

De Didon à Lena en passant par Euler et Lagrange: une invitation au calcul des variations

Michael Goldman

6 octobre 2013

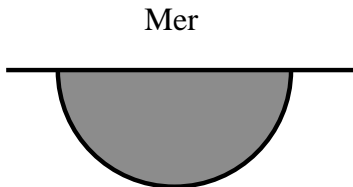
Exemple introductif : le problème de Didon

Selon Virgile, Didon aurait fondé la ville de Carthage au IX^{ème} siècle avant J.C. en achetant au roi Jarbas de Numidie autant de terrain qu'elle pourrait inclure dans une peau de boeuf

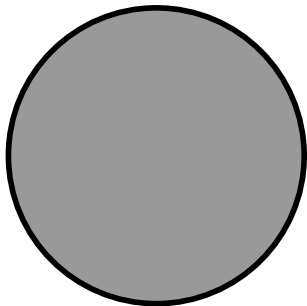


Dido Purchases Land for the Foundation of Carthage. Engraving by Matthäus Merian the Elder, in Historische Chronica, Frankfurt a.M., 1630. Dido's people cut the hide of an ox into thin strips and try to enclose a maximal domain.

Pour cela elle a résolu le problème **isopérimétrique** : maximiser l'aire à périmètre prescrit.



Il est connu depuis les grecs que la figure ayant la plus grande aire à périmètre fixé est le cercle mais la démonstration rigoureuse de ce résultat n'a été obtenue que par K. Weierstrass (1815-1897)



Problème isopérimétrique en dimension 3

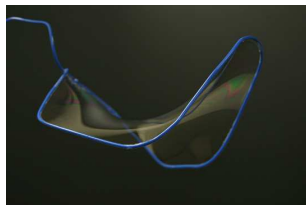
De façon similaire, la sphère minimise l'aire à volume fixé.



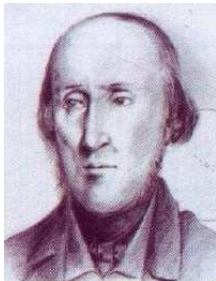
Ceci n'a été prouvé rigoureusement qu'en 1958 par
E. De Giorgi (1928-1996)!

Problème de Plateau

Les films de savon ont la plus petite aire s'appuyant sur un bord donné



Problème étudié en premier par le physicien
J. Plateau (1801-1883)



Autres exemples

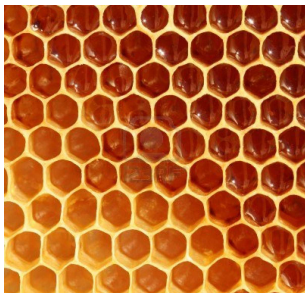


Nombreux autres exemples dans le livre d'Hildebrandt et Tromba, "Mathématiques et formes optimales"

Pavages minimaux

Problème : parmi tous les pavages réguliers du plan, trouver celui qui exige le moins de périmètre

Solution : pavage hexagonal



Les abeilles le savaient déjà !

En effet, comme le rapporte le soldat romain Marcus Terentius Varro, les abeilles construisent des rayons hexagonaux pour deux raisons :

- ▶ elles ont six pattes
- ▶ comme il a été démontré par les grecs, cela minimise le périmètre

En effet, comme le rapporte le soldat romain Marcus Terentius Varro, les abeilles construisent des rayons hexagonaux pour deux raisons :

- ▶ elles ont six pattes
- ▶ comme il a été démontré par les grecs, cela minimise le périmètre

Toutefois sa connaissance des abeilles était limitée car il écrit ensuite qu' "elles suivent leur **roi** partout où il va" ...

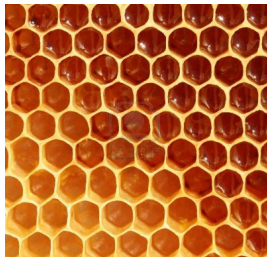
En effet, comme le rapporte le soldat romain Marcus Terentius Varro, les abeilles construisent des rayons hexagonaux pour deux raisons :

- ▶ elles ont six pattes
- ▶ comme il a été démontré par les grecs, cela minimise le périmètre

Toutefois sa connaissance des abeilles était limitée car il écrit ensuite qu' "elles suivent leur **roi** partout où il va" ...

