

# Surfaces minimales et mouvement par courbure moyenne

Michael Goldman

15 septembre 2010

# Sommaire

## Problème de Plateau et surfaces minimales

Introduction au problème

Les Courants

L'approche de De Giorgi

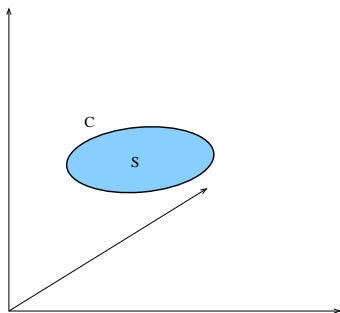
Approximation par Allen-Cahn

## Mouvement par courbure moyenne

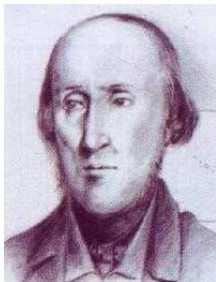
## Conclusion

# Problème de Plateau et surfaces minimales

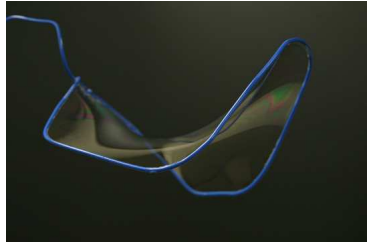
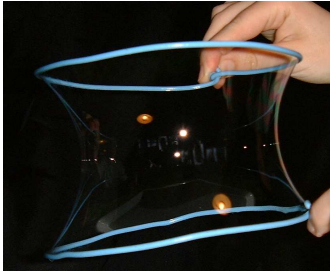
Problème : soit  $C$  une courbe fermée de l'espace, trouver la surface  $S$  d'aire minimale ayant  $C$  comme frontière



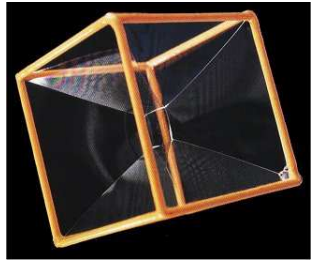
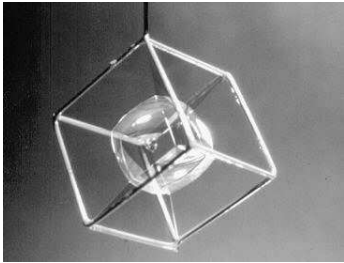
# Problème lié aux films de savons, étudié en premier par Joseph Plateau 1801-1883



# Exemples



# Exemples



## Derniers exemples



Nombreux autres exemples dans le livre d'Hildebrandt et Tromba, "Mathématiques et formes optimales"

# Formulation mathématique du problème

## Définition

Soit  $\Omega$  un domaine de  $\mathbb{R}^2$  et  $v$  une fonction de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}^3$ ,  
 $S = v(\overline{\Omega})$  est appelée *surface paramétrique*.

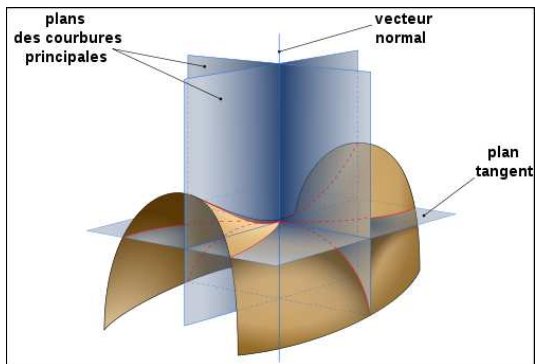
Son aire est donnée par

$$\mathcal{A}(S) = \int_{\Omega} |v_x \wedge v_y|$$

Pb : minimiser  $\mathcal{A}$  parmi tous les  $v$  tels que  $\partial S = C$ .



