

---

## Recherche

---

**Travaux de thèse :** Mon travail de thèse porte sur l'étude des utilités dynamiques progressives cohérentes avec un marché financier donné.

Dans le monde de la finance traditionnelle, la réflexion sur le critère à optimiser dans le cas de la sélection de portefeuille par exemple est assez pauvre : on se fixe un horizon de gestion, une fonction concave (pour traduire l'aversion pour le risque) croissante, et on cherche à maximiser l'utilité espérée de sa richesse finale. La stratégie optimale est fortement dépendante de l'horizon de gestion et du critère. Or dans le domaine de la banque d'investissement, des marchés à terme en particulier, une partie de l'activité porte sur des stratégies "delta-hedgées", c'est à dire peu sensibles à la tendance du marché, qu'on souhaite utiliser comme stratégies de référence. Par ailleurs, de plus en plus de problèmes, dont celui du financement des problèmes écologiques portent sur des horizons très longs, pour lesquels il est difficile de faire comme si le marché ne réajustait pas son critère en cas de changements importants des paramètres fondamentaux de l'économie.

En 2002, Marek Musiela et Thaleia Zariphopoulo ont proposé un point de vue très nouveau sur ces questions, en introduisant la notion "forward utility", c'est à dire une utilité dynamique, progressive, cohérente avec un marché financier donné. On peut voir ce processus comme un champ aléatoire  $u(t, x)$  adapté à l'information disponible, qui à chaque instant est une utilité standard (donc en particulier à la date 0, compatible avec une famille de stratégies données  $(X^\pi)$  au sens où pour tout  $t, h > 0$

$$(1) \quad \mathbb{E}(u(t+h, X_{t+h}^\pi) | \mathcal{F}_t) \leq u(t, X_t^\pi)$$

et il existe un portefeuille optimal  $X^*$  pour lequel l'inégalité est une égalité.

Les auteurs ont fait plusieurs articles sur ce sujet, montrant en particulier comment les utilités classiques, puissance, exponentielle, etc doivent être modifiées pour être des utilités dynamique progressives. Une attention limitée est portée à l'univers d'investissement.

La thèse contient deux parties aux motivations très différentes. La première est une sorte de "retour aux sources" sur les différents points importants de l'étude de ces problèmes d'optimisation : le critère de préférence, le marché financier auquel on se réfère, les contraintes de gestion qui en général rendent le marché incomplet, le problèmes dual...

La deuxième partie est consacrée à différents aspects des utilités progressives. Étude de la dynamique du champ aléatoire  $u(t, x)$ , d'abord dans le cas markovien puisqu'il n'est pas nécessaire d'introduire des outils nouveaux pour mener l'étude, puis dans le cas général, où l'objectif est de donner la forme de la décomposition du champ markovien

$$(2) \quad du(t, x) = \beta(t, x) + \Gamma(t, x)dW_t$$

Comme dans l'optimisation classique, (dite rétrograde puisqu'on reconstruit l'information à partir de la fin), le terme  $\beta(t, x)$  contient un terme de type hamiltonien classique modifié par la présence de la dérivée de la volatilité  $\Gamma(t, x)$  de l'utilité progressive.

Dans le cas général, ses résultats sont établis grâce à la formule de Ventzell-Friedlin, qui permet de donner la décomposition de type Itô's de la composée d'un champ aléatoire avec un processus d'Itô. Ce point de vue permet de vérifier que le champ aléatoire, s'il existe est compatible avec l'univers d'investissement, mais la question de la convexité et de la monotonie est complexe a priori, car il y a peu de théorèmes de comparaison pour les équations progressives, contrairement au cas des équations rétrogrades. La question de l'interprétation et du rôle de la volatilité est centrale dans cette étude.

M. Musiela et T. Zariphopoulo, puis C. Rogers et al ont étudié le cas où la volatilité de l'utilité est identiquement nulle. Le processus progressif  $u(t, x)$  est alors une fonction déterministe satisfaisant une EDP non linéaire, que les auteurs ont transformé en solution harmonique espace temps de l'équation de la chaleur.

J'étudie, par la suite, la question de la volatilité par des techniques de changement de numéraire. Comme dans le cas classique, le problème est compliqué par le fait que l'espace des contraintes n'est pas invariant par changement de numéraire. Cette technique permet de se ramener toujours à un marché "martingale", ce qui n'a pas de sens pour les utilités déterministes. La dérivée de la volatilité apparaît comme une prime de risque instantanée que le marché introduit, et qui dépend du niveau de la richesse de l'investisseur. Ce point de vue permet de répondre à la question de l'interprétation de la volatilité de l'utilité.