Voir l'article "Les abeilles, petits génies du BTP" du Monde du 16/03/2013

L'optimalité du pavage hexagonal n'a cependant été démontrée mathématiquement qu'en 1999 par T. Hales (1958-) et des mathématiciens travaillent toujours sur ce problème millénaire



Pour plus d'informations sur ce type de problèmes, consulter le blog (en anglais)

<http://www.huffingtonpost.com/frank-morgan/>

Qu'est-ce que le calcul des variations ?

Cela consiste à étudier des problèmes de minimisation

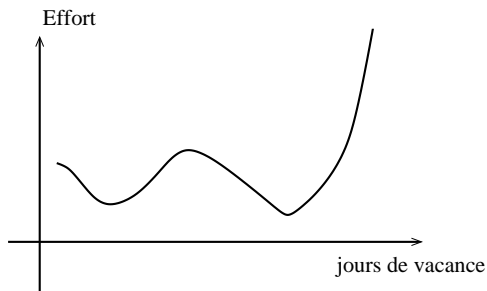
$$\min_{x \in X} f(x)$$

et à explorer les propriétés qualitatives des minimiseurs.

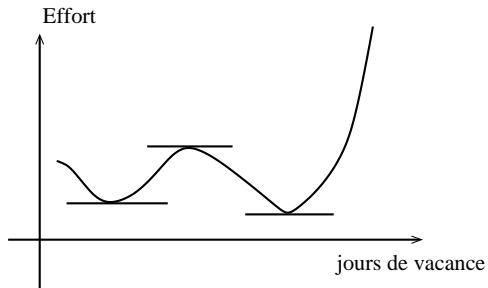
Dans les exemples précédents, l'espace X était l'espace des formes et f le périmètre. Nous allons voir qu'il y a des exemples d'applications dans de nombreux domaines tels que la physique, la mécanique, le traitement d'images ou la conception optimale de formes.

Une situation simple : minimisation d'une fonction d'une variable réelle

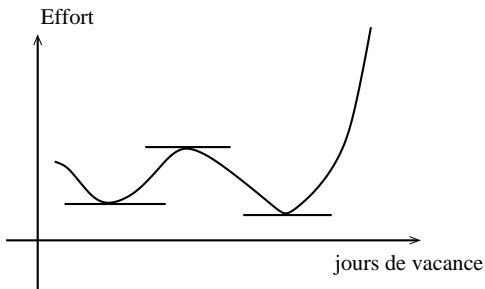
Imaginons que l'on veuille minimiser l'effort à fournir pour faire son devoir de maths :



On cherche d'abord les points où $f'(x) = 0$:



On cherche d'abord les points où $f'(x) = 0$:

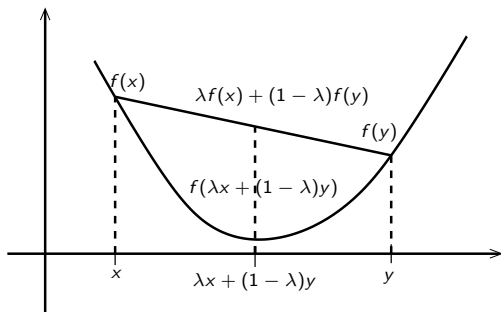


En général, pas suffisant : on obtient ainsi des points critiques qui pourraient être des maxima ou des points selle

Condition suffisante pour être un minimum : la convexité

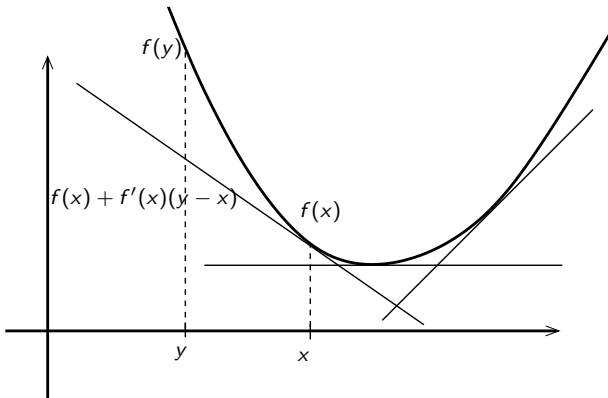
On dit que f est **convexe** si pour $\lambda \in [0, 1]$ et tout x, y

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$



Exemple : x^2 , $\sqrt{1 + x^2}$.