# Courbure moyenne



## Définition

Soit  $k_1$  et  $k_2$  les courbures principales de la surface  $S$ , on appelle *courbure moyenne* de  $S$

$$\kappa = \frac{k_1 + k_2}{2}$$

## Définition

Soit  $S$  une surface régulière alors si

$$E = |\mathbf{v}_x|^2 \quad F = \langle \mathbf{v}_x, \mathbf{v}_y \rangle \quad G = |\mathbf{v}_y|^2 \quad \nu = \frac{\mathbf{v}_x \wedge \mathbf{v}_y}{|\mathbf{v}_x \wedge \mathbf{v}_y|}$$
$$L = \langle \nu, \mathbf{v}_{xx} \rangle \quad M = \langle \nu, \mathbf{v}_{xy} \rangle \quad N = \langle \nu, \mathbf{v}_{yy} \rangle$$

On a

$$\kappa = \frac{1}{2} \frac{EN - 2FM + GL}{EG - F^2}$$

## Proposition

*Une surface régulière minimisant l'aire est de courbure moyenne nulle.*

## Définition

*On appelle **surface minimale** une surface régulière de courbure moyenne nulle.*

## Remarque

*Une surface minimale ne minimise pas forcément l'aire !!!*

## Théorème (Douglas, Rado, 1931)

*Soit  $C$  une courbe de Jordan rectifiable alors il existe une surface minimale de  $\mathbb{R}^3$  de bord  $C$ .*

Pour une introduction à ce problème, voir Dacorogna  
“Introduction to The Calculus of Variations”.

# Une remarque sur le cas des graphes

Si on cherche la solution parmi les graphes de la forme  $(x, u(x))$  l'équation sur  $u$  devient

$$-\operatorname{div} \frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} = 0$$

C'est ce qu'on appelle l'équation de courbure moyenne prescrite.

Pour l'étude de l'existence, l'unicité et la régularité, voir Gilbarg-Trudinger, "Elliptic PDE of Second Order".

## Limites de cette approche

- ▶ Répond pas exactement au problème de départ
- ▶ Limité à la dimension 3
- ▶ Genre de la solution imposé a priori
- ▶ Méthode paramétrique (non intrinsèque)
- ▶ Trop grande régularité imposée

# La méthode des courants de Federer et Fleming 1960

**Idée** : Surfaces permettent d'intégrer des formes différentielles  
⇒ on peut l'utiliser pour définir des "distributions".



Fig.: Federer et Fleming



## Définition

*Une 2-forme différentielle  $\varphi$  sur une variété  $M$  de dimension 2 est une fonction qui à chaque point  $x$  de  $M$  associe une forme linéaire sur l'espace tangent  $TM(x)$ .*

Pour toute variété orientée  $M$  de dimension 2,

$$M(\varphi) = \int_M \varphi$$

est une forme linéaire continue sur l'espace des 2-formes différentielles.

## Définition

*Une forme linéaire continue sur l'espace des 2-formes différentielles est appelée un **2-courant**.*

- ▶ Pour certains courants on peut définir les concepts d'aire, de frontière et de courbure moyenne.
- ▶ Il existe des résultats de compacité pour les courants
- ▶ Permet donc de donner une solution faible au problème de Plateau

**Problème** : Régularité des solutions ?

⇒ existence de résultats mais difficile.

ex : “Almgren’s Big Regularity Paper”, 955 pages !!!

Biblio :

- ▶ Almgren, “Plateau’s Problem, An invitation to Varifold Geometry”
- ▶ Morgan, “A beginner’s guide to Geometric Measure Theory”
- ▶ Federer, “Geometric Measure Theory”.

# Les ensembles de périmètre fini, l'approche de De Giorgi $\approx$ 1955



Fig.: Ennio De Giorgi

**Idée** : définir à l'aide des outils de la théorie de la mesure, tous les concepts géométriques tels que la normale, le plan tangent etc..

- ▶ Une approche plus géométrique et plus “simple”.
- ▶ Possède des liens avec l'approche de Federer

Difficulté :

- ▶ Deux ensembles égaux à un ensemble de mesure nulle près peuvent avoir une frontière topologique très différente

## Définition

Soit  $\Omega$  un ensemble borné de  $\mathbb{R}^n$ , on dira que  $E$  est un ensemble de périmètre fini dans  $\Omega$  si

$$P(E, \Omega) = \sup \left\{ \int_E \operatorname{div} \varphi \quad / \quad \varphi \in C_c^1(\Omega) \text{ et } |\varphi|_\infty \leq 1 \right\} < +\infty$$

## Remarque

- ▶ Si  $E$  est de classe  $C^2$ , par la formule de Gauss-Green,

$$\int_E \operatorname{div} \varphi = \int_{\partial E} \varphi \cdot \nu$$

- ▶ Pour un objet de dimension 3, le périmètre défini ici correspond à l'aire de sa frontière.

