



Homogénéisation de termes sources en présence de fort contraste

Grégoire Allaire,
Marc Briane,
Robert Brizzi
Yves Capdeboscq



Introduction

Nous nous intéressons au comportement en temps long d'un site de stockage souterrain en présence de fuites.

1. Modèles à deux échelles

- Variations lentes en temps, fortes en espace
- Un modèle à fort contraste

2. Modèles à trois échelles

Modèle à deux échelles

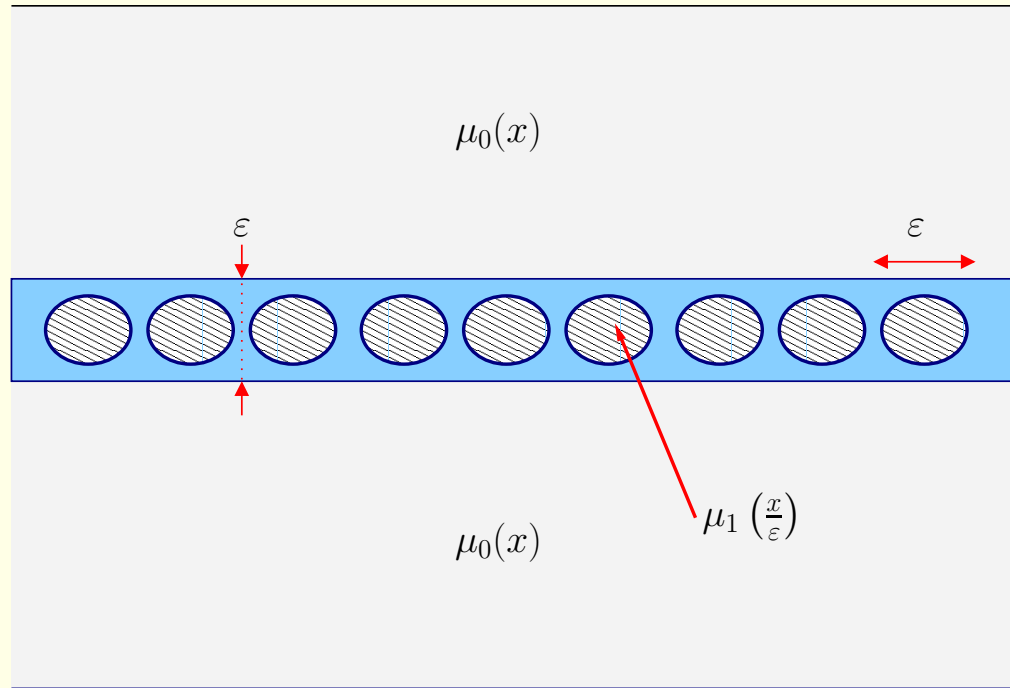


Figure 1: Description du milieu à deux échelles

La seule échelle considérée est notée ε . Il faut prendre en compte:

- Le comportement en temps cours & long.
- Modéliser des sources concentrées dans une petite zone.



Variations lentes en temps, fortes en espace

Par exemple un terme source de la forme $f_\varepsilon(t, x) = g\left(\varepsilon^2 t, \frac{x}{\varepsilon}\right) \chi\left(\frac{x_n}{\varepsilon}\right)$ et une conductivité $A_\varepsilon = \varepsilon^2 \left(a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \chi\left(\frac{x_n}{\varepsilon}\right) + B(x) \right)$ où $\chi(y) = 1 \Leftrightarrow |y| < 1$.

Le premier ordre du développement asymptotique (dans une bande infinie G) donne

$$-\operatorname{div} \left((a(y)\chi(y_n) + B(0)) \nabla \psi_\tau(y) \right) + \lambda \omega(y) \psi_\tau(y) = g(\tau, y) \chi(y_n)$$

avec $\psi_\tau(y', y_n)$ périodique e, y' .