Le chapitre II-4, de ma thèse, étudie le problème dual et montre que la transformée de Fenchel de la fonction concave  $u(t, x)$  est un champ markovien lui aussi dont les caractéristiques sont déduites des caractéristiques de  $u(t, x)$  par les propriétés de la dualité. Ce point de vue est utilisé de manière cruciale dans l'étude des utilités progressives déterministes, car l'EDP duale est souvent plus simple que l'EDP primale.

Le dernier chapitre est vraiment le plus original et à beaucoup de points de vue. D'abord il introduit la théorie des flots stochastiques dans ces problèmes d'optimisation, ce qui permet de généraliser de manière très naturelle les

résultats standards de la dualité des fonctions concaves déterministes. Ce point de vue est aussi remarquablement efficace dans le cas standard d'optimisation de portefeuille.

Ensuite, partant de l'hypothèse qu'il existe une utilité progressive dont le portefeuille optimal est une fonction monotone de la richesse initiale, je montre par des techniques de composition de flots stochastiques monotones comment générer "toutes" les utilités progressives ayant ce processus comme processus optimal. C'est un résultat nouveau, original dans ses outils et très simple dans les preuves. Toujours par des techniques de composition des flots stochastiques, et avec plus d'hypothèses de régularité des flots, j'établie à nouveau les EDP stochastiques et je montre que la volatilité de ces utilités est un opérateur linéaire par rapport à la dérivée seconde de l'utilité et dépend de la dérivée première uniquement à travers la volatilité du flot dual. De plus cette volatilité se décompose de manière unique en la somme de deux termes orthogonaux, l'un correspond à la stratégie optimale et le second à la volatilité de la mesure martingale optimale.

Ces techniques ouvrent la voie à une nouvelle manière d'aborder mêmes les problèmes les plus classiques.

#### Travaux en cours :

- Généralisation des travaux de thèse à des modèles à sauts et des modèles avec consommation.
- Applications des résultats de la thèse aux "State Dependent Utilities" très utilisées en économie.
- Applications des résultats de la thèse aux taux long-terme.
- Dans le cadre de mon post-doctoral chez Pricing Partner's : Mon sujet est "Interest Rate and the Credit Crunch". Le but est d'expliquer l'existence de plusieurs courbes de taux depuis la crise financière et de proposer des méthodes d'évaluations cohérentes.
- Introduction des méthodes de "Randomized Quasi Monte Carlo" en finance.

---

### Publications et Conférences

---

#### — Publications :

- Nicole El Karoui and Mohamed M'rad, **Consistent Progressive Stochastic Utilities : Approach by stochastic flows**, preprint.
- Nicole El Karoui and Mohamed M'rad, **Drift and Volatility Characterization of Consistent Progressive Stochastic Utilities**, preprint.

#### — Conférences :

##### (1) Communications Orales :

- Groupe de Travail *Méthodes Stochastiques et Finance*, Séminaire Probabilités de l'Université Paris-Est-Marne-la-Vallée. *à venir*.
- *Autour des utilités progressives et flots stochastiques*, Séminaire de LPMA de Paris VI, Groupe de travail *Probabilités Numériques et Finance*, Chevaleret, 17 décembre 2009.
- *Interest rate & credit crunch* exposé d'une heure pour le Groupe de travail Credinext à Pricing Partners<sup>3</sup>, Paris, 8 décembre 2009.
- *Groupe de travail "Modèles Stochastiques en Finance"*, CMAP, 2006, 2008 & 2009.
- Journée doctorants de l'Ecole Polytechnique 2007 & 2008.

##### (2) Participations :

- *Conference on Quantitative Risk Management*, University Paris Diderot, September 18, 2009.
- *Ecole d'Eté en Finance*, HEC Paris, 24-28 août 2009.
- *Inform Applied Probability Conference*, Ithaca, 9-11 juillet 2009.
- *European Summer School in Financial Mathematics*, Paris, 7-14 septembre 2008.
- *UCSB Conference on Convex Duality method in Mathematical Finance*, University of California at Santa Barbara, 22-27 juin 2008.

---

<sup>3</sup>Partenaires : Euronext Paris, Lunalogic, CMAP (Ecole Polytechnique), CERMICS/ENPC, Université Paris-Est Marne la Vallée (Laboratoire de Mathématiques Appliqués), INRIA (projet Mathfi)

- *Stochastic processes : Theory and Applications Conference, on occasion of the 65th birthday of Professor Wolfgang Runggaldier*, Bressanone, 16-20 juillet 2007.
- *Informs Applied Probability Conference*, Eindhoven, 9-11 juillet 2007.
- *Stochastic processes and Applications Conference*, Paris, 17-21 juillet 2006.
- *Informs Applied Probability Conference*, Ottawa, 6-8 juillet 2005.