mrad@math.univ-paris13.fr

CURRICULUM VITAE

MOHAMED MRAD

Situation actuelle

Mohamed MRAD : Docteur et Ingénieur de l'Ecole Polytechnique.

Adresse professionnelle : LAGA - Institut Galilée 99 avenue Jean Baptiste clément 93430 Villetaneuse
Tél. : 06.31.43.64.51

Situation professionnelle : Maître de Conférences.

E-mail : mrad@math.univ-paris13.fr

Site-Web : http://www.cmap.polytechnique.fr/~mrad

CNU=26

Parcours Professionnel

2009–2010 : Séjour Post-doctoral entre le **Centre de Mathématiques Appliquées** de l'Ecole Polytechnique et **Pricing Partners** sur le projet **Credinext** [1] ; une plateforme de valorisation indépendante de dérivés de crédit et d'obligations structurées non liquides.
Sujet : Modéliser les sous-jacents financiers et les structures de marché afin de développer de nouvelles méthodes de valorisation et modèles mathématiques. Recherche de nouveaux algorithmes de valorisation des instruments financiers en situation anormale de liquidité.
Site Web : `http://www.finance-innovation.org/fiche_projet_8.htm`

2005–2008 : Moniteur à l'Université Orsay-Paris XI, département de mathématiques.

04–09/2005 : Stage de Fin d'Etude de 6 mois à IXIS Corporate & Investment Bank-Paris au sein de l'équipe de recherche structurée en tant que Analyste Quantitatif sous la direction de Nicole El Karoui de l'Ecole Polytechnique et de Olivier Croissant et Eric Benhamou de IXIS CIB.
Sujet : L'objectif de cette étude est de mieux comprendre le ou les comportements des funds *observés sur le marché financier et jusque là assez mal modéliser. Par une étude théorique reprenant des modèles assez classiques, Artur Sepp* [2] *a présenté un modèle à sauts assez général qu'on s'est proposé d'utiliser pour répliquer la dynamique des fonds. En effet, en observant l'historique des rendements d'un fond et surtout la densité empirique extraite, on se rend compte qu'un modèle à volatilité stochastique ne tient pas compte des sauts observés sur l'historique des fonds sur le marché. Ainsi, des paramètres supplémentaires, notamment sur la volatilité, sont nécessaires pour pouvoir répliquer la densité empirique observée.*
Ce travail admet deux composantes : une étude théorique où on établie les formules fermées pour un modèle général formel de même type que celui proposé par Arthur Sepp, vient ensuite l'étape cruciale de ce travail ; la calibration du modèle au marché financier où, à partir de la base de données **Pertrac**, *on va pouvoir accéder aux rendements historiques des fonds. Par la suite, on utilise* **Nag**, *une librairie C^{++} performante pour optimiser les erreurs numériques et le coût de l'algorithme en terme de temps de calcul. Plus précisément, on utilise la fonction* $\mathbf{nag-opt-nlin-lsq(e04unc)}$ *qui est destinée à minimiser n'importe qu'elle somme de carrés de fonctions sous certaines contraintes, pouvant se présenter comme simples bandes ou encore des contraintes linéaires ou non linéaires sur les variables, voire même une combinaison. En plus ,avec la librairie* **NAG**, *on a l'avantage de suivre les calculs que* **NAG** *fait pas par pas sur un fichier .txt, et on a ainsi tous les renseignements nécessaires sur la convergence, la rapidité et surtout l'erreur numérique commise par l'algorithme à chaque itération.*

04–09/2004 : Stage d'Option de 6 mois à Dexia Crédit Local-Paris au sein de l'équipe de trésorerie en tant que Responsable du développement informatique et théorique et ce sous la direction de Nicole El Karoui de l'Ecole Polytechnique et de Stéphane Ruellan de Dexia.
Sujet : Étude et calibration du modèle SABR : en particulier le problème de la gestion du risque dû aux phénomènes appelés Smile et Skew, dont la dynamique établie par le modèle **SABR***, un modèle à volatilité stochastique, est cohérente avec celle observée sur le marché. En effet, ce ci est vital pour la couverture en Delta et* $Vega$*. En utilisant une technique de perturbation singulière, on obtient le prix d'une option européenne sous ce modèle, et ainsi une formule fermée explicite pour la volatilité implicite comme fonction du prix* forward *d'aujourd'hui et du* strike.
Le cœur de ce travail est la calibration du modèle **SABR** *au marché financier. Ainsi, j'ai mis au point un* **priceur** *basé sur ce modèle dans le cadre d'une bibliothèque informatique en* C^{++}/VB *sur le marché des* Caps *sur* Euribor*. Comme il fallait disposer de données historiques suffisantes concernant les volatilités* forward *des* Caplets*, la première étape était de construire une matrice de volatilité* forward *compatible avec celle* flat *donnée par le marché (via* Open-link, Rewter*. . .). La construction de cette matrice de volatilité* forward *se fait par interpolation sur des pas de temps variant de* 3 *à* 6 *mois pour une durée totale de* 50 *ans.*
Ce travail est basé sur une forte composante informatique où les codes utilisés pour inverser la matrice des volatilités, i.e. *retrouver la matrice des données initiales ; celle de la volatilité* $flat$*, sont confrontés à des données réelles qui évoluent dans le temps. La taille de la bibliothèque à construire pour cette tâche dépassait de loin les capacités de mémoire de Excel, ce qui a nécessité la création de plusieurs sous-projets à excuter en un seul sans passer par les* **DLL** *classiques de Excel et ainsi construire des classes de convertion en* **VARIANT** *pour pouvoir saisir les différents paramètres de type* **string** *tels que le choix du numéraire ; i.e. le change,* Euro, Dollar *ou* Sterling*, ou bien les dates* forward *des échéances des* Euribors*. En outre, il fallait prendre en compte le calendrier des jours ouvrables pour calculer les* discount facteurs*, les différentes dates des* fixing *ou des* settlements *vu que la vie de l'*Euribor *n'est pas en réalité égale à* 3 *mois.*
Les différents résultats numériques obtenus, tels que la courbe de la la volatilité implicite **SABR** *qui reproduit parfaitement celle donnée par le marché ainsi que la dynamique du Smile selon le modèle* **SABR***, ont été confrontés au marché financier et étaient cohérents avec ce dernier.*

2. *Fourrier inversion Methods for Option Pricing under Jump-Diffusion Stochastic Volatility and Lévy Process*, Thesis, 2002.