Comme ce problème est indépendant de l'échelle macroscopique, cela mène à un profil factorisé

$$\phi_\varepsilon \approx u(t/\varepsilon^2, x) \psi_\tau\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$



Variations lentes en temps, fortes en espace

Il faut $\lim_{y_n \rightarrow \pm\infty} \psi \not\rightarrow 0$. (par exemple $y \rightarrow \omega(y)$ a support compact). Avec

$\omega_\varepsilon(x) = \omega\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \chi\left(\frac{x_n}{\varepsilon}\right) / \varepsilon^2 + \omega_1(x)$, le modèle est ainsi

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_\varepsilon \frac{\partial \phi_\varepsilon}{\partial t} - \operatorname{div}(A_\varepsilon \nabla \phi_\varepsilon) + \lambda \omega_\varepsilon \phi_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^2} f\left(\varepsilon^2 t, \frac{x}{\varepsilon}\right) \chi\left(\frac{x_n}{\varepsilon}\right) \text{ dans } \Omega, \\ \\ \phi_\varepsilon = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \\ \\ \phi_\varepsilon(t=0) = \phi_0^\varepsilon(x) \text{ dans } \Omega. \end{array} \right.$$

On montre alors que

$\phi_\varepsilon(t, x) = \phi_\varepsilon(t/\varepsilon^2, x) \psi(t, x/\varepsilon)$, avec $\phi_\varepsilon \rightarrow u_0$ solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} -\operatorname{div}(B(x) \nabla u_0) + \lambda \omega_1(x) u_0 = 0 \text{ dans } \Omega, \\ \\ u(x', 0) = 1, \\ \\ u(x) = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{array} \right.$$

Variations lentes en temps, fortes en espace

Il faut $\lim_{y_n \rightarrow \pm\infty} \psi \not\rightarrow 0$. (par exemple $y \rightarrow \omega(y)$ a support compact). Avec

$\omega_\varepsilon(x) = \omega\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \chi\left(\frac{x_n}{\varepsilon}\right) / \varepsilon^2 + \omega_1(x)$, le modèle est ainsi

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_\varepsilon \frac{\partial \phi_\varepsilon}{\partial t} - \operatorname{div}(A_\varepsilon \nabla \phi_\varepsilon) + \lambda \omega_\varepsilon \phi_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^2} f\left(\varepsilon^2 t, \frac{x}{\varepsilon}\right) \chi\left(\frac{x_n}{\varepsilon}\right) \text{ dans } \Omega, \\ \\ \phi_\varepsilon = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \\ \\ \phi_\varepsilon(t=0) = \phi_0^\varepsilon(x) \text{ dans } \Omega. \end{array} \right.$$

On montre alors que

$\phi_\varepsilon(t, x) = \phi_\varepsilon(t/\varepsilon^2, x) \psi(t, x/\varepsilon)$, avec $\phi_\varepsilon \rightarrow u_0$ solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} -\operatorname{div}(B(x) \nabla u_0) + \lambda \omega_1(x) u_0 = 0 \text{ dans } \Omega, \\ \\ u(x', 0) = 1, \\ \\ u(x) = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{array} \right.$$

C'est un modèle quasi-statique, qui ne présente pas de caractéristiques temporelles satisfaisantes



Un modèle à fort contraste

On suppose maintenant $\omega_\varepsilon > c > 0$. Le modèle est alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_\varepsilon(x) \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - \operatorname{div}(A_\varepsilon(x) \nabla u_\varepsilon) + \lambda \omega_\varepsilon(x) u_\varepsilon = f_\varepsilon(x), \quad \text{in } \Omega \\ \\ u_\varepsilon = 0, \quad \text{on } \partial\Omega, \\ \\ u_\varepsilon(t=0) = \Phi_\varepsilon(x), \quad \text{in } \Omega. \end{array} \right. \quad (1)$$

La densité est notée u_ε , et ε représente l'échelle des barres (confondue avec celle des modules)

On peut montrer que

$$\|u_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega))} + \left\| \sqrt{A_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \right\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega)^N)} \leq C\sqrt{\varepsilon}$$

Ans si $\mu_\varepsilon > c > 0$ uniformément en ε , le modèle homogénéisé est $u = 0$.