## Proposition (Semi-continuité)

*Soit  $E_n$  une suite d'ensembles de périmètre fini convergeant dans  $L^1_{loc}$  vers  $E$  alors*

$$P(E, \Omega) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} P(E_n, \Omega)$$

## Proposition (Compacité)

*Soit  $\Omega$  ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$  à bord lipschitz. Si  $E_n$  est une suite d'ensembles de périmètre fini avec*

$$\sup_n P(E_n, \Omega) < +\infty$$

*alors on peut en extraire une sous-suite convergeant dans  $L^1(\Omega)$ .*

## Théorème (Existence de solutions)

*Soit  $\Omega$  un ensemble ouvert borné à bord lipschitz et  $L$  un ensemble de périmètre fini. Alors il existe un ensemble  $E$  coïncidant avec  $L$  en dehors de  $\Omega$  et tel que*

$$P(E) \leq P(F)$$

*pour tout ensemble  $F$  avec  $F = L$  en dehors de  $\Omega$ .*

## Définition

- ▶ Soit  $E$  un ensemble de périmètre fini dans  $\Omega$ . On appellera *frontière* de  $E$  l'ensemble  $\partial E$  des points  $x \in \Omega$  tels que

$$0 < |\bar{E} \cap B_\rho(x)| < |B_\rho(x)| \quad \forall \rho > 0$$

- ▶ On appellera *frontière réduite* de  $E$ , l'ensemble  $\partial^* E$  des points  $x$  tels que

$$\nu_E(x) = - \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \frac{D\chi_E(B_\rho(x))}{|D\chi_E|(B_\rho(x))} \quad \text{existe et } |\nu_E(x)| = 1$$

$\nu_E$  est la *normale externe* à  $E$ .



# Théorème de régularité

## Théorème

*Soit  $E$  un ensemble minimisant le périmètre. L'ensemble  $\partial^* E$  est un ensemble ouvert analytique de  $\partial E$ . De plus, la dimension de Hausdorff de l'ensemble singulier  $\partial E \setminus \partial^* E$  est au plus  $n - 8$ .*

*Si  $n \leq 7$ , cela veut dire que les surfaces minimales sont analytiques.*

# Espace $BV$

## Définition

Soit  $u$  une fonction de  $L^1(\Omega)$ . On dit qu'elle est à variation bornée si

$$\int_{\Omega} |Du| = \sup \left\{ \int_{\Omega} u \operatorname{div} \varphi \quad / \quad \varphi \in \mathcal{C}_c^1(\Omega) \text{ et } |\varphi|_{\infty} \leq 1 \right\} < +\infty$$

On appelle  $BV(\Omega)$  l'espace des fonctions à variation bornée.

## Remarque

Pour un ensemble de périmètre fini,  $P(E, \Omega) = \int_{\Omega} |D\chi_E|$ .

Biblio :

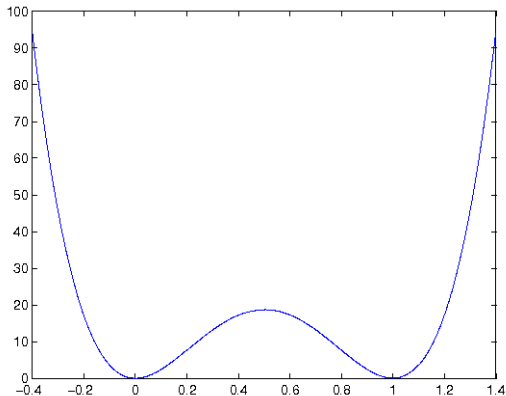
- ▶ Giusti “Minimal Surfaces and Functions of Bounded Variation”
- ▶ Ambrosio-Fusco-Pallara “Functions of Bounded Variation and Free Discontinuity Problems”
- ▶ Ambrosio “Corso introduttivo alla teoria geometrica della misura ed alle superficie minime”

# Approximation par l'équation d'Allen-Cahn

Soit

$$E_\varepsilon(u) = \int_{\Omega} \varepsilon \frac{|\nabla u|^2}{2} + \frac{W(u)}{\varepsilon}$$

Où  $W$  est un potentiel double puit.



