

# Homogénéisation de termes sources en présence de fort contraste

Grégoire Allaire  
École Polytechnique

Marc Briane  
INSA de Rennes  
& IRMAR

Yves Capdeboscq  
Université de Versailles  
Saint-Quentin-en-Yvelines

## 1. Introduction

Nous nous intéressons au comportement en temps long d'un site de stockage souterrain en présence de fuites. La Figure 1 on page 1 représente un premier modèle de ce type. La largeur du domaine est de l'ordre du kilomètre, alors que le diamètre des modules dans lesquels sont déposés les combustibles usés est de l'ordre de la centaine de mètres. la couche d'argile ( $\mu_0$  sur la Figure Figure 1 on page 1) a une hauteur d'environ 150 mètres alors que les modules eux-mêmes sont d'environ 5 mètres de haut. Dans chaque module, de 10 à 15 barres de combustibles sont entreposées horizontalement (perpendiculairement à l'axe de la figure). On doit donc prendre en compte deux échelles, celle du module et celle des barres combustibles. Il s'agit d'une approche alternative du modèle déjà étudié par Bourgeat, Gipouloux, et Marusic-Paloka [3].

## 2. Modèle à deux échelles

Supposons pour commencer que l'on peut négliger l'influence de la plus petite échelle. La seule échelle considérée est notée  $\varepsilon$ . Il faut prendre en compte:

- Le comportement en temps courts & long.
- Modéliser des sources concentrées dans une petite zone.

### 2.1 Variations lentes en temps, fortes en espace

Par exemple un terme source de la forme  $f_\varepsilon(t, x) = g(\varepsilon^2 t, \frac{x}{\varepsilon}) \chi(\frac{x_n}{\varepsilon})$  et une conductivité  $A_\varepsilon = \varepsilon^2 (a(\frac{x}{\varepsilon}) \chi(\frac{x_n}{\varepsilon}) + B(x))$  où  $\chi(y) = 1 \Leftrightarrow |y| < 1$ .

Le premier ordre du développement asymptotique (dans une bande infinie  $G$ ) donne

$$-\text{div}((a(y)\chi(y_n) + B(0)) \nabla \psi_\tau(y)) + \lambda \omega(y) \psi_\tau(y) = g(\tau, y) \chi(y_n)$$

avec  $\psi_\tau(y', y_n)$  périodique en  $y'$ .

Comme ce problème est indépendant de l'échelle macroscopique, cela mène à un profil factorisé

$$\phi_\varepsilon \approx u(t/\varepsilon^2, x) \psi_\tau(\frac{x}{\varepsilon}).$$

Il faut  $\lim_{y_n \rightarrow \pm\infty} \psi \neq 0$ . (par exemple  $y \rightarrow \omega(y)$  a support compact). Avec  $\omega_\varepsilon(x) = \omega(\frac{x}{\varepsilon}) \chi(\frac{x_n}{\varepsilon}) / \varepsilon^2 + \omega_1(x)$ , le modèle est ainsi

$$\begin{cases} \omega_\varepsilon \frac{\partial \phi_\varepsilon}{\partial t} - \text{div}(A_\varepsilon \nabla \phi_\varepsilon) + \lambda \omega_\varepsilon \phi_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^2} f(\varepsilon^2 t, \frac{x}{\varepsilon}) \chi(\frac{x_n}{\varepsilon}) \text{ dans } \Omega, \\ \phi_\varepsilon = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \\ \phi_\varepsilon(t=0) = \phi_0^\varepsilon(x) \text{ dans } \Omega. \end{cases}$$

On montre alors que

$$\phi_\varepsilon(t, x) = \phi_\varepsilon(t/\varepsilon^2, x) \psi(t, x/\varepsilon), \text{ avec } \phi_\varepsilon \rightarrow u_0 \text{ solution de}$$

$$\begin{cases} -\text{div}(B(x) \nabla u_0) + \lambda \omega_1(x) u_0 = 0 \text{ dans } \Omega, \\ u(x', 0) = 1, \\ u(x) = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

