

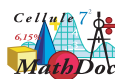
JOURNAL DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES

H. POINCARÉ

Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle (I)

Journal de mathématiques pures et appliquées 3^e série, tome 7 (1881), p. 375-422.

[<http://portail.mathdoc.fr/JMPA/afficher_notice.php?id=JMPA_1881_3_7_A20_0>](http://portail.mathdoc.fr/JMPA/afficher_notice.php?id=JMPA_1881_3_7_A20_0)



Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par la Cellule MathDoc
dans le cadre du pôle associé BnF/CMD
<http://portail.mathdoc.fr/GALLICA/>

*Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle;***PAR M. H. POINCARÉ,**Ingénieur des Mines.

Une théorie complète des fonctions définies par les équations différentielles serait d'une grande utilité dans un grand nombre de questions de Mathématiques pures ou de Mécanique. Malheureusement, il est évident que dans la grande généralité des cas qui se présentent on ne peut intégrer ces équations à l'aide des fonctions déjà connues, par exemple à l'aide des fonctions définies par les quadratures. Si l'on voulait donc se restreindre aux cas que l'on peut étudier avec des intégrales définies ou indéfinies, le champ de nos recherches serait singulièrement diminué, et l'immense majorité des questions qui se présentent dans les applications demeurerait insolubles.

Il est donc nécessaire d'étudier les fonctions définies par des équations différentielles en elles-mêmes et sans chercher à les ramener à des fonctions plus simples, ainsi qu'on a fait pour les fonctions algébriques, qu'on avait cherché à ramener à des radicaux et qu'on étudie maintenant directement, ainsi qu'on a fait pour les intégrales de différentielles algébriques, qu'on s'est efforcé longtemps d'exprimer en termes finis.

Rechercher quelles sont les propriétés des équations différentielles est donc une question du plus haut intérêt. On a déjà fait un premier pas dans cette voie en étudiant la fonction proposée *dans le voisinage d'un des points du plan*. Il s'agit aujourd'hui d'aller plus loin et d'étu-

dier cette fonction *dans toute l'étendue du plan*. Dans cette recherche, notre point de départ sera évidemment ce que l'on sait déjà de la fonction étudiée *dans une certaine région du plan*.

L'étude complète d'une fonction comprend deux parties :

1^o Partie qualitative (pour ainsi dire), ou étude géométrique de la courbe définie par la fonction ;

2^o Partie quantitative, ou calcul numérique des valeurs de la fonction.

Ainsi, par exemple, pour étudier une équation algébrique, on commence par rechercher, à l'aide du théorème de Sturm, quel est le nombre des racines réelles, c'est la partie qualitative, puis on calcule la valeur numérique de ces racines, ce qui constitue l'étude quantitative de l'équation. De même, pour étudier une courbe algébrique, on commence par *construire* cette courbe, comme on dit dans les cours de Mathématiques spéciales, c'est-à-dire qu'on cherche quelles sont les branches de courbes fermées, les branches infinies, etc. Après cette étude qualitative de la courbe on peut en déterminer exactement un certain nombre de points.

C'est naturellement par la partie qualitative qu'on doit aborder la théorie de toute fonction et c'est pourquoi le problème qui se présente en premier lieu est le suivant :

Construire les courbes définies par des équations différentielles.

Cette étude qualitative, quand elle sera faite complètement, sera de la plus grande utilité pour le calcul numérique de la fonction et elle y conduira d'autant plus facilement que l'on connaît déjà des séries convergentes qui représentent la fonction cherchée dans une certaine région du plan, et que la principale difficulté qui se présente est de trouver un guide sûr pour passer d'une région où la fonction est représentée par une série à une autre région du plan où elle est exprimable par une série différente.

D'ailleurs, cette étude qualitative aura par elle-même un intérêt du premier ordre. Diverses questions fort importantes d'Analyse et de Mécanique peuvent en effet s'y ramener. Prenons pour exemple le problème des trois corps : ne peut-on pas se demander si l'un des corps restera toujours dans une certaine région du ciel ou bien s'il pourra

s'éloigner indéfiniment ; si la distance de deux des corps augmentera, on diminuera à l'infini, ou bien si elle restera comprise entre certaines limites ? Ne peut-on pas se poser mille questions de ce genre, qui seront toutes résolues quand on saura construire qualitativement les trajectoires des trois corps ? Et si l'on considère un nombre plus grand de corps, qu'est-ce que la question de l'invariabilité des éléments des planètes, sinon une véritable question de Géométrie qualitative, puisque, faire voir que le grand axe n'a pas de variations séculaires, c'est montrer qu'il oscille constamment entre certaines limites ?

Tel est le vaste champ de découvertes qui s'ouvre devant les géomètres. Je n'ai pas eu la prétention de le parcourir tout entier, mais j'ai voulu du moins en franchir les frontières, et je me suis restreint à un cas très particulier, celui qui se présente d'abord tout naturellement, c'est-à-dire à l'étude des équations différentielles du premier ordre et du premier degré.

Dans ce qui va suivre, je considère les courbes définies par une équation de la forme

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y},$$

où X et Y sont deux polynômes entiers en x et en y . Ces courbes, je les appelle des *caractéristiques*.

Si l'on considère les deux portions d'une même caractéristique qui se trouvent de part et d'autre d'un de ses points, on aura divisé cette caractéristique, à moins qu'elle ne soit une courbe fermée, en deux *demi-caractéristiques* distinctes. Ces deux demi-caractéristiques joueront, dans ce qui va suivre, un rôle de quelque importance. Par exemple, supposons que la caractéristique soit la spirale logarithmique

$$\rho = e^{\omega},$$

on pourra la diviser en deux demi-caractéristiques, comprenant, la première, tous ceux de ses points pour lesquels

$$\rho < 1,$$

la seconde, tous les points pour lesquels

$$\rho > 1.$$

Afin d'éviter les difficultés que pourrait présenter l'étude des branches infinies, nous supposerons que les courbes sont projetées gnomoni-
quement sur une sphère. Soient un plan P , et un point quelconque (x, y) dans ce plan ; si l'on considère une sphère quelconque divisée en deux hémisphères par un plan parallèle au plan P et que nous appellerons plan de l'équateur ; si l'on joint le centre de la sphère au point (x, y) , la droite, ainsi déterminée, coupera la sphère en deux points diamétralement opposés ; nous appellerons $(x, y, 1)$ celui qui est situé dans le premier hémisphère, $(x, y, 2)$ celui qui est situé dans le second hémisphère.

Toute ligne droite du plan P se projettera sur la sphère suivant un grand cercle. Aussi, quand nous parlerons de la tangente en un point à la caractéristique, il s'agira de l'arc de grand cercle qui touche la caractéristique en ce point.

Tout grand cercle coupe l'équateur en deux points ω_1 et ω_2 ; l'angle de direction du grand cercle qui passe par les points diamétralement opposés ω_1 et ω_2 sera l'arc compris entre ω_1 et un point fixe de l'équateur. Le coefficient angulaire sera la tangente de l'angle de direction.

Enfin, les points d'inflexion d'une caractéristique seront les points où elle est osculatrice à un grand cercle.

Il est évident que, dans ces conditions, si l'on excepte quelques points singuliers, par tous les points de la sphère passe une caractéristique et une seule, et le coefficient angulaire de la tangente est donné par l'équation

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y}.$$

D'ailleurs, tout est symétrique par rapport au centre de la sphère.

CHAPITRE I.

DÉFINITIONS ET GÉNÉRALITÉS.

Avant d'aller plus loin, il est nécessaire de donner certaines définitions et certains théorèmes généraux qui seront d'un grand secours dans l'étude qualitative des courbes sphériques.

Considérons d'abord des courbes sphériques ne présentant ni point double, ni point d'arrêt.

Nous appellerons *cycle sphérique* une courbe telle qu'après en avoir parcouru un arc fini on revienne au point de départ : par exemple, un petit ou un grand cercle.

Nous appellerons *spirale sphérique* une courbe qui coupe un cycle sphérique en un seul point, par exemple la loxodromie, qui coupe les parallèles en un seul point.

Un cycle sphérique divise la surface de la sphère en deux régions que nous appellerons, l'une, l'*intérieur* du cycle; l'autre, l'*extérieur*; on ne peut passer de l'une à l'autre sans couper le cycle.

Si l'on joint deux points d'une caractéristique par un arc de courbe quelconque qui n'ait avec la caractéristique d'autre point commun que ses deux extrémités, l'arc de courbe et l'arc de caractéristique compris entre les deux points formeront, par leur ensemble, un cycle sphérique. Par exemple, si l'on joint par un arc de grand cercle les deux extrémités d'un arc de petit cercle, ces deux arcs formeront un cycle fermé.

Mais il peut se présenter deux cas.

Premier cas. — Les deux branches de courbes formées par la caractéristique prolongée au delà des deux points que l'on a réunis par un arc de courbe quelconque, sont toutes deux intérieures ou toutes deux extérieures au cycle formé par les deux arcs.

Dans ce cas, nous dirons que l'arc de courbe *sous-tend* l'arc de caractéristique.

C'est ce qui arrive, par exemple, dans le cas des deux extrémités d'un arc de petit cercle réunies par un arc de grand cercle.

Deuxième cas. — Les deux branches de courbes formées par la caractéristique, prolongée au delà des deux points qu'on a réunis par un arc de courbe quelconque, sont, l'une intérieure, l'autre extérieure au cycle formé par les deux arcs.

Dans ce cas, nous dirons que l'arc de courbe *sur-tend* l'arc de caractéristique.

Supposons, par exemple, que la caractéristique soit une loxodromie;

elle coupera un méridien quelconque en une infinité de points. Considérons parmi ces points d'intersection deux points consécutifs et concevons qu'on les joigne d'une part par un arc de loxodromie, d'autre part par un arc de méridien, l'arc de méridien sur-tendra l'arc de loxodromie.

De la définition même des cycles on peut tirer immédiatement les résultats suivants :

- 1° Deux cycles se coupent en un nombre pair ou infini de points;
- 2° Toute courbe algébrique se compose d'un ou plusieurs cycles;
- 3° Toute courbe algébrique coupe un cycle quelconque en un nombre pair ou infini de points.

