, et comme

$$(pp' - aqq')^2 - a(pq' - qp')^2 = 1 \quad \text{et} \quad p^2 - aq^2 = 1,$$

il faudra aussi que l'on ait

$$(pq' - qp')^2 = q^2, \quad \text{d'où} \quad pq' - qp' = \pm q.$$

Mais

$$\frac{p}{q} = \sqrt{a + \frac{1}{q^2}} \quad \text{et} \quad \frac{p'}{q'} = \sqrt{a + \frac{1}{q'^2}};$$

donc, à cause de $q' > q$, on aura $\frac{p}{q} > \frac{p'}{q'}$; donc $pq' - qp'$ sera positif; de sorte qu'il faudra supposer

$$pq' - qp' = q.$$

Nous aurons donc ces deux équations :

$$pp' - aqq' = p \quad \text{et} \quad pq' - qp' = q,$$

d'où l'on tire

$$p' = \frac{p^2 + aq^2}{p^2 - aq^2} \quad \text{et} \quad q' = \frac{2pq}{p^2 - aq^2},$$

c'est-à-dire, à cause de $p^2 - aq^2 = 1$,

$$p' = p^2 + aq^2, \quad q' = 2pq,$$

ou bien, ce qui revient au même,

$$p' = \frac{(p + q\sqrt{a})^2 + (p - q\sqrt{a})^2}{2},$$

$$q' = \frac{(p + q\sqrt{a})^2 - (p - q\sqrt{a})^2}{2\sqrt{a}},$$

d'où l'on voit que les valeurs de p' et q' sont contenues dans les formules générales du n° **15**, en y faisant $m = 2$.

Soient ensuite p'' et q'' les valeurs de x et de y qui sont immédiatement plus grandes que p' et q'; en sorte qu'entre toutes les valeurs possibles de x et de y dans l'équation $x^2 - ay^2 = 1$, il n'y ait que p et p' qui soient moindres que p'', et q et q' qui soient moindres que q''.

Multipliant l'équation $p''^2 - aq''^2 = 1$ par $p^2 - aq^2 = 1$, et prenant dans cette multiplication le signe $-$ (nº 5), on aura

$$(pp'' - aqq'')^2 - a(pq'' - qp'')^2 = 1,$$

de sorte que $pp'' - aqq''$ sera aussi une des valeurs de x, et $pq'' - qp''$ une des valeurs de y; et l'on prouvera ici par une méthode semblable à la précédente que $pp'' - aqq'' > 0$ et $< p''$, et $pq'' - qp' > 0$ et $< q''$: d'où il s'ensuit que l'on aura nécessairement

$$pp'' - aqq'' = p \quad \text{ou} \quad = p' \qquad \text{et} \qquad pq'' - qp'' = q \quad \text{ou} \quad = q'.$$

Or les équations

$$pp'' - aqq'' = p \quad \text{et} \quad pq'' - qp'' = q$$

donnent, à cause de $p^2 - aq^2 = 1$,

$$p'' = p^2 + aq^2 = p' \quad \text{et} \quad q'' = 2pq = q',$$

ce qui est contre l'hypothèse; et les équations

$$pp'' - aqq'' = p', \quad pq'' - qp'' = q'$$

donnent

$$p'' = pp' + aqq', \quad q'' = pq' + qp',$$

c'est-à-dire, en mettant pour p' et q' leurs valeurs,

$$p'' = \frac{(p + q\sqrt{a})^3 + (p - q\sqrt{a})^3}{2},$$

$$q'' = \frac{(p + q\sqrt{a})^3 - (p - q\sqrt{a})^3}{2\sqrt{a}}.$$

Ainsi les valeurs de p'' et q'' sont encore renfermées dans les formules du numéro cité, en y faisant $m = 3$.

On prouvera par des raisonnements semblables que les valeurs de x et de y qui sont immédiatement plus grandes que p'' et q'', et que nous désignerons par p''' et q''', seront exprimées ainsi :

$$p''' = \frac{(p+q\sqrt{a})^4 + (p-q\sqrt{a})^4}{2},$$
$$q''' = \frac{(p+q\sqrt{a})^4 - (p-q\sqrt{a})^4}{2\sqrt{a}},$$

et ainsi des autres à l'infini; d'où l'on conclura en général que les valeurs de x et y, dont le quantième sera m à commencer des premières valeurs p et q, seront exprimées de la manière suivante :

$$x = \frac{(p+q\sqrt{a})^m + (p-q\sqrt{a})^m}{2},$$
$$y = \frac{(p+q\sqrt{a})^m - (p-q\sqrt{a})^m}{2\sqrt{a}},$$

comme dans le nº **15**.

Ainsi ayant trouvé les premières valeurs p et q, on sera assuré d'avoir par ces formules toutes les valeurs possibles de x et de y propres à satisfaire à l'équation $x^2 - ay^2 = 1$.

18. Je dis maintenant que tous les nombres x et y qui satisfont à l'équation

$$x^2 - ay^2 = 1$$

se trouvent nécessairement parmi les nombres M, M′, M″,..., et N, N′ N″,..., qui forment les fractions $\frac{M}{N}, \frac{M'}{N'}, \frac{M''}{N''}, \ldots$, convergentes vers la racine de a, mais toujours plus grandes que cette racine (nº **1**); c'est-à-dire que chacun des nombres x est nécessairement égal à quelqu'un des termes de la série M, M′, M″,..., et que le nombre correspondant y est égal au terme correspondant de la série N, N′, N″,..., en sorte que la fraction $\frac{x}{y}$ sera toujours une de celles dont nous venons de parler.

Pour pouvoir démontrer cette proposition, je commencerai par prouver que si y est égal à un terme quelconque de la série N, N′, N″,..., x sera nécessairement égal au terme correspondant de la série M, M′, M'',.... Car soit $y = \mathrm{N}$ (on fera le même raisonnement pour tous les autres termes de la série N, N', N'',..., et de sa correspondante M, M', M'',...), en sorte que l'on ait $x^2 - a\mathrm{N}^2 = 1$; si M n'est pas $= x$, il sera nécessairement $> x$, à cause que la quantité $\mathrm{M}^2 - a\mathrm{N}^2$ est toujours > 0 (n° 2); ainsi l'on aura

$$\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}} > \frac{x}{\mathrm{N}} \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}} - \frac{m}{n} > \frac{x}{\mathrm{N}} - \frac{m}{n},$$

savoir, à cause de $\mathrm{M}n - \mathrm{N}m = 1$ (n° 1),

$$\frac{1}{\mathrm{N}n} > \frac{xn - \mathrm{N}m}{\mathrm{N}n}, \quad \text{ou bien} \quad xn - \mathrm{N}m < 1;$$

mais, par l'équation $x^2 - a\mathrm{N}^2 = 1$, on a $\frac{x}{\mathrm{N}} = \sqrt{a + \frac{1}{\mathrm{N}^2}}$, et par conséquent $\frac{x}{\mathrm{N}} > \sqrt{a}$; et par le n° 1 on a $\frac{m}{n} < \sqrt{a}$; donc $\frac{x}{\mathrm{N}} > \frac{m}{n}$, donc $\frac{x}{\mathrm{N}} > \frac{m}{n}$, donc

$$xn - \mathrm{N}m > 0,$$

ce qui est contradictoire.