Formation

2005–2009 : **Docteur** de l'Ecole Polytechnique.
Thèse intitulée "**Utilités Progressives Dynamiques**" mention **très honorable**, soutenue le 19 octobre 2009, spécialité Mathématiques Appliquées à l'Ecole Polytechnique devant : Huyên Pham (président du jury, professeur, Université de Paris VII & Institut Universitaire de France), Bruno Bouchard (professeur, Université de Paris-Dauphine), Nicole El Karoui (professeur, Ecole Polytechnique & Université de Paris VI), Emmanuel Gobet (professeur, ENSIMAG-INP Grenoble), Monique Jeanblanc (professeur, Université d'Evry), Anis Matoussi (Maître de conférence, HdR, Université du Maine) et Nizar Touzi (professeur, Ecole Polytechnique), sous la direction de Nicole El Karoui au Centre de Mathématiques Appliquées de l'Ecole Polyechnique au sein de l'équipe de recherche "Mathématiques Financières".
Rapporteurs : Bruno Bouchard et Monique Jeanblanc.

2004–2005 : Quatrième année à l'Ecole Polytechnique.
Master *Probabilités et Applications* à l'Université de Paris VI - Ecole Polytechnique, sous la direction de Nicole El Karoui.

2001-2004 : **Ingénieur** de l'Ecole Polytechnique.
Elève de l'Ecole Polytechnique de Palaiseau. Promotion X2001.
- Deuxième année : Cours longs Mathématiques, Statistiques, Analyse numérique et Optimisation et Probabilités (Promenade aléatoire).
- Troisième année : Majeures Mathématiques & Mathématiques Appliquées (Mathématiques Financières, Calcul Stochastique, Processus et Estimation, Etudes Approfondies : Pricing d'options américaines par la méthode de Langstaff & Schwartz. . .)

2000-2002 : Première et seconde années à l'Ecole Normale Supérieure de Tunis.
En parallèle, **Licence** et **Maîtrise** de Mathématiques à la Faculté des Sciences de Tunis.

1998-2000 : Mathématiques Supérieures et Mathématiques Spéciales à L'Institut Préparatoire aux Etudes Technologiques de Nabeul (Tunisie).

1998 : Baccalauréat en Mathématiques au Lycée El canal, Bizerte.

Connaissances en Informatique

Langages : Visual basic, C, C++

Environnements : Windows, Linux, Macintosh

Logiciels : Matlab, Maple, Scilab, Excell, Visual studio, Visual studio entreprise

Responsabilités administratives

2012-2015 : Membre du conseil du laboratoire au LAGA.

2006-2008 : Membre nommé du conseil du laboratoire au CMAP, représentant des doctorants.

2007 & 2008 : Co-organisateur du stand CMAP au XForum.

2007 & 2008 : Co-organisateur des "Jounées Doctorants au laboratoire CMAP de l'Ecole Polytechnique".

Publications et Conférences

- **Publications :**
  - Nicole El Karoui et Mohamed Mrad, " An Exact Connection between two Solvable SDEs and a Non Linear Utility Stochastic PDEs", SIAM Journal on Financial Mathematics, N : 1,V : 4, 2013 pages 697-736 .
  - Nicole El Karoui, M. Mrad and C. Hillairet , Affine Long Term Yield Curves : an application of the Ramsey Rule with Progressive Utility, Journal of Financial Engineering Journal of Financial Engineering, Vol. 1, No. 1 (2014).
  - Nicole El Karoui, M. Mrad and C. Hillairet , Ramsey Rule with Progressive Utility in Long Term Yield Curves Modeling , submitted to Finance and Stochastics, 2014.
  - E. Gobet and M. Mrad, Convergence Rate Of Strong Approximations Of Compound Random Maps, **revisé et renvoyé Août 2016 à** Annals of Applied Probability, 2015.
  - E. Gobet and M. Mrad, "Strong approximation of stochastic processes at random times and application to their exact simulation." To appear in Stochastics, 2016.
  - Nicole El Karoui et Mohamed Mrad, " Stochastic Utilities With a Given Optimal Portfolio : Approach by Stochastic Flows (2016)". Disponible sur HAL.
  - Nicole El Karoui et Mohamed Mrad, " Random Risk Aversion and Explicit Consistent Utilities Construction (2014)" Disponible sur HAL.

  Travaux en cours de finalisation :
  - E. Gobet, Pierre Cohort and M. MRAD "Approximation Scheme Compounding And Random Number Generator Inversion." **(2016)**
  - Nicole El Karoui, M. Mrad and C. Hillairet "Consistent Progressive Utility of Consumption." **(2016)**
  - Nicole El Karoui, M. Mrad and C. Hillairet "Ramsey Rule with Consistent Progressive Utility of consumption."**(2016)**
  - Nicole El Karoui, M. Mrad and C. Hillairet "The G-market : a new point of view on consumption." **(2016)**
  - Nicole El Karoui et Mohamed Mrad, "Indifference Pricing by Consistent Progressive Stochastic Utilities", Preprint **(2015)** .

  Travaux en cours :
  - Mohamed Mrad, "The Credit Cruch and the Fixing Risk".

- Nicole El Karoui et Mohamed Mrad, " Non Linear Utility Stochastic PDEs : Cone Constraints (2010)", *disponible sur ma page web.*
- Nicole El Karoui, M. Mrad and A. Matoussi, "Stochastic Consistent Utilities with Jumps."

— **Conférences :**

(1) **Communications Orales :**

- Séminaire École Nationale Supérieure de Techniques Avancées (ENSTA), 17 Octobre 2016.
- London-Paris Bachelier Workshop on Mathematical Finance, 3rd EDITION on 29 and 30 September 2016, Paris.
- Journés de probabilités, 23-27 Mai 2016 Le Mans.
- 43e Congrès National d'Analyse Numérique (CANUM 2016), Obernai, Alsace, 09 - 13 mai 2016.
- International Conference on Stochastic Analysis and Applications, Hammamet (Tunisia), Octobre 19 -23, 2015.
- Groupe de travail "Modèles Stochastiques en Finance", 12 Octobre 2015.
- Numerical Probability and application to finance, Tunis du 21/04/2015 au 04/05/2015.
- Séminaire Bachelier Paris, Consistent progressive utility of investment and consumption, 23 mai 2014.
- Séminaire probabilités et statistiques (Le Mans), Février 2013.
- Séminaire probabilités et statistiques (Le Mans), Jeudi 5 Avril 2012.
- New advances in Backward SDEs for financial engineering applications Tamerza (Tunisia), Octobre 25 - 28, 2010
- 6th World Congress of the Bachelier Finance Society, Toronto (Canada), 22-26 juin 2010.

— Neuvième Colloque *Jeunes Probabilistes et Statisticiens* Le Mont-Dore (Puy de Dôme), 3-7 mai 2010.

— Groupe de Travail *Méthodes Stochastiques et Finance*, Séminaire Probabilités de l'Université Paris-Est-Marne-la-Vallée, 22 janvier 2010.