THÉORÈME I. — *Si l'on divise une caractéristique, qui n'offre ni point double, ni point d'arrêt, en deux demi-caractéristiques, si l'une de ces demi-caractéristiques ne coupe aucun des cycles algébriques qu'en un nombre fini de points, la caractéristique donnée est un cycle.*

En effet, construisons une courbe plane C définie de la manière suivante : l'abscisse d'un point β_i quelconque de la courbe C sera l'arc de la caractéristique, compté depuis un point fixe α_0 jusqu'à un point α_i correspondant à β_i , et l'ordonnée de β_i sera l'angle de direction de la tangente à la caractéristique au point α_i .

1° A un point β_i de la courbe C correspond toujours un point α_i et un seul de la caractéristique;

2° La caractéristique n'ayant pas de point d'arrêt, la courbe C n'en aura pas non plus;

3° A un point α_i de la caractéristique correspond : ou un point β_i de la courbe C , si la caractéristique n'est pas un cycle; ou une infinité de points β_i si la caractéristique est un cycle;

4° La courbe C ne coupe qu'en un point les droites parallèles à l'axe des y ;

5° A l'une des demi-caractéristiques correspond la partie de la courbe C située à droite de l'axe des y ; à l'autre, la partie située à gauche de cet axe. Nous supposerons, pour fixer les idées, que la demi-caractéristique qui, d'après hypothèse, ne coupe aucun cycle algébrique qu'en un nombre fini de points est celle qui correspond à la demi-courbe C , située à droite de l'axe des y .

Première hypothèse. — Il y a sur la demi-courbe C une infinité de points β_i correspondant à des points α_i situés sur l'équateur.

Comme par hypothèse la demi-caractéristique considérée ne coupe l'équateur (qui est un cycle algébrique) qu'en un nombre fini de points, il n'y a qu'un nombre fini de points α_i sur l'équateur. Il faut donc qu'à un point α_i correspondent un nombre infini de points β_i , c'est-à-dire que la caractéristique soit un cycle.

Deuxième hypothèse. — Il y a sur la demi-courbe c une infinité de points β_i où la tangente à la courbe C est parallèle à l'axe des x .

C'est dire qu'il y a une infinité de points β_i correspondant à des points α_i , qui sont des points d'inflexion de la caractéristique. Or le lieu des points d'inflexion des caractéristiques est une courbe algébrique ; donc, par suite de l'hypothèse faite à l'énoncé du théorème, il y a seulement un nombre fini de points d'inflexion à la caractéristique donnée. Il faut donc encore qu'à un point α_i corresponde une infinité de points β_i , c'est-à-dire que la caractéristique soit un cycle.

Si l'on suppose qu'aucune des hypothèses 1 et 2 ne sont remplies, quand l'abscisse du point β_i sera plus grande qu'une certaine valeur x_0 , ce point correspondra à un point α_i , qui sera toujours dans un même hémisphère, dans le premier hémisphère par exemple, et l'ordonnée de β_i ira toujours en décroissant ou toujours en croissant, toujours en croissant par exemple. On se trouve donc en présence d'un troisième cas qui comporte lui-même deux hypothèses.

Troisième hypothèse. — Quand x varie depuis x_0 jusqu'à l'infini, l'ordonnée de β_i , c'est-à-dire l'angle de direction de la tangente à la caractéristique, va toujours en croissant, mais en restant plus petit qu'une quantité donnée.

Soient

β_i le point de la courbe C dont l'abscisse est x_0 ;

α_i le point correspondant de la caractéristique ;

α, ω , la tangente à la caractéristique en α_i ;

ω , le point où α, ω , rencontre l'équateur ;

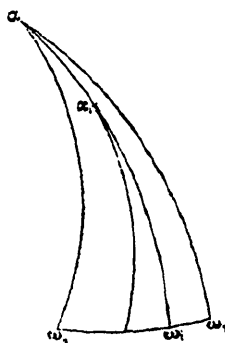
α_i un point quelconque de la caractéristique correspondant à un point β_i situé à droite de β_i ;

$\alpha_i \omega_i$ la tangente en ce point ;

ω_i le point où cette tangente rencontre l'équateur.

Quand α_i s'avancera sur la caractéristique, ω_i se déplacera vers la droite, mais en restant toujours sur l'arc d'équateur $\omega_1 \omega_2$; la demi-caractéristique $\alpha_i \alpha_i$, qui ne peut franchir l'équateur, est convexe par

Fig. 1.



hypothèse, et tout entière comprise dans le triangle sphérique $\alpha_i \omega_1 \omega_2$, c'est-à-dire que sa longueur curviligne reste toujours plus petite que $\alpha_i \omega_1 + \omega_1 \omega_2$, c'est-à-dire qu'elle est finie, ce qui est absurde ; la troisième hypothèse est donc inadmissible.

Quatrième hypothèse. — Quand α varie depuis α_0 jusqu'à l'infini, l'ordonnée du point β_i , c'est-à-dire l'angle de direction de la tangente à la caractéristique, va toujours en croissant jusqu'à l'infini.

C'est-à-dire que l'angle de direction de la tangente à la caractéristique peut prendre toutes les valeurs

$$\gamma_0 + n\pi,$$

où γ_0 est une constante donnée et n un nombre positif entier quelconque. C'est dire que la tangente de l'angle de direction, c'est-à-dire le coefficient angulaire de la tangente à la caractéristique, est égale à

$$\text{tang } \gamma_0$$

pour un nombre infini de points β_i différents.

Or le lieu des points où le coefficient angulaire de la tangente à la caractéristique est égal à $\tan \gamma_0$ est une courbe algébrique qui ne peut, d'après l'hypothèse, rencontrer la demi-caractéristique qu'en un nombre fini de points α_i . Il faut donc encore ici qu'à un point α_i correspondent une infinité de points β_i , c'est-à-dire que la caractéristique donnée soit un cycle.

En résumé, des quatre hypothèses que l'on peut faire, la première, la deuxième et la quatrième conduisent à ce résultat, que la caractéristique est un cycle; la troisième est inadmissible.

Le théorème est donc démontré.

Définition. — Nous appellerons *polycycle* une courbe fermée comme le cycle, mais présentant des points doubles.

Exemple : intersection de la sphère avec un cylindre qui lui est tangent en un point.

Système topographique. — Si l'on trace sur la sphère un système de cycles et de polycycles tel, que par chacun des points de la sphère passe un cycle ou un polycycle, et un seul, excepté en quelques points singuliers par lesquels ne passe aucun cycle, nous dirons que ce système de cycles est un *système topographique*, parce qu'il est analogue au système des courbes de niveau d'un terrain.

Les points doubles des polycycles sont alors analogues aux *cols* de ce terrain, les points singuliers par lesquels ne passe aucun cycle sont analogues aux *fonds* et aux *sommets* du terrain; de sorte que nous appellerons ces divers points : *cols*, *fonds* et *sommets* du système.

Par exemple, le système des courbes

$$f(x, y) = \text{const.},$$

où f est un polynôme entier en x et en y , si ces courbes ne coupent pas l'équateur, est un système topographique. Les cols sont les points où l'on a à la fois

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dy} = 0, \quad \left(\frac{d^2f}{dx dy} \right)^2 - \frac{d^2f}{dx^2} \frac{d^2f}{dy^2} > 0;$$

les sommets sont les points où l'on a

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dy} = 0, \quad \left(\frac{dx \, dy}{d^2 f} \right)^2 = \frac{d^2 f}{dx^2} \frac{d^2 f}{dy^2} < 0, \quad \frac{d^2 f}{dx^2} > 0;$$

les fonds sont les points où l'on a

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dy} = 0, \quad \left(\frac{dx \, dy}{d^2 f} \right)^2 - \frac{d^2 f}{dx^2} \frac{d^2 f}{dy^2} < 0, \quad \frac{d^2 f}{dx^2} < 0.$$

De même, si l'on a entre z , x et y une relation algébrique

$$f(z, x, y) = 0,$$

telle que l'on n'ait jamais

$$\frac{df}{dz} = 0,$$

et que z ne puisse rester fini et réel quand x et y sont infinis et réels, le système des courbes

$$z = \text{const.}$$

est un système topographique.

Par exemple, soit

$$f(z, x, y) = (z - x)^2 - 2(x^2 + y^2 + 1) = 0;$$

$\frac{df}{dz}$ ne peut être nul que si

$$x^2 + y^2 + 1 = 0,$$

ce qui est impossible.

De plus, si l'on considère z comme une constante, les termes du degré le plus élevé s'écrivent

$$-(x^2 - 2y^2),$$

c'est-à-dire que les courbes $z = \text{const.}$ ne coupent pas l'équateur, c'est-à-dire que ces courbes forment un système topographique.

Le lieu des points où chacun des cycles d'un système topographique est tangent à une caractéristique s'appellera la *courbe des contacts*.

Si le système topographique est algébrique, la courbe des contacts sera elle-même une courbe algébrique.

Si l'on considère un système topographique et l'un des polycycles du système correspondant à un des cols du système, une partie des fonds et des sommets est à l'extérieur du polycycle, une autre partie à l'intérieur, de sorte que chaque col *distribue d'une certaine manière* les fonds et les sommets du système.

Deux systèmes topographiques sont *analogues* lorsqu'ils ont mêmes cols, mêmes fonds, mêmes sommets et que les fonds et les sommets sont *distribués de la même manière par les cols*.

CHAPITRE II.

ÉTUDE DES CARACTÉRISTIQUES DANS LE VOISINAGE D'UN POINT DE LA SPHÈRE.

Avant d'étudier les propriétés des caractéristiques dans toute l'étendue de la sphère, il faut rappeler les résultats déjà acquis relativement à l'étude de ces courbes dans une région limitée de la sphère. Les principaux théorèmes qui se rapportent à cette étude sont énoncés et démontrés dans divers Mémoires de Cauchy, intitulés *Mémoires sur le calcul des limites*, et insérés aux tomes XIV, XV et XVI des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* et dans le célèbre Mémoire de MM. Briot et Bouquet, inséré dans le Tome XXXVI du *Journal de l'École Polytechnique*. Je me suis moi-même occupé de cette question dans une Note qui se trouve dans le XLV^e Cahier du *Journal de l'École Polytechnique* et dans une Thèse pour le doctorat que j'ai soutenue devant la Faculté des Sciences de Paris.

Supposons d'abord que le point autour duquel on veut étudier les caractéristiques soit

$$x = \alpha, \quad y = \beta.$$

X et Y, qui sont des polynômes en x et en y , peuvent être également considérés comme des polynômes en $x - \alpha$ et $y - \beta$.