Supposons maintenant que y ne soit égal à aucun des termes de la série 0, N, N', N'',...; comme cette série commence par zéro et s'étend à l'infini (n° 1), il est clair que le nombre y se trouvera nécessairement entre deux quelconques des termes voisins de la même série; supposons donc que ce soit entre N et N' (le raisonnement sera le même pour tous les autres termes), en sorte que l'on ait $y > \mathrm{N}$ et $y < \mathrm{N}'$; je considère les trois fractions consécutives $\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}}, \frac{m'}{n'}, \frac{\mathrm{M}'}{\mathrm{N}'}$, dont les numérateurs M, m', M' vont en augmentant aussi bien que les dénominateurs N, n', N', et qui sont de plus convergentes vers la valeur de $\sqrt{a}$, mais de façon que la première et la troisième sont plus grandes que cette valeur, et la seconde en est plus petite (n° 1), et je vais démontrer d'abord que y doit nécessairement être $> n'$. Car, puisqu'on a $x^2 - ay^2 = 1$, on aura $\frac{x^2}{y^2} - a = \frac{1}{y^2}$; mais $\mathrm{M}^2 - a\mathrm{N}^2 = \mathrm{R}$, R étant > 0 par le n° 2; donc aussi $\frac{\mathrm{M}^2}{\mathrm{N}^2} - a = \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{N}^2}$; donc, comme $y > \mathrm{N}$, et que $\mathrm{R} =$ ou > 1, on aura nécessairement $\frac{1}{y^2} < \frac{R}{N^2}$, et par conséquent

$$\frac{x^2}{y^2} - a < \frac{M^2}{N^2} - a;$$

donc $\frac{x^2}{y^2}$ approchera plus de a que $\frac{M^2}{N^2}$, l'une et l'autre de ces deux quantités étant d'ailleurs plus grandes que a, à cause de $x^2 - ay^2 > 0$ et $M^2 - aN^2 > 0$; donc aussi $\frac{x}{y}$ approchera plus de $\sqrt{a}$ que $\frac{M}{N}$; mais $\sqrt{a}$ se trouve entre $\frac{M}{N}$ et $\frac{m'}{n'}$ (n° 2); donc $\frac{x}{y}$ se trouvera aussi entre $\frac{M}{N}$ et $\frac{m'}{n'}$; donc on aura

$$\frac{M}{N} - \frac{x}{y} > 0, \quad \text{et} \quad \frac{M}{N} - \frac{x}{y} < \frac{M}{N} - \frac{m'}{n'};$$

donc on aura :

1° $$My - Nx > 0;$$

2° $$\frac{My - Nx}{Ny} < \frac{1}{Nn'}, \quad \text{savoir} \quad My - Nx < \frac{y}{n'};$$

donc, puisque $My - Nx$ est d'ailleurs un nombre entier, il faudra nécessairement que l'on ait

$$\frac{y}{n'} > 1, \quad \text{et par conséquent} \quad y > n'.$$

Soit donc $y > n'$ et $< N'$; puisque l'on a, par l'équation $x^2 - ay^2 = 1$,

$$\frac{x}{y} > \sqrt{a},$$

et par le n° 1

$$\frac{m'}{n'} < \sqrt{a},$$

on aura nécessairement

$$\frac{x}{y} - \frac{m'}{n'} > 0;$$

de plus, on a par le même numéro

$$\frac{M'}{N'} > \sqrt{a}, \quad \text{et par conséquent} \quad \frac{M'}{N'} - \frac{m'}{n'} > 0;$$

or

$$\frac{x}{y}-\frac{m'}{n'}=\frac{xn'-ym'}{yn'} \quad \text{et} \quad \frac{M'}{N'}-\frac{m'}{n'}=\frac{1}{N'n'};$$

donc, à cause de $y<N'$, on aura

$$\frac{x}{y}-\frac{m'}{n'}>(xn'-ym')\left(\frac{M'}{N'}-\frac{m'}{n'}\right);$$

or je dis que $xn'-ym'$ doit nécessairement être égal à 1; en effet, puisque $\frac{x}{y}-\frac{m'}{n'}>0$, on aura d'abord

$$xn'-ym'>0;$$

donc

$$xn'-ym'=1, \quad \text{ou} \quad =2, \quad \text{ou} \quad >2;$$

mais si $xn'-ym'=$ ou >2, on aura pour lors

$$\frac{x}{y}-\frac{m'}{n'}>2\left(\frac{M'}{N'}-\frac{m'}{n'}\right):$$

et comme $\sqrt{a}$ se trouve entre $\frac{M'}{N'}$ et $\frac{m'}{n'}$ (n° 1), elle se trouvera aussi nécessairement entre $\frac{x}{y}$ et $\frac{m'}{n'}$, mais beaucoup plus près de $\frac{m'}{n'}$ que de $\frac{x}{y}$, parce que $\frac{x}{y}-\frac{M'}{N'}>\frac{M'}{N'}-\frac{m'}{n'}$; donc a se trouvera aussi entre $\frac{x^2}{y^2}$ et $\frac{m'^2}{n'^2}$, mais plus près de $\frac{m'^2}{n'^2}$ que de $\frac{x^2}{y^2}$; donc on aura

$$\frac{x^2}{y^2}-a>a-\frac{m'^2}{n'^2},$$

savoir, à cause de $x^2-ay^2=1$,

$$\frac{1}{y^2}>\frac{an'^2-m'^2}{n'^2}, \quad \text{ou bien} \quad an'^2-m'^2<\frac{n'^2}{y^2};$$

mais $y>n'$, donc $\frac{n'^2}{y^2}<1$; et à plus forte raison $an'^2-m'^2<1$; ce qui ne peut être, à cause que $m'^2-an'^2$ est toujours nécessairement un nombre entier négatif (n° 2), et par conséquent $an'^2 - m'^2$ un nombre entier positif. Donc il faudra nécessairement que l'on ait

$$xn' - ym' = 1.$$

On aura donc $xn' - ym' = 1$, et comme on a aussi (n° 1) $M'n' - N'm' = 1$, on aura

$$(M' - x)n' - (N' - y)m' = 0,$$

savoir

$$\frac{M' - x}{N' - y} = \frac{m'}{n'};$$

donc, prenant un nombre quelconque entier z, on aura

$$M' - x = m'z, \quad N' - y = n'z,$$

et de là

$$x = M' - m'z \quad \text{et} \quad y = N' - n'z;$$

donc, substituant ces valeurs dans l'équation $x^2 - ay^2 = 1$, on aura

$$M'^2 - aN'^2 - 2(M'm' - aN'n')z + (m'^2 - an'^2)z^2 = 1;$$

or $M'^2 - aN'^2$ est un nombre positif, $m'^2 - an'^2$ est un nombre négatif (n° 2), et je dis que $M'm' - aN'n'$ est un nombre négatif; en effet, comme $\frac{M'}{N'} > \sqrt{a}$ et $\frac{m'}{n'} < \sqrt{a}$, on aura

$$\frac{M'}{N'} = \sqrt{a} + \Gamma \quad \text{et} \quad \frac{m'}{n'} = \sqrt{a} - \gamma,$$

et γ sera $> \Gamma$, à cause que $\frac{M'}{N'}$ doit approcher plus de $\sqrt{a}$ que $\frac{m'}{n'}$ (n° 1); donc

$$M'm' - aN'n' = N'n'\left(\frac{M'm'}{N'n'} - a\right) = -N'n'[(\gamma - \Gamma)\sqrt{a} + \Gamma\gamma].$$

Donc, si l'on fait

$$M'^2 - aN'^2 = A, \quad M'm' - aN'n' = -B, \quad m'^2 - an'^2 = -C,$$

A, B, C exprimeront des nombres positifs, et l'on aura

$$A + 2Bz - Cz^2 = 1.$$

Soit, en général, $A + 2Bz - Cz^2 = u$, en sorte que

$$x^2 - ay^2 = u;$$

en regardant z comme une quantité variable qui commence par zéro, et qui augmente à l'infini, on aura d'abord, lorsque $z = 0$, $u = A$; ensuite u augmentera jusqu'à ce que $B = Cz$; après quoi u diminuera continuellement jusqu'à devenir infini négatif. Donc, si l'on donne à z une valeur quelconque Z, telle que la valeur correspondante de u soit positive et égale à U, il est clair que toutes les autres valeurs de z, comprises entre o et Z, donneront pour u des valeurs positives et plus grandes que la plus petite des deux quantités A et U, qui répondent à $z = 0$ et à $z = Z$.