Un modèle à fort contraste

On suppose maintenant $\omega_\varepsilon > c > 0$. Le modèle est alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_\varepsilon(x) \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - \operatorname{div}(A_\varepsilon(x) \nabla u_\varepsilon) + \lambda \omega_\varepsilon(x) u_\varepsilon = f_\varepsilon(x), \quad \text{in } \Omega \\ \\ u_\varepsilon = 0, \quad \text{on } \partial\Omega, \\ \\ u_\varepsilon(t=0) = \Phi_\varepsilon(x), \quad \text{in } \Omega. \end{array} \right. \quad (1)$$

La densité est notée u_ε , et ε représente l'échelle des barres (confondue avec celle des modules)

On peut montrer que

$$\|u_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega))} + \left\| \sqrt{A_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \right\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega)^N)} \leq C\sqrt{\varepsilon}$$

Ans si $\mu_\varepsilon > c > 0$ uniformément en ε , le modèle homogénéisé est $u = 0$.

On suppose donc que $\mu_\varepsilon \rightarrow 0$ près de la source. la taille critique à choisir est donnée par la Convergence Deux Échelles pour les Couches Limites (Allaire & Conca '98), c'est $A_\varepsilon \approx \varepsilon^2$ près de la source.



Un modèle à fort contraste

Pour x dans Ω s.t. $|x_n| > \varepsilon$, $A_\varepsilon(x) = \mu_0(x)$, et $\omega_\varepsilon(x) = \omega_0(x)$ (2)

Pour x dans Ω tel que $|x_n| < \varepsilon$,

$$A_\varepsilon(x) = \varepsilon^2 \mu_1 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right), \text{ et } \omega_\varepsilon(x) = \omega_1 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \quad (3)$$

Avec la notation $Y = [0, 1]^n$.

On suppose de plus que pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$,

$$\alpha |\xi|^2 \leq \mu_i \xi \cdot \xi \leq \beta |\xi|^2 \quad i = 0, 1. \quad (4)$$

Les termes sources f_ε et Φ_ε sont localisés dans la bande de la taille ε , loin du bord.



Un modèle à fort contraste

Pour x dans Ω s.t. $|x_n| > \varepsilon$, $A_\varepsilon(x) = \mu_0(x)$, et $\omega_\varepsilon(x) = \omega_0(x)$ (2)

Pour x dans Ω tel que $|x_n| < \varepsilon$,

$$A_\varepsilon(x) = \varepsilon^2 \mu_1 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right), \text{ et } \omega_\varepsilon(x) = \omega_1 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \quad (3)$$

Avec la notation $Y = [0, 1]^n$.

On suppose de plus que pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$,

$$\alpha |\xi|^2 \leq \mu_i \xi \cdot \xi \leq \beta |\xi|^2 \quad i = 0, 1. \quad (4)$$

Les termes sources f_ε et Φ_ε sont localisés dans la bande de la taille ε , loin du bord.

Sous ces hypothèses, nous pouvons caractériser le comportement de u_ε dans tous le domaine.

Un modèle à fort contraste

Théorème 0.1. *la solution u_ε du système (1) admet une limite u_0 au sens de la convergence "2ECL" . La limite u_0 est l'unique solution dans $L^2(0, T, H_{loc}^1(\mathbb{R}^n))$ du problème*

$$\omega(y) \frac{\partial u_0}{\partial t} - \operatorname{div}_y (\mu_1(y) \nabla_y u_0) + \lambda \omega(y) u_0 = F_0(y)$$

avec $u_0(t, y) = 0$ on $(0, T) \times |y_n| = 1$,

$(y_1, \dots, y_{n-1}) \rightarrow u(\cdot, y_1, \dots, y_{n-1}, \cdot) [0, 1]^{n-1}$ périodique et $u_0(t=0) = \Phi_0(y)$.