La convexité est équivalente au fait que f' est croissante ($f'' \geq 0$) ainsi qu'à être au-dessus de ses tangentes

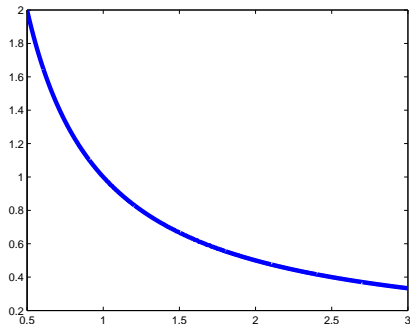


ce qui veut dire $f(y) \geq f(x) + f'(x)(y - x)$. En particulier, si $f'(x) = 0$, $f(y) \geq f(x)$ et donc

x tel que $f'(x) = 0 \implies x$ minimise f

Il existe des fonctions convexes qui n'ont pas de minimum !

Exemple : $\frac{1}{x}$, $\exp(-x)$...



Calcul des variations en 1 dimension d'espace

De nombreux problèmes de calcul des variations peuvent s'écrire sous la formes

$$\min \int_a^b L(t, u(t), u'(t)) dt$$

parmi toutes les fonctions u telles que $u(a) = A$ et $u(b) = B$.
On appelle souvent L le lagrangien du problème.

Calcul des variations en 1 dimension d'espace

De nombreux problèmes de calcul des variations peuvent s'écrire sous la formes

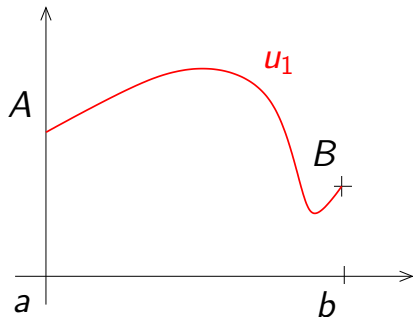
$$\min \int_a^b L(t, u(t), u'(t)) dt$$

parmi toutes les fonctions u telles que $u(a) = A$ et $u(b) = B$.
On appelle souvent L le lagrangien du problème. Remarquez que l'espace des fonctions est de dimension infinie !

Un premier exemple : trouver le chemin le plus court

On part d'un point (a, A) pour arriver à un point (b, B) en suivant le chemin $(t, u(t))$. La longueur parcourue est

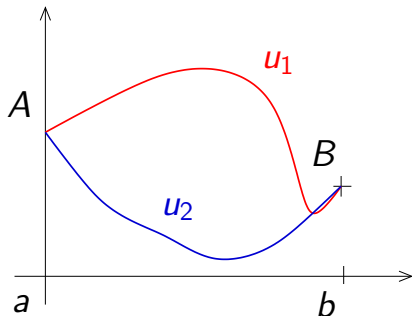
$$\int_a^b \sqrt{1 + u'(t)^2} dt$$



Un premier exemple : trouver le chemin le plus court

On part d'un point (a, A) pour arriver à un point (b, B) en suivant le chemin $(t, u(t))$. La longueur parcourue est

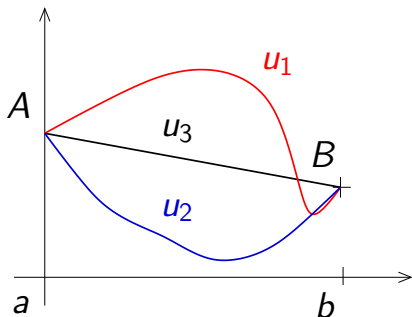
$$\int_a^b \sqrt{1 + u'(t)^2} dt$$



Un premier exemple : trouver le chemin le plus court

On part d'un point (a, A) pour arriver à un point (b, B) en suivant le chemin $(t, u(t))$. La longueur parcourue est

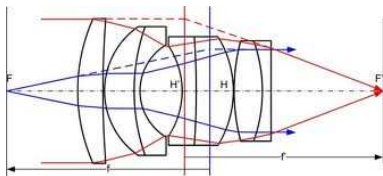
$$\int_a^b \sqrt{1 + u'(t)^2} dt$$



Le chemin le plus court est la ligne droite !