— *Autour des utilités progressives et flots stochastiques* , Séminaire de LPMA de Paris VI, Groupe de travail *Probabilités Numériques et Finance*, Chevaleret, 17 décembre 2009.

— *Interest rate & credit crunch* exposé d'une heure pour le Groupe de travail Credinext à Pricing Partners [3] , Paris, 8 décembre 2009.

— *Groupe de travail "Modèles Stochastiques en Finance"*, CMAP, 2006, 2008 & 2009.

— Journée doctorants de l'Ecole Polytechnique 2007 & 2008.

(2) **Participations :**

— International Conference on Monte Carlo techniques Closing conference of thematic cycle Paris July 5-8th 2016 Campus les cordeliers.

— *Conference on Quantitative Risk Management*, Université de Paris Diderot, 18 Septembre 2009.

— *Ecole d'Eté en Finance*, HEC Paris, 24-28 août 2009.

— *Informs Applied Probability Conference*, Ithaca, 9-11 juillet 2009.

— *European Summer School in Financial Mathematics*, Paris, 7-14 septembre 2008.

— *UCSB Conference on Convex Duality method in Mathematical Finance*, University of California at Santa Barbara, 22-27 juin 2008.

— *Stochastic processes : Theory and Applications Conference, on occasion of the 65th birthday of Professor Wolfgang Runggaldier*, Bressanone, 16-20 juillet 2007.

3. Partenaires : Euronext Paris, Lunalogic, CMAP (Ecole Polytechnique), CERMICS/ENPC, Université Paris-Est Marne la Vallée (Laboratoire de Mathématiques Appliqués), INRIA (projet Mathfi)

— *Informs Applied Probability Conference*, Eindhoven, 9-11 juillet 2007.

— *Stochastic processes and Applications Conference*, Paris, 17-21 juillet 2006.

— *Informs Applied Probability Conference*, Ottawa, 6-8 juillet 2005.
— *Quatrième semestre de la Chaire UNESCO au LAMSIN*,Modélisation Mathématique en Finance, Tunis, 12 septembre - 17 décembre 2005.

Travaux de Recherche

Une grande partie de mes travaux de recherche porte sur l'étude des utilités dynamiques progressives cohérentes avec un marché financier donné. En effet, dans le monde de la finance traditionnelle, la réflexion sur le critère à optimiser dans le cas de la sélection de portefeuille par exemple est assez pauvre : on se fixe un horizon de gestion, une fonction concave (pour traduire l'aversion pour le risque) croissante, et on cherche à maximiser l'utilité espérée de sa richesse finale. La stratégie optimale est fortement dépendante de l'horizon de gestion et du critère. Or dans le domaine de la banque d'investissement, des marchés à terme en particulier, une partie de l'activité porte sur des stratégies "delta-hedgées", c'est à dire peu sensibles à la tendance du marché, qu'on souhaite utiliser comme stratégies de référence. Par ailleurs, de plus en plus de problèmes, dont celui du financement des problèmes écologiques portent sur des horizons très longs, pour lesquels il est difficile de faire comme si le marché ne réajustait pas ses critères en cas de changements importants des paramètres fondamentaux de l'économie.

En 2002, Marek Musiela et Thaleia Zariphopoulo ont proposé un point de vue très nouveau sur ces questions, en introduisant la notion " forward utility", c'est à dire une utilité dynamique, progressive, cohérente avec un marché financier donné. On peut voir ce processus comme un champ aléatoire $u(t,x)$ adapté à l'information disponible, qui à chaque instant est une utilité standard, donc en particulier à la date 0, compatible avec une famille de stratégies données (X^π) au sens où pour tout $t,h>0$

$$\mathbb{E}(u(t+h,X^\pi_{t+h})|\mathcal{F}_t) \leq u(t,X^\pi_t) \tag{1}$$

et il existe un portefeuille optimal X^* pour lequel l'inégalité est une égalité.

Les auteurs ont fait plusieurs articles sur ce sujet, montrant en particulier comment les utilités classiques, puissance, exponentielle, etc doivent être modifiées pour être des utilités dynamique progressives. Une attention limitée a été portée à l'univers d'investissement.

1. Avec Nicole El Karoui : " **An Exact Connection between two Solvable SDEs and a Non Linear Utility Stochastic PDEs" :**

Ce travail et tous les résultats qu'il contient sont établis en majeure partie pour la première fois.

Première partie : Cette partie est complètement nouvelle. Elle contient tous les résultats techniques que nous avons obtenus dans un cadre général et non spécifique ni aux utilités consistentes, ni aux marchés financiers. La plupart des calculs techniques sont établis en détail

dans cette partie de l'article. Par conséquent, on peut y trouver les principales idées ainsi que les résultats les plus importants.
Nous commençons par introduire la notion générale d'utilité progressive ainsi que sa transformée de Fenchel, toutes les deux des semimartingales d'Itô fonctions d'un paramètre spatial x. Comme d'habitude, elles sont spécifiées à travers leurs caractéristiques locales (drift,volatilité) (β, γ) :

$$dU(t,x) = \beta(t,x)dt + \gamma(t,x).dW_t. \tag{2}$$

où W est un mouvement brownien de dimension d.

Une première partie de ce travail est alors dédiée à la caractérisation de ces champs aléatoires à l'aide des propriétés de leurs caractéristiques locales par rapport au paramètre d'espace x. En effet, comme U_x est strictement croissante en x positive, nous montrons qu'elle satisfait nécessairement une SDE dont les coefficients sont exprimés en termes des dérivées des caractéristiques locales i.e, β_x et γ_x.
À partir de ce résultat, une partie considérable de notre étude se résoud via l'étude des éqautions différentielles stochastiques (SDE) ordinaires. Quelques résultats sur l'existence ainsi que l'unicité des solutions des EDS sont alors données et la dynamique de la transformée de Fenchel $\tilde{U}$ est établie. Nous donnons en particulier, sous certaines hypothèses de type Lipschitz sur les coefficients de la SDE, une réponse claire à l'existence, monotonie, régularité ainsi que la concavité des champs aléatoires définis à partir (2) satisfaisant au même temps les conditions d'Inada, qui jusqu'à présent restaient des questions ouvertes.
Basé sur le livre de référence H. Kunita et l'intuition développée dans la première partie de ce travail, des résultats plus techniques sur l'étude des solutions des SDEs sont alors données. Nous explicitons aussi les hypothèses suffisantes sous lesquelles de telles solutions et leur transformées de Fenchel sont alors régulières (continues différentiables) par rapport à x.
Ainsi, une partie importante de notre contribution est alors présentée sous forme de trois théorèmes majeurs. Le premier, Théorème 2.4, donne une condition suffisante en vertu de laquelle l'inverse (ex $-.\tilde{U}_y$) d'une semimartingale (Ex U_x) est une véritable semimartingale, qui est un résultat crucial pour notre étude. Le deuxième, le théorème 2.5, montre que le même flux inverse est également une solution monotone d'une SPDE non linéaire de second ordre. Une première connexion entre la SDE et SPDE est alors établie. Enfin, le résultat principal, Théorème 2.6, montre que cette dernière SPDE composée avec une SDE satisfait une SPDE de second ordre particulière que nous établissons dans la seconde partie de ce papier, partie consacrée à 'évolution de Utilités stochastiques cohérentes.