Or nous avons trouvé

$$x = M' - m'z \quad \text{et} \quad y = N' - n'z;$$

donc: 1° comme $y' < N'$, on aura $z > 0$; 2° on a, par le n° 1,

$$M' = q'''m' + M \quad \text{et} \quad N' = q'''n' + N,$$

donc

$$x = (q''' - z)m' + M \quad \text{et} \quad y = (q''' - z) + N;$$

donc, puisque $y > N$, il faudra que $z < q'''$; ainsi les limites de z seront o et q''', c'est-à-dire que z sera comprise entre o et q'''; mais, en faisant $z = 0$, on a

$$u = A = M'^2 - aN'^2;$$

et, en faisant $z' = q'''$, on a $x = M$, $y = N$, et par conséquent

$$u = x^2 - ay^2 = M^2 - aN^2;$$

donc, en donnant à z des valeurs intermédiaires, les valeurs correspondantes de u, savoir de $x^2 - ay^2$, seront toutes plus grandes que la plus petite de ces deux quantités $M^2 - aN^2$ et $M'^2 - aN'^2$; mais l'une et l'autre de ces quantités sont nécessairement égales ou plus grandes que l'unité (n° 2); donc il est impossible de trouver une valeur convenable de z qui rende $x^2 - ay^2 = 1$, ce qui est contre l'hypothèse.

Donc il est impossible que y tombe entre N et N', et l'on prouvera de la même manière qu'il est impossible qu'il tombe entre deux autres termes voisins quelconques de la série o, N, N', N'',...; donc il faut nécessairement que y coïncide avec le terme correspondant de la série 1, M, M', M'',..., comme nous l'avons démontré ci-dessus.

Ainsi, pour trouver les valeurs de x et de y qui satisfont à l'équation $x^2 - ay^2 = 1$, il n'y aura qu'à substituer successivement, dans la formule $x^2 - ay^2$, à la place de x, les numérateurs, et, à la place de y, les dénominateurs des fractions $\frac{1}{0}, \frac{M}{N}, \frac{M'}{N'}, \ldots$, qui convergent vers la valeur de $\sqrt{a}$, mais qui sont toutes plus grandes que cette valeur, et l'on poussera cette substitution jusqu'à ce qu'elle donne 1 pour la valeur de $x^2 - ay^2$, ce qui arrivera nécessairement en conséquence de ce que nous avons démontré jusqu'ici; mais comme il faudrait quelquefois pousser cette substitution très-loin, ce qui serait assez incommode, on pourra souvent se servir avec avantage des méthodes que nous avons données plus haut, comme on le verra dans les exemples suivants.

Au reste, comme les termes des deux séries 1, M, M',..., o, N, N',... vont en augmentant, il est clair qu'en substituant successivement tous ces termes dans la formule $x^2 - ay^2$ jusqu'à ce qu'elle devienne égale à 1, on aura par ce moyen les plus petites valeurs possibles qui satisfassent au problème; et ces valeurs étant ensuite substituées pour p et q dans les formules des n^{os} 15 et 16, on aura alors toutes les valeurs possibles de x et de y (n° 17).

19. Soient, comme dans le n° 15,

$$x = \frac{(p + q\sqrt{a})^m + (p - q\sqrt{a})^m}{2},$$

$$y = \frac{(p + q\sqrt{a})^m - (p - q\sqrt{a})^m}{2\sqrt{a}};$$

je dis que, si m est un nombre premier, $x-p$ et $y-qa^{\frac{m-1}{2}}$ seront toujours divisibles par m.

En effet, si l'on développe ces expressions, on aura, à cause que m est impair,

$$x = p^m + \frac{m(m-1)}{2}p^{m-2}q^2a + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2.3.4}p^{m-4}q^4a^2 + \ldots$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)\ldots2}{2.3\ldots m-1}pq^{m-1}a^{\frac{m-1}{2}},$$

$$y = mp^{m-1}q + \frac{m(m-1)(m-2)\ldots2}{2.3}p^{m-3}q^3a + \ldots$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)\ldots3}{2.3\ldots m-2}p^2q^{m-2}a^{\frac{m-3}{2}} + q^ma^{\frac{m-1}{2}}.$$

Or les coefficients m, $\frac{m(m-1)}{2}$, $\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}$, ..., jusqu'à $\frac{m(m-1)(m-2)\ldots2}{2.3\ldots m-1}$ sont nécessairement divisibles par m, lorsque m est premier, parce que ce nombre multiplie, comme l'on voit, tous les numérateurs, et ne multiplie aucun des dénominateurs, de sorte qu'il est impossible qu'il s'en aille par la division de chaque numérateur par son dénominateur; division qui doit d'ailleurs se faire toujours exactement, à cause que les coefficients dont il s'agit sont, comme on sait, des nombres entiers. Donc tous les termes de la valeur de x, à l'exception du premier p^m, seront nécessairement divisibles par m, et tous ceux de la valeur de y, à l'exception du dernier $q^ma^{\frac{m-1}{2}}$, le seront aussi: donc $x-p^m$ et $y-q^ma^{\frac{m-1}{2}}$ seront divisibles par m.

Maintenant on sait que, lorsque m est premier, p^m-p est toujours divisible par m, quel que soit p, pourvu que ce soit un nombre entier; donc $x-p$ sera aussi divisible par m; de même, q^m-q étant divisible par m, $q^ma^{\frac{m-1}{2}}-qa^{\frac{m-1}{2}}$ le sera aussi; donc $y-qa^{\frac{m-1}{2}}$ sera divisible par m.

Donc : 1° si a est divisible par m, $x-p$ et y le seront aussi ; 2° si a n'est point divisible par m, comme $a^m - a$ est nécessairement divisible par m, il faudra que $a^{m-1}-1$ le soit aussi ; donc, à cause que m est premier, il faudra que l'un ou l'autre des facteurs de $a^{m-1}-1$, savoir $a^{\frac{m-1}{2}}+1$ et $a^{\frac{m-1}{2}}-1$, soit divisible par m.

Soit d'abord $a^{\frac{m-1}{2}}+1$ divisible par m, et $qa^{\frac{m-1}{2}}+q$ le sera aussi ; donc $x-p$ et $y+q$ seront divisibles par m.

Soit ensuite $a^{\frac{m-1}{2}}-1$ divisible par m, $qa^{\frac{m-1}{2}}-q$ le sera aussi ; donc $x-p$ et $y-q$ seront divisibles par m.

Or, en multipliant ensemble les deux équations

$$1 = p^2 - aq^2 \quad \text{et} \quad 1 = x^2 - ay^2,$$

on a celle-ci :

$$1 = x'^2 - ay'^2,$$

dans laquelle

$$x' = px \pm aqy \quad \text{et} \quad y' = py \pm qx;$$

ou bien, en substituant pour x et y leurs valeurs,

$$x' = \frac{(p \pm q\sqrt{a})(p+q\sqrt{a})^m + (p \mp q\sqrt{a})(p-q\sqrt{a})^m}{2},$$

$$y' = \frac{(p \pm q\sqrt{a})(p+q\sqrt{a})^m - (p \mp q\sqrt{a})(p-q\sqrt{a})^m}{2\sqrt{a}},$$

savoir, à cause de $p^2 - aq^2 = 1$,

$$x' = \frac{(p+q\sqrt{a})^{m\pm1} + (p-q\sqrt{a})^{m\pm1}}{2},$$

$$y' = \frac{(p+q\sqrt{a})^{m\pm1} - (p-q\sqrt{a})^{m\pm1}}{2\sqrt{a}}.$$

Donc, en premier lieu, si $a^{\frac{m-1}{2}}+1$ est divisible par m, en sorte que $x-p$ et $y+q$ le soient aussi, et qu'on prenne, dans les expressions de

x' et de y', le signe supérieur, on aura

$$x' = px + aqy, \quad y' = py + qx,$$

ou bien

$$x' = (x-p)p + a(y+q)q + p^2 - aq^2 \quad \text{et} \quad y' = (x-p)q + (y+q)p;$$

donc, à cause de $p^2 - aq^2 = 1$, $x' - 1$ et y' seront aussi divisibles par m.