Application : principe de Fermat

En 1657, P. de Fermat (1601-1665) partant du principe que “La nature agit toujours par les voies les plus courtes et les plus simples” en déduit que la lumière se propage de façon à avoir un temps de parcours minimal et en conséquence, que la lumière se propage en **ligne droite**. C’est le fondement de l’optique géométrique.



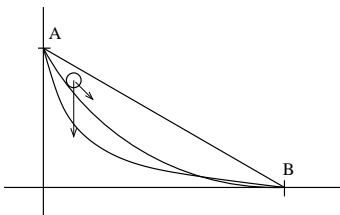
Extension : les géodésiques

Plus généralement on peut chercher le chemin le plus court sur une surface.



Exemple historique : le brachistochrone

Le problème est de trouver la courbe qu'un point matériel initialement au repos et soumis à une force de gravitation uniforme mettrait le moins de temps à descendre.



Ce problème a été considéré pour la première fois par G.Galiée (1564-1642)

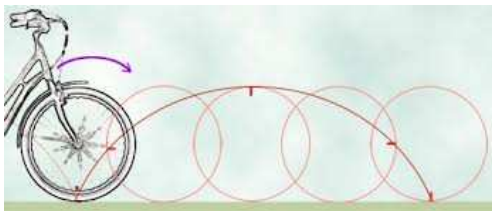
Il a été de nouveau proposé par Johann Bernoulli (1667-1748)
comme défi à son frère Jacob (1654-1705)



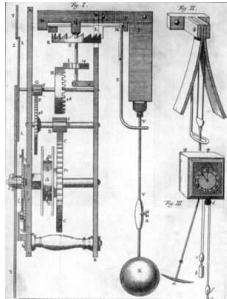
Le problème variationnel peut être mis sous la forme suivante

$$\min T(u) = \int_A^B \frac{\sqrt{1 + u'^2(x)}}{\sqrt{2gu(x)}} dx.$$

La solution est donnée par la cycloïde



Cette courbe avait déjà été beaucoup étudié notamment par C. Huygens (1629-1695) qui l'a utilisé pour construire des horloges très précises



La démonstration de Johann Bernoulli est basée sur les idées de P. de Fermat (1601-1665) qui ont ensuite été développées par P.L. de Maupertuis (1698-1759) et repris récemment par R. Feynman (1918-1988) en ce qu'on appelle

Le principe de moindre action



Voir Les cours de Physique de Feynman Tome 2 Chapitre 21

Le principe de moindre action en mécanique du point

Considérons un point $x(t)$ soumis à une force dérivant d'un potentiel $V(x)$
Le principe de moindre action stipule que la trajectoire suivie par x minimise

$$\mathcal{A}(x) := \int_0^T m \frac{x'(t)^2}{2} - V(x(t)) dt$$



En effet, si $x(t)$ minimise \mathcal{A} , pour tout autre trajectoire $y(t)$ et tout $\varepsilon \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{A}(x + \varepsilon y) \geq \mathcal{A}(x)$$

En effet, si $x(t)$ minimise \mathcal{A} , pour tout autre trajectoire $y(t)$ et tout $\varepsilon \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{A}(x + \varepsilon y) \geq \mathcal{A}(x)$$

Si on pose $\varphi(\varepsilon) = \mathcal{A}(x + \varepsilon y)$, la fonction φ a un minimum en $\varepsilon = 0$ donc

$$\varphi'(0) = 0$$

Rappel : $\varphi(\varepsilon) = \int_0^T m \frac{(x' + \varepsilon y')^2}{2} - V(x(t) + \varepsilon y(t)) dt.$