De sorte que

$$X = a_0 + a_1(x - \alpha) + a_2(y - \beta) + \dots,$$

$$Y = b_0 + b_1(x - \alpha) + b_2(y - \beta) + \dots$$

Premier cas. — a_0 et b_0 ne sont pas nuls à la fois ; supposons, par exemple,

$$a_0 \geq 0;$$

l'équation différentielle peut s'écrire

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y}{X} f(x, y),$$

où f est une série ordonnée suivant les puissances croissantes de $x - \alpha$ et $y - \beta$.

Donc, en vertu du théorème démontré par Cauchy (*Comptes rendus*, t. XIV), y peut s'exprimer par une série ordonnée suivant les puissances croissantes de $x - \alpha$ et se réduisant à β pour $x = \alpha$.

Donc, par le point (α, β) passe une caractéristique et une seule.

Deuxième cas. — $a_0 = b_0 = 0$.

Mais a_1, a_2, b_1 et b_2 ne sont pas nuls à la fois.

Le point (α, β) est alors un point singulier ordinaire. Commençons par rappeler un théorème relatif à ces points singuliers, théorème que j'ai démontré dans ma Thèse inaugurale.

Si l'équation

$$(5) \quad (a_1 - \lambda)(b_2 - \lambda) - b_1 a_2 = 0$$

a deux racines différentes, λ_1 et λ_2 ;

Si le rapport de ces racines est positif ou imaginaire, l'intégrale générale de l'équation

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y}$$

est de la forme

$$z_1^{\lambda_1} z_2^{-\lambda_2} = \text{const.},$$

où z_1 et z_2 sont des séries ordonnées suivant les puissances croissantes de $x - \alpha, y - \beta$ et s'annulant pour

$$x = \alpha, \quad y = \beta.$$

Supposons que le point (x, y) se rapproche infiniment du point (α, β) , de telle façon que

$$\lim \frac{y - \beta}{x - \alpha} = \mu;$$

le coefficient angulaire de la tangente en ce point (x, y) aura pour limite

$$\frac{b_1 + b_2 \mu}{a_1 + a_2 \mu}.$$

Donc la limite de la droite qui joint les points (x, y) et (α, β) et la limite de la tangente à la caractéristique au point (x, y) forment un faisceau homographique.

Les droites doubles de ce faisceau sont données par l'équation

$$\mu(a_1 + a_2 \mu) = b_1 + b_2 \mu.$$

Soient μ_1 et μ_2 les deux racines de cette équation; on calculera aisément λ_1 et λ_2 en fonctions rationnelles de $a_1, a_2, b_1, b_2, \mu_1$ et μ_2 .

Maintenant on peut diviser le deuxième cas en quatre cas subordonnés principaux.

Premier cas subordonné. — Les droites doubles du faisceau homographique sont réelles, et deux droites conjuguées quelconques du faisceau sont ou toutes deux dans l'angle aigu formé par les deux droites doubles, ou toutes deux dans l'angle obtus.

Dans ce cas, λ_1 et λ_2 sont réels et leur rapport est positif; le théorème que nous avons rappelé en commençant est donc applicable, et l'intégrale générale s'écrit

$$z_1^{\lambda_1} z_2^{-\lambda_2} = \text{const.},$$

où z_1, z_2 sont des fonctions réelles de x et de y s'annulant pour

$$x = \alpha, \quad y = \beta,$$

pendant que λ_1 et λ_2 sont deux nombres réels positifs.

Il s'ensuit que toutes les caractéristiques vont passer par le point

singulier (α, β) , pourvu qu'elles pénètrent dans une région de la sphère assez voisine de ce point pour que z_1 et z_2 soient convergents.

Un pareil point singulier s'appellera un *nœud*.

Soit, par exemple, à étudier les caractéristiques qui satisfont à l'équation

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{2y}$$

dans le voisinage du point

$$x = y = 0.$$

L'équation générale de ces caractéristiques s'écrira

$$y = kx^2,$$

où x^2 est une constante. Dans le plan, cette équation représente une série de paraboles ayant même axe et ayant leur sommet à l'origine; sur la sphère, cette même équation représentera les intersections de la sphère avec les cônes, qui ont le centre de la sphère pour sommet et ces paraboles pour base.

Toutes ces intersections passent évidemment par le point

$$x = y = 0.$$

Deuxième cas subordonné. — Les droites doubles du faisceau homographique sont réelles; mais deux droites conjuguées du faisceau sont situées de part et d'autre de ces deux droites doubles.

Dans ce cas, $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ est réel et négatif, et le théorème dont nous avons parlé n'est plus applicable.

Mais MM. Briot et Bouquet ont fait voir, dans un Mémoire inséré au *Journal de l'École Polytechnique*, XXXVI^e Cahier qu'il passe par le point (α, β) deux caractéristiques et deux seulement.

Un pareil point singulier s'appellera un *col*.

Soit, par exemple, à étudier dans le voisinage de l'origine des caractéristiques définies par l'équation

$$\frac{dx}{x} = -\frac{dy}{y}.$$

L'intégrale générale s'écrit

$$xy = \text{const.}$$

et les seules caractéristiques qui passent par le point

$$x = y = 0$$

sont les deux grands cercles

$$x = 0, \quad y = 0.$$

Troisième cas subordonné. — Les droites doubles du faisceau homographique sont imaginaires, et ce faisceau ne se réduit pas à un système de droites en involution.

Dans ce cas, λ_1 et λ_2 sont deux imaginaires conjuguées et leur rapport est imaginaire. Le théorème général s'applique et l'intégrale générale s'écrit

$$z_1^{\lambda_1} z_2^{-\lambda_2} = \text{const.},$$

où z_1 et z_2 , λ_1 et λ_2 sont imaginaires conjuguées.

Soit

$$z_1 = \xi + i\eta, \quad \lambda_1 = Y + i\delta$$

$$z_2 = \xi - i\eta, \quad \lambda_2 = Y - i\delta.$$

L'intégrale générale s'écrit alors

$$(\xi^2 + \eta^2)^\delta \left(\frac{\xi + i\eta}{\xi - i\eta} \right)^Y = \text{const.}$$

Les courbes $\xi^2 + \eta^2 = \text{const.}$ (où ξ et η sont des séries ordonnées suivant les puissances croissantes de $x - \alpha$ et $y - \beta$, et s'annulant pour $x = \alpha, y = \beta$) sont évidemment des cycles qui ne se coupent en aucun point et qui forment dans la région voisine du point (α, β) un système topographique dont le point (α, β) est un sommet.

Or, si l'on remarque que les équations

$$\xi^2 + \eta^2 = A, \quad \left(\frac{\xi + i\eta}{\xi - i\eta} \right)^i = B$$

ne donnent pour ξ et η , et par conséquent pour x et y , qu'un seul système de valeurs réelles, on reconnaîtra que les caractéristiques ne coupent les cycles

$$\xi^2 + \eta^2 = A$$

qu'en un seul point et que, par conséquent, ces caractéristiques ne sont autre chose que des spirales; un point qui parcourt ces spirales dans un certain sens va en se rapprochant indéfiniment de l'origine.

Un pareil point singulier s'appellera un *foyer*.

Soit, par exemple, l'équation

$$\frac{dx}{x-y} = \frac{dy}{x+y},$$

dont l'intégrale générale est

$$(x^2 + y^2) \left(\frac{x+iy}{x-iy} \right)^i = \text{const.}$$

Si l'on passe aux coordonnées polaires, cette intégrale devient

$$\rho^2 e^{-2i\omega} = \text{const.},$$

ce qui nous donne, dans le plan, une spirale logarithmique, et, par conséquent, sur la sphère, une spirale sphérique.

Quatrième cas subordonné. — Les droites doubles du faisceau homographique sont imaginaires et ce faisceau se réduit à un système de droites en involution.

Dans ce cas, λ_1 et λ_2 sont imaginaires conjuguées, mais leur rapport est égal à -1 . Le théorème que nous avons rappelé au début n'est donc pas applicable en général.

Ce quatrième cas est plus particulier que les précédents et il ne se présentera pas si X et Y sont les *polynômes les plus généraux de leur degré*. Bornons-nous donc à quelques remarques.

D'abord, il est impossible qu'une branche de caractéristique vienne passer par le point α, β , puisque sa tangente devrait être précisément l'une des droites doubles de l'involution qui sont imaginaires.

Mais, d'après ce qu'on verra plus loin, toute caractéristique est un cycle ou une spirale; donc, ou bien les caractéristiques seront des spirales, et un point qui les parcourrait tournerait autour du point (α, β) en s'en rapprochant indéfiniment : le point (α, β) serait alors encore un *foyer*; ou bien les caractéristiques forment un système topographique dont (α, β) est un sommet, et alors le point (α, β) est un *centre*.

C'est ce qui arrive quand le théorème que nous énoncions au début est applicable, malgré la valeur négative de $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$.

En effet, dans ce cas, l'intégrale s'écrit

$$\begin{aligned} & z_1 z_2 = A, \\ \text{où} \quad & z_1 = \xi + i\eta, \\ & z_2 = \xi - i\eta; \\ \text{c'est-à-dire} \quad & \xi^2 + \eta^2 = A; \end{aligned}$$

et les caractéristiques forment évidemment, dans ce cas, un système topographique de cycles.

Par exemple, l'équation

$$\begin{aligned} & \frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x} \\ \text{a pour intégrale générale} \quad & x^2 + y^2 = A. \end{aligned}$$

Cas particuliers laissés de côté. — Dans ce qui précède, on a laissé de côté les cas particuliers où

$$\lambda_1 = \lambda_2, \quad \lambda_1 = 0,$$

cas qui ne se présenteront pas si X et Y sont les *polynômes les plus généraux de leur degré*.

Or, pour que

$$\lambda_1 = \lambda_2,$$

il faut et il suffit que

$$(a_1 + b_2)^2 - b_1 a_2 + a_1 b_2 = 0.$$

Dans ce cas, MM. Briot et Bouquet ont fait voir qu'une infinité de

caractéristiques passent par le point (α, β) , c'est-à-dire qu'on a encore affaire à un *nœud*.

Les cinq cas précédents comprennent tous les points singuliers α, β , tels que les deux courbes

$$X = 0, \quad Y = 0$$

s'y coupent en un seul point et non en plusieurs points confondus. Ces points singuliers s'appelleront *points singuliers de première espèce*, et l'on a vu qu'il y avait quatre sortes de pareils points : les nœuds, les cols, les foyers et les centres.