En second lieu, si $a^{\frac{m-1}{2}} - 1$ est divisible par m, en sorte que $x - p$ et $y - q$ le soient aussi, et qu'on prenne, dans les expressions de x' et de y', le signe inférieur, on aura

$$x' = px - aqy, \quad y' = py - qx,$$

ou bien

$$x' = (x-p)p - a(y-q)q + p^2 - aq^2 \quad \text{et} \quad y' = (y-q)p - (x-p)q;$$

d'où il s'ensuit que $x' - 1$ et y' seront encore divisibles par m.

Donc, en général, si r est le reste de la division de $a^{\frac{m-1}{2}}$ par m (reste qui ne peut être que o ou ± 1), et qu'on fasse

$$p' = \frac{(p + q\sqrt{a})^{m-r} + (p - q\sqrt{a})^{m-r}}{2},$$
$$q' = \frac{(p + q\sqrt{a})^{m-r} - (p - q\sqrt{a})^{m-r}}{2\sqrt{a}},$$

les nombres p' et q' seront d'abord tels que $p'^2 - aq'^2 = 1$; et de plus q' sera toujours divisible par m, et $p' - p$ ou $p' - 1$ le sera aussi, suivant que r sera ou ne sera pas nul.

20. Supposons à présent

$$x = \frac{(p' + q'\sqrt{a})^n + (p' - q'\sqrt{a})^n}{2},$$
$$y = \frac{(p' + q'\sqrt{a})^n - (p' - q'\sqrt{a})^n}{2\sqrt{a}};$$

si l'on développe ces expressions suivant les dernières formules du n° 16, on verra que y' est toujours divisible par q', et que $x-p'$ ou $x-1$ l'est aussi, suivant que n est pair ou impair; or q' est toujours divisible par m (numéro précédent), donc y' sera toujours divisible par m, et $x-p'$ ou $x-1$ le sera aussi, suivant que n sera impair ou pair, quel que soit d'ailleurs le nombre n, pourvu qu'il soit plus grand que l'unité.

Or, soit m' un nombre premier quelconque, et désignons par r' le reste de la division de $a^{\frac{m'-1}{2}}$ par m' (reste qui sera nécessairement ou 0, ou bien ± 1), si l'on fait dans les formules précédentes $n=m'-r'$, on prouvera, comme dans le numéro précédent, que y sera toujours divisible par m', et que $x-p'$ ou $x-1$ le sera aussi, suivant que r' sera ou ne sera pas nul; mais, lorsque r' est nul, n est impair, et lorsque r' est ± 1, n est pair; donc y sera toujours divisible par mm', et $x-p'$ ou $x-1$ le sera aussi, suivant que r' sera ou ne sera pas nul.

De plus, lorsque r' est nul, a est divisible par m'; et, si l'on développe l'expression de p' du numéro précédent, suivant les dernières formules du n° **16**, on verra que $p'-p$ ou $p'-1$ sera divisible par a, suivant que $m-r$ sera impair ou pair, c'est-à-dire suivant que r sera ou ne sera pas nul; d'où, et du numéro précédent, il s'ensuit que si, r' étant nul, r l'est aussi, $p'-p$ sera divisible par mm', et, si r n'est pas nul, $p'-1$ sera divisible par mm'.

D'où je conclus : 1° que y sera toujours divisible par mm'; 2° que, si les deux restes r et r' sont nuls à la fois, $x-p$ sera divisible par mm', et que s'ils ne sont pas tous les deux nuls, alors $x-1$ sera divisible par mm'.

Or

$$x \pm y\sqrt{a} = (p' \pm q'\sqrt{a})^{m'-r'} \quad \text{et} \quad p' \pm q'\sqrt{a} = (p \pm q\sqrt{a})^{m-r};$$

donc, faisant, pour abréger, $(m-r)(m'-r') = \mathrm{M}$, on aura

$$x \pm y\sqrt{a} = (p \pm q\sqrt{a})^{\mathrm{M}},$$

et, par conséquent,

$$x = \frac{(p+q\sqrt{a})^{\mathrm{M}} + (p-q\sqrt{a})^{\mathrm{M}}}{2},$$

$$y = \frac{(p+q\sqrt{a})^{\mathrm{M}} - (p-q\sqrt{a})^{\mathrm{M}}}{2\sqrt{a}},$$

où l'on remarquera que M sera toujours pair lorsque r et r' ne seront pas nuls à la fois, et qu'au contraire M sera pair lorsque $r = 0$ et $r' = 0$.

On pourra poursuivre ces opérations et ces raisonnements aussi loin qu'on voudra.

21. Donc, en général, étant donné un nombre quelconque N impair, dont les facteurs premiers soient $m, m', m'', \ldots$, si l'on nomme $r, r', r'', \ldots$ les restes des divisions de $a^{\frac{m-1}{2}}$ par m, de $a^{\frac{m'-1}{2}}$ par m', de $a^{\frac{m''-1}{2}}$ par m'', et ainsi de suite, et qu'on fasse

$$M = (m - r)(m' - r')(m'' - r'')\ldots,$$

les expressions suivantes :

$$x = \frac{(p + q\sqrt{a})^M + (p - q\sqrt{a})^M}{2},$$

$$y = \frac{(p + q\sqrt{a})^M - (p - q\sqrt{a})^M}{2\sqrt{a}}$$

satisferont d'abord à l'équation $x^2 - ay^2 = 1$; et de plus elles seront telles, que y sera toujours divisible par N, et que $x - p$ ou $x - 1$ le sera aussi, suivant que M sera impair ou pair.

Les mêmes choses auront lieu aussi en faisant

$$M = n(m - r)(m' - r')(m'' - r'')\ldots,$$

n étant un nombre quelconque entier positif, comme il est facile de le voir par ce que nous avons enseigné dans les numéros précédents.

Je dis de plus que, si l'on fait

$$M = 2^s n(m - r)(m' - r')(m'' - r'')\ldots,$$

s étant un nombre entier positif quelconque, la quantité y sera divisible par 2^sN, et la quantité $x - 1$ le sera aussi.

Pour démontrer cette proposition, il suffit de faire voir que y et $x-1$ seront toujours divisibles par 2^s. Or, si l'on fait, pour abréger, $M=2^sR$, on aura

$$x \pm y\sqrt{a} = (p \pm q\sqrt{a})^{2^sR}.$$

Qu'on suppose : 1°

$$p' \pm q'\sqrt{a} = (p \pm q\sqrt{a})^{2^{s-1}R},$$

on aura

$$x \pm y\sqrt{a} = (p' \pm q'\sqrt{a})^2;$$

d'où

$$x = p'^2 + aq'^2 \quad \text{et} \quad y = 2p'q';$$

mais on a aussi

$$p'^2 - aq'^2 = 1;$$

donc

$$x - 1 = 2ap'q'.$$

Donc y et $x-1$ seront divisibles par $2q'$.

Supposons : 2°

$$p'' \pm q''\sqrt{a} = (p \pm q\sqrt{a})^{2^{s-2}R},$$

on aura

$$p' \pm q'\sqrt{a} = (p'' \pm q''\sqrt{a})^2,$$

d'où

$$q' = 2p''q'';$$

ainsi q' sera divisible par $2q''$; de même, en faisant

$$p''' \pm q'''\sqrt{a} = (p \pm q\sqrt{a})^{2^{s-3}R},$$

on trouvera que q'' sera divisible par $2q'''$, et ainsi de suite.