Rappel : $\varphi(\varepsilon) = \int_0^T m \frac{(x' + \varepsilon y')(t)^2}{2} - V(x(t) + \varepsilon y(t)) dt.$

Comme

$$m \frac{(x' + \varepsilon y')(t)^2}{2} = \frac{m}{2} x'(t)^2 + \varepsilon m x'(t) y'(t) + \varepsilon^2 \frac{m}{2} y'(t)^2$$

Rappel : $\varphi(\varepsilon) = \int_0^T m \frac{(x' + \varepsilon y')(t)^2}{2} - V(x(t) + \varepsilon y(t)) dt.$

Comme

$$m \frac{(x' + \varepsilon y')(t)^2}{2} = \frac{m}{2} x'(t)^2 + \varepsilon m x'(t) y'(t) + \varepsilon^2 \frac{m}{2} y'(t)^2$$

et

$$V(x + \varepsilon y) \approx V(x) + \varepsilon V'(x)y$$

Rappel : $\varphi(\varepsilon) = \int_0^T m \frac{(x' + \varepsilon y')(t)^2}{2} - V(x(t) + \varepsilon y(t)) dt.$

Comme

$$m \frac{(x' + \varepsilon y')(t)^2}{2} = \frac{m}{2} x'(t)^2 + \varepsilon m x'(t) y'(t) + \varepsilon^2 \frac{m}{2} y'(t)^2$$

et

$$V(x + \varepsilon y) \approx V(x) + \varepsilon V'(x)y$$

donc $\varphi'(0) = \int_0^T m x'(t) y'(t) - V'(x(t)) y(t) dt$

On a donc comme équation,

$$\int_0^T mx'(t)y'(t) - V'(x(t))y(t)dt = 0 \quad \forall y(t).$$

Par intégration par partie on obtient

$$\int_0^T [-mx''(t) - V'(x(t))]y(t)dt = 0 \quad \forall y(t).$$

D'où l'on retrouve la loi de Newton :

$$mx''(t) = -V'(x(t)).$$

Cette méthode a été développée par L. Euler (1707-1783) et J.L. Lagrange (1736-1813)



L'équation obtenue par Euler et Lagrange est équivalente au fait que pour toute variation $y(t)$, la fonction

$$\varphi(\varepsilon) = \mathcal{A}(x + \varepsilon y)$$

a une dérivée nulle en zéro.

L'équation obtenue par Euler et Lagrange est équivalente au fait que pour toute variation $y(t)$, la fonction

$$\varphi(\varepsilon) = \mathcal{A}(x + \varepsilon y)$$

a une dérivée nulle en zéro.

Comme on l'a vu précédemment, avoir une dérivée nulle est **nécessaire** mais non **suffisant** pour être un minimum.

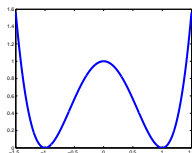
K. Weierstrass a développé des conditions suffisantes (de type convexité ou dérivée seconde strictement positive).

Un exemple de problème variationnel pour lequel il n'existe pas de solution

On considère l'exemple de L.C. Young (1905-2000),

$$J(u) = \int_0^1 (1 - |u'(x)|^2)^2 + u(x)^2 dx.$$

Le premier terme force $u'(x) \simeq 1$ ou $u'(x) \simeq -1$

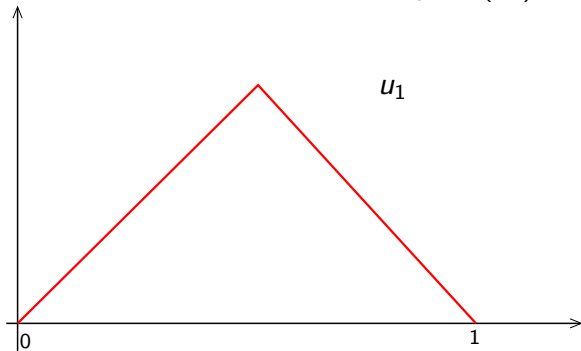


$$W(t) = (1 - t^2)^2.$$

tandis que le deuxième terme force $u \simeq 0$.