C'est un modèle quasi-statique, qui ne présente pas de caractéristiques temporelles satisfaisantes

### 2.2 Un modèle à fort contraste

On suppose maintenant  $\omega_\varepsilon > c > 0$ . Le modèle est alors

$$\begin{cases} \omega_\varepsilon(x) \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - \text{div}(A_\varepsilon(x) \nabla u_\varepsilon) + \lambda \omega_\varepsilon(x) u_\varepsilon = f_\varepsilon(x), \text{ in } \Omega \\ u_\varepsilon = 0, \text{ on } \partial\Omega, \\ u_\varepsilon(t=0) = \Phi_\varepsilon(x), \text{ in } \Omega. \end{cases} \quad (1)$$

La densité est notée  $u_\varepsilon$ , et  $\varepsilon$  représente l'échelle des barres (confondue avec celle des modules)

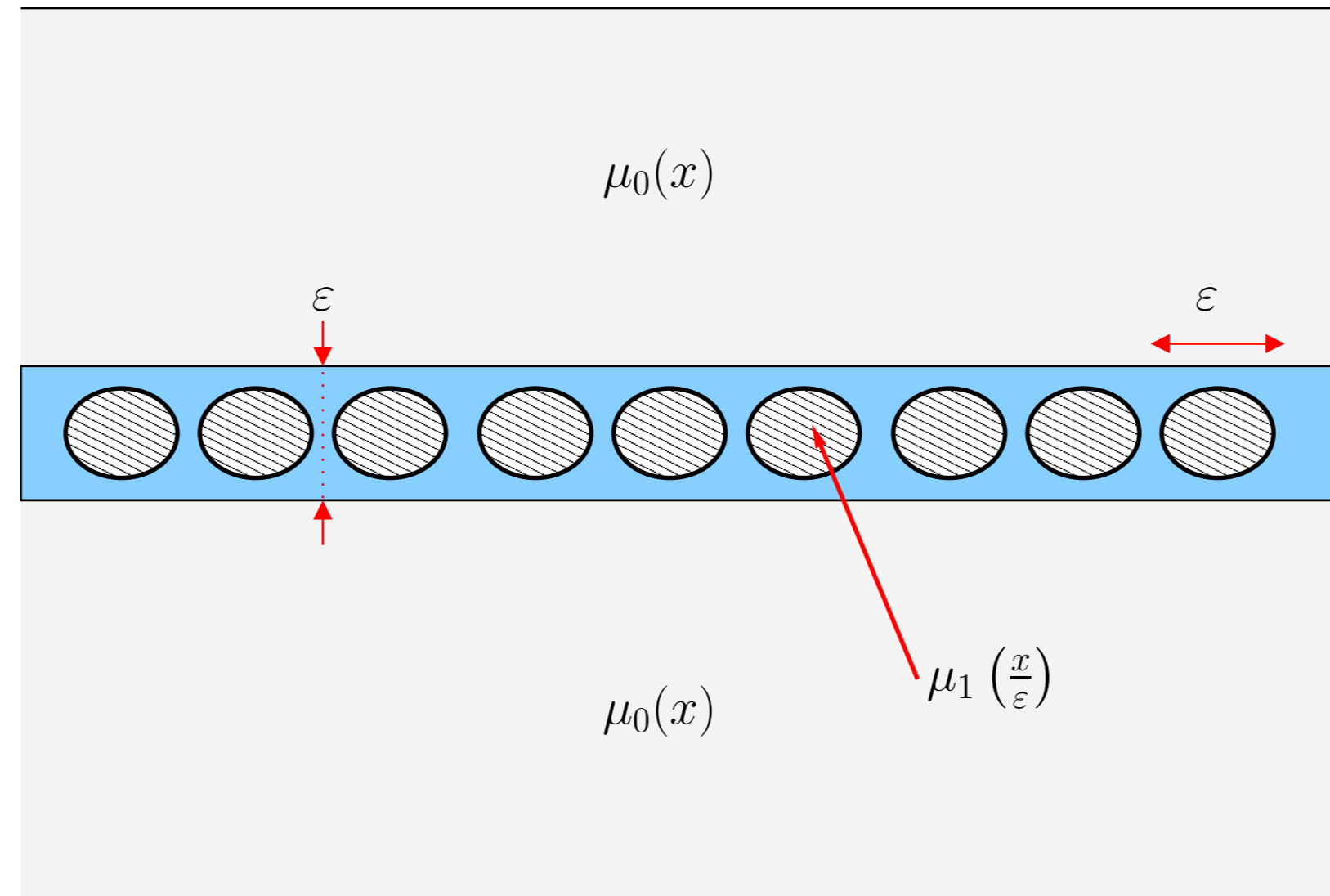


Figure 1: Description du milieu à deux échelles

On peut montrer que

$$\|u_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \|\sqrt{A_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^N)} \leq C\sqrt{\varepsilon}$$

Ans si  $\mu_\varepsilon > c > 0$  uniformément en  $\varepsilon$ , le modèle homogénéisé est  $u = 0$ .

On suppose donc que  $\mu_\varepsilon \rightarrow 0$  près de la source. la taille critique à choisir est donnée par la Convergence Deux Échelles pour les Couches Limites (Allaire & Conca [2]), c'est  $A_\varepsilon \approx \varepsilon^2$  près de la source.

$$\text{Pour } x \text{ dans } \Omega \text{ s.t. } |x_n| > \varepsilon, A_\varepsilon(x) = \mu_0(x), \text{ et } \omega_\varepsilon(x) = \omega_0(x) \quad (2)$$

Pour  $x$  dans  $\Omega$  tel que  $|x_n| < \varepsilon$ ,

$$A_\varepsilon(x) = \varepsilon^2 \mu_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \text{ et } \omega_\varepsilon(x) = \omega_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \quad (3)$$