Donc, si $s=1$, y et $x-1$ seront divisibles par 2; si $s=2$, y et $x-1$ seront divisibles par 2.2, si $s=3$, ces quantités seront divisibles par $2.2.2, \ldots$; donc, en général, y et $x-1$ seront toujours divisibles par 2^s.

Par le moyen de ces théorèmes on peut résoudre le cas du n° 14; car quel que soit le nombre donné, il est clair qu'on pourra toujours le réduire à cette forme : 2^sN, N étant impair; par conséquent, en connaissant deux nombres p et q qui satisfassent à l'équation $1 = p^2 - fq^2$, on pourra toujours en trouver deux autres, et même une infinité tels que x et y qui y satisfassent aussi, et dont l'un y soit multiple d'un nombre quelconque donné; au reste, ces théorèmes nous seront encore fort utiles dans la suite.

Appliquons maintenant les méthodes précédentes à quelques exemples.

Exemples.

22. Exemple I. — *Soit proposé de trouver deux nombres x et y tels, que $x^2 - 13y^2 = 1$.*

Je commence par extraire la racine carrée de 13 en fractions décimales, et je trouve, en poussant l'approximation jusqu'à neuf caractères, ce qu'on fera aisément à l'aide des grandes Tables de logarithmes d'Ulacq; je trouve, dis-je, $\sqrt{13} = 3{,}60551950 = \frac{36055195}{10000000}$.

Je divise le numérateur de cette fraction par son dénominateur, ensuite le dénominateur par le reste, et ainsi de suite, comme si je voulais trouver la plus grande commune mesure entre le numérateur et le dénominateur, et ces différentes divisions me donnent ces quotients : 3, 1, 1, 1, 1, 6, 1, 1, 1, 1, 6, 1, 1,..., à l'aide desquels je forme, en commençant par $\frac{1}{0}$, les fractions suivantes :

$$\begin{array}{cccccccccc} & & 1 & 1 & 1 & 1 & 6 & 1 & 1 & 1 & \ldots \\ \frac{1}{0}, & \frac{3}{1}, & \frac{4}{1}, & \frac{7}{2}, & \frac{11}{3}, & \frac{18}{5}, & \frac{119}{33}, & \frac{137}{38}, & \frac{256}{71}, & \ldots, \end{array}$$

où l'on voit que le numérateur de chaque fraction est égal à la somme du numérateur de la fraction précédente multiplié par le nombre qui est au-dessus (ces nombres ne sont autre chose que les quotients dont il s'agit écrits de suite, et suivant l'ordre dans lequel on les a trouvés), et du numérateur de la fraction qui est avant celle-ci; et il en est de même des dénominateurs, ce qui s'accorde avec ce que l'on a dit dans le n° 1.

Je substitue maintenant les numérateurs de ces différentes fractions à la place de x, et les dénominateurs correspondants à la place de y dans la formule $x^2 - ay^2 = R$, j'ai

x	y	R
1	0	1
3	1	-4
4	1	3
7	2	-3
11	3	4
18	5	-1
119	33	4
137	38	-3
256	71	3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Je remarque ici deux valeurs de x et de y, savoir : $x = 4$, $y = 1$ et $x' = 256$, $y' = 71$, lesquelles donnent également $R = 3$, qui est un nombre premier; ainsi je puis faire usage de la méthode du n° 6.

J'aurai donc

$$a = 13, \quad R = 3, \quad x = 4, \quad y = 1, \quad x' = 256, \quad y' = 71;$$

donc $xy' + yx' = 540$ qui est divisible par 3; de sorte que j'aurai d'abord $q = \frac{540}{3} = 180$; ensuite $xx' + ayy' = 1947$, qui est aussi divisible par 3; d'où je tire $p = \frac{1947}{3} = 649$; ainsi les nombres cherchés seront $x = 649$ et $y = 180$; en effet, le carré de 649 est 421201, et celui de 180 est 32400, lequel étant multiplié par 13 donne 421200; de sorte qu'on aura

$$(649)^2 - 13(180)^2 = 1.$$

On aurait pu trouver d'abord ces mêmes valeurs de x et de y à l'aide de la supposition qui donne $R = -4$, et qui est par conséquent dans le cas de la méthode du n° 11. En effet, puisque $x = 3$ et $y = 1$, on aura, en prenant le signe inférieur,

$$p=\frac{x^2+3}{2}=6,\quad q=\frac{x^2+1}{2}=5;$$

et par conséquent

$$xp=18,\quad yq=5\quad \text{et}\quad (xp)^2+a(yq)^2=649,\quad 2xypq=180.$$

Au reste, en continuant la série des fractions $\frac{1}{0}$, $\frac{3}{1}$, ..., on trouvera celle-ci : $\frac{393}{109}$, $\frac{649}{180}$, ..., d'où l'on aura

x	y	R
393	109	-4
649	180	1
⋮	⋮	⋮

d'où l'on voit que les nombres 649 et 180 sont les plus petits qui satisfassent à l'équation proposée $x^2-13y^2=1$ (n° **18**); de sorte qu'en substituant ces nombres à la place de p et q dans les formules du n° **16** ou **17**, on trouvera toutes les autres valeurs possibles de x et de y; ainsi désignant ces valeurs par x, x'', x''', ..., et par y, y', y'', ..., on aura

$$\begin{aligned}
x &= 649, & y &= 180,\\
x' &= 842401, & y' &= 253640,\\
x'' &= 1093435849, & y'' &= 303264540,\\
&\ldots\ldots, & &\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

et l'on pourra être assuré qu'il n'y a pas d'autres nombres plus petits que ceux-ci qui résolvent le problème (n° **17**).

23. Exemple II. — *Soit proposé de trouver deux nombres x et y qui satisfassent à l'équation $x^2-19y^2=1$.*

La racine carrée de 19 se trouve par les grandes Tables de logarithmes : 4,35889494, en sorte qu'on a $\sqrt{19}=\frac{435\,889\,494}{100\,000\,000}$; d'où l'on tire, par l'opération indiquée dans l'Exemple précédent, les quotients 4, 2, 1, 3, 1, 2, 8, 2, 1, 3, 1, 2,..., lesquels fournissent ces fractions :

$$\begin{array}{cccccccc} & 2 & 1 & 3 & 1 & 2 & 8 & \ldots \\ \frac{1}{0}, & \frac{4}{1}, & \frac{9}{2}, & \frac{13}{3}, & \frac{48}{11}, & \frac{61}{14}, & \frac{170}{39}, & \ldots, \end{array}$$

dont les numérateurs étant substitués pour x et les dénominateurs pour y dans l'équation $x^2 - 19y^2 = R$, on aura

x	y	R
1	0	1
4	1	-3
9	2	5
13	3	-2
48	11	5
61	14	-3
170	39	1
⋮	⋮	⋮

d'où l'on voit que 170 et 39 sont les plus petits nombres qui satisfassent à l'équation proposée, et par le moyen de ceux-ci on pourra trouver tous les autres nombres possibles qui résolvent la question.

24. Exemple III. — *On demande deux nombres x et y qui satisfassent à cette équation $x^2 - 109y^2 = 1$.*

Je trouve d'abord $\sqrt{109} = 10{,}4403065 = \frac{104\,403\,065}{10\,000\,000}$; d'où je tire les quotients suivants : 10, 2, 3, 1, 2, 4, 1, 6, 6, 2,..., à l'aide desquels je forme ces fractions :

$$\begin{array}{cccccccccc} & & 2 & 3 & 1 & 2 & 4 & 1 & 6 & 6 \;\ldots \\ \frac{1}{0}, & \frac{10}{1}, & \frac{21}{2}, & \frac{73}{7}, & \frac{94}{9}, & \frac{261}{25}, & \frac{1138}{109}, & \frac{1399}{134}, & \frac{9532}{913}, & \ldots, \end{array}$$

dont les numérateurs étant substitués pour x et les dénominateurs pour y dans l'équation $x^2 - 109y^2 = \mathrm{R}$, j'aurai

x	y	R
1	0	1
10	1	-9
21	2	5
73	7	-12
94	9	7
261	25	-4
1138	109	15
1399	134	-3
9532	913	3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Ici il faudrait pousser la série assez loin pour trouver les valeurs de x et de y qui donnent $\mathrm{R} = 1$; ainsi il vaudra mieux se servir des méthodes des nos 6 et suiv.