Reste à examiner les cas où

$$\lambda_1 = 0$$

et ceux où

$$a_1 = a_2 = 0$$

ou

$$b_1 = b_2 = 0.$$

Ces cas se présentent quand les courbes $X = Y = 0$ se coupent en plusieurs points confondus au point (α, β) .

En effet, dire que

$$a_1 = a_2 = 0,$$

c'est dire que $X = 0$ offre un point multiple en (α, β) .

Dire que

$$b_1 = b_2 = 0,$$

c'est dire que $Y = 0$ offre un point multiple en (α, β) .

Dire que

$$\lambda_1 = 0,$$

c'est dire que

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2},$$

c'est-à-dire que les courbes $X = 0, Y = 0$ sont tangentes au point (α, β) .

De pareils points singuliers s'appelleront *points singuliers de seconde espèce*, et il est évident, d'après ce qui précède, qu'ils pourront toujours être considérés comme la limite d'un système de plusieurs points singuliers de première espèce confondus ensemble.



Les particularités que peuvent présenter de pareils points sont trop nombreuses et trop diverses pour que nous les étudions en détail. Remarquons que de pareils points ne peuvent exister si X et Y sont les polynômes les plus généraux de leur degré.

Points situés sur l'équateur. — Dans ce qui précède, on a supposé implicitement que α et β restent finis, c'est-à-dire que le point (α, β) n'est pas sur l'équateur.

Mais le cas où α, β est sur l'équateur peut se ramener aisément aux cas déjà étudiés.

Considérons d'abord un point de l'équateur non situé sur le grand cercle

$$x = 0,$$

nous poserons

$$x = \frac{1}{z}, \quad y = \frac{t}{z}.$$

Si l'on considère ensuite z et t comme les coordonnées d'un point dans un plan, ce point ne sera autre chose que la projection gnomonique du point (x, y) de la sphère sur un plan parallèle au plan du grand cercle

$$x = 0.$$

Pour le point (α, β) de la sphère, ces coordonnées z et t seront finies, c'est-à-dire qu'on sera ramené aux cas étudiés dans le commencement de ce Chapitre.

Si l'on voulait étudier les caractéristiques dans le voisinage de l'intersection de l'équateur et du grand cercle

$$x = 0,$$

on poserait

$$x = \frac{t}{z}, \quad y = \frac{1}{z},$$

et l'on raisonnerait de la même manière.

CHAPITRE III.

DISTRIBUTION DES POINTS SINGULIERS.

THÉORÈME II. — *Tout système de caractéristiques admet des points singuliers.*

Première hypothèse. — Les courbes

$$X = 0, \quad Y = 0$$

se coupent en des points non situés sur l'équateur.

Dans ce cas, ces points d'intersection sont évidemment des points singuliers.

Deuxième hypothèse. — Les courbes

$$X = 0, \quad Y = 0$$

se coupent en un point situé sur l'équateur.

Supposons que ce point ne soit pas sur le grand cercle

$$x = 0,$$

nous poserons

$$x = \frac{t}{z}, \quad y = \frac{t}{z},$$

et, si m est le degré de celui des deux polynômes X et Y dont le degré est le plus élevé, nous poserons

$$z^m X = X_1, \quad z^m Y = Y_1.$$

L'équation différentielle devient alors

$$\frac{dz}{-zX_1} = \frac{dt}{Y_1 - tX_1}$$

pour $t = \alpha$, $z = 0$; on a, par hypothèse,

$$Y_1 = X_1 = 0,$$

et par conséquent

$$zX_1 = 0, \quad Y_1 - tX_1 = 0,$$

c'est-à-dire que le point

$$t = a, \quad z = 0$$

est un point singulier de l'équation proposée.

Troisième hypothèse. — Les courbes $X = 0$, $Y = 0$ ne se coupent en aucun point. Le degré de X est plus grand que celui de Y . Dans ce cas, l'un au moins des deux polynômes X et Y est de degré pair. De plus Y_1 est divisible par z , de sorte que

$$Y_1 = zY_2.$$

Or il est clair que pour

$$z = t = 0$$

on a

$$zX_1 = zY_2 - tX_1 = 0,$$

et que par conséquent le point

$$z = t = 0$$

est un point singulier.

Quatrième hypothèse. — Les courbes $X = 0$, $Y = 0$ ne se coupent en aucun point. Le degré de X est inférieur à celui de Y . Dans ce cas on poserait

$$x = \frac{t}{z}, \quad y = \frac{1}{z},$$

et, en raisonnant comme dans le cas précédent, on ferait voir que

$$z = t = 0$$

est un point singulier.

Cinquième hypothèse. — Les courbes $X = 0$, $Y = 0$ ne se coupent en aucun point. Le degré de X et de Y est le même.

Si, de plus, X_2 et Y_2 sont les termes du degré le plus élevé de X et Y , on n'a pas identiquement

$$xY_2 - yX_2 = 0.$$

Dans ce cas, le degré de X et de Y étant m , et nécessairement pair, la fonction $xY_2 - yX_2$ est homogène en x et y et de degré $m + 1$, et par conséquent de degré impair.

Elle s'annule donc, soit pour $x = 0$, soit pour une certaine valeur finie de $\frac{y}{x}$.

Si elle s'annule pour une certaine valeur α de $\frac{y}{x}$, on aura à la fois pour

$$t = \alpha, \quad z = 0, \\ zX_1 = Y_1 - tX_1 = 0$$

quand on aura posé

$$x = \frac{1}{z}, \quad y = \frac{t}{z},$$

c'est-à-dire que le point

$$t = \alpha, \quad z = 0$$

sera un point singulier.

Si la fonction $xY_2 - yX_2$ s'annule pour $x = 0$, on posera

$$x = \frac{t}{z}, \quad y = \frac{1}{z},$$

et l'on verra, comme précédemment, que le point

$$t = z = 0$$

est un point singulier.

Sixième hypothèse. — Les courbes X et Y ne se coupent en aucun point. Le degré de X est le même que celui de Y si, de plus, X_2 et Y_2 sont les termes du degré le plus élevé de X et de Y ; on a identiquement

$$xY_2 - yX_2 = 0.$$

Cette hypothèse est inadmissible.

En effet, si l'on a identiquement

$$xY_2 = yX_2,$$

X_2 est divisible par x et égal à xX_3 , Y_2 est divisible par y et égal

à yY_3 , de sorte que l'on a identiquement

$$xyY_3 = yxX_3$$

ou

$$Y_3 = X_3.$$

Maintenant $Y_3 = X_3$ est une fonction homogène de *degré impair* en x et en y ; donc elle s'annule soit pour $x = 0$, soit pour une certaine valeur réelle α de $\frac{y}{x}$.

Donc, soit pour $x = 0$, soit pour $\frac{y}{x} = \alpha$, on aurait forcément

$$X_2 = Y_2 = 0,$$

c'est-à-dire que les courbes $X = 0$, $Y = 0$ se couperaient en un point de l'équateur, ce qui est contraire à l'hypothèse

En résumé, des six hypothèses que l'on peut faire, la sixième est inadmissible; si l'une des cinq autres est réalisée, l'équation différentielle admet des points singuliers, soit sur l'équateur, soit hors de l'équateur.

Cas général. — On peut, sans nuire à la généralité, supposer :

- 1° Que les polynômes X et Y sont de même degré;
- 2° Que si X_2 et Y_2 sont les termes du degré le plus élevé de X et de Y , on n'a pas identiquement

$$xY_2 - yX_2 = 0;$$

- 3° Que les courbes $X = Y = 0$ ne se coupent nulle part en plusieurs points confondus et ne se coupent pas sur l'équateur;

- 4° Que l'équation

$$xY_2 - yX_2 = 0$$

n'ait pas de racines multiples.

Dans ce cas, *l'équateur est toujours une caractéristique*, et tous les points singuliers sont de première espèce. De plus on peut, sans nuire à la généralité, supposer que tous les points singuliers sont des *nœuds*, des *cols* et des *foyers*.

Le nombre des points singuliers est évidemment pair, puisque tout est symétrique par rapport au centre de la sphère.

Le nombre minimum des points singuliers est donc égal à 2, et ce cas peut se présenter de deux manières :

1° Les courbes

$$X = 0, \quad Y = 0$$

ne se coupent en aucun point; mais l'équation homogène

$$xY_2 - yX_2 = 0$$

admet une solution réelle et une seule.

On a alors sur l'équateur deux points singuliers diamétralement opposés. Je dis que ces points singuliers sont toujours des nœuds. Pour le démontrer, il faut étudier les propriétés générales des points singuliers situés sur l'équateur.

Supposons que pour

$$t = \alpha, \quad z = 0$$

on ait

$$zX_1 = Y_1 - tX_1 = 0$$

et

$$X_1 \geq 0, \quad Y_1 \geq 0.$$

Posons

$$t = u + \alpha,$$

et soit

$$X_1 = z\xi_1 + \lambda_0 + \lambda_1 u + \lambda_2 u^2 + \dots + \lambda_m u^m,$$

$$Y_1 = z\eta_1 + \mu_0 + \mu_1 u + \mu_2 u^2 + \dots + \mu_m u^m,$$

où ξ_1 et η_1 sont des polynômes entiers en z et en u , et où les λ et les μ sont des constantes. Il vient, en posant

$$\lambda_2 u^2 + \dots + \lambda_m u^m = \xi_2 u^2,$$

$$\mu_2 u^2 + \dots + \mu_m u^m = \eta_2 u^2,$$

$$X_1 = u^2 \xi_2 + z\xi_1 + \lambda_0 + \lambda_1 u,$$

$$Y_1 = u^2 \eta_2 + z\eta_1 + \mu_0 + \mu_1 u;$$

d'où l'on tire

$$Y_1 - tX_1 = z\xi_1 + u^2 \xi_2 + (\mu_0 - \lambda_0 u) + (\mu_1 - \lambda_1 u - \lambda_0)u,$$

où ξ_1 et ξ_2 sont des polynômes entiers en z et u . L'équation différentielle s'écrit alors, en remarquant que l'on doit avoir $\mu_0 = \lambda_0 \alpha$,

$$\frac{dz}{-z(\lambda_0 + \lambda_1 u + z\xi_1 + u^2\xi_2)} = \frac{du}{(\mu_1 - \lambda_1 z - \lambda_0)u + z\theta_1 + u^2\theta_2},$$

où θ_1 et θ_2 sont des polynômes en z et u .