Deuxième partie : La deuxième partie de cet ouvrage est consacrée à l'application des résultats de la première partie au cadre particulier des champs aléatoires concaves compatibles avec un marché financier donné. Basé sur ces résultats, l'intuition et une bonne reformulation des équations en question, nous pouvons lire sans dificultés les solutions de notre problème et établir la caractérisation de ces champs aléatoires cohérents.

Dans la section 3, nous nous tournons vers les sutilités stochastiques cohérentes. Dans paragraphe 3.3, comme dans le cadre de Hamilton-Jacobi-Bellman classique, nous procédons par vérification pour établir l' EDP stochastique (satisfaite par le champ $U(.,.)$) que nous étudions dans ce papier. Simultanément, le paragraphe 3.3 va dans les détails sur la question de dualité et donne une caractérisation de la SPDE non linéaire satisfaite par la conjuguée convexe U de U.
Cette étude fournit une analyse fine du vecteur volatilité γ de l'utilité et sa dérivée (par rapport à x) qui joue un rôle central dans ce travail en terme de politique d'allocation et de probabilité optimale. Aussi, à partir de cette étude, nous mettons en valeur un lien fort entre l'existence de X^* et Y^* et celle de U_x et $\tilde{U}_y$.
Dans la section 4, le théorème 4.1, nous établissons la contribution la plus originale de ce document. En effet, à partir de Théorème 2.6, en mettant l'accent sur la dynamique de l'utilité marginale U_x, nous pouvons lire directement et sans difficultés que le processus $U_x\big(t, X_t^*(x)\big)$ est égal au processus de densité de prix d'état optimal $Y^*(t, u_x(x))$ où u est la fonction d'utilité initiale. De cette double identité, l'idée est très simple et naturelle : Supposons que le portefeuille optimal noté $\big(X_t^*(x)\big)_t$ est strictement croissant par rapport au capital initial, et notons $\big(\xi(t,x)\big)_t$ le processus inverse adapté, défini par $X_t^*\big(\xi(t,x)\big) = x$, alors, nous pouvons trouver $U_x(t,x) de\ U_x(t,x) = Y_t^*\big(u_x(\xi(t,x))\big)$. Enfin U est obtenu par une simple intégration.

Troisième partie : Problème inverse : Dans la nature des choses, nous sommes intéressés par le problème inverse : étant donnés deux processus stochastiques, un portefeuille X^* et une densité de probabilité équivalente Y^*, la question est alors quelle est l'utilité associée, si elle existe ? Ce problème de la récupération d'une fonction d'utilité cohérente étant donné un portefeuille optimal est connu dans la littérature financière comme étant *le problème inverse de Merton.* Il a été considéré par de nombreux auteurs, en particulier par H.He et C.Huang (1992). Après avoir donner une réponse claire à cette question, à la fin de ce travail, la propriété de martingale de la tolérance au risque établie par Lui et Huang, dans un marché complet, est alors généralisée au cadre des utilités stochastiques consistentes en marché incomplet.
En conclusion, ce travail est un nouveau point de vue proposant des réponses aux plus importantes des questions posées autour du sujet. D'abord on introduit pour la première fois la théorie des flots stochastiques dans ces problèmes d'optimisation, ce qui permet de généraliser de manière très naturelle les résultats standards de la dualité des fonctions concaves déterministes. Cette approcha s'avère être aussi remarquablement efficace dans le cas standard d'optimisation de portefeuille. Ce sont des résultats nouveaux, originaux dans leurs outils et

très simples dans les preuves. Ainsi, ces techniques ouvrent la voie à une nouvelle manière d'aborder mêmes les problèmes les plus classiques.

2. Avec Nicole El Karoui : "**Stochastic utilities with a given optimal portfolio : approach by stochastic flows**"

Ce travail est une extension du précédent à un cadre beaucoup plus général. En effet, on considère un problème d'optimisation quelconque (pas forcément un problème d'optimisation de portefeuille) dans lequel les actifs sont remplacés par des processus *cadlag* locallement bornés (appelés processus test et vivant dans un ensemble convexe dynamique dépendant de la date et de l'état du système à cet instant). Par conséquent, la filtration n'est plus une filtration brownienne. Les contraintes de type cône convexe sont remplacées par des contraintes plus générales de type ensemble convexe. Le but de ce travail est de caractériser toutes les utilités progressives (fonctions valeurs, processus d'apprentissage) avec le minimum d'hypothèses, notamment avec moins d'hypothèses de régularités sur les champs aléatoires U, puisque U n'est plus supposé deux fois différentiable et de type semimartingale d'Itô. L'approche est alors différente : nous commençons par établir des conditions d'optimalité sur le processus test optimal ainsi que le processus optimal dual, et ce en utilisant des méthodes d'analyse. Nous démontrons alors, par des éléments d'analyse, la convexité et obtenons comme conditions d'optimalités que toutes les utilités progressives générant un processus test strictement croissant par rapport à sa condition initiale sont de la forme $\int_0^x Y^*(t, \mathcal{X}(t,z))dz$ avec Y^* :
- Y^*X est une surmartingale généralisée pour tout processus test X et une martingale si $X = X^*$, si l'ensemble des contraintes et un cône convexe fermé.
- $Y^*(X - X^*)$ est une surmartingale généralisée pour tout processus test X, si l'ensemble des contraintes et simplement un convexe fermé.

3. Avec Nicole El Karoui : "**Mixture of consistent stochastic utilities, and a priori randomness**"

Le but de ce papier est de développer une construction explicite des utilités stochastiques cohérentes, en utilisant l'approche par flots stochastiques monotonnes développée dans [**?**] et [**?**]. A partir d'une famille de processus positifs standard et des fonctions d'utilité indexées par le paramètre d'aversion au risque α (différents agents), l'idée est de rendre aléatoire α et construire un processus d'utilités non standards. Deux approche sont alors développées, la première consiste à construire directement à partir d'une classe donnée de fonctions d'utilités deterministes $\{U^\alpha, \alpha\ in\ R\}$ un processus d'utilité global U comme un sup-convolution. La seconde approche qui est très différente, consiste à définir à l'aide d'une classe $(X^\alpha, Y^\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}}$ des processus monotones une paire de champs aléatoires monotonnes (X^*, Y^*) sous forme de mélange. L'utilité stochastique finale est alors l'integrale de la composée deY^* et l'inverse de X^*.