Pour cela j'observe qu'il y a deux suppositions, dont l'une donne $\mathrm{R} = 3$, et l'autre $\mathrm{R} = -3$; de sorte qu'à cause que 3 est un nombre premier, on pourra faire usage de la méthode des nos 6 et 12.

J'aurai donc

$$a = 109,\quad \mathrm{R} = 3,\quad x = 1399,\quad y = 134,\quad x' = 9532,\quad y' = 913;$$

donc

$$xy' + yx' = 2554575,$$

qui, étant divisible par 3, j'aurai d'abord

$$q = \frac{2554575}{3} = 851525;$$

ensuite

$$xx' + ayy' = 26670546,$$

qui, étant aussi divisé par 3, donnera

$$p = \frac{26670546}{3} = 8890182.$$

Or, comme dans les équations $x^2 - ay^2 = \mathrm{R}$ et $x'^2 - ay'^2 = -\mathrm{R}$, la quantité R a des signes différents, le produit de ces deux équations sera, en prenant le signe $+$,

$$(xx' + ayy')^2 - a(xy' + yx')^2 = -R^2;$$

de sorte qu'en divisant par A^2 on aura

$$p^2 - aq^2 = -1;$$

d'où l'on voit que les valeurs trouvées de p et q ne satisfont pas à l'équation proposée; mais en prenant le carré de l'équation $p^2 - aq^2 = -1$, on aura

$$(p^2 + aq^2)^2 - a(2pq)^2 = 1,$$

de sorte que les valeurs de x et de y qui résolvent le problème sont

$$x = p^2 + aq^2 \quad \text{et} \quad y = 2pq,$$

savoir

$$x = 158\,070\,671\,936\,249 \quad \text{et} \quad y = 15\,140\,424\,455\,100,$$

et ces valeurs sont en même temps les plus petites qui satisfassent à l'équation $x^2 - 109y^2 = 1$, comme on peut facilement s'en convaincre en poussant la série des fractions $\frac{1}{0}, \frac{10}{1}, \ldots$, jusqu'à ce que l'on en trouve une qui soit formée de ces mêmes nombres, et en calculant toutes les valeurs de la formule $x^2 - ay^2$ qui répondent à ces mêmes fractions.

Ces exemples sont suffisants pour faire connaître l'usage et l'esprit de nos méthodes; nous ajouterons seulement quelques remarques qui pourront mériter l'attention des Géomètres.

Remarques.

25. Remarque I. — En examinant les valeurs de R des deux premiers Exemples, on voit que dans le premier les mêmes nombres se trouvent successivement avec les signes $+$ et $-$, au lieu que dans le second, les nombres qui ont le signe $+$ sont tous différents de ceux qui ont le signe $-$.

Pour trouver la raison de cette différence, supposons en général

$$x^2 - ay^2 = R, \quad \text{et} \quad x'^2 - ay'^2 = -R,$$

ce qui est le cas de l'EXEMPLE I, et l'on aura

$$x^2 - ay^2 = -x'^2 - ay'^2, \quad \text{savoir} \quad x^2 + x'^2 = a(y^2 + y'^2),$$

d'où l'on voit que $x^2 + x'^2$ doit être divisible par a. Or, on sait que la somme de deux carrés n'est divisible que par les nombres qui sont aussi la somme de deux carrés; donc, pour que les deux équations dont il s'agit aient lieu en même temps, il faut nécessairement que le nombre donné a soit la somme de deux carrés; c'est ce qui a lieu dans l'EXEMPLE I, où $a = 13 = 9 + 4$, au lieu que dans l'EXEMPLE II $a = 19$, qui n'est point la somme de deux carrés. Ainsi, toutes les fois que a ne sera point la somme de deux carrés, ce qui arrive, comme on sait, lorsque quelqu'un des facteurs premiers de a est de cette forme $4m + 3$, on pourra être assuré qu'aucun nombre ne pourra être en même temps de la forme $x^2 - ay^2$, et de celle-ci $ay'^2 - x'^2$, quels que puissent être x et y, x' et y'.

Mais on ne peut pas dire réciproquement que lorsque a est la somme de deux carrés tout nombre qui est de la forme de $x^2 - ay^2$ est aussi de la forme de $ay'^2 - x'^2$; au moins je n'ai pu parvenir jusqu'à présent à m'assurer en général de la vérité de cette proposition, quoique je l'aie d'ailleurs trouvée vraie dans un grand nombre de cas particuliers.

Au reste, il est évident que si -1 est de la forme de $x^2 - ay^2$, tout nombre positif qui sera de la même forme sera aussi de la forme de $ay'^2 - x'^2$; car soient

$$-1 = p^2 - aq^2 \quad \text{et} \quad R = x^2 - ay^2,$$

on aura, en multipliant ensemble ces deux équations, et changeant les signes des deux membres,

$$R = a(yp \pm xq)^2 - (xp \pm ayq)^2.$$

Or, si l'on trouve dans deux seuls cas particuliers

$$R = x^2 - ay^2 \quad \text{et} \quad -R = x'^2 - ay'^2,$$

et que R soit un nombre premier, alors on parviendra toujours à cette équation

$$-1 = p^2 - aq^2,$$

comme nous l'avons vu dans l'Exemple III; de sorte qu'on en pourra conclure d'abord que tout nombre qui sera de la forme de $x^2 - ay^2$ sera aussi de la forme de $ay'^2 - x'^2$.

26. Remarque II. — Supposons maintenant que l'on ait l'équation

$$t^2 - au^2 = -1;$$

en prenant les carrés, on aura

$$(t^2 + au^2)^2 - a(2tu) = 1,$$

d'où l'on voit que $t^2 + au^2$ est une des valeurs de x qui satisfont à l'équation

$$x^2 - ay^2 = 1,$$

et que $2tu$ est la valeur correspondante de y; mais nous avons démontré (n° 17) que toutes les valeurs de x et de y qui satisfont à cette équation sont renfermées dans ces formules :

$$x = \frac{(p + q\sqrt{a})^m + (p - q\sqrt{a})^m}{2},$$

$$y = \frac{(p + q\sqrt{a})^m - (p - q\sqrt{a})^m}{2\sqrt{a}},$$

m étant un nombre quelconque positif, et p, q étant les plus petites valeurs qui satisfassent à la même équation $x^2 - ay^2 = 1$; donc il faudra que l'on ait

$$t^2 + au^2 = \frac{(p + q\sqrt{a})^m + (p - q\sqrt{a})^m}{2},$$

$$2tu = \frac{(p + q\sqrt{a})^m - (p - q\sqrt{a})^m}{2\sqrt{a}},$$

équations qui se réduisent à celle-ci :

$$(t \pm u\sqrt{a})^2 = (p \pm q\sqrt{a})^m.$$

Or je dis d'abord que m ne saurait être un nombre pair; car, soit $m=2n$, on aura

$$(t \pm u\sqrt{a})^2 = (p \pm q\sqrt{a})^{2n},$$

et, extrayant la racine carrée,

$$t \pm u\sqrt{a} = \pm(p \pm q\sqrt{a})^n;$$

or $(p \pm q\sqrt{a})^n$ se réduit à cette forme : $p' \pm q'\sqrt{a}$, en faisant (n° 15)

$$p' = \frac{(p+q\sqrt{a})^n + (p-q\sqrt{a})^n}{2},$$

$$q' = \frac{(p+q\sqrt{a})^n - (p-q\sqrt{a})^n}{2\sqrt{a}};$$

donc, puisque t et u sont, par hypothèse, des nombres positifs, et que p' et q' le sont aussi, on aura $t=p'$ et $u=q'$; mais, à cause de $p^2-aq^2=1$, on aura aussi $p'^2-aq'^2=1$; donc on aurait $t^2-au^2=1$, ce qui est contradictoire; donc m doit nécessairement être un nombre impair.

