

Sur les origines de la « méthode de Cauchy-Lipschitz » dans la théorie des équations différentielles ordinaires.

A. P. Youschkevitch

Résumé

RESUME. — L'auteur donne une brève analyse de la seconde partie des Résumés des leçons sur le calcul infinitésimal de A.-L. Cauchy, contenant en particulier la première démonstration de l'existence de la solution de l'équation $y' = f(x, y)$; $x = x_0$, $y = y_0$ à l'aide de la « méthode de Cauchy-Lipschitz ». Les épreuves des 13 leçons de cette partie, imprimées en 1824, mais jamais éditées, ont été retrouvées par Ch. Gilain qui en publie un fac-similé, précédé d'une introduction.

Abstract

SUMMARY. — The author analyses briefly the second part of A.-L. Cauchy's Résumé des Leçons sur le calcul infinitésimal, which contains in particular the first proof, using the « Cauchy-Lipschitz method », of the existence of a solution of the initial value problem $y' = f(x, y)$, $x = x_0$, $y = y_0$. The proof-sheets of the first 13 lectures of the part in question, printed in 1824 but not edited at that time, were found by M. Ch. Gilain, who published them in facsimile, together with an introduction.

Citer ce document / Cite this document :

Youschkevitch A. P. Sur les origines de la « méthode de Cauchy-Lipschitz » dans la théorie des équations différentielles ordinaires. . In: Revue d'histoire des sciences, tome 34, n°3-4, 1981. pp. 209-215;

doi : <https://doi.org/10.3406/rhs.1981.1766>

https://www.persee.fr/doc/rhs_0151-4105_1981_num_34_3_1766

Fichier pdf généré le 19/07/2018

Sur les origines de la « méthode de Cauchy-Lipschitz » dans la théorie des équations différentielles ordinaires

RESUME. — L'auteur donne une brève analyse de la seconde partie des *Résumés des leçons sur le calcul infinitésimal* de A.-L. Cauchy, contenant en particulier la première démonstration de l'existence de la solution de l'équation $y' = f(x, y)$; $x = x_0$, $y = y_0$ à l'aide de la « méthode de Cauchy-Lipschitz ». Les épreuves des 13 leçons de cette partie, imprimées en 1824, mais jamais éditées, ont été retrouvées par Ch. Gilain qui en publie un fac-similé, précédé d'une introduction.

SUMMARY. — *The author analyses briefly the second part of A.-L. Cauchy's Résumé des Leçons sur le calcul infinitésimal, which contains in particular the first proof, using the « Cauchy-Lipschitz method », of the existence of a solution of the initial value problem $y' = f(x, y)$, $x = x_0$, $y = y_0$. The proof-sheets of the first 13 lectures of the part in question, printed in 1824 but not edited at that time, were found by M. Ch. Gilain, who published them in fac-simile, together with an introduction.*

Il a récemment été publié un certain nombre d'ouvrages et d'éditions de correspondances qui jettent une lumière nouvelle sur le développement des sciences et sur l'apport personnel de divers savants éminents. Ce fait concerne toutes les branches de la science, y compris les mathématiques. La publication la plus récente de ce type (1) concerne les premières recherches de Cauchy sur la théorie des équations différentielles, recherches qu'il avait présentées dans ses leçons données à l'Ecole polytechnique au cours des années 1820. Comme l'écrit dans sa préface J. Dieudonné, le rôle primordial de Cauchy dans l'établissement d'une théorie rigoureuse des équations différentielles est universellement reconnu ; « mais dans le détail, il subsiste à cet égard bien des incertitudes et des flottements dans les exposés historiques donnés jusqu'à ce jour » (p. VII). Il s'agit notamment de l'histoire de la première méthode employée par Cauchy pour prouver l'existence de la solution d'une équation différentielle quel-

(1) Augustin-Louis CAUCHY, *Equations différentielles ordinaires*. Cours inédit (fragment). Introd. de Christian GILAIN, Préf. de Jean DIEUDONNÉ, Paris, Etudes vivantes ; New York, Johnson reprint Corporation, 1981, 16 × 24,5 cm, LVI-(2)-147 p.

conque $y' = (x, y)$ satisfaisant à des conditions initiales données ($x = x_0$, $y = y_0$), méthode dont les origines remontent à la méthode d'approximation polygonale proposée par Euler (en 1768), qui fut formulée d'une manière plus précise par Lipschitz (en 1868-1869).