4. Avec Nicole El Karoui et Caroline Hillairet"**Ramsey Rule with Progressive Utility in Long Term Yield Curves Modeling**

Ce document se concentre sur la modélisation des courbes de rendement affine à long terme. Pour le financement de projet écologique, pour la tarification des titres de longévité liée ou tout autre investissement, avec un impact à long terme, la modélisation des taux d'intérêt à long terme est cruciale. La réponse ne peut être trouvée dans le marché financier puisque, pour des échéances plus longues, le marché obligataire est très peu liquide et les modèles de taux d'intérêt financiers standards ne peuvent pas être facilement étendus. Néanmoins, une abondante littérature sur les aspects économiques de la politique à long terme de décision a été élaborée. La règle de Ramsey, introduite par Ramsey et développée par de nombreux économistes comme Gollier et Weitzman, est l'équation de référence pour calculer le taux d'escompte, qui permet d'évaluer la valeur future d'un investissement en donnant une valeur équivalente en cours. La règle de Ramsey lie le taux d'escompte à l'utilité marginale de la consommation globale à l'équilibre économique. Même si cette règle est très simple, il n'y a pas de consensus parmi les économistes sur les paramètres qui devraient être considérés, conduisant à des taux d'actualisation très différents. Mais les économistes sont d'accord sur la nécessité d'un système de décision séquentielle qui permet de réviser les premières décisions à la lumière de nouvelles connaissances et expériences directes : l'utilité, en tant que critère, doit être adaptative et ajustée à la circulation de l'information. D'un point de vue d'optimisation classique, ce critère adaptatif est appelé cohérence. En ce sens, les utilités consitentes avec un marché, étudié par El Karoui et Mrad dans [**?**, **?**, **?**], sont les outils appropriés pour étudier les courbes de rendement à long terme.
En effet, dans un environnement dynamique et stochastique, la notion classique de la fonction d'utilité est pas suffisamment souple pour nous aider à faire les bons choix pour le long terme. M. Musiela et T. Zariphopoulou étaient les premiers à suggérer d'utiliser à la place du critère classique la notion d'utilité dynamique progressive, qui donne un moyen adaptatif pour modéliser les changements possibles sur la durée des préférences individuelles d'un agent. Évidemment, l'utilité doit être dynamique cohérente avec un univers d'investissement donné; cette question a été étudiée d'un point de vue de la PDE dans [**?**]. Motivé par la règle de Ramsey (pour laquelle le taux de consommation est un processus clé), nous étendons la notion d'utilité progressive consistente au cadre avec consommation : l'agent investit dans un marché financier et consomme une partie de sa richesse à chaque instant. Ces utilités progressives d' investissements et de consommation ont été considérées d'abord par Berrier et Tehranchi dans

le cas particulier d'une volatilité nulle. Notre article étudie le cas général avec une approche différente.
Dans un cadre financier, il est naturel de relier les courbes des taux au zéro coupon, dont les prix sur le marché incomplèt est une question complexe. Les fonctions utilités sont également la pierre angulaire de la méthode de fixation des prix d'indifférence pour un contingent non réplicable. Pour un petit montant de transactions, cette méthode de fixation des prix (pricing) conduit à une règle de tarification linéaire appellé le prix de Davis ou prix de l'utilité marginale. Comme le marché des obligations à coupon zéro est hautement illiquides pour une longue durée, il est pertinent d'étudier le prix d'indifférence par critère d'utilité progressive de la consommation. Ce document souligne également les similitudes et les différences entre les utilités classiques et celles progressives. Bien que la fonction valeur classique est une utilité progressive (backward (retournées) dans le temps), la façon dont le problème d'optimisation classique est posé est très différente du problème de l'utilité progressive. Dans l'approche classique, les processus optimaux sont obtenus grâce à une analyse backward, soulignant leur dépendance à l'horizon du problème d'optimisation, et conduisant à des incohérences intertemporelles. Dans le cadre progressif, nous imposons des hypothèses sur les caractéristiques locales pour avoir l'existence et l'unicité des utilités ainsi que les processus optimaux.

Nous illustrons ces questions sur l'exemple du taux d'intérêts à long terme. Conformément à la règle de Ramsey, nous montrons que l'équilibre taux d'intérêt et taux d'intérêt associé à l'utilité marginale coïncident, en faisant attention que cette dernière courbe soit robuste seulement pour les petites transactions. Pour les obligations réplicables, le taux d'intérêt d'équilibre et le taux d'intérêt du marché sont les mêmes. Enfin, nous étudions la dynamique de la courbe de rendement de l'utilité marginale, dans le cadre des utilités progressives et celui des utilités rétrogrades de type puissances. Une attention particulière est accordée à l'impact de la maturité du problème d'optimisation sous-jacent sur les courbes de taux.

5. Avec Nicole El Karoui et Caroline Hillairet"**Affine Long Term Yield Curves : an application of the Ramsey Rule with Progressive Utility** " :

Ce travail est une application du précédent "Ramsey Rule with Progressive Utility in Long Term Yield Curves Modeling dans un cadre affine.
L'article repose sur la théorie de l'utilité progressive pour l'étude du rendement à long terme des courbes de taux dans un modèle affine. Inspiré par la littérature économique, il fournit une interprétation financière de la règle de Ramsey qui relie le taux d'actualisation et l'utilité marginale de la consommation globale de l'économie. Pour une telle modélisation à long terme, la possibilité d'ajuster les préférences à de nouvelles informations économiques est cruciale. Ainsi, ce document fournit d'abord une extension de la notion de l'utilité progressive consistente