De plus, $\frac{1}{\varepsilon} \left(1 - \chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right) u_\varepsilon$ converge fortement dans $L^2(0, T, L^2(\Omega))$ vers u_1 et

$\frac{1}{\varepsilon} \left(1 - \chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right) \nabla u_\varepsilon$ converge faiblement dans $L^2(0, T, L^2(\Omega)^N)$ vers ∇u_1 , où u_1 est l'unique solution dans $H_0^1(\Omega)$ de

$$\omega_0(x) \frac{\partial u_1}{\partial t} - \operatorname{div} (A_0(x) \nabla u_1) + \lambda \omega_0(x) u_1 + s^*(t) \delta_{x_n=0} = 0$$

avec $u_1(t=0) = 0$, et où le terme source s^* est donné par

$$s^*(t) = \int_{[0,1]^{n-1}} \left[\mu_1(y', y_n) \frac{\partial u_0}{\partial x_n} (t, y', y_n) \right]_{y_n=-1}^{y_n=1} dy'.$$



Un modèle à fort contraste

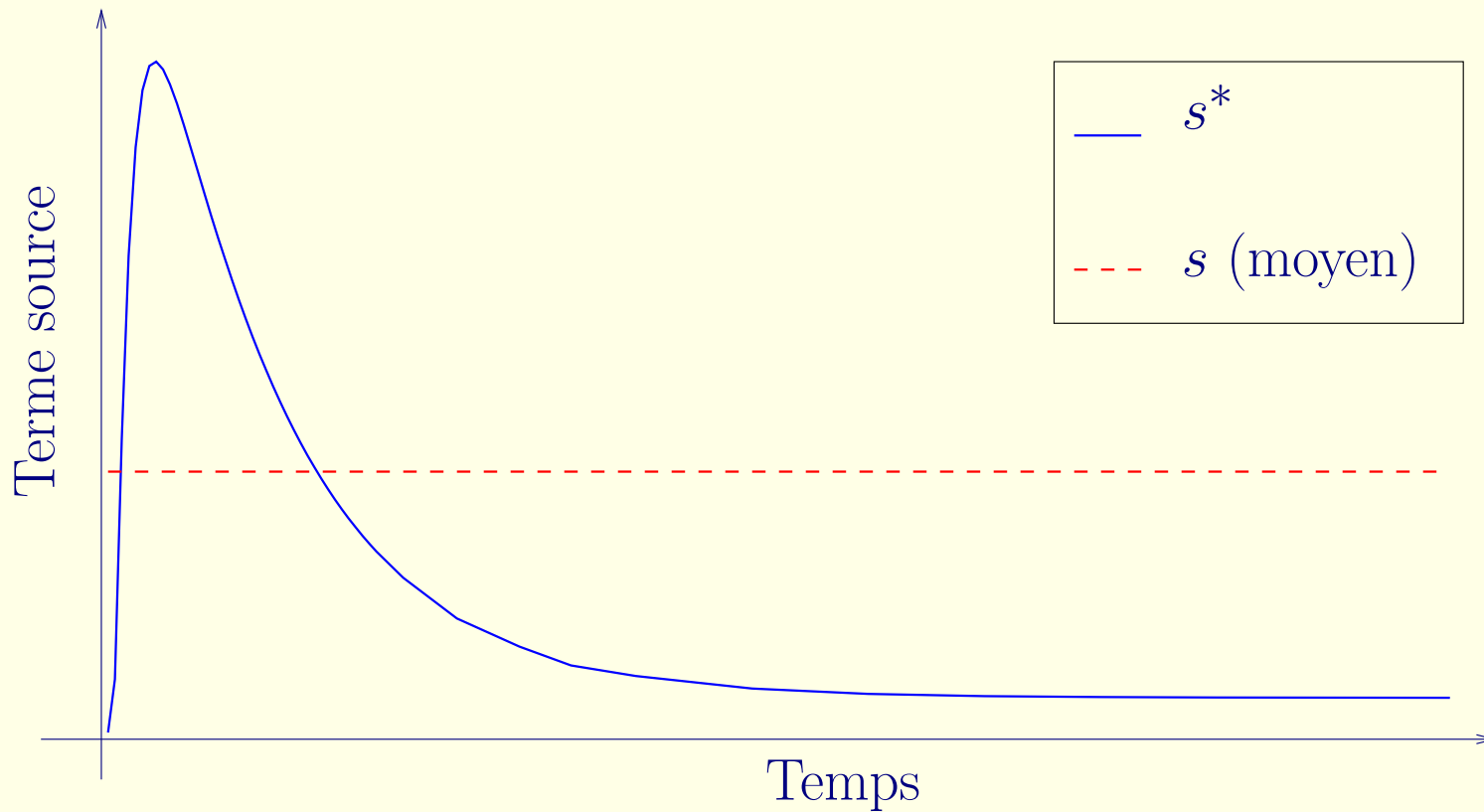


Figure 2: Terme source effectif / moyen

On remarque un effet amplificateur de la source en temps court. Sur la Figure 1, une source “moyenne”, c’est à dire calculée comme solution stationnaire du problème de cellule périodique est aussi représentée.