L'incertitude constatée par J. Dieudonné s'explique par le fait que jusqu'alors on ne savait rien de précis ni sur la date d'invention de la dite méthode, ni sur la forme initiale de sa présentation. Dans le *Mémoire sur l'intégration des équations différentielles* lithographié à Prague en 1835, Cauchy, en résumant brièvement cette méthode, affirmait qu'il l'avait publiée dans ses *Leçons de la seconde année pour l'Ecole royale polytechnique* (2). Il en résultait que la méthode avait été expliquée aux élèves de l'Ecole polytechnique avant 1830, date à laquelle Cauchy avait dû quitter la France à cause de ses convictions politiques. Mais comme les *Leçons* mentionnées n'avaient pas été livrées au public, fait attesté en 1844 par Moigno, et que leur texte était resté jusqu'à présent introuvable, on ne pouvait fixer qu'une limite supérieure à cette importante découverte de Cauchy : l'année 1830. Et en ce qui concerne la méthode même de Cauchy, on la connaissait sous la forme présentée dans le deuxième volume des *Leçons de calcul différentiel et de calcul intégral* (1844) de Moigno qui, tout en suivant en général de près les cours de Cauchy, se permettait toutefois de temps en temps des déviations assez considérables (3).

Toutes ces incertitudes sont maintenant parfaitement éclaircies et nous en sommes redevables aux recherches de Ch. Gilain, maître assistant à l'Université de Paris VI, qui a trouvé, rassemblé et étudié tous les éléments nécessaires pour reconstituer l'histoire de la première étape d'une théorie rigoureuse des équations différentielles inventée par Cauchy.

Lorsqu'on lit les titres des trois cours célèbres donnés par Cauchy à l'Ecole polytechnique et publiés de son vivant, on y voit que chaque fois ce n'est que la première partie ou le premier volume qui en est édité. En réalité, on imprime d'abord *Cours d'analyse... 1^{re} partie — Analyse algébrique* (1821), puis le *Résumé des leçons... sur le calcul infinitésimal ; tome premier* (1823) et enfin *Leçons sur les applications du calcul infinitésimal à la géométrie. Tome premier* (en deux volumes, 1826-1828). Pour expliquer cet étrange phénomène de l'absence de la seconde partie du

(2) Dans le mémoire cité, Cauchy expose son second théorème d'existence pour les équations différentielles ordinaires qu'il démontre au moyen du « calcul des limites ». Cette seconde méthode, tout à fait différente de la première, permet de réhabiliter l'intégration des équations différentielles par séries employée auparavant sans les restrictions nécessaires. Je laisse ici de côté les mérites et les défauts du calcul des limites analysés en détail par Ch. Gilain (p. XLI-XLIV).

(3) C'est exactement le cas de la méthode de Cauchy que nous évoquons ; malgré la grande similitude des exposés donnés par Cauchy et par Moigno, il y a, entre eux, comme l'écrit Ch. Gilain, des différences sensibles (p. XXXII-XXXIV).

Cours d'analyse, du tome deuxième du *Résumé des leçons* et du tome deuxième (ou troisième volume) des *Leçons sur les applications géométriques*, Ch. Gilain a consulté les programmes officiels imprimés des cours de l'Ecole polytechnique où la durée de la scolarité était de deux ans, ainsi que les procès-verbaux manuscrits du Conseil d'instruction et de perfectionnement de la même Ecole conservés dans ses archives (4). La comparaison de ces documents et des *Cours* de Cauchy a amené Ch. Gilain aux conclusions suivantes (p. XIII-XV) :

1. A partir de 1820, les professeurs d'analyse étaient obligés de rédiger à l'usage des élèves, sinon l'intégralité de leurs cours, du moins les parties de ces cours non traitées dans les ouvrages classiques (5). En publiant les trois ouvrages précédemment cités, Cauchy avait répondu à la demande officielle du Conseil d'instruction (6).

2. Jusqu'à l'année scolaire 1821-1822 comprise, le cours d'analyse de la première année se composait de trois parties : « Analyse algébrique », « Calcul différentiel et intégral », « Application du calcul différentiel et intégral à la géométrie ». Signalons en passant que le programme de la première année pour 1819-1820 comprenait les paragraphes : « Expressions des fonctions en séries convergentes. Règle sur la convergence des séries » (p. 142). Ainsi, les trois ouvrages cités de Cauchy, malgré leurs titres différents, correspondent aux trois parties de son cours d'analyse de la première année. Cependant, au début des années 1820, la part de l'analyse algébrique dans le programme diminue considérablement.