Soit donc $m=2n+1$, et l'on aura

$$(t \pm u\sqrt{a})^2 = (p \pm q\sqrt{a})^{2n}(p \pm q\sqrt{a});$$

d'où l'on voit que $p \pm q\sqrt{a}$ doit être un carré; or, quelle que puisse être la racine carrée de $p \pm q\sqrt{a}$, il est clair, à cause de la quantité irrationnelle $\sqrt{a}$, qu'elle ne peut être que de cette forme $r \pm s\sqrt{a}$, de sorte que l'on aura

$$p \pm q\sqrt{a} = (r \pm s\sqrt{a})^2 = r^2 + as^2 \pm 2rs\sqrt{a};$$

et, par conséquent,

$$p = r^2 + as^2 \quad \text{et} \quad q = 2rs.$$

Ainsi, à moins que les quantités p et q ne soient de cette forme, il est impossible que l'équation $t^2-au^2=-1$ ait lieu; or, connaissant les valeurs de ces quantités, il est facile de vérifier si elles sont de la forme dont il s'agit; car, premièrement, il faudra que q soit un nombre pair;

ensuite il est évident que r et s ne peuvent être que les facteurs de la moitié de q; de sorte qu'il ne s'agira que de chercher tous ces facteurs, et de les substituer à la place de r et s dans l'équation $r^2 + as^2 = p$.

Si l'on peut par ce moyen trouver deux valeurs de r et s, alors, comme

$$p \pm q\sqrt{a} = (r \pm s\sqrt{a})^2,$$

on aura

$$(t \pm u\sqrt{a})^2 = (r \pm s\sqrt{a})^{2m},$$

et faisant

$$r' = \frac{(r + s\sqrt{a})^m + (r - s\sqrt{a})^m}{2},$$

$$s' = \frac{(r + s\sqrt{a})^m - (r - s\sqrt{a})^m}{2\sqrt{a}},$$

on aura

$$(t \pm u\sqrt{a})^2 = (r' \pm s'\sqrt{a})^2;$$

d'où

$$t \pm u\sqrt{a} = r' \pm s'\sqrt{a}$$

et

$$t = r', \quad u = r'.$$

Or il est facile de voir que les valeurs de r' et s' sont les plus petites lorsque $m = 1$, auquel cas on a $r' = r$ et $s' = s$; donc les plus petites valeurs de t et de $u$seront $t = r$ et $u = s$; donc r et s seront les plus petites valeurs qui satisfassent à l'équation $t^2 - au^2 = -1$.

Usage des méthodes précédentes pour la résolution des équations du second degré à deux inconnues, par des nombres entiers.

27. Soit proposée l'équation

$$\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 + \delta x + \varepsilon y + \zeta = 0,$$

dans laquelle α, β, γ, δ, ε et ζ sont des nombres donnés entiers positifs ou négatifs, et x et y sont deux nombres inconnus qu'il s'agit de déterminer de manière qu'ils soient rationnels et entiers.

Qu'on multiplie toute l'équation par 4α, et qu'on la mette sous cette forme :

$$(2\alpha x + \beta y + \delta)^2 = (\beta y + \delta)^2 - 4\alpha(\gamma y^2 + \varepsilon y + \zeta) = 0.$$

Soient, pour abréger,

$$2\alpha x + \beta y + \delta = u,$$
$$\beta^2 - 4\alpha\gamma = a,$$
$$\beta\delta - 2\alpha\varepsilon = b,$$
$$\delta^2 - 4\alpha\zeta = c,$$

et l'équation précédente deviendra

$$u^2 = ay^2 + 2by + c.$$

Cette équation étant multipliée par a peut se mettre sous la forme suivante :

$$au^2 = (ay + b)^2 + ac - b^2,$$

ou bien, en faisant

$$ay + b = t,$$
$$b^2 - ac = \mathrm{R},$$

sous celle-ci

$$t^2 - au^2 = \mathrm{R};$$

d'où l'on voit d'abord que le nombre donné R doit être de cette forme : $t^2 - au^2$, pour que le problème admette une solution rationnelle.

J'ai donné ailleurs (*) la méthode de reconnaître si un nombre donné est de la forme de $t^2 - au^2$, a étant aussi donné; et j'ai fait voir que pour qu'un nombre quelconque R soit de cette forme, il faut que chacun de ses facteurs premiers que je désignerai par r soit tel, que $a^{\frac{r-1}{2}} - 1$ soit divisible par r; si cette condition n'a pas lieu, on peut assurer hardiment que R n'est pas de la forme dont il s'agit, et qu'ainsi le problème n'admet aucune solution rationnelle.

28. Supposons maintenant qu'on ait reconnu que le nombre R est en

(*) On trouvera dans le Tome II le Mémoire auquel Lagrange fait ici allusion; ce Mémoire a été inséré dans le *Recueil de l'Académie de Berlin*. (*Note de l'Éditeur.*)

effet de la forme de $t^2 - au^2$, et qu'on ait trouvé en même temps deux nombres P et Q tels, que $R = P^2 - aQ^2$; en ce cas le problème sera résoluble en nombres, et il pourra même l'être de plusieurs manières; c'est ce que nous allons examiner.

Il est d'abord clair que, puisque

$$R = P^2 - aQ^2 = t^2 - au^2,$$

il n'y aura qu'à supposer $t = P$ et $u = Q$, ce qui donnera

$$ay + b = P, \quad 2\alpha x + \beta y + \delta = Q,$$

et, par conséquent,

$$y = \frac{P - b}{a}, \quad x = \frac{Q - \delta}{2\alpha} - \frac{\beta(P - b)}{2\alpha a}.$$

Or je remarque :

1° Que les nombres P et Q peuvent être pris positivement ou négativement à volonté, ce qui donnera quatre solutions différentes;

2° Si le nombre R est le produit de deux ou de plusieurs nombres de la forme de $P^2 - aQ^2$, il sera aussi plusieurs fois de cette même forme; de sorte qu'on pourra trouver différentes valeurs de P et de Q.

En effet, si R est le produit de deux facteurs tels que $p^2 - aq^2$ et $p'^2 - aq'^2$, on aura (n° 5)

$$R = (pp' \pm aqq')^2 - a(pq' \pm qp')^2;$$

ainsi on pourra supposer

$$P = pp' + aqq' \quad \text{et} \quad Q = pq' + qp',$$

ou

$$P = pp' - aqq' \quad \text{et} \quad Q = pq' - qp'.$$

En général, si R est exprimé par $A^m B^n C^r D^s \ldots$, A, B, C, D,... étant des nombres de la forme de $P^2 - aQ^2$, mais qui ne soient qu'une fois de cette forme, le nombre R sera (comme je l'ai démontré ailleurs) de la même forme autant de fois, ni plus ni moins, qu'il y a d'unités dans la moitié de ce nombre $(m+1)(n+1)(r+1)(s+1)\ldots$ s'il est pair, ou dans la moitié de ce même nombre augmenté de l'unité s'il est impair. Ainsi les quantités P et Q auront chacune autant de valeurs différentes qu'il y a d'unités dans $\frac{(m+1)(n+1)(r+1)(s+1)\ldots}{2}$ ou dans $\frac{(m+1)(n+1)(r+1)(s+1)\ldots+1}{2}$, et chacune de ces valeurs fournira par conséquent quatre solutions du problème.