à une paire d'utilités stochastiques de l'investissement et de la consommation. Il fournit ensuite une caractérisation complète de cette classe de paires d'utilités dynamiques cohérentes à l'aide des techniques des flux stochastiques dévéloppées dans [?]. Une application intéréssante de ce résultat est de revisiter le problème classique d'optimisation de portefeuille à la lumière de la théorie de l'utilité progressive, en mettant l'accent sur la question de cohérence temporelle. Ensuite, nous étudions la dynamique de la courbe de rendement de l'utilité marginale, et donnons deux exemples d'utilités de type puissance et ce dans le cadre classique ainsi que le cadre des utilités progressives et ce dans un modèle à facteurs $\xi \in \mathbb{R}^d$ et où les ξ sont supposés être des processus affines i.e.,

$$d\xi_t = \delta_t(\xi_t)dt + \sigma_t(\xi_t)dW_t \tag{3}$$

Avec

- $\delta_t(\xi_t) = \varrho_t^\delta \xi_t + \delta_t^0$, où $\varrho_t^\delta \in \mathbb{R}^{N\times N}$ et $\delta_t^0 \in \mathbb{R}^N$ sont déterministes.
- $\sigma_t(\xi_t) = \Theta_t s_t(\xi_t)$, où $\Theta_t \in \mathbb{R}^{N\times N}$ est déterministe, avec une matrice $s_t(\xi_t)$ diagonale $N \times N$ dont les valeurs propres $s_{ii,t}(\xi_t)$. Avec comme contraintes d'affinité sur la matrice de variance covariance $\Theta_t s_t(\xi_t)\tilde{s}_t(\xi_t)\tilde{\Theta}_t$ ou de manière équivalente (puisque $s_t(\xi_t)$ est diagonale) les valeurs propres $\lambda_{i,t} = s^2_{ii,t}(\xi_t)$ de $s_t(\xi_t)\tilde{s}_t(\xi_t)$: $\lambda_{i,t} = \tilde{\rho}^\lambda_{i,t}\xi_t + \lambda^0_{i,t}$

6. Avec Emmanuel Gobet : "**Convergence rate of strong approximations of compound random maps :**

Depuis les années soixante-dix, l'analyse numérique des systèmes stochastiques est un champ de recherche à part entière vu les multiples champs d'applications dans les sciences de l'ingénieur. Ce travail enrichit ce vaste domaine en répondant aux questions suivantes : Considérons un champ aléatoire continu $x \mapsto F(\omega, x)$ et une variable aléatoire $\Theta(\omega)$, ainsi que leurs approximations numériques $\mathcal{F}^n(\omega, x)$ et $\Theta^n(\omega)$ pour un certain paramètre de convergence $N \to +\infty$:

- Sous quelles hypothèses l'approximation composée $\omega \mapsto F^n(\omega, \Theta^n(\omega))$ converge-t-elle dans $L^0_+(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})_p$ vers le champ aléatoire composé $\omega \mapsto F(\omega, \Theta(\omega))$?
- Quel est le taux de convergence et comment dépend-il de ceux des approximations F^n à F et Θ^n à Θ ?

Il est facile de deviner que l'analyse serait simple si (F, F^n) étaient indépendants de (Θ, Θ^n), en utilisant un argument de conditionnement. Par conséquent, dans notre étude, on suppose que les deux paires de processus sont dépendants et on se propose d'étudier la forte convergence dans ce cadre général (convergence dans $L^0_+(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})_p$ -norme). Parmi la communauté de probabilité appliquée, il y a un intérêt croissant pour les taux de convergence forte, car elle constitue la pierre angulaire de la conception des méthodes Multi-Level Monte Carlo efficaces (qui accélèrent de façon importante les méthodes dites de Crude Monte Carlo). Dans ce travail, nous fournissons, pour la première fois, des résultats généraux qui ouvrent la voie à l'établissement des vitesses de convergence fortes dans des situations compliquées où les résultats n'ont, à ma connaissance, étaient établis à ce jour. Espérons que cela ouvrira la porte à de nombreuses autres questions intéressantes.

Dans un premier temps, nous énonçons un résultat général de convergence (Théorème 1) en donnant une estimation en norme $L^0_+(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})_p$ de l'erreur $\|F^n(\Theta^n) - F(\Theta)\|p$, puis nous le prouvons. Pour cela, nous avons besoin de supposer l'existence d' approximations localement uniformes sur $F^n - F$ (par rapport au paramètre spacial x), et faire l'hypothèse que le processus continu F est localement Hölder. Ces hypothèses étant peut-être difficiles à vérifier dans la pratique, nous donnons ensuite des conditions beaucoup plus faciles impliquant les premières, en utilisant le lemme de Garsia-Rodemich-Rumsey avec des contrôles quantitatifs précis.
Par la suite nous montrons sous certaines hypothèses de régularités sur les coéfficients d'une SDE, que la solution X et son approximation par le schema d'Euler X^n satisfont les hypothèses du résultat général. Ensuite nous montrons, en considérant une deuxième SDE dont la solution est notée Y et son approximation de type Euler Y^n que la composée $X^n(Y^n)$ converge vers le processus $X(Y)$ avec une vitesse en $\frac{1}{N^{\frac{1}{2}}}$. Ce dernier résultat est très intéréssant car étant données X et Y solutions de deux SDEs, alors on sait par une simple application du lemme d'Itô-Ventzel que la composée $X(Y)$ est solution d'une SPDE de second ordre. Si de plus Y est l'inverse d'un troisième processus alors cette SPDE n'est autre que l'équation que satisfait une utilité progressive consistente, résultat établi dans notre article "**An Exact Connection between two Solvable SDEs and a Non Linear Utility Stochastic PDEs**". Par conséquent, nous venons de donner un shema numérique convergent, relativement simple pour simuler la solution d'une SPDE de second ordre complètement non linéaire à l'aide de deux shémas d'Euler associés à deux SDEs.

7. Avec Emmanuel Gobet : ""**Strong approximation of stochastic processes at random times and application to their exact simulation.**"

L'application de notre résulat général ne se limite pas au cadre des EDS. Il existe plusieurs autres champs d'applications. D' autres exemples sont alors détéaillés dans cet article. En effet, nous analysons en particulier l'erreur et la vitesse de convergence $X^n_{\tau^n}$ vers X_τ lorsque des processus stochastiques X sont évalués à des moments aléatoires τ, les deux étant estimés (processus et temps aléatoires : X^n et τ^n). Ensuite, d'autres exemples sont étudiés, comme les temps locaux de browniens $L(.,.)$ à des points aléatoires (τ, Θ), les mouvements browniens fractionnaires ou encore des processus de diffusion au moment brownien. Dans chaque cas, nous fournissons les vitesses de convergence de la composée en fonction de celles des processus séparés.

Enfin, pour conclure d'autrés applications de notre résulat méritent bien d'être étudiés en profondeur et feront l'objet de quelques travaux qui sont dejà en cours.

Projet de recherche

Mon projet est composé essentielement de deux axes de recherche : Théorie des utilités stochastiques et Probabilités numériques.

I- Travaux en cours de développement ou en attente de finalisation

Théorie des utilités stochastiques et ses applications :. Cet axe s'inscrit naturellement comme la suite de mes travaux de recherche dans le domaine des mathématiques financières, concernant notamment les critères utilisés et la consistence en maturité des stratégies optimales.d'investissement cohérent.