3. Le cours d'analyse de seconde année comprenait, en 1823-1824, la théorie des équations différentielles ordinaires, les éléments de la théorie des équations aux dérivées partielles, de la méthode des variations et du calcul des différences finies, et enfin la suite des applications géométriques (p. 145-146). Il y avait à cette époque deux professeurs d'analyse à l'Ecole polytechnique, Ampère et Cauchy, qui faisaient alternativement les cours de première et de seconde années. Et c'était précisément Cauchy qui était chargé du cours de la seconde année en 1823-1824. Il était donc naturel de supposer que les *Leçons de la seconde année* qu'il avait mentionnées dans son mémoire de 1835 devaient avoir été présentées en 1824. En consultant les procès-verbaux du Conseil d'instruction pour cette année, Ch. Gilain y a trouvé une confirmation absolument convaincante de cette supposition. Dans le procès-verbal daté du 6 juin 1824, on lit : « M. Cauchy : ses feuilles de rédaction sont aussi en retard ; mais il est

(4) Ch. Gilain publie en annexe (p. 141-146) les extraits suivants des programmes d'enseignement approuvés par le dit Conseil : première année pour 1819-1820, première année pour 1822-1823 et deuxième année pour 1823-1824.

(5) On a constitué en 1823 une commission spéciale chargée de réviser les textes présentés ; Laplace en fut nommé le président.

(6) Ce fait est confirmé par Cauchy lui-même dans les avant-propos à l'*Analyse algébrique* de 1821 et au *Résumé* de 1823.

pourtant parvenu à en faire tirer sept dans le cours d'une semaine » (p. xv).

Il ne manquait plus que de retrouver ces *Leçons*, ce que Ch. Gilain a réussi à faire en réexaminant de plus près les fonds Cauchy des principales bibliothèques. C'est ainsi (p. xvii-xviii) qu'il en a trouvé deux séries d'épreuves, l'une contenant les neuf premières leçons (à la Bibliothèque de l'Ecole nationale des Ponts et Chaussées de Paris) et l'autre contenant 13 leçons, dont la dernière incomplète (à la Bibliothèque de l'Institut de France). Après avoir annoncé cette découverte en août 1977 dans une communication au XV^e Congrès international d'Histoire des Sciences d'Edinburgh, il présente maintenant au grand public le fac-similé de ces 13 leçons. Cette reproduction de 136 pages numérotées est précédée d'une introduction de Ch. Gilain (p. xi-lxiii) déjà citée à plusieurs reprises et suivie d'une liste d'*errata* établis par l'éditeur et d'une annexe. Le titre exact est le même que celui du *Résumé* de 1823 avec un sous-titre supplémentaire : *Résumé des leçons données à l'Ecole royale polytechnique. Par M. Augustin-Louis Cauchy. Suite du Calcul infinitésimal.*

Cependant il s'est avéré que les *Leçons* de la seconde année ainsi retrouvées sont loin d'être achevées et que Cauchy a interrompu ce travail à mi-chemin : toutes les tentatives de Ch. Gilain pour découvrir le texte complet, imprimé ou manuscrit, ayant échoué. Il est presque certain que Cauchy n'a pas voulu ou n'a pas pu terminer cet ouvrage pourtant si important. Pour expliquer ce fait assez singulier, Ch. Gilain avance quelques hypothèses ; l'élément le plus important, c'est la divergence des points de vue sur les principes d'enseignement de l'analyse infinitésimale qui opposait Cauchy à la majorité des membres du Conseil d'instruction, Laplace en tête. Nous apprécions maintenant surtout les innovations vraiment révolutionnaires de Cauchy qui inauguraient toute une nouvelle époque dans l'histoire de l'analyse classique et qu'il a brillamment exposées dans *l'Analyse algébrique* et dans le premier volume de son *Résumé*. Tel n'était pas l'avis de certains contemporains de Cauchy, surtout ceux de la génération précédente. Comme le montrent les procès-verbaux du Conseil d'instruction étudiés par Ch. Gilain, la direction de l'Ecole polytechnique recommandait avec insistance aux professeurs d'analyse de simplifier leurs méthodes et de s'en tenir strictement au programme, ce qui ne correspondait aucunement aux idées de Cauchy. C'est ainsi que le 24 juillet 1823 Arago déclare au sujet de considérations générales sur l'intégration que « cela peut être convenable à la Faculté des Sciences, mais non à l'Ecole polytechnique, où les élèves sont pressés par le temps » ; le 17 novembre 1826, Laplace constate que Cauchy « n'a présenté que des feuilles qui n'ont pu satisfaire la commission (7), et qu'il a été jusqu'à présent impossible

(7) Commission chargée de réviser les textes des manuels présentés par les professeurs (voir ci-dessus, n. 5).