## Proposition (Modica-Mortola)

Soit  $u_\varepsilon$  un minimiseur de  $E_\varepsilon$  tel que  $\sup_\varepsilon E_\varepsilon(u_\varepsilon) < +\infty$  alors à une sous-suite extraite près,  $u_\varepsilon$  converge vers  $\chi_E$  dans  $L^1$  où  $E$  est un minimiseur de  $c_W P(E)$  avec

$$c_W = \int_0^1 \sqrt{2W(t)} dt$$

De plus,  $E_\varepsilon(u_\varepsilon) \rightarrow c_W P(E)$

## Idée de la preuve

Rappelons que  $E_\varepsilon(u) = \int_\Omega \varepsilon \frac{|\nabla u|^2}{2} + \frac{W(u)}{\varepsilon}$ .

Comme  $A^2 + B^2 \geq 2AB$ ,

$$\begin{aligned} E_\varepsilon(u_\varepsilon) &\geq \sqrt{2} \int_\Omega \sqrt{W(u_\varepsilon)} |\nabla u_\varepsilon| \\ &= \sqrt{2} \int_\Omega |D\Phi(u_\varepsilon)| \end{aligned}$$

Où  $\Phi$  est telle que  $\Phi' = \sqrt{W}$ .

Implique la compacité car

$$\sup E_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq C \implies \Phi(u_\varepsilon) \text{ bornée dans BV}$$

Il faut en déduire que

$$\blacktriangleright u_\varepsilon \longrightarrow u_0 = \chi_E$$

$$\begin{aligned}\blacktriangleright \Phi(u_\varepsilon) &\longrightarrow \Phi(u_0) = \Phi(1)\chi_E + \Phi(0)\chi_{E^c} \\ &= \Phi(0) + [\Phi(1) - \Phi(0)]\chi_E\end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned}\liminf E_\varepsilon(u_\varepsilon) &\geq \sqrt{2} \int_{\Omega} |D\Phi(u_0)| = \sqrt{2}(\Phi(1) - \Phi(0)) \int_{\Omega} |D\chi_E| \\ &= c_W P(E)\end{aligned}$$

Il s'agit ensuite de démontrer l'inégalité inverse.

# La Gamma Convergence

L'exemple précédent est un résultat de Gamma convergence.

Théorie plus vaste qui s'applique aux

- ▶ problèmes d'homogénéisation
- ▶ différents problèmes de segmentation
- ▶ problèmes aux discontinuités libres
- ▶ passage du discret au continu (en particulier pour les algorithmes numériques)



## biblio

Pour plus de détails sur la Gamma Convergence et d'autres exemples voir le livre de Braides "Gamma convergence for Beginners"

Sur la fonctionnelle d'Allen-Cahn voir Braides et l'article de Modica "Gradient Theory of phase transitions etc..." ainsi que celui de Kohn et Sternberg "Local minimisers and singular perturbations"

# Généralisations

On peut s'intéresser plus généralement aux points critiques de l'énergie d'Allen-Cahn et essayer de comprendre leur lien avec les points critiques du périmètre.