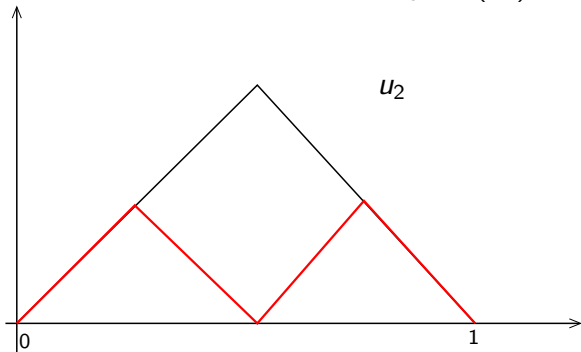
Une suite minimisante

Construisons une suite u_n telle que $J(u_n) \rightarrow 0$:



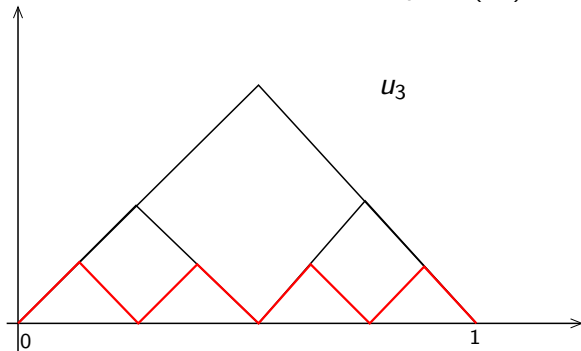
Une suite minimisante

Construisons une suite u_n telle que $J(u_n) \rightarrow 0$:



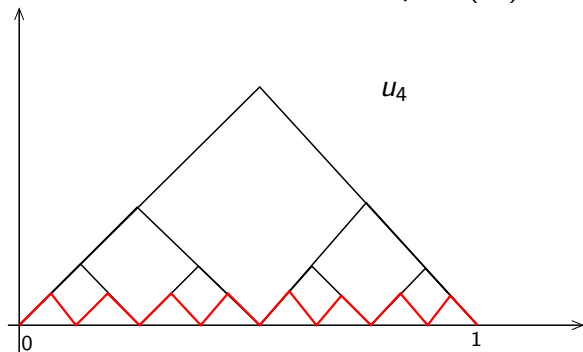
Une suite minimisante

Construisons une suite u_n telle que $J(u_n) \rightarrow 0$:



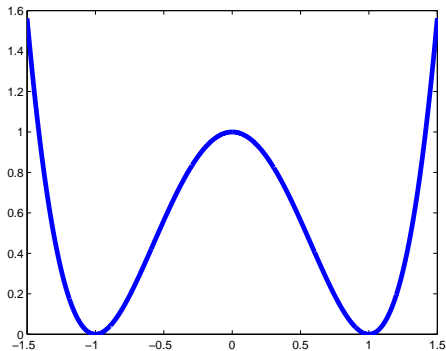
Une suite minimisante

Construisons une suite u_n telle que $J(u_n) \rightarrow 0$:



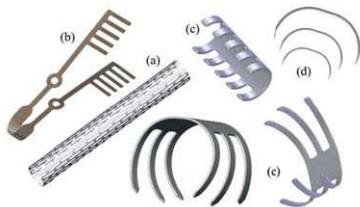
$|u'_n| = 1$ et $\max u_n \rightarrow 0$ donc $J(u_n) \rightarrow 0$ d'où $\inf J = 0$ mais
il n'existe aucune fonction telle que $u \equiv 0$ et $|u'| \equiv 1$!

La non existence vient de la non convexité de la fonction
 $W(t) = (1 - t^2)^2$



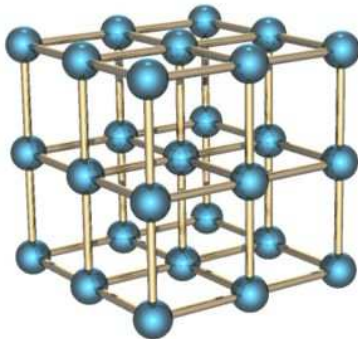
Les matériaux à mémoire de forme : une illustration physique de ce phénomène

Ce sont des métaux déformables à faible température mais qui reprennent leur forme originale une fois chauffés.