de l'amener à se rendre au vœu du Conseil et à exécuter la décision du Ministre » (p. XIX). Il n'était pas si simple d'introduire de nouvelles idées, de nouveaux modes de raisonnement, une nouvelle manière de poser et de résoudre les « problèmes d'existence », et surtout de les introduire dans l'enseignement. Comme l'écrit Ch. Gilain, Cauchy résistait de son mieux à la pression de ses collègues aînés et défendait son droit de choisir ses propres méthodes d'enseigner les mathématiques ; s'il cédait parfois à la pression du Conseil d'instruction, il reprenait ensuite sa lutte contre les adversaires de la profonde reconstruction des fondements de l'analyse infinitésimale qu'il avait commencée dès le début de sa carrière scientifique. Tous ces débats assez aigus nous rappellent les discussions contemporaines sur le problème de l'enseignement des mathématiques aux divers niveaux d'études élémentaires ou supérieures.

Pour revenir aux *Leçons* de Cauchy de la seconde année, on s'aperçoit de fait qu'elles diffèrent nettement de tous les exposés précédents de la théorie des équations différentielles ordinaires, en particulier de l'exposé donné par Lacroix dans son célèbre *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral* (3 vol., 1797-1798 ; 2^e éd., 1810-1819), traité d'analyse le plus complet et le plus estimé au début du XIX^e siècle.

« La grande nouveauté du cours de Cauchy — souligne Ch. Gilain — réside dans la présence pour la première fois d'un théorème d'existence de la solution d'une équation différentielle générale du premier ordre [7^e et 8^e leçons]. Surtout, ce résultat d'existence ne figure pas incidemment ou localement dans les leçons de Cauchy. Il ne s'agit pas d'une découverte juxtaposée à un cours resté classique. Elle tient une place très importante, non seulement par le grand nombre de pages consacrées à l'exposé de sa démonstration et aux exemples, mais par son rôle dans l'organisation d'ensemble des cours. C'est à un véritable travail de *fondement* de la théorie des équations différentielles *générales* dans le domaine *réel* auquel on assiste dans ces leçons » (p. XXI).

Voici les grandes lignes de ces treize leçons conservées. Les cinq premières leçons sont consacrées aux principales méthodes d'intégration soi-disant « exacte » qu'on réussit à utiliser pour des classes d'équations bien connues auparavant. La nouvelle problématique commence à apparaître dans la 6^e leçon et devient l'objet principal de la recherche dans les leçons 7 et 8. Cauchy reprend, ainsi qu'il a déjà été noté, la méthode d'approximation polygonale (ou par les différences finies) introduite par Euler et transforme l'algorithme d'Euler en un vrai théorème d'existence locale d'une solution du problème de Cauchy pour l'équation $y' = f(x, y)$; $x = x_0$, $y = y_0$. Euler avait déjà remarqué que sa méthode devient inutilisable dans certains cas de rupture de continuité ; Cauchy ne peut pas se

(8) La formulation de Cauchy nécessite encore la connaissance de quelques théorèmes de la 7^e leçon (p. 40-53).

contenter de remarques assez vagues et se donne comme but d'établir les conditions exactes dans lesquelles on peut obtenir à l'aide de cette méthode la solution cherchée. Je formulerai le théorème général d'existence de Cauchy dans les termes employés par Ch. Gilain et plus commodes pour le lecteur contemporain que la formulation de Cauchy qu'on trouve

aussi p. 54-55 (8) : soit $f(x, y)$ et $\frac{\delta f(x, y)}{\delta x}$ des fonctions continues pour x

compris entre x_0 et $x_0 + a$ et y compris entre $y_0 - Aa$ et $y_0 + Aa$, A étant un majorant de $|f(x, y)|$ dans les intervalles correspondants de x et de y ; alors la solution du problème existe sur l'intervalle $(x_0, x_0 + a)$. « Le théorème de Cauchy est ainsi un théorème d'existence d'une solution dans un « rectangle de sécurité », comme on dirait aujourd'hui » (p. XXVII). Tout cela explique l'interruption des *Leçons* de Cauchy pour la seconde année.

Je ne poursuivrai pas l'analyse détaillée et fine du contenu de cet ouvrage de Cauchy présenté par Ch. Gilain et je n'ajouterai que les quelques remarques nécessaires pour apprécier plus exactement l'apport de Cauchy. On doit dire d'abord que Cauchy ne se contente pas de la démonstration d'un théorème d'existence locale, mais aborde aussi la question de l'existence globale de la solution (p. XXVIII, et respectivement p. 62 sq.). Et encore : quoique le problème de l'unicité de la solution ne soit pas traité par Cauchy dans sa 8^e leçon, il affirme explicitement et démontre dans la 10^e leçon l'unicité locale de la solution avec les restrictions déjà mentionnées (p. XXIV et respectivement p. 81). De plus, on trouve chez lui la distinction entre l'unicité locale et la non-unicité globale de la solution (p. XXIX-XXX et respectivement p. 82). Enfin, dans la 13^e leçon, Cauchy étend sa méthode aux systèmes d'équations différentielles du premier ordre satisfaisant aux conditions analogues à celles qu'il imposait dans la 8^e leçon ; on peut regretter que le théorème fondamental d'existence ne soit pas formulé dans la seule demi-feuille qui nous reste de cette dernière leçon qui nous est parvenue.

