

The modulational instability in models of Rayleigh beam lying on the elastic basis

Vakulenko S.P., Volosov K.A., Volosova N.K.

The dynamic behavior of Bernoulli-Euler, Rayleigh and Timoshenko beam models lying on an elastic foundation is considered. A comparative analysis of their dispersion curves is given. The behaviour of the Rayleigh beam dispersion curve has been found to coincide qualitatively with the behaviour of the lower branch of the Timoshenko beam dispersion curve. Accounting for the cubic nonlinearity of the elastic foundation in these models leads to the generation of higher harmonics, which do not, however, practically interact (due to strong dispersion). The stability and instability domains of quasi-harmonic flexural waves have been found. It is shown that, in contrast to the Bernoulli-Euler model, the Rayleigh model may be used in studying low-frequency flexural waves. Keywords: flexural vibrations of beams, elastic foundation, wave, dispersion, modulation instability.

Модуляционная неустойчивость в модели балки Рэлея лежащей на упругом основании

Вакуленко С.П., Волосов К.А., Волосова Н.К.

*Московский государственный университет путей
сообщения императора Николая II*

Рассматриваются модели балок Бернулли-Эйлера, Рэлея и Тимошенко. Из математической модели балки Рэлея лежащей на упругом основании в модели Винклера, при определённых предположениях, для огибающей спектра, в медленных переменных, получено уравнение Шредингера. Модуляционная неустойчивость решения известная для уравнения Шредингера позволяет объяснить эффект перекачки энергии в спектре колебаний в область более высоких частот. Задача связана с проблемой диагностики состояния железнодорожного полотна с подвижного состава.

Построение аппаратного комплекса диагностики железнодорожного пути на основе анализа динамических процессов при движении поездного состава в РФ

не имеет ныне альтернативы. Аналогичные методы давно используются при эксплуатации летательных аппаратов и в других областях техники и машиностроения, медико-биологической сфере. Возможность упростить расчеты (провести их быстро и недорого, на стандартном оборудовании) модельных задач позволяют изложенные в докладе дополнения к теории основных моделей «балки Тимошенко и балки Рэлея» в разных ситуациях. В случае балки Тимошенко, неоднородная система линейных дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка точно приводится к последовательности решения двух классических смешанных задач – уравнений производными: гиперболического и Клейн-Гордона-Фока. Показано, что система имеет два масштаба (две базовые частоты). Объяснен эффект аномально быстрой осцилляции колебаний. Предложен полуаналитический – численный метод, позволяющий сравнить эффекты, вызванные различными краевыми условиями. В случае балки Рэлея на упругом основании (модель Винклера) нелинейное уравнение с частными производными четвертого порядка также факторизуется и приводится к системе двух дифференциальных уравнений второго порядка. Показано, что при определенных предположениях, для уравнения огибающей спектра в медленных переменных следует уравнение Шредингера.

В связи с развитием скоростных железнодорожных перевозок приобрело особое значение создание и функционирование высокотехнологичного комплекса контроля качества состояния пути непосредственно с движущегося состава. Теоретические основы такого метода контроля излагаются в работах [1–5] и цитируемых в них научных трудах. Экономический эффект от эксплуатации такого комплекса в РФ настолько велик, что в настоящий момент его трудно оценить. Затраты на проведение мониторинга за состоянием ж.д.

полотна с подвижного состава несоизмеримы с затратами собственника путей по ликвидации последствий схода подвижного состава. Разные методы диагностики трудно выявляемых дефектов должны не конкурировать, а дополнять друг друга. Методика и основы анализа разных аспектов интеграции такого комплекса в единую транспортную систему должна быть изложена в отдельной статье на базе работы [6].

Предварительные замечания

Основная наша цель – выявить неизвестные ранее математические свойства основных теоретических моделей балок Тимошенко и Рэлея, играющих большую роль в расчетах, связанных с анализом спектра колебаний при прохождении по рельсам подвижного состава, акцентировать внимание на эффекты в спектрах колебаний, которые указывают на появление трудно выявляемых дефектов, и изложить соображения авторов о принципах построения системы контроля. В цитируемой литературе упоминается более ранняя и простая модель балки Эйлера –Бернулли, исследование которой в данной работе не проводится.