Les racines de l'équation (5) sont alors

$$-\lambda_0 \quad \text{et} \quad \mu_1 - \lambda_1 \alpha - \lambda_0.$$

Ces deux racines sont réelles.

Donc *tout point singulier situé sur l'équateur est un nœud ou un col.*
(C'est ce qu'on devait prévoir, l'équateur étant une caractéristique.)

Pour qu'il soit un nœud, il faut et il suffit que

$$\lambda_0^2 + \lambda_0 \lambda_1 \alpha - \lambda_0 \mu_1 > 0.$$

Or le premier membre de cette inégalité est précisément la valeur que prend pour

$$y = \alpha x$$

l'expression

$$= \frac{1}{x^{2m}} \frac{d}{dy} (xY_2^2 X_2 - yX_3^2).$$

Nous n'en changerons pas le signe en écrivant

$$- \frac{d}{dy} \left(\frac{Y_2}{X_2} - \frac{y}{x} \right),$$

c'est-à-dire que le point singulier

$$\frac{y}{x} = \alpha$$

sera un col si, quand $\frac{y}{x}$ passe de $\alpha - \varepsilon$ à $\alpha + \varepsilon$, l'expression $\frac{Y_2}{X_2} - \frac{y}{x}$ passe du négatif au positif, et qu'il sera un nœud si, quand $\frac{y}{x}$ passe de $\alpha - \varepsilon$ à $\alpha + \varepsilon$, l'expression $\frac{Y_2}{X_2} - \frac{y}{x}$ passe du négatif au positif.

Cela posé, nous allons introduire une considération nouvelle qui nous rendra les plus grands services. Soit un cycle situé tout entier dans un hémisphère. Ce cycle divise la sphère en deux régions, dont l'une, située tout entière dans l'un des hémisphères, s'appellera l'*intérieur du cycle*.

Si le cycle est tout entier dans le premier hémisphère, nous dirons qu'un point mobile décrit le cycle dans le sens positif s'il a constamment l'intérieur du cycle *à sa gauche*; si, au contraire, le cycle était dans le second hémisphère, un point décrirait le cycle dans le sens positif s'il en avait constamment l'intérieur *à sa droite*.

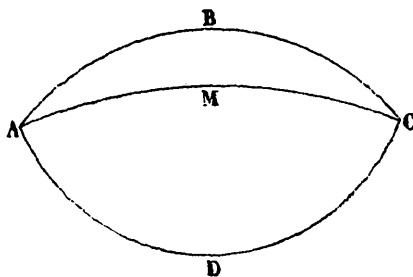
Supposons qu'un point mobile décrive le cycle dans le sens positif et considérons les variations de l'expression $\frac{Y}{X}$. Soit h le nombre de fois que cette expression saute de $-\infty$ à $+\infty$; soit k le nombre de fois que cette expression saute de $+\infty$ à $-\infty$. Soit

$$i = \frac{h - k}{2},$$

le nombre i s'appellera l'*indice du cycle*.

Si l'on joint deux points A et C d'un cycle ABCDA par un arc AMC

Fig. 2.



situé tout entier à l'intérieur du cycle, le cycle ABCDA se trouve décomposé en deux cycles ABCMA, AMCDA, et l'on a évidemment

$$\text{ind. ABCDA} = \text{ind. ABCMA} + \text{ind. AMCDA},$$

de sorte qu'on peut ramener le calcul de l'indice d'un cycle quelconque au calcul de l'indice des différents cycles infiniment petits qui le composent.

THÉORÈME III. — *Un cycle infiniment petit qui ne contient à son intérieur aucun point singulier a pour indice 0.*

En effet, si ce cycle n'est pas coupé par la courbe $X = 0$,

$$h = 0, \quad k = 0, \quad i = \frac{h-k}{2} = 0.$$

Si le cycle est coupé par la courbe $X = 0$, il n'est pas coupé par la courbe $Y = 0$; Y est toujours de même signe et X passe une fois du positif au négatif, une fois du négatif au positif; d'où

$$h = 1, \quad k = 1, \quad i = \frac{h-k}{2} = 0.$$

De même, si la courbe $X = 0$ présentait à l'intérieur du cycle un point multiple d'ordre m , on aurait

$$h = m, \quad k = m, \quad i = \frac{h-k}{2} = 0.$$

THÉORÈME IV. — *Si un cycle infiniment petit contient à son intérieur un point singulier, son indice est égal à ± 1 .*

Il est égal à $+1$ si le point singulier est un col; à -1 si le point singulier est un nœud ou un foyer.

En effet, posons

$$y - \beta = \rho \sin \omega, \quad x - \alpha = \rho \cos \omega,$$

et supposons que l'on considère le cycle

$$(y - \beta)^2 + (x - \alpha)^2 = \rho^2,$$

ρ étant une constante *infiniment petite*.

Pour décrire ce cycle dans le sens positif, il faut faire varier ω depuis 0 jusqu'à 2π .

Or on a, en négligeant les infiniment petits et reprenant les nota-

tions du Chapitre précédent,

$$\frac{Y}{X} = \frac{b_1 + b_2 \operatorname{tang} \omega}{a_1 + a_2 \operatorname{tang} \omega}.$$

X s'annule deux fois, car, quand ω varie depuis 0 jusqu'à 2π ,

$$a_1 + a_2 \operatorname{tang} \omega$$

s'annule deux fois pour deux valeurs de ω que nous appellerons ω_0 et $\omega_0 + \pi$. Pour $\omega = \omega_0 - \varepsilon$, où ε est infiniment petit, on a

$$\operatorname{tang} \omega = \omega \operatorname{tang} \omega_0 - \zeta,$$

où ζ est positif et infiniment petit. On a donc

$$\frac{Y}{X} = \frac{b_1 + b_2 \operatorname{tang} \omega_0 - b_2 \zeta}{a_1 + a_2 \operatorname{tang} \omega_0 - a_2 \zeta}.$$

Remarquons que $\operatorname{tang} \omega_0 = -\frac{a_1}{a_2}$; il viendra, en négligeant $b_2 \zeta$ devant $b_1 + b_2 \operatorname{tang} \omega_0$,

$$\frac{Y}{X} = \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_2^2} \frac{1}{\zeta}.$$

Donc, si $a_1 b_2 - a_2 b_1 < 0$, $\frac{Y}{X}$ pour $\omega = \omega_0$ et pour $\omega = \omega_0 + \pi$ saute de $-\infty$ à $+\infty$, on a

$$h = 2, \quad k = 0, \quad i = \frac{h-k}{2} = 1.$$

Si, au contraire, $a_1 b_2 - a_2 b_1 > 0$, $\frac{Y}{X}$ pour $\omega = \omega_0$ et pour $\omega = \omega_0 + \pi$ saute de $+\infty$ à $-\infty$, on a

$$h = 0, \quad k = 2, \quad i = \frac{h-k}{2} = -1.$$

Maintenant, quelle est la condition pour que

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 > 0?$$

Reprenons l'équation (5) qui s'écrit

$$(a_1 - \lambda)(b_2 - \lambda) - a_2 b_1 = 0.$$

Il est évident qu'on aura

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 > 0,$$

si les deux racines de l'équation sont imaginaires ou de même signe, c'est-à-dire si le point singulier est un nœud ou un foyer. On aura au contraire

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 < 0,$$

si les deux racines sont réelles et de signe contraire, c'est-à-dire si le point singulier est un col.

Le théorème est donc démontré.

PROBLÈME I. — *Calculer l'indice d'un cycle situé tout entier dans l'un des hémisphères.*

Soient N le nombre des nœuds, F le nombre des foyers, C le nombre des cols contenus à l'intérieur du cycle.

Si l'on décompose le cycle donné en une infinité de cycles infiniment petits γ ,

Un nombre infini des cycles γ auront pour indice 0;

N + F des cycles γ » - 1;

C des cycles γ » + 1.

L'indice du cycle donné sera donc

$$- (N + F - C).$$

PROBLÈME II. — *Calculer l'indice de l'équateur.*

Soient $2N'$ le nombre des nœuds, $2C'$ le nombre des cols situés sur l'équateur.

Soit $t = \frac{y}{x} = \tan \omega$.

Faisons varier ω depuis $-\frac{\pi}{2}$ jusqu'à $+\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire $\tan \omega$ depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$. Tout étant symétrique par rapport au centre de la sphère, $\frac{Y}{X} = \frac{Y_1}{X_1}$ prend pour $\omega + \pi$ la même valeur que pour ω ; quand on ferait varier ω depuis $+\frac{\pi}{2}$ jusqu'à $+\frac{3\pi}{2}$, $\frac{Y}{X}$ repasserait par les mêmes valeurs que quand ω variait de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$.

Donc, ω variant de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$, $\frac{Y}{X}$ sautera $\frac{h}{2}$ fois de $-\infty$ à $+\infty$, et $\frac{h}{2}$ fois de $+\infty$ à $-\infty$.

Ceci posé, si l'on considère l'expression

$$H = \frac{Y_1}{X_1} - \frac{r}{x} = \frac{Y}{X} - \tan \omega,$$

pour $\omega = -\frac{\pi}{2}$, on a

$$H = +\infty;$$

pour $\omega = +\frac{\pi}{2}$, on a

$$H = -\infty.$$

Soient λ le nombre de fois que H passe du négatif au positif, μ le nombre de fois que H passe du positif au négatif, on aura évidemment

$$\mu - \lambda = 1.$$

Or H peut passer du négatif au positif, soit par 0, ce qui correspond à un col, soit par ∞ , ce qui correspond à l'une des $\frac{h}{2}$ valeurs de ω , pour lesquelles $\frac{Y}{X}$ saute de $-\infty$ à $+\infty$.

On a donc

$$\lambda = C' + \frac{h}{2}.$$

De même

$$\mu = N' + \frac{k}{2},$$

d'où

$$N' - C' = 1 + \frac{h-k}{2} = 1 + i,$$

d'où

$$i = N' - C' - 1.$$

Scolie. — Si le nombre des nœuds situés hors de l'équateur est $2N$, celui des foyers situés hors de l'équateur $2F$, celui des cols situés hors de l'équateur $2C$, celui des nœuds situés sur l'équateur $2N'$, celui des cols situés sur l'équateur $2E'$, on a la relation

$$N' + N + F = C + C' + 1.$$

En effet, pour obtenir ce résultat, il suffit d'égaliser les deux valeurs de l'indice de l'équateur obtenues dans les deux problèmes précédents.