L'analyse du *Résumé des leçons* de Cauchy pour la seconde année faite par Ch. Gilain ne laisse rien ou presque rien à désirer (9). Il explique en particulier (p. XXVI) d'où provient l'hypothèse de Cauchy que la dérivée

partielle $\frac{\delta f(x, y)}{\delta x}$ est finie, continue et bornée : cela s'explique par le fait

(9) Peut-être eût-il été désirable de trouver dans l'introduction un exposé plus complet de la méthode d'approximation d'Euler et de l'avertissement fait par ce dernier que cette méthode devient insuffisante même dans le cas de l'équation $y' = f(x)$ lorsque $f(x)$ devient infini pour $x = x_0$. De telles remarques provenant de ce « maître à nous tous » (formule attribuée à Laplace) pouvaient stimuler dans une certaine mesure les réflexions de ses lecteurs même au XIX^e siècle. D'ailleurs c'est un fait en général bien connu.

qu'il utilise dans sa démonstration le théorème des accroissements finis qu'il a établi dans la 7^e leçon du *Résumé* de 1823. A la fin de son introduction, Ch. Gilain discute encore, comme je l'ai dit, le second théorème d'existence de Cauchy et le problème de la présence chez Cauchy de la méthode des approximations successives (« méthode de Picard »). Sa conclusion est probante : cette méthode itérative était utilisée par Cauchy et par Moigno comme une méthode d'approximation de solution déjà admise (p. LI-LIII) ; elle n'est devenue une méthode de démonstration de l'existence de la solution que beaucoup plus tard chez Picard.

Je voudrais résumer cet aperçu en citant à nouveau la préface de J. Dieudonné (publiée ici tant en français qu'en anglais) :

« L'intérêt de cette publication n'est pas contestable... On y voit aussi combien les conceptions de Cauchy tranchaient par leur originalité sur celles de ses contemporains ; et il est piquant de noter les réserves exprimées à cet égard par les autres membres de ce Conseil, un peu effarés par l'effet redouté de ces nouveautés sur les élèves ! » (p. VII).

En réalité, pour faire progresser les sciences, il ne suffit pas d'être doué d'un talent quelconque spécial, il faut aussi avoir de l'audace, beaucoup d'audace (10).

A. P. YOUSCHKEVITCH.

*Institut d'Histoire des Sciences et des Techniques
de l'Académie des Sciences de l'URSS, Moscou*

(10) P.S. — Après avoir achevé cet article, j'ai pris connaissance du programme manuscrit autographe du cours d'analyse infinitésimale, présenté par Cauchy en 1816 (conservé aux Archives de l'Académie des Sciences, papiers Ampère, carton n° IV, chemise n° 75). Ce document, de même que le programme du cours de Cauchy pour l'année 1819-1820, publié par Ch. Gilain (p. 142), contient les « Règles sur la convergence des séries ». Cela fait remonter les débuts de la théorie des séries infinies exposée dans l'*Analyse algébrique* au moins à 1816. Le programme de 1816 mentionne encore « la distinction des fonctions continues et discontinues », sûrement dans le sens de Cauchy (pas d'Euler !) ; c'était donc avant la parution du célèbre mémoire de Bolzano qui a le premier publié en 1817 la définition contemporaine de la notion d'une fonction continue. Enfin le programme manuscrit de 1816 contient une partie intitulée « Calcul aux différences finies » qui précède celle du « Calcul différentiel et intégral » et cela nous rappelle la structure analogue des *Institutiones calculi differentialis* d'EULER (sans parler de la divergence des conceptions générales de Cauchy et d'Euler). Cette partie du programme manuscrit ne figure plus dans la version abrégée du programme du cours de Cauchy de la même année 1816, conservée aux Archives de l'Ecole polytechnique.

J'ai tiré tous ces renseignements de copies de documents que m'a montrées très aimablement M. Bruno Belhoste qui prépare actuellement une thèse de Troisième Cycle sur la vie et la carrière scientifique de Cauchy et que je remercie de m'avoir autorisé à ajouter ce post-scriptum.