Modèle à trois échelles

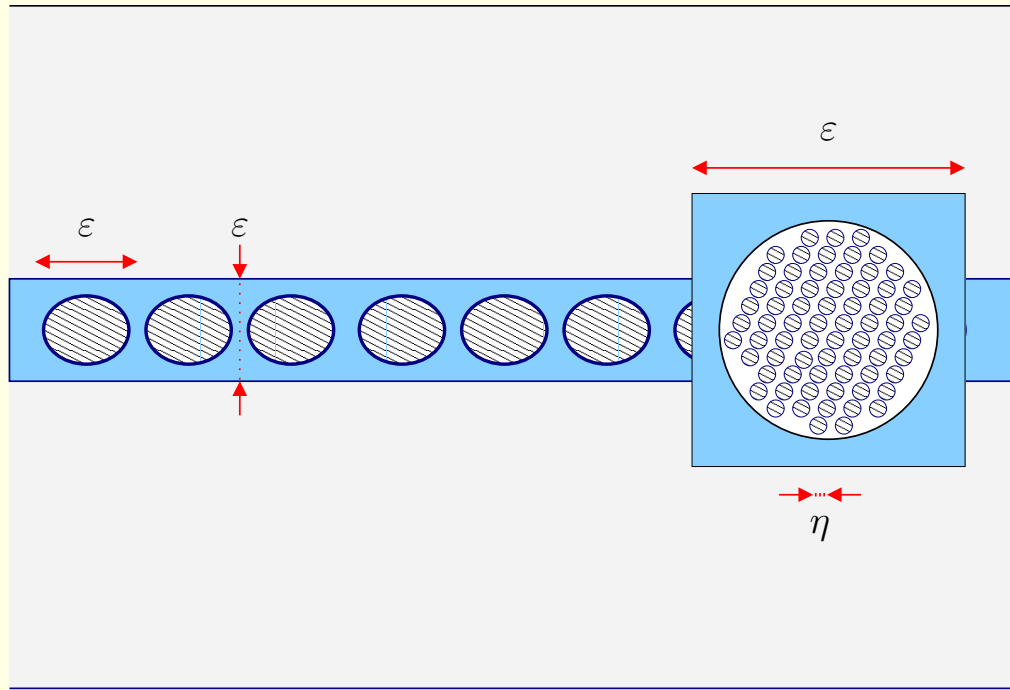


Figure 3: Description du milieu à trois échelles

On note la plus petite échelle η .



Modèles à fort contraste généralisé

On suppose maintenant que la perméabilité dans la zone de stockage est de la forme

$$\epsilon^2 \mu_1 \left(\frac{x}{\epsilon}, \frac{x}{\eta} \right)$$

Supposons que les échelles ϵ, η sont des fonctions de ϵ qui tendent vers 0 avec ϵ , et qu'elles sont bien séparées (par exemple $\eta = \epsilon^\alpha$ avec $\alpha > 2$). On utilise alors la convergence réitérée pour les couches limites, version généralisée (comme Allaire-Briane '96). Le modèle effectif est celui attendu, et correspondant à l'étude précédente: l'homogénéisation des échelles inférieures se produit d'abord, indépendamment des phénomènes de couches limites.



Fort contraste sur l'échelle la plus faible

Cela correspond à une perméabilité dans la bande de taille ε de la forme

$$\mu_1 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \left(1 - \chi \left(\frac{x}{\eta} \right) \right) + \eta^2 \chi \left(\frac{x}{\eta} \right) \mu_2 \left(\frac{x}{\eta} \right)$$

L'homogénéisation mène alors vers un modèle effectif dans la bande, *sans contraste important à l'échelle ε* .