Avec la notation  $Y = [0, 1]^n$ .

On suppose de plus que pour tout  $\xi \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\alpha |\xi|^2 \leq \mu_i \xi \cdot \xi \leq \beta |\xi|^2 \quad i = 0, 1. \quad (4)$$

Les termes sources  $f_\varepsilon$  et  $\Phi_\varepsilon$  sont localisés dans la bande de la taille  $\varepsilon$ , loin du bord. Sous ces hypothèses, nous pouvons caractériser le comportement de  $u_\varepsilon$  dans tout le domaine.

**Théorème 2.1.** Sous les hypothèses ci-dessus, la solution  $u_\varepsilon$  du système (1) admet une limite  $u_0$  au sens de la convergence "2ECL" (cf. Proposition 3.1). La limite  $u_0$  est l'unique solution dans  $L^2(0, T, H_{loc}^1(\mathbb{R}^n))$  du problème

$$\omega(y) \frac{\partial u_0}{\partial t} - \text{div}_y(\mu_1(y) \nabla_y u_0) + \lambda \omega(y) u_0 = F_0(y)$$

avec  $u_0(t, y) = 0$  on  $(0, T) \times |y_n| = 1, (y_1, \dots, y_{n-1}) \rightarrow u(\cdot, y_1, \dots, y_{n-1}, \cdot) [0, 1]^{n-1}$  périodique et  $u_0(t=0) = \Phi_0(y)$ .

De plus,  $\frac{1}{\varepsilon} (1 - \chi(\frac{x}{\varepsilon})) u_\varepsilon$  converge fortement dans  $L^2(0, T, L^2(\Omega))$  vers  $u_1$  et  $\frac{1}{\varepsilon} (1 - \chi(\frac{x}{\varepsilon})) \nabla u_\varepsilon$  converge faiblement dans  $L^2(0, T, L^2(\Omega)^N)$  vers  $\nabla u_1$ , où  $u_1$  est l'unique solution dans  $H_0^1(\Omega)$  de

$$\omega_0(x) \frac{\partial u_1}{\partial t} - \text{div}(A_0(x) \nabla u_1) + \lambda \omega_0(x) u_1 + s^*(t) \delta_{x_n=0} = 0$$

avec  $u_1(t=0) = 0$ , et où le terme source  $s^*$  est donné par

$$s^*(t) = \int_{[0,1]^{n-1}} \left[ \mu_1(y', y_n) \frac{\partial u_0}{\partial x_n}(t, y', y_n) \right]_{y_n=-1}^{y_n=1} dy'.$$