Corollaire I. — Le nombre total des nœuds et des foyers est égal au nombre total des cols plus 2.

Corollaire II. — Le nombre total des points singuliers est un multiple de 4 plus 2.

Corollaire III. — Si le nombre des points singuliers se réduit à 2, ces points sont des nœuds et des foyers; ils sont toujours des nœuds s'ils sont sur l'équateur.

La courbe $X = 0$ et la courbe $Y = 0$ se composent d'un certain nombre de cycles. Considérons deux quelconques de ces cycles : ils se couperont en un nombre pair de points.

Soient $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{2n}$ les $2n$ points d'intersection de ces deux cycles rangés d'après l'ordre où on les rencontre en parcourant l'un des deux cycles, le cycle $X = 0$, par exemple, dans le sens positif.

THÉORÈME V. — *Supposons que deux points consécutifs α_k et α_{k+1} soient situés dans la même hémisphère; je dis que si α_k est un nœud ou un foyer, α_{k+1} est un col, ou réciproquement.*

Pour cela il suffit de faire voir que tout cycle qui enveloppe α_k et α_{k+1} a pour indice 0.

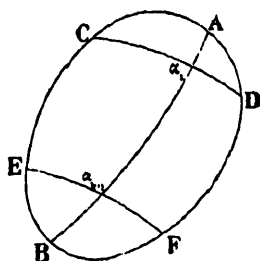
En effet, soit (*fig. 3*) AB l'arc du cycle $X = 0$, sur lequel se trouvent les points α_k et α_{k+1} ; soient CD et EF les arcs du cycle $Y = 0$ qui viennent couper AB respectivement en α_k et α_{k+1} .

Il est évident que, pour le cycle $ADFECA$,

$$h = 1, \quad k = 1, \quad i = \frac{h - k}{2} = 0.$$

Supposons, au contraire, que les points α_k et α_{k+1} soient dans deux hémisphères différents.

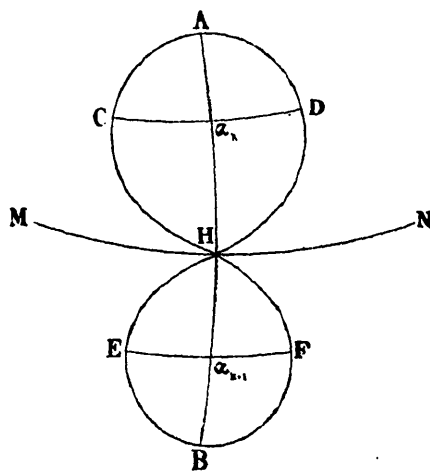
Fig. 3.



Je dis que si α_k est un col, α_{k+1} est un col, et que si α_k est un nœud ou un foyer, α_{k+1} est un nœud ou un foyer.

En effet, supposons que AB vienne couper l'équateur MN en H (fig. 4).

Fig. 4.



Considérons le cycle ACHFB EHDA. Ce cycle est parcouru *dans les deux hémisphères* dans le sens positif.

Supposons qu'en franchissant le point A, $\frac{Y}{X}$ saute de $-\infty$ à $+\infty$; il en sera de même quand on franchira le point H ou le point B, c'est-à-dire que, si

$$\text{ind. ACHD} = 1, \quad \text{ind. ACHFB EHDA} = 2.$$

De même, si

$$\text{ind. ACHD} = -1, \quad \text{ind. ACHFBEHDA} = -2,$$

c'est-à-dire que, dans tous les cas,

$$\text{ind. ACHDA} = \text{ind. HFBEH}. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Deuxième cas. — Dans tout ce qui précède, nous avons supposé que X_2 et Y_2 étaient de même degré, sans que

$$xY_2 - yX_2$$

soit identiquement nul.

Nous n'avons pas examiné ce qui se passerait si nous avions identiquement

$$xY_2 - yX_2 = 0.$$

A un certain point de vue, le cas que nous avons étudié est plus général que celui que nous avons laissé de côté.

A un autre point de vue, c'est le contraire; car deux polynômes X et Y quelconques peuvent être considérés comme des cas particuliers des polynômes

$$X + \lambda xZ, \quad Y + \lambda yZ,$$

où λ est une constante et Z un polynôme de même degré que X et Y .

Nous allons donc supposer que l'on a identiquement

$$X_2 = xZ, \quad Y_2 = yZ,$$

où Z est une fonction homogène en x et y .

Dans ce cas, l'équateur n'est plus une caractéristique, et par conséquent les points singuliers de l'équateur peuvent être tout aussi bien des nœuds, des foyers et des cols.

La règle qui permettait dans le cas précédent de trouver l'indice de l'équateur se trouve en défaut; d'ailleurs, si l'équateur contient des points singuliers, les courbes

$$X = 0, \quad Y = 0$$

se coupent sur ce grand cercle, qui n'a par conséquent plus, à proprement parler, d'indice.

Supposons donc que l'équateur ne contienne pas de point singulier, et cherchons quel est l'indice de ce grand cercle.

Nous trouverons que l'on a le long de l'équateur

$$\frac{Y}{X} = \frac{y}{x},$$

c'est-à-dire que l'indice de l'équateur sera égal à -1 , et si l'on remarque qu'il est déjà égal à

$$-(N + F - C),$$

$2N$, $2F$, $2C$ étant le nombre des nœuds, des foyers et des cols, on reconnaîtra que l'on a

$$F + N = C + 1,$$

c'est-à-dire que le théorème que l'on avait démontré dans le cas précédent est encore vrai.

Supposons maintenant que l'équation contienne des points singuliers, à savoir $2N'$ nœuds, $2F'$ foyers et $2C'$ cols, et voyons comment on pourra tourner la difficulté.

Soit $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ un grand cercle qui ne passe par aucun point singulier. Posons

$$x' = \frac{x}{\alpha x + \beta y + \gamma} \quad y' = \frac{y}{\alpha x + \beta y + \gamma},$$

l'équation différentielle devient

$$\frac{dx'}{X'} = \frac{dy'}{Y'},$$

où X' et Y' sont des polynômes entiers en x' et en y' .

On aura pu choisir le cercle $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$, de telle façon que :

- 1° Aucune réduction ne s'opérant, X' et Y' soient de même degré ;
- 2° Que le grand cercle $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ ne soit pas une caractéris-

tique, c'est-à-dire que les termes du degré le plus élevé de $y'X' - x'Y'$ se réduisent.

Si a, b est un point singulier de l'équation

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y},$$

$$a' = \frac{a}{\alpha a + \beta b + \gamma}, \quad b' = \frac{b}{\alpha a + \beta b + \gamma}$$

sera aussi un point singulier de l'équation

$$\frac{dx'}{X'} = \frac{dy'}{Y'}.$$

Si a, b est un nœud, un col ou un foyer, a', b' sera un nœud, un col ou un foyer, de sorte que les nombres des nœuds, des cols et des foyers sont $2(N + N')$, $2(C + C')$, $2(F + F')$ et que, se trouvant ramené au cas où l'équateur ne contenait pas de point singulier, on peut écrire

$$N + N' + F + F' = C + C' + 1.$$

CHAPITRE IV.

THÉORIE DES CONTACTS.

L'étude que nous venons de faire des points singuliers va enfin nous permettre d'aborder la question des formes géométriques que peuvent affecter les caractéristiques *sur toute la surface de la sphère*.

Une première considération, d'une importance capitale, est celle du nombre des points ou un arc ou un cycle donné touchent une caractéristique, c'est-à-dire du nombre des contacts de cet arc ou de ce cycle.

Le nombre des contacts d'un arc ou d'un cycle *algébriques* est toujours fini.

Remarques préliminaires. — On a vu qu'une courbe algébrique sans point double se compose d'un certain nombre de cycles; de même

une courbe algébrique à points doubles se compose d'un certain nombre de cycles et de polycycles. Or, ces polycycles eux-mêmes peuvent être considérés comme décomposables en un certain nombre de cycles se touchant aux points doubles et présentant en ces points des points anguleux.

Ainsi la courbe

$$x^2 - y^2 = (x^2 + y^2)^2$$

se compose de deux polycycles diamétralement opposés; chacun de ces polycycles se compose de deux cycles qui se touchent au point

$$x = y = 0$$

et y présentent un point anguleux tel que l'axe des deux tangentes soit de 90° .

On a vu qu'une courbe algébrique C coupe un cycle algébrique quelconque en un nombre fini et pair de points. Ceci mérite quelques explications.

Si, en un point donné, la courbe algébrique C passe de l'intérieur du cycle à l'extérieur, ou réciproquement, nous dirons que la courbe *traverse* le cycle et ce point comptera pour un seul point d'intersection ou pour un nombre *impair* de points d'intersection confondus. Si, au contraire, dans le voisinage d'un point donné commun à la courbe C et au cycle, la courbe C reste tout entière extérieure ou intérieure au cycle, nous dirons que la courbe *touche* le cycle, et ce point comptera pour un nombre *pair* de points d'intersection confondus.

Supposons, par exemple, que le cycle donné présente un point anguleux à l'origine et que son équation s'écrive

$$0 = (y - \lambda x)(y - \mu x) + \theta_3,$$

θ_3 étant un polynôme ne contenant que des termes de degré 3 et au-dessus.

Supposons qu'un point infiniment voisin de l'origine soit à l'intérieur du cycle donné toutes les fois que

$$x > 0, \quad (y - \lambda x)(y - \mu x) > 0,$$

et à l'extérieur si

$$x < 0 \quad \text{ou si} \quad x > 0, \quad (y - \lambda x)(y - \mu x) < 0.$$

Soit

$$0 = y - mx + \theta_2,$$

l'équation de la courbe C, où θ_2 représente un polynôme, ne contenant que des termes de degré 2 et au-dessus.

Il est aisé de voir que la courbe C traverse le cycle toutes les fois que

$$(m - \lambda)(m - \mu) > 0$$

et le touche dans le cas contraire.