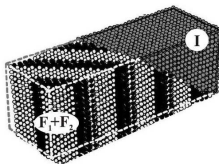
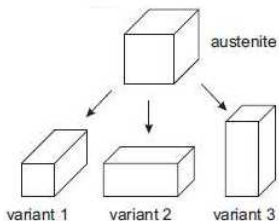
Ils ont de nombreuses applications, notamment en médecine.

A haute température, les atomes s'arrangent selon une configuration très symétrique et rigide.



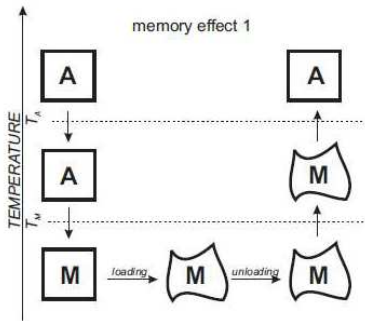
on a alors un comportement classique de métal non déformable

A plus faible température, la symétrie du crystal se brise et plusieurs configurations sont possibles

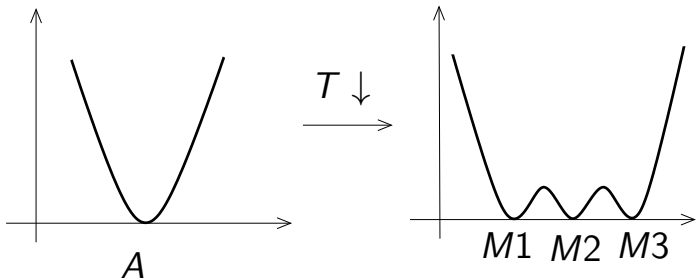


le matériau est alors moins rigide et peut être déformé.

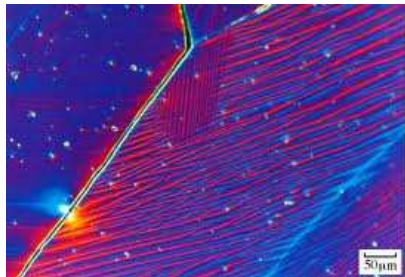
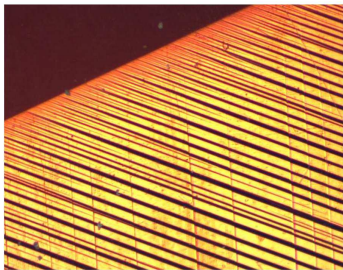
Lorsque le métal est refroidi, la situation redevient rigide et les atomes doivent “retrouver” leur place



Mathématiquement, c'est comme si on passait de la minimisation d'une fonction convexe à haute température à une fonction non convexe à basse température



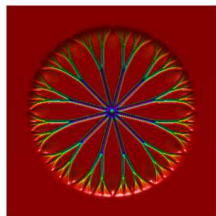
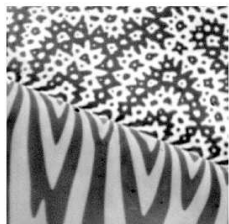
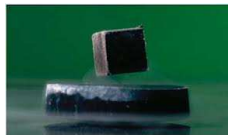
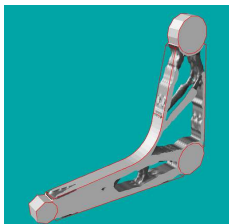
Comme dans l'exemple de L.C. Young vu précédemment, la non convexité se traduit par l'apparition de motifs oscillants



Pour plus de détails, voir l'article de vulgarisation

http://www.mathematik.uni-wuerzburg.de/~schloemer/pdf/publications_popular/Formulas-for-Shapes-small.pdf

Le calcul des variations a de nombreuses autres applications





"Les bulles de savon" J.B.S. Chardin

Merci pour votre attention !

vous pouvez retrouver les transparents à l'adresse
[http ://personal-homepages.mis.mpg.de/goldman/talks.html](http://personal-homepages.mis.mpg.de/goldman/talks.html)