- **•:** Nicole El Karoui, M. Mrad and C. Hillairet "Consistent Progressive Utility of Consumption." Dans ce travail nous généralisons la carractérisation des utilités stochastiques par les flots stochastiques au problème avec consommation. Nous montrons que les outils que nous avons introduits restent aussi éfficaces dans ce cadre et nous établissons pour la première fois un lien entre l'utilité de la consommation et celle de la richesse. Nous montrons en particulier que le choix de l'une ne peut être indépendant de l'autre. Un exemple très parlant, celui des utilités puissances, est dévéloppé et montre bien que les utilité de la consommation et celle de la richesse sont nécéssairement de même aversion au risque.
  Ce travail sera très prochainement soumis et disponible sur HAL.
- **•:** Nicole El Karoui, M. Mrad and C. Hillairet "Ramsey Rule with Consistent Progressive Utility of consumption." Nous appliquons dans ce papier la règle de Ramsey, introduite par Ramsey et développée par de nombreux économistes comme Gollier et Weitzman, pour calculer le taux d'escompte, qui permet d'évaluer la valeur future d'un investissement en donnant une valeur équivalente en cours. Les économistes sont d'accord sur la nécessité d'un système de décision séquentielle qui permet de réviser les premières décisions à la lumière de nouvelles connaissances et expériences directes : l'utilité, en tant que critère, doit être adaptative et ajustée pour modéliser les changements possibles sur la durée des préférences individuelles d'un agent. Évidemment, l'utilité doit être dynamique cohérente avec un univers d'investissement donné.

Nous illustrons ces questions sur l'exemple du taux d'intérêt à long terme. Conformément à la règle de Ramsey, nous montrons que l'équilibre taux d'intérêt et taux d'intérêt associé à l'utilité marginale coïncident. Nous étudions la dynamique de la courbe de rendement de l'utilité marginale, dans le cadre des utilités progressives.
Ce travail sera très prochainement soumis et disponible sur HAL.

•: Nicole El Karoui, M. Mrad and C. Hillairet "The $\mathbb{G}$-market : a new point of view on consumption." Nous proposons dans ce travail une toute nouvelle interprétation de défaut dans un marché financier noté $\mathbb{G}$. En effet l'intensié du défaut, particulièrement sa densité de probabilité peut être interprété comme un taux de préférence pour le présent, un taux d'actualisation ou encore un taux de consommation. En se basant sur cette interprétation, le problème d'optimisation de portefeuille dans le marché $\mathbb{G}$ avec défaut se ramène à un problème d'optimisation dans un nouveau marché financier $\mathbb{F}$ sans défaut (sans sauts) mais avec de la consommation. Nous pouvons donc résoudre le problème de portefeuille en utilisant nos résultats établis dans "Consistent Progressive Utility of Consumption."
Ce travail sera très prochainement soumis et disponible sur HAL.

•: Généraliser les travaux sur les utilités au cadre multidimentionnel : A l'échelle d'une banque, d'une simple entreprise, d'un pays ou même de tout un marché financier, l'étude de l'équilibre financier a toujours été une nécessité, non seulement pour évaluer les performances (la santé) d'une entreprise ou de toute une économie mais aussi afin de fixer les stratégies globales à suivre dans le futur, soit pour améliorer la rentabilité d'une firme, soit pour investir dans de nouveaux produits ou marchés ; l'horizon d'investissement, à court et moyen terme pour les développement technologiques..ou à long terme (écologie...) joue un grand rôle. Généraliser les travaux sur les utilités au cadre multi-agents (multidimentionnel) notamment les utilités progressives, est alors une suite naturelle de mes travaux de recherche dans le but de répondre à cette question d'équilibre général.

•: Indifférence pricing, équivalent certain : L'évaluation, aujourd'hui, d'un flux que nous percevrons dans le futur (parfois lointain) est une question qui a toujours occupée les agents financiers et représente encore un vrai challenge. Le prix d'indifférence et l'équivalent certain sont deux méthodes d'évaluation. Il s'agit d'une évaluation par un critère d'utilité, quantifiant le risque associé au produit ; ces méthodes ont été dévéloppées et largement étudiées (des centaines d'articles) dans le cadre classique d'optimisation de portefeuille. Mais, ces problèmes n'ont pas été traités lorsque le critère de référence est une utilité progressive, notamment pour des problèmes de long terme comme les projets écologiques.

Méthodes numériques :.

- **: EDS retournées :** L'intérêt que je porte aux équations différentielles stochastiques retournées dans le temps (rétrogrades) était au début une simple application de mes résultats [?] avec Emmanuel Gobet sur les vitesses de convergence de la composée de deux champ aléatoires.
  Nous avons donc pris contact avec Pierre Cohort [3] car il est l'un des premiers à avoir réfléchi à cette application intéréssante et qui consiste à simuler la solution d'une EDS sans stocker les simulations intermédiaires jusqu'au temps final T. Ceci nous permet alors de libérer de manière très significative la mémoire d'un ordinateur. Mais par ailleurs, il est très courant en probabilités numériques d' avoir besoin, pour une raison ou une autre, de retrouver ces états intermédiaires ; il suffirait alors de composer le champ aléatoire inverse satisfaisant une EDS retournée avec le résultat final de la première simulation. Certes, ceci demande un peu plus de temps. Mais vu les dimensions de plus en plus élevées (des portefeuilles) et le nombre de simulations en Monte Carlo qu'il faut stocker, libérer de la mémoire devient de plus en plus un vrai enjeu technique, car l'handicap de la saturation de la mémoire entraine des pertes de temps de calculs quelques soient les performances des machines utilisées. En outre, nous venons d'établir que la vitesse de convergence vers l'état intermédiaire est en $\frac{1}{N}$ au lieu du classique $\frac{1}{\sqrt{N}}$ en plus d'un théorme central limite, ce qui donne encore plus de la puissance à notre approche. Toujours dans le but de ne rien stocker nous avons aussi montré comment et dans quel cadre nous pouvons inverser le générateur des nombres pseudo-aléatoires pour regénérer les incréments browniens qui ont servi pour la prmière simulation (forward) avant d'être éffacés. Des exemples de tels générateurs sont fournis dans ce travail.
  Cet article sera très prochainement sousmis et mis sur HAL.