THÉORÈME VI. — *Le nombre des contacts d'un cycle algébrique qui n'a pas de point anguleux, qui n'a pas de contact d'ordre supérieur avec une caractéristique et qui ne passe par aucun point singulier est toujours fini et pair.*

En effet, soit

$$F(x, y) = 0$$

l'équation de ce cycle, on trouvera ses contacts en cherchant son intersection avec la courbe

$$\varphi = X \frac{dF}{dx} + Y \frac{dF}{dy} = 0.$$

Cette courbe étant algébrique, ses intersections avec le cycle donné sont en nombre pair, si l'on a soin de compter pour deux intersections les points où la courbe touche le cycle. Or, en ces points, le cycle aurait, avec une caractéristique, un contact d'ordre pair, ce que nous n'avons pas supposé. Donc, il n'y a nulle part plusieurs points d'intersection confondus des courbes

$$\varphi = 0, \quad F = 0.$$

Donc, le nombre des contacts est pair.

C. Q. F. D.

Remarque I. — Le théorème est encore vrai quand même le cycle donné a des contacts d'ordre supérieur avec une caractéristique; à la condition toutefois que l'on ait soin de compter un contact d'ordre n pour n contacts.

Remarque II. — Supposons maintenant que le cycle algébrique offre un point anguleux. Supposons, pour fixer les idées, que ce point anguleux soit à l'origine, que l'équation du cycle s'écrive encore

$$0 = (y - \lambda x)(y - \mu x) + \theta_2$$

et que l'intérieur du cycle soit défini par les conditions

$$x > 0, \quad (y - \lambda x)(y - \mu x) = 0.$$

Le polynôme φ s'écrit alors, si X_0 et Y_0 sont les valeurs de X et de Y pour $x = y = 0$,

$$\varphi = X_0 [2\lambda\mu x - (\lambda + \mu)y] + Y_0 [2y - (\lambda + \mu)x] + \theta'_2,$$

où θ'_2 est un polynôme ne contenant que des termes du degré 2 et au-dessus.

Le coefficient angulaire de la tangente à l'origine à la courbe $\varphi = 0$ est alors

$$\frac{Y_0(\lambda + \mu) - 2X_0\lambda\mu}{2Y_0 - X_0(\lambda + \mu)},$$

et la condition pour que la courbe $\varphi = 0$ traverse le cycle, c'est que

$$\begin{aligned} \alpha &= [Y_0(\lambda + \mu) - 2X_0\lambda\mu] - \lambda [2Y_0 - X_0(\lambda + \mu)], \\ \beta &= [Y_0(\lambda + \mu) - 2X_0\lambda\mu] - \mu [2Y_0 - X_0(\lambda + \mu)] \end{aligned}$$

soient de même signe.

Or, on peut écrire, en simplifiant,

$$\begin{aligned} \alpha &= (Y_0 - X_0\lambda)(\mu - \lambda), \\ \beta &= (Y_0 - X_0\mu)(\lambda - \mu); \end{aligned}$$

ce qui prouve que la condition pour que α et β soient de même signe,

c'est que $Y_0 - X_0\lambda$ et $Y_0 - X_0\mu$ soient de signe contraire, ou, en d'autres termes, que la condition pour que la courbe $\varphi = 0$ traverse le cycle donné est que la caractéristique qui passe par l'origine ne la traverse pas.

Donc, un point anguleux comptera pour un contact, si la caractéristique qui passe en ce point ne traverse pas le cycle, et pour deux contacts dans le cas contraire.

Remarque III. — Supposons maintenant que, le cycle passant toujours par l'origine, l'origine soit un point singulier. Soient

$$\begin{aligned} X &= \alpha x + \beta y + \theta_2, \\ Y &= \alpha' x + \beta' y + \theta'_2, \end{aligned}$$

θ_2 et θ'_2 étant des polynômes dont les termes sont de degré 2 et au-dessus.

On aura

$$\varphi = (\alpha x + \beta y) \frac{dF}{dx} + (\alpha' x + \beta' y) \frac{dF}{dy} + \theta_2 \frac{dF}{dx} + \theta'_2 \frac{dF}{dy}.$$

La courbe $\varphi = 0$ passe par l'origine.

Si elle n'est pas tangente à la courbe $F = 0$, le point singulier devra compter pour un contact, mais si elle a avec le cycle $F = 0$ un contact du $n^{\text{ième}}$ ordre, le point singulier devra compter pour $n + 1$ contacts.

Or, pour qu'elle soit tangente à $F = 0$, il faut et il suffit que, si

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dx} + \lambda \frac{dF}{dy} &= 0, \\ -\lambda(\alpha + \beta\lambda) + \alpha' + \beta'\lambda &= 0, \end{aligned}$$

c'est-à-dire qu'il faut et il suffit que le cycle $F = 0$ soit tangent à une caractéristique, puisque le coefficient angulaire m de la tangente à une des caractéristiques passant par l'origine est donné par l'équation

$$-m(\alpha + \beta m) + \alpha' + \beta' m = 0.$$

On verrait de même que le cycle $F = 0$ aura, à l'origine, un contact du $n^{\text{ième}}$ ordre avec la courbe $\varphi = 0$, s'il a un contact du $n^{\text{ième}}$ ordre avec une des caractéristiques passant par l'origine.

Donc, un point singulier par où passe le cycle donné, mais qui n'est pas un point anguleux, comptera pour $n + 1$ contacts si le cycle a, en ce point, un contact du $n^{\text{ième}}$ ordre avec une caractéristique.

Remarque IV. — Supposons enfin que l'origine soit un point singulier et un point anguleux du cycle donné.

Soient encore

$$X = \alpha x + \beta y + \theta_2,$$

$$Y = \alpha' x + \beta' y + \theta_2,$$

$$F = (y - \lambda x)(y - \mu x) + \theta_3,$$

et à l'intérieur du cycle

$$x > 0, \quad (y - \lambda x)(y - \mu x) > 0.$$

On aura

$$\begin{aligned} \varphi = & (\alpha x + \beta y) [2\lambda\mu x - (\lambda + \mu)y] \\ & + (\alpha' x + \beta' y) [2y - (\lambda + \mu)x] + \theta'_3, \end{aligned}$$

θ'_3 étant un polynôme ne contenant que des termes du degré 3 et au-dessus.

La courbe $\varphi = 0$ présente donc à l'origine deux branches de courbe. L'origine comptera donc pour un nombre pair de contacts si ces deux branches touchent toutes deux ou traversent toutes deux le cycle, pour un nombre impair dans le cas contraire ; c'est-à-dire que, pour que l'origine doive être comptée pour un nombre impair de contacts, il faut et il suffit que les deux tangentes à l'origine à la courbe $\varphi = 0$ ne soient pas comprises toutes deux dans l'un des angles formés par les tangentes à l'origine à la courbe $F = 0$, c'est-à-dire qu'il faut et qu'il suffit que

$$\begin{aligned} \alpha = & [(\alpha' + \beta'\lambda)(\lambda + \mu) - 2\lambda\mu(\alpha + \beta\lambda)] \\ & - \lambda[2(\alpha' + \beta'\lambda) - (\alpha + \beta\lambda)(\lambda + \mu)] \\ \beta = & [(\alpha' + \beta'\mu)(\lambda + \mu) - 2\lambda\mu(\alpha + \beta\mu)] \\ & - \mu[2(\alpha' + \beta'\mu) - (\alpha + \beta\mu)(\lambda + \mu)] \end{aligned}$$

soient de signe contraire.

Or, on peut écrire, en simplifiant,

$$\begin{aligned} a &= [(\alpha' + \beta'\lambda) - \lambda(\alpha + \beta\lambda)](\lambda - \mu) \\ b &= [(\alpha' + \beta'\mu) - \mu(\alpha + \beta\mu)](\lambda - \mu) \end{aligned}$$

Si le point singulier est un foyer, l'équation

$$(\alpha' + \mu'x) - x(\alpha + \mu x) = 0$$

n'a que des racines imaginaires. Son premier membre est donc toujours de même signe, a et b sont de signe contraire et le point singulier compte pour un nombre impair de contacts.

Si le point singulier est un col ou un nœud, il compte soit pour un nombre pair, soit pour un nombre impair de contacts, selon la position des tangentes à l'origine au cycle $F = 0$.

Résumé. — Le nombre des contacts d'un cycle algébrique est toujours pair à la condition :

- 1° Que l'on compte un contact du $n^{\text{ième}}$ ordre pour n contacts ;
- 2° Qu'un point anguleux du cycle donné soit considéré comme un ou comme deux contacts, selon que la caractéristique qui y passe y touche ou y traverse le cycle ;
- 3° Qu'un point singulier compte pour $n + 1$ contacts si le cycle a, en ce point, un contact du $n^{\text{ième}}$ ordre avec une caractéristique ;
- 4° Qu'un foyer qui est un point anguleux du cycle donné soit compté pour un contact ;
- 5° Qu'un col ou un nœud qui est un point anguleux du cycle donné soit compté pour un ou pour deux contacts, selon la position des tangentes au cycle au point anguleux.

Corollaire. — Si deux arcs algébriques ont mêmes extrémités, le nombre de leurs contacts peut être de même parité ou de parité différente si les deux extrémités ne sont pas deux foyers ; il est toujours de même parité si les deux extrémités sont deux foyers.

THÉORÈME VII. — *Si, entre deux points de la sphère, on peut mener*

un arc quelconque sans contact, on peut aussi mener entre ces deux points un arc algébrique sans contact.

En effet, soient

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

les équations de l'arc donné, où t est un paramètre convenablement choisi. On aura pu choisir le paramètre de telle sorte que les extrémités de l'arc correspondent à

$$t = 0, \quad t = \pi.$$

Si l'arc donné ne coupe pas l'équateur, x et y restent finis quand t varie de 0 à π ; ce sont donc des fonctions finies et continues de t entre ces limites, et il en est de même de leurs dérivées.

Soient x_1, y_1 et x_2, y_2 les valeurs de x et de y pour $t = 0$ et pour $t = \pi$; les fonctions

$$\begin{aligned} x - x_1 \cos \frac{t}{2} - x_2 \sin \frac{t}{2}, \\ y - y_1 \cos \frac{t}{2} - y_2 \sin \frac{t}{2} \end{aligned}$$

sont nulles pour $t = 0$ et pour $t = \pi$.