Double porosité et fort contraste

On aurait alors une perméabilité dans la zone de stockage de la forme

$$\varepsilon^2 \mu_1 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \left(1 - \chi \left(\frac{x}{\eta} \right) \right) + \eta^2 \chi \left(\frac{x}{\eta} \right) \mu_2 \left(\frac{x}{\eta} \right)$$

(travail en cours)

Schéma numérique

L'analyse asymptotique montre que la transmission entre le domaine externe (hors bande) et interne (dans la bande) se fait de la manière suivante

- Interne \rightarrow Externe : Neumann,
- Externe \rightarrow Interne : Dirichlet.

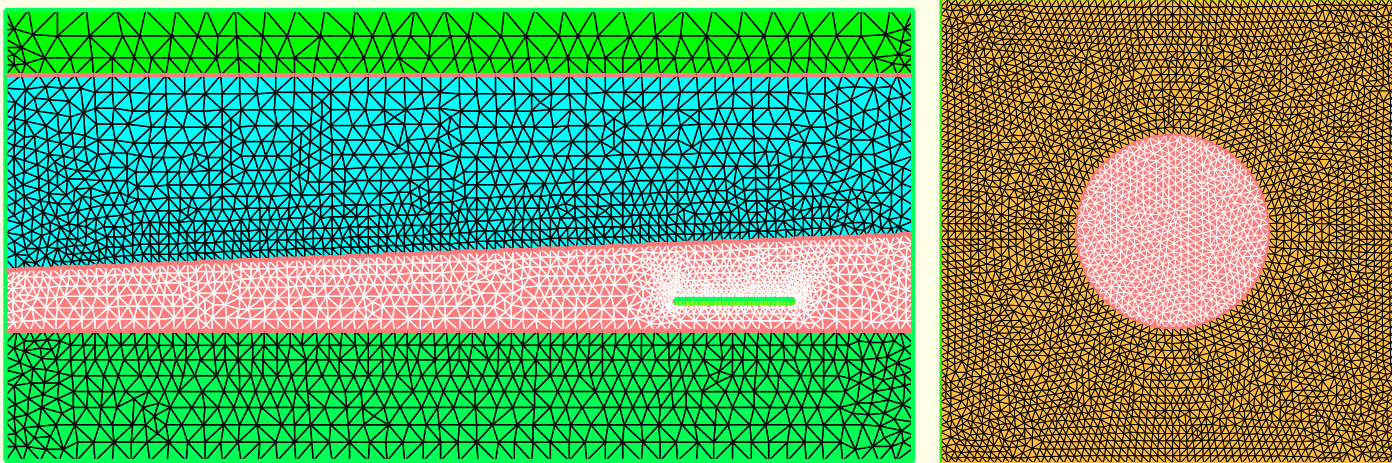


Figure 4: Milieux Externe / Internes



Schéma numérique

Pour $t > 0$, le problème interne est

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{\partial u^{int}}{\partial t} + a^{int}(u^{int}) = 0 \\ u^{int}|_{x=0,1} = \frac{1}{|\Sigma^\pm|} \int_{\Sigma^\pm} u^{ext}(s) ds \end{array} \right.$$

Et le problème externe s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{\partial u^{ext}}{\partial t} + a^{ext}(u^{ext}) = 0 \\ \frac{\partial u^{ext}}{\partial \nu} \Big|_{\Sigma^i} = \int_{Y^i} \frac{\partial u^{int}}{\partial \nu} \end{array} \right.$$



Schéma numérique

Pour $t > 0$, le problème interne est

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial u^{int}}{\partial t} + a^{int}(u^{int}) = 0 \\ u^{int}|_{x=0,1} = \frac{1}{|\Sigma^\pm|} \int_{\Sigma^\pm} u^{ext}(s) ds \end{cases}$$

Et le problème externe s'écrit

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial u^{ext}}{\partial t} + a^{ext}(u^{ext}) = 0 \\ \frac{\partial u^{ext}}{\partial \nu} \Big|_{\Sigma^i} = \int_{Y^i} \frac{\partial u^{int}}{\partial \nu} \end{cases}$$

Pour $t = 0$, le problème interne est résolu avec Dirichlet + périodicité et C.I.