- **: Méthodes numériques pour l'inversion des flots stochastiques :** Comme il a été dévéloppé dans mes travaux de recherche, la fonction valeur associée aux problèmes d'optimisation de portefeuille est en général solution d'une équation aux dérivées partielles stochastiques (EDPS). La résolution de cette EDPS se ramène à résoudre deux EDSs monotones dont l'une est l'inverse de la solution optimale du problème. Il nous est donc nécéssaire de pouvoir inverser numériquement un champ aléatoire monotone. Ceci en soit est un vrai défi dont la résolution ouvre de nombreuses perspectives, notamment pour les EDPS de type de Hamilton-Jacobi-Bellman.
  Une manière intuitive pour simuler l'inverse d'un champ aléatoire monotone est aussi basée sur la simulation de deux EDS dont l'une est retournée dans le temps pour enfin appliquer nos résultats de [?] à la composée de ces deux solutions. Cette idée nouvelle

3. qui travaille actuellement comme analyste chez Zeliade

est en cours de dévéloppement, et susceptible de nombreuses applications en dehors des EDPS.

II- Projet de travaux à approfondir

Théorie des utilités stochastiques et ses applications :.

- **: Généralisation des utilités stochastiques au cadre des sauts :** Les études théoriques et empiriques montrent que pour l'évaluation d'options, la gestion de risques, la modélisation des marchés de l'énergie ou la prise en considération des pèriodes de crises, il est essentiel de prendre en compte la possibilité d'un mouvement quasi-instantané de grande amplitude (saut) dans le cours des actifs. Pour ces raisons, je penses que l'extension des utilités consistentes au cas des sauts est nécessaire. Ces utilités qui ont été définies à l'origine comme un ajustement instantané des préférences d'un agent par rapport aux informations des marchés financiers, doivent en toute logique prendre en compte aussi les éventuels sauts (crises) dans les marchés financiers. Autrement, notre étude est forcément incomplète.

- **: Mesures de risques cohérentes :** La maîtrise des risques est au coeur des préoccupations du monde bancaire. Comme leur nom l'indique, les mesures de risques sont un instrument très répandu en mathématiques financières pour quantifier le risque afin de déterminer les stratègies à suivre pour le maitriser. La théorie de ces mesures de risques est assez dévéloppée, notamment les mesures de risques cohérentes. L'idée est alors de définir une nouvelle classe de ces mesures, en se basant sur un critère d'utilités stochastiques progressives et non pas deterministes.

- **: Appliquer les idées du changement de variable stochastique au problème des copules dynamiques :** La copule permet de caractériser la dépendance entre les différentes coordonnées d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ sans se préoccuper de ses lois marginales. L'un des aspects probabilistes d'une copule est le fait qu'elle est une fonction de répartition sur $[0,1]^n$. Par conséquent, c'est un processus stochastique monotone. On peut donc le modéliser comme un flot stochastique solution d'une équation différentielle stochastique (EDS) monotone, qu'on peut par la suite inverser en espace pour calculer sa dynamique inverse et ainsi dévélopper une nouvelle approche de ces quantités et répondre à plusieurs questions que se posent les professionnels et les académiques à la fois.

- **•: Apprentissage statistique :** Nous avons démontré avec Nicole El karoui dans [?] que le problème des utilités stochastiques consistentes peut se généraliser d'une manière assez simple à des problèmes d'optimisation plus généraux notament en apprentissage statistique. Comme suite à ce travail, je propose de dévélopper un exemple concrêt d'apprentissage sur lequel nous mettrons nos résultats en valeur.

Méthodes numériques :.

- **•: Copules :** Comme je l'ai déjà évoqué ci-dessus, nous pouvons modéliser une copule comme l'inverse d'un champ aléatoire monotonne solution d'une EDS. Après une étude théorique de ce point de vue, l'application des résultats numériques pour l'inversion des flots stochastiques que je me propose de dévélopper d'abord sera un résultat intéréssant d'un point de vue pratique et théorique à la fois.

- **•: Erreurs faibles et composés de schémas numériques (Avec Ahmed Kebaier (LAGA) et Emmanuel Gobet) :** Dans la continuité de mes travaux avec Emmanuel Gobet , nous avons dévéloppé des nouvelles techniques jusque là jamais abordées (malgrés la nécéssité car trop complexes) permettant de contrôler des erreurs de type fort dans l'approximation de la composée de deux ou plusieurs champs aléatoires. Dans la continuité de ces idées et vu que tout est à redémontrer dans ce cadre, il est indispensable d'approfondir la question des erreurs faibles associées à ces problémes. Obtenir la vitesse optimale de la convergence faible, là encore nécéssite d'utiliser des techniques innovatives comme le calcul de Malliavin. Des applications aux EDP stochastiques, au mesures de risques, copules stochastiques... motivent notre intérêt à ces questions. **Des séances de travail à ce sujet ont déja euent lieu et des réponses partielles sont données**.

- **•:** Essayer de comprendre, si on peut appliquer les EDSs retournées au cadre des BSDEs.

- **•:** EDS retournées et application à l'inversion numérique des flots stochastiques multidimensionnels. Dans plusieurs cas, nous sommes obligés de travailler avec des équations différentielles stochastiques de dimension supérieure et ce dans plusieurs domaines d'application des probabilités notamment en finance. Il sera donc utile d'essayer de généraliser nos travaux sur les champs aléatoires et la simulation de leurs inverses dans le cadre multidimensionnel. Une application directe de ceci sera alors une approche numérique des utilités stochastiques multidimensionnelles qui sont sûrement solutions d'EDPS de dimension supérieure à 1.

- **•: Une ouverture aux EDP ordinaires et EDP stochastiques beaucoup plus générales :** Il est clair que l'EDP stochastique que nous avons résolu théoriquement avec Nicole El Karoui et numériquement avec Emmanuel Gobet est une équation certes compliquée mais très particulière. Ceci ne limite en aucun cas les idées que nous avons dévéloppées car elles sont plus générales. En effet, on peut imaginer, partant d'une EDP stochastique ou ordinaire quelconque, trouver un changement de variable (flot monotonne) qui nous permettra de la simplifier. Une fois nous avons notre équation simplifiée, on essaye de la résoudre puis on composera la solution avec le changement de variable inverse ou son approximation pour retrouver celle de départ.
  D'ailleurs ceci constitue le point de départ d'une nouvelle colaboration avec Andreas Prohl, professeur spécialiste des méthodes numériques pour les EDPS, de l'université de Tubingen (équipe Numerical Analysis Groups) qui se trouve très intéréssé par nos travaux et est très favorable pour une collaboration dans ce domaine. Un premier contact a déja été pris durant lequel Emmanuel a présenté nos récents résultats.
- **•: Application aux problèmes de filtrage :** Une des applications la plus dévéloppée par H. Kunita dans son livre de référence " Stochastic flows and stochastic differential equations" est l'application de la théorie des flots à la résolution des EDP stochastiques issues de problèmes de filtrages. L'idée est alors d'approfondir mes connaissances à ce sujet et essayer de proposer des méthodes numériques approchant les éventuelles solutions qui sont en général la composée de plusieurs champs monotonnes solutions d' EDS (ce qui est une application directe de nos résultats).

****