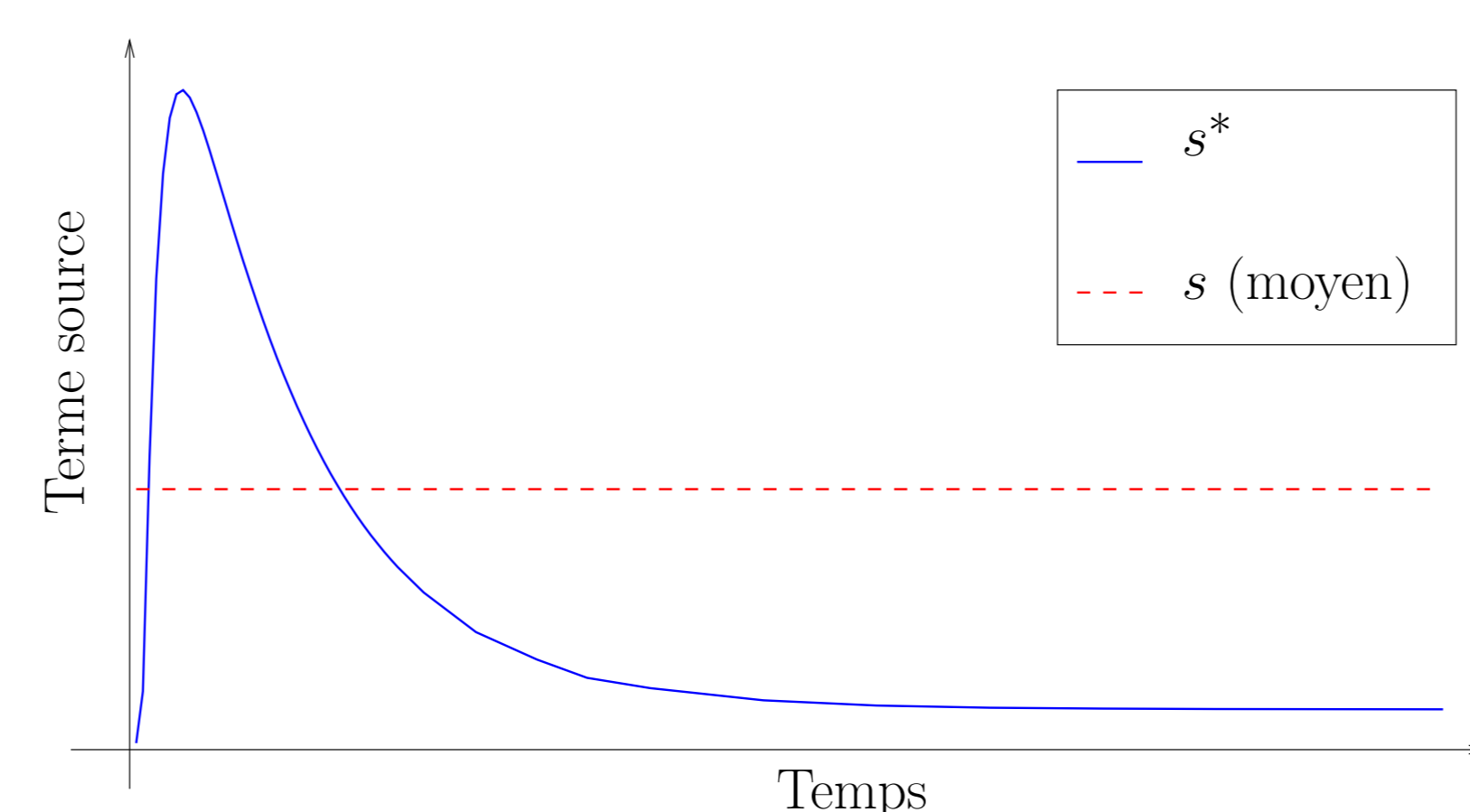


Figure 2: Terme source effectif / moyen

On remarque un effet amplificateur de la source en temps court. Sur la Figure 2, une source "moyenne", c'est à dire calculée comme solution stationnaire du problème de cellule périodique est aussi représentée.