Les fonctions x et y peuvent donc se développer en séries convergentes en $\sin mt$, de la manière suivante,

$$\begin{aligned} x &= \sum_{m=1}^{m=\infty} A_m \sin mt + x_1 \cos \frac{t}{2} + x_2 \sin \frac{t}{2}, \\ y &= \sum_{m=1}^{m=\infty} B_m \sin mt + y_1 \cos \frac{t}{2} + y_2 \sin \frac{t}{2}; \end{aligned}$$

et l'on aura de même en séries convergentes

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \sum_{m=1}^{m=\infty} m A_m \cos mt - \frac{x_1}{2} \sin \frac{t}{2} + \frac{x_2}{2} \cos \frac{t}{2}, \\ \frac{dy}{dt} &= \sum_{m=1}^{m=\infty} m B_m \cos mt - \frac{y_1}{2} \sin \frac{t}{2} + \frac{y_2}{2} \cos \frac{t}{2}. \end{aligned}$$

Si l'on substitue ces valeurs à la place de x , y $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dx}{dt}$ dans l'expression

$$X \frac{dy}{dt} - Y \frac{dx}{dt},$$

on aura une fonction de t qui, quand t variera de 0 à π , ne s'annulera pas et dont le carré restera par conséquent toujours plus grand qu'une quantité donnée ϵ^2 .

Soient

$$A_\mu = \sum_{m=1}^{m=\mu} A_m \sin mt + x_1 \cos \frac{t}{2} + x_2 \sin \frac{t}{2},$$

$$B_\mu = \sum_{m=1}^{m=\mu} B_m \sin mt + y_1 \cos \frac{t}{2} + y_2 \sin \frac{t}{2}.$$

L'arc

$$x = A_\mu, \quad y = B_\mu$$

est algébrique et a les mêmes extrémités que l'arc donné.

De plus, on aura toujours pu prendre μ assez grand pour que A_μ , B_μ , $\frac{dA_\mu}{dt}$, $\frac{dB_\mu}{dt}$ diffèrent aussi peu que l'on veut de $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\frac{d\varphi}{dt}$, $\frac{d\psi}{dt}$, ou bien pour que $X \frac{dB_\mu}{dt} - Y \frac{dA_\mu}{dt}$, où x et y sont remplacés dans X et Y par A_μ et B_μ , diffère aussi peu que l'on veut de $X \frac{d\psi}{dt} - Y \frac{d\varphi}{dt}$, où x et y sont remplacés dans X et Y par φ et ψ ; par exemple, pour que cette expression diffère de $X \frac{d\psi}{dt} - Y \frac{d\varphi}{dt}$ de moins de ϵ , pour que l'on ait toujours

$$X \frac{dB_\mu}{dt} - Y \frac{dA_\mu}{dt} > 0.$$

Dans ce cas, l'arc

$$x = A_\mu, \quad y = B_\mu$$

sera à la fois algébrique et sans contact.

C. Q. F. D.

Si l'arc donné coupait l'équateur, mais ne coupait pas le grand cercle

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0,$$

on ferait un changement de variables en posant

$$x' = \frac{x}{\alpha x + \beta y + \gamma}, \quad y' = \frac{y}{\alpha x + \beta y + \gamma},$$

et le théorème se démontrerait de la même manière.

Si l'arc donné coupait tous les grands cercles de la sphère, on le décomposerait en un certain nombre d'arcs secondaires dont aucun ne couperait tous les grands cercles de la sphère, et le théorème démontré successivement pour chacun de ces arcs secondaires le serait également pour l'arc total.

THÉOREME VIII. — *Si AB est un arc algébrique sans contact, si AA₁ et BB₁ sont deux arcs de caractéristiques, on peut mener de A₁ à B₁ un arc sans contact.*

En effet, soient

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

les équations de l'arc AB où φ et ψ sont des fonctions continues de t , n'ayant qu'une valeur pour chaque valeur de t . Soient α et β les valeurs de t qui correspondent aux points A et B.

A chaque valeur de t correspond une caractéristique, et une seule, de telle sorte qu'à α et β correspondent les caractéristiques AA₁ et BB₁. Soient t_0, t_1, t_2, \dots les valeurs de t auxquelles correspondent des caractéristiques qui vont passer par un col.

Considérons la caractéristique qui correspond à une valeur donnée de t ; soit s l'arc de cette caractéristique compté à partir du point où elle coupe l'arc AB. Les deux valeurs de s et de t déterminent un point de la sphère et forment pour ainsi dire un nouveau système de coordonnées. Soient

$$\begin{array}{lll} t = \alpha, & s = \gamma & \text{les coordonnées de A}_1, \\ t = \beta, & s = \delta & \text{les coordonnées de B}_1, \\ t = t_0, & s = s_0 & \text{les coordonnées des cols,} \\ t = t_1, & s = s_1, & \\ \dots\dots, & \dots\dots & \end{array}$$

Une équation

$$s = F(t),$$

où F est une fonction continue de t , qui ne prend qu'une valeur pour chaque valeur de t , représente un arc de courbe continu et sans contact, toutes les fois que t n'est égal ni à t_0 , ni à t_1 , ... et si $t = t_0$, par exemple, toutes les fois que $s < s_0$.

Or, on pourra toujours choisir F de telle sorte que,

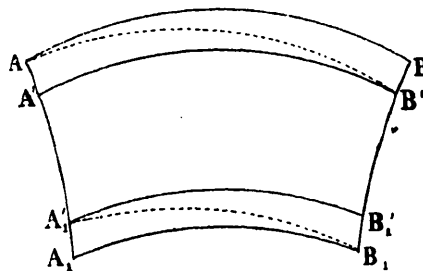
$$\begin{aligned} \text{pour } t = \alpha, \quad F &= \gamma, \\ \text{pour } t = \beta, \quad F &= \delta, \\ \text{pour } t = t_0, \quad F &< s_0, \\ \text{pour } t = t_1, \quad F &< s_1, \end{aligned}$$

c'est-à-dire que l'on peut mener de A , à B , un arc sans contact et par conséquent un arc algébrique sans contact. C. Q. F. D.

THÉORÈME IX. — Si AB et A_1B_1 (fig. 5) sont deux caractéristiques, si AA_1 et BB_1 sont deux arcs algébriques qui ne coupent AB et A_1B_1 en aucun autre point que A , B , A_1 ou B_1 , les nombres des contacts de AA_1 et de BB_1 sont de même parité.

Soit A' un point assez voisin de A pour que l'arc AA' soit sans contact

Fig. 5.



et que la caractéristique $A'B'$ aille couper BB_1 en un point B' tel que BB' soit sans contact.

Supposons de même que A_1B_1 soit un arc caractéristique, et que A, A_1, B, B_1 soient sans contact.

On pourra mener, d'après le théorème précédent, des arcs algébriques $AB', A'B_1$ sans contact.

Le nombre des contacts du cycle algébrique

$$AB'B_1A_1A$$

doit être pair.

Or, les caractéristiques AB, A_1B_1 touchent le cycle en A et en B_1 ; les caractéristiques $A'B'$, et A_1B_1 le traversent en B' et en A_1 . Donc les quatre points anguleux comptent pour deux contacts. Donc on a

$$\begin{aligned} &\text{nombre des contacts } AB' + \text{nombre des contacts } B'B_1 \\ &+ \text{nombre des contacts } B_1A_1 + \text{nombre des contacts } A_1A \equiv 0 \pmod{2}, \end{aligned}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\text{nombre des contacts } AA_1 + \text{nombre des contacts } BB_1 \equiv 0 \pmod{2}.$$

C. Q. F. D.

THEOREME X. — *Si un arc de caractéristique qui ne passe par aucun point singulier est sous-tendu par un arc de courbe, le nombre des contacts de cet arc de courbe est impair.*

En effet, soit $F = 0$ l'équation de l'arc sous-tendant. Considérons la fonction F ; cette fonction passe, par exemple, du positif au négatif quand le point (x, y) , décrivant la caractéristique, passe par l'une des extrémités de l'arc sous-tendant, et du négatif au positif quand il passe par l'autre extrémité de cet arc. C'est dire que, quand le point (x, y) décrit l'arc donné de caractéristique, la fonction F passe par un nombre impair de maxima et de minima.

Or, ces maxima et ces minima sont donnés par l'équation

$$\varphi = X \frac{dF}{dx} + Y \frac{dF}{dy} = 0;$$

c'est dire que l'arc de caractéristique coupe en un nombre impair de points la courbe $\varphi = 0$.

Or, cette courbe, qui est algébrique, coupe en un nombre pair de points le cycle H formé par l'arc de caractéristique et l'arc sous-tendant; donc elle coupe l'arc sous-tendant en un nombre impair de points.

Donc le nombre des contacts de cet arc est impair.

C. Q. F. D.

Remarque I. — Si l'arc de caractéristique passe par un col, comment faudra-il modifier le théorème?

Le col appartient évidemment à la courbe $\varphi = 0$, mais il n'est un maximum ou un minimum de F qu'à la condition que l'arc de caractéristique présente en ce point un point anguleux.

En effet, supposons d'abord qu'il n'y ait pas de point anguleux. Les courbes $F = 0$ et $\varphi = 0$ traverseront toutes deux, en général, le cycle H , c'est-à-dire que le col sera un point simple d'intersection du cycle et de $\varphi = 0$, sans correspondre à un maximum ou à un minimum de F .

Si, au contraire, il y a un point anguleux, l'une des courbes $\varphi = 0$, $F = 0$ traversera le cycle H , pendant que l'autre le touchera, de telle sorte que, ou bien le col sera un point simple d'intersection de H et de $\varphi = 0$, et en même temps un maximum de F , ou bien il sera un point double de H et de $\varphi = 0$ sans être un maximum de F .

Donc, si l'arc de caractéristique passe par un col et n'y a pas de point anguleux, le nombre des contacts de l'arc sous-tendant est pair.

Si l'arc de caractéristique passe par un col et y a un point anguleux, le nombre de ces contacts est impair.

Remarque II. — On démontrerait de même que, si un arc de caractéristique ne passe par aucun point singulier, tout arc de courbe qui le sur-tend a un nombre de contacts pair.

Contacts des systèmes topographiques. — Si l'on considère un système topographique algébrique, les contacts de ce système formeront une courbe algébrique.

On distinguera les contacts intérieurs et extérieurs du système topographique, selon que dans le voisinage de ces contacts la caractéristique qui y passe reste intérieure ou extérieure au cycle qu'elle touche, parmi ceux du système topographique.

La courbe des contacts sera donc divisée en un certain nombre d'arcs qui seront les arcs des contacts intérieurs et ceux des contacts extérieurs

Ces arcs seront séparés :

- 1° Par les points singuliers ;
- 2° Par les points où la courbe des contacts touche un des cycles du système topographique.