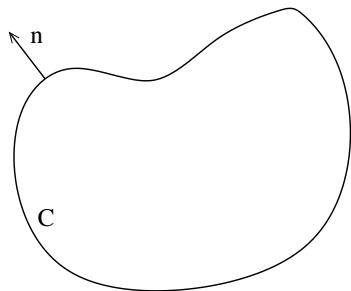
Pour cela, voir les travaux (difficiles) de Tonegawa

## Remarque

*Ces travaux utilisent le langage des varifolds  $\simeq$  courants*

# Quelques mots sur le mouvement par courbure moyenne

Soit  $C$  une courbe fermée



Elle évolue par courbure moyenne si chacun de ses points bouge selon la normale avec une vitesse

$$V(x) = \kappa(x)$$

# Le flot par courbure moyenne vu comme flot de gradient du périmètre

Soit  $\xi$  un champ de vecteur et  $E_t = (Id + t\xi)(E)$  alors

$$P(E_t) = P(E) - t \int_{\partial E} \kappa (\xi \cdot \nu) + o(t)$$

Pour suivre le gradient du périmètre il faut faire évoluer chaque point du bord de  $E$  dans la direction de la normale avec une vitesse proportionnelle à la courbure moyenne.

# Définition des solutions

Problème difficile car des singularités peuvent apparaître.

Différentes approches ont été proposées :

- ▶ par les varifolds dans les travaux de Brakke
- ▶ à l'aide des level-sets par Evans et Spruck et indépendamment par Chen Giga et Goto
- ▶ approche type flot de gradient par Almgren Taylor et Wang ainsi que Luckhaus et Sturzenhecker

Intérêt de ces définitions : souvent liées à du numérique

# Les Level-sets

Idée : représenter  $\partial E$  par le niveau 0 d'une certaine fonction  $\varphi$  et de définir l'évolution sur  $\varphi$ .

Par exemple, on peut prendre

$$\varphi(x) = sd(x, \partial E)$$

où  $sd(x, \partial E)$  est la distance signée à  $\partial E$ .

On trouve comme équation

$$\varphi_t = |\nabla\varphi| \operatorname{div} \left( \frac{\nabla\varphi}{|\nabla\varphi|} \right)$$

En effet

- ▶  $\frac{\varphi_t}{|\nabla\varphi|}$  est la vitesse normale d'une ligne de niveau
- ▶  $\operatorname{div} \left( \frac{\nabla\varphi}{|\nabla\varphi|} \right)$  est la courbure d'une ligne de niveau

On montre l'existence de solutions à cette équation par la théorie des **solutions viscosité** et on considère

$$C(t) = \varphi(t)^{-1}(0)$$

comme solution du mouvement par courbure moyenne.

Il s'agit ensuite de démontrer que l'évolution ne dépend pas du choix de  $\varphi$ .



# L'approche par flot de gradient

Rappelons que pour une fonction  $F$  convexe et lisse  
l'algorithme d'Euler implicite de descente de gradient s'écrit

$$x_{n+1} = x_n - h \nabla F(x_{n+1})$$

Ceci équivaut à

$$x_{n+1} = \operatorname{argmin} \left\{ F(x) + \frac{1}{2h} |x - x_n|^2 \right\}$$

L'analogie pour le périmètre devient

$$E_{n+1} = \operatorname{argmin} \left\{ P(E) + \frac{1}{h} \int_E sd(x, \partial E_n) \right\}$$

### Proposition

*Sous les bonnes hypothèses, lorsque  $h$  tend vers 0, la suite  $E_n$  tend vers le mouvement par courbure moyenne.*

# Approximation par Allen Cahn

Comme pour le cas stationnaire, Ilmanen puis beaucoup d'autres ont montré que

$$u_t = -\nabla E_\varepsilon(u)$$

converge vers le mouvement par courbure moyenne quand  $\varepsilon \rightarrow 0$

## biblio

En plus des articles des auteurs déjà cités on peut aller voir le livre d'Ambrosio "Calculus of variations and PDEs" ainsi que les travaux de Barles et Souganidis

Pour le numérique voir Sethian "Level sets methods", les travaux de Chambolle et la thèse de Bretin.

# Conclusion

Énormément de problèmes non abordés ici. Par exemple

- ▶ optimisation de formes
- ▶ homogénéisation
- ▶ transport optimal
- ▶ différents problèmes issus de la physique.  
Ex : Ginzburg-Landau, magnétisme, élasticité
- ▶ applications en traitement d'images
- ▶ problèmes aux frontières libres.  
Ex : problème de l'obstacle
- ▶ autres problèmes de mouvements d'interfaces
- ▶ théorie du contrôle
- ▶ ...

Merci pour votre attention, la prochaine fois c'est à vous !