## 3. Modèle à trois échelles

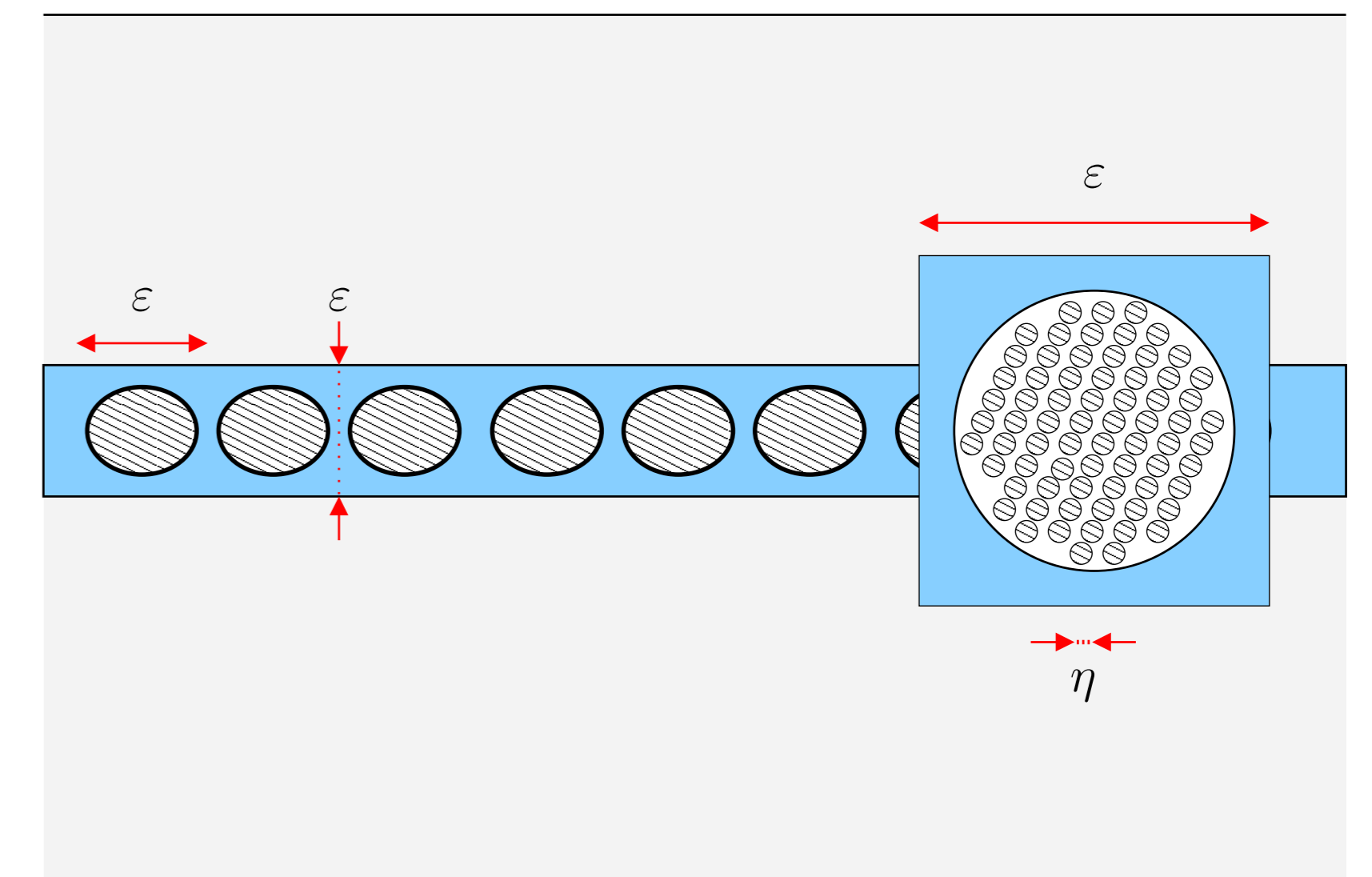


Figure 3: Description du milieu à trois échelles

On note la plus petite échelle  $\eta$ .

### 3.1 Modèle à fort contraste généralisé

On suppose maintenant que la perméabilité dans la zone de stockage est de la forme

$$\varepsilon^2 \mu_1\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{x}{\eta}\right)$$

Supposons que les échelles  $\varepsilon, \eta$  sont des fonctions de  $\varepsilon$  qui tendent vers 0 avec  $\varepsilon$ , et qu'elles sont bien séparées (par exemple  $\eta = \varepsilon^\alpha$  avec  $\alpha > 2$ ). On utilise alors la convergence réitérée pour les couches limites, version généralisée (comme Allaire-Briane [1]) de [2].

**Proposition 3.1.** Soit  $u_\varepsilon$  une suite dans  $L^2(\Omega)$  telle que

$$\|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq C\sqrt{\varepsilon}.$$

Il existe une sous-suite, indexée aussi par  $\varepsilon$ , et une limite  $u_0(x', y, z) \in L^2(\Sigma; L_{\#}^2(G \times Y))$  telle que  $u_\varepsilon$  converge faiblement trois échelles au sens des couches limites vers  $u_0$  cest à dire

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} u_\varepsilon(x) \varphi\left(x', \frac{x}{\varepsilon}, \frac{x}{\eta}\right) dx = \frac{1}{|Y^\eta|} \int_{\Sigma} \int_G \int_Y u_0(x', y, z) \varphi(x', y, z) dx' dy$$

pour toute fonction test  $\varphi(x', y, z) \in L_{\#}^2(\Sigma; C(G \times Y))$ .