29. Examinons séparément le cas où a est un nombre positif, et celui où a est un nombre négatif.

1° Soit a un nombre négatif $= -e$, en sorte que e soit positif, et la forme du nombre R sera $P^2 + eQ^2$; donc, puisqu'il est impossible que l'unité soit de cette forme, le nombre des facteurs A, B, C, D,... (numéro précédent) qui sont supposés être de cette forme sera nécessairement limité; donc le nombre des valeurs de P et de Q le sera aussi; par conséquent le problème ne pourra avoir qu'un certain nombre de solutions rationnelles, qu'il sera aisé de trouver par la méthode précédente, et s'il arrive qu'aucune de ces solutions ne donne des nombres entiers pour les valeurs des inconnues x et y, on en devra conclure que le problème n'admet point de solution en entiers.

2° Supposons que a soit un nombre positif; dans ce cas, comme l'unité est toujours de la forme de $P^2 - aQ^2$ quel que soit le nombre a, il est clair que le nombre des facteurs de R de la forme dont il s'agit sera infini, parce qu'on peut toujours regarder le nombre R comme multiplié par une puissance quelconque de l'unité; ainsi, ou le problème n'admettra point de solution du tout, ou bien il en admettra nécessairement une infinité.

Pour comprendre toutes ces solutions dans deux formules générales, soient p' et q' deux nombres tels, que $p'^2 - aq'^2 = 1$, et, multipliant cette équation par l'équation $P^2 - aQ^2 = R$, on aura

$$(Pp' \pm aQq')^2 - a(Pq' \pm Qp')^2 = R;$$

d'où l'on voit qu'ayant trouvé deux nombres P et Q qui satisfassent à l'équation $P^2 - aQ^2 = R$, on pourra mettre dans les formules du n° 28 $Pp' \pm aQq'$ à la place de P, et $Pq' \pm Qp'$ à la place de Q, ce qui donnera en faisant abstraction de l'ambiguïté des signes, à cause que les nombres

P et Q peuvent toujours être pris positivement ou négativement,

$$y = \frac{\mathrm{P}p' - b}{a} + \mathrm{Q}q',$$

$$x = \frac{(\mathrm{P} + \beta\mathrm{Q})q' + \mathrm{Q}p' - \delta}{2\alpha} - \frac{\beta(\mathrm{P}p' - b)}{2\alpha a}.$$

Or nous avons démontré (n° 17) que si p et q sont les plus petits nombres qui satisfassent à l'équation $p'^2 - aq'^2 = 1$ tous les autres nombres possibles sont renfermés dans ces formules :

$$p' = \frac{(p + q\sqrt{a})^m + (p - q\sqrt{a})^m}{2},$$

$$q' = \frac{(p + q\sqrt{a})^m - (p - q\sqrt{a})^m}{2\sqrt{a}},$$

en prenant pour m tous les nombres naturels $1, 2, 3, \ldots$, à l'infini ; donc, si l'on substitue ces valeurs de p' et q' dans les formules précédentes, on aura

$$y = \frac{\mathrm{P} + \mathrm{Q}\sqrt{a}}{2a}(p + q\sqrt{a})^m + \frac{\mathrm{P} - \mathrm{Q}\sqrt{a}}{2a}(p + q\sqrt{a})^m - \frac{b}{a},$$

$$x = \frac{a\mathrm{Q} - \beta\mathrm{P} + (\mathrm{P} + \beta\mathrm{Q})\sqrt{a}}{4a\alpha}(p + q\sqrt{a})^m$$
$$- \frac{a\mathrm{Q} - \beta\mathrm{P} - (\mathrm{P} + \beta\mathrm{Q})\sqrt{a}}{4a\alpha}(p - q\sqrt{a})^m - \frac{\delta - \frac{\beta b}{a}}{2\alpha}.$$

Donc, si l'on met dans ces formules les différentes valeurs de P et Q qui naissent des facteurs de R qui sont de la forme de $\mathrm{P}^2 - a\mathrm{Q}^2$, et qui sont plus grands que l'unité, et qu'on fasse successivement $m = 1, 2, 3, \ldots$, on aura absolument toutes les solutions rationnelles possibles de l'équation proposée

3° Soient, pour plus de simplicité,

$$a\mathrm{Q} - \beta\mathrm{P} = \mathrm{P}',$$
$$\mathrm{P} + \beta\mathrm{Q} = \mathrm{Q}',$$

et l'on aura

$$y = \frac{Pp' + aQq' - b}{a},$$

$$x = \frac{P'p' + aQ'q' + b\beta - a\delta}{2a\alpha};$$

donc, à moins que les numérateurs de ces deux fractions ne soient divisibles exactement par leurs dénominateurs, les inconnues x et y ne pourront être des nombres entiers.

Supposons

$$y' = \frac{P'(p' - 1) + aQ'q'}{a},$$

$$x' = \frac{P'(p' - 1) + aQ'q'}{2a\alpha},$$

et nous aurons

$$y = \frac{P - b}{a} + y',$$

$$x = \frac{P' + b\beta - a\delta}{2a\alpha} + x'.$$

Or je dis que l'on peut toujours prendre l'exposant m, dans les valeurs de p' et q', tel que x' et y' soient des nombres entiers.

Pour cela on décomposera le nombre x en ses facteurs premiers, en sorte que l'on ait $\alpha = 2^s m'm''m'''\ldots$, $m', m'', m''',\ldots$ étant des nombres premiers; ensuite on divisera $a^{\frac{m'-1}{2}}$ par m', et l'on nommera le reste r'; on divisera de même $a^{\frac{m''-1}{2}}$, et l'on nommera le reste r'', et ainsi de suite; ces restes étant trouvés, on fera m égal à un multiple quelconque de $2^{s+1}(m' - r')(m'' - r'')(m''' - r''')\ldots$; car, par ce que nous avons démontré plus haut (n° **21**), il est clair que $p' - 1$ et q' seront divisibles par 2α; de plus il est facile de voir par les formules du n° **16** que $p' - 1$ sera aussi divisible par a, à cause que m est pair; par conséquent x' et y' seront nécessairement des nombres entiers.

Donc, si les quantités $\frac{P - b}{a}$ et $\frac{P' + b\beta - a\delta}{2a\alpha}$ sont des nombres entiers, on pourra trouver une infinité de valeurs de x et de y en nombres entiers; or ces quantités ne sont autre chose que les valeurs de x et de y qui répondent à $m = 0$, ce qui donne

$$p' = 1, \quad q' = 0, \quad \text{et par conséquent} \quad x' = 0, \quad y' = 0,$$

c'est-à-dire les mêmes valeurs de x et de y que nous avons trouvées d'abord (n° 28); d'où il s'ensuit que si l'on trouve une seule solution du problème en nombres entiers, dans le cas de a positif, on pourra par nos formules en trouver une infinité d'autres en prenant pour P et Q les nombres qui répondent à la solution donnée, et pour m un multiple quelconque de $2^{s+1}(m' - r')(m'' - r'')(m''' - r''')\ldots$.

Au reste, il est bon de remarquer encore qu'il ne sera pas toujours nécessaire que m soit un multiple de ce nombre pour que x' et y' soient des nombres entiers; car il est visible, par exemple, que si P' et Q' étaient divisibles par α, il suffirait alors que m fût un multiple de 2, c'est-à-dire un nombre pair, et ainsi des autres cas semblables.

FIN DU TOME PREMIER.

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME PREMIER.

SECTION PREMIÈRE.

MÉMOIRES EXTRAITS DES RECUEILS DE L'ACADÉMIE DE TURIN.

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER, rue de Seine-Saint-Germain, 10, près l'Institut.