Le modèle effectif est celui attendu, et correspondant à l'étude précédente: l'homogénéisation des échelles inférieures se produit d'abord, indépendamment des phénomènes de couches limites.

### 3.2 Fort contraste sur l'échelle la plus faible

Cela correspond à une perméabilité dans la bande de taille  $\varepsilon$  de la forme

$$\mu_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \left(1 - \chi\left(\frac{x}{\eta}\right)\right) + \eta^2 \chi\left(\frac{x}{\eta}\right) \mu_2\left(\frac{x}{\eta}\right)$$

L'homogénéisation mène alors vers un modèle effectif dans la bande, sans contraste important à l'échelle  $\varepsilon$ .

### 3.3 Double porosité et et fort contraste

On aurait alors une perméabilité dans la zone de stockage de la forme

$$\varepsilon^2 \mu_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \left(1 - \chi\left(\frac{x}{\eta}\right)\right) + \eta^2 \chi\left(\frac{x}{\eta}\right) \mu_2\left(\frac{x}{\eta}\right)$$

(travail en cours)

## References

- [1] G. ALLAIRE AND M. BRIANE, *Multiscale convergence and reiterated homogenisation*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, 126 (1996), pp. 297–342.
- [2] G. ALLAIRE AND C. CONCA, *Boundary layers in the homogenization of a spectral problem in fluid-solid structures*, SIAM J. Math. Anal., 29 (1998), pp. 343–379.
- [3] A. BOURGEAT, O. GIPOULOUX, AND E. MARUSIC-PALOKA, *Mathematical modeling of an array of underground waste containers*, C. R. Mécanique, 330 (2002), pp. 371–376.