Замечание 1. *Отметим, что опыт компьютерной обработки и анализа крупных объемов динамических данных со сложной трехмерной внутренней структурой накапливается, например, при применении различных видов томографии мозга, обработке данных нейровизуализации и биоинформатики в медико–биологической сфере. При этом используются методы математической статистики и сравнение с эталонами, что приводит к успеху. Здесь много схожих черт с нашей проблемой, хотя в ней исследуются волны и колебания в другом частотном диапазоне. В обоих случаях фигурирует априорная информация о строении объектов геометрии, физических, химических, биологических свойствах, которые играют большую роль.*

Замечание 2. *Известный математик, современности А. С. Братусь высказал свою поддержку идеи создания комплекса, осуществляющего слежение за состоянием пути с подвижного состава, на основе имеющихся в*

данный момент в нашем распоряжении технических средств, высоких технологий, вычислительных систем, системы ГЛОНАСС в следующей форме: «Математические расчеты течения жидкости в разветвленных сложных трубопроводах, широком диапазоне изменения температур и давлений, считает он, по-прежнему остается сложной задачей. Привлечение для численных расчетов суперкомпьютеров и методов многопоточковой обработки данных требует больших затрат сил, энергетических, финансовых и кадровых людских квалифицированных ресурсов»: Не без самоиронии ученый замечает: «что если бы люди ждали, когда математики докажут все свои теоремы, связанные с возникающими задачами, то и водопровода сегодня не было бы...»

Задача выявления дефектов и локализации их в пространстве, которые являются причиной изменений в спектре продольных, вертикальных и поперечных колебаний, возникающих при прохождении по рельсам подвижного состава, относятся в математике к классу «обратных». Многомерные «прямые» краевые задачи, с различными многообразными вариантами постановки краевых условий и различных распределений в пространстве сил, очень сложные. «Обратные» задачи такой сложности в настоящее время нет возможности решить. С нашей точки зрения, можно ограничиться расчетом одномерных, более простых «прямых» задач. Это можно сделать быстро и недорого на стандартном оборудовании. Математическое моделирование в этом случае позволяет выявить основные эффекты и получить подсказки, с помощью которых можно сделать вывод о появлении трудно выявляемых дефектов и локализовать их в пространстве. Своевременное обнаружение дефектов помогает избежать аварий, утраты имущества, не говоря уже о потере здоровья и жизни людей.. Если бы такой метод применялся, то тяжелую аварию, подобную аварии в московском метро 15 июля 2014 года удалось бы предотвратить.

Цитированные в данной работе статьи связанные с анализом моделей балок, которые используются работах по железнодорожной тематике. Их можно условно, с нашей точки зрения, разделить на две большие части. Наше выделение двух циклов работ связано с тем, что в первом цикле шпалы рассматриваются как балки, лежащие на балласте, а рельс моделируется силой приложенной в точке. Во втором цикле работ как балка рассматривается рельс, а шпалы моделируются как силы приложенные в точках. Этот цикл затронут нами в пункте 5.

В первом цикле работ перечисленных кратко в библиографии статей

[2, 4, 5], приведены многочисленные численные исследования динамики взаимодействия состава с шпалами, которые рассматриваются как балки. Краевые условия разного типа и функции $f(x, t)$ – источников, которые позволяют моделировать разные ситуации разрушения полотна, неравномерность распределения напряжений и динамических характеристик в шпалах, то есть возникающие дополнительные поперечные силы. В них показано, что наличие пустот под шпалами и разрушение полотна существенно влияют на распределение динамических нагрузок, а следовательно влияют на спектр колебаний.

Многие расчеты, как наши, так и других авторов, подтверждают, что возникновение дефекта ведет к появлению дополнительных резонансов и дисперсия в окрестности главных максимумов увеличивается. Подобные этому повторяющиеся признаки могут стать основой метода выявления трудно распознаваемых дефектов, они позволяют локализовать участок пути за счет сравнения фиксируемого спектра поперечных, вертикальных и продольных колебаний с соответствующими эталонными спектрами, полученными ранее на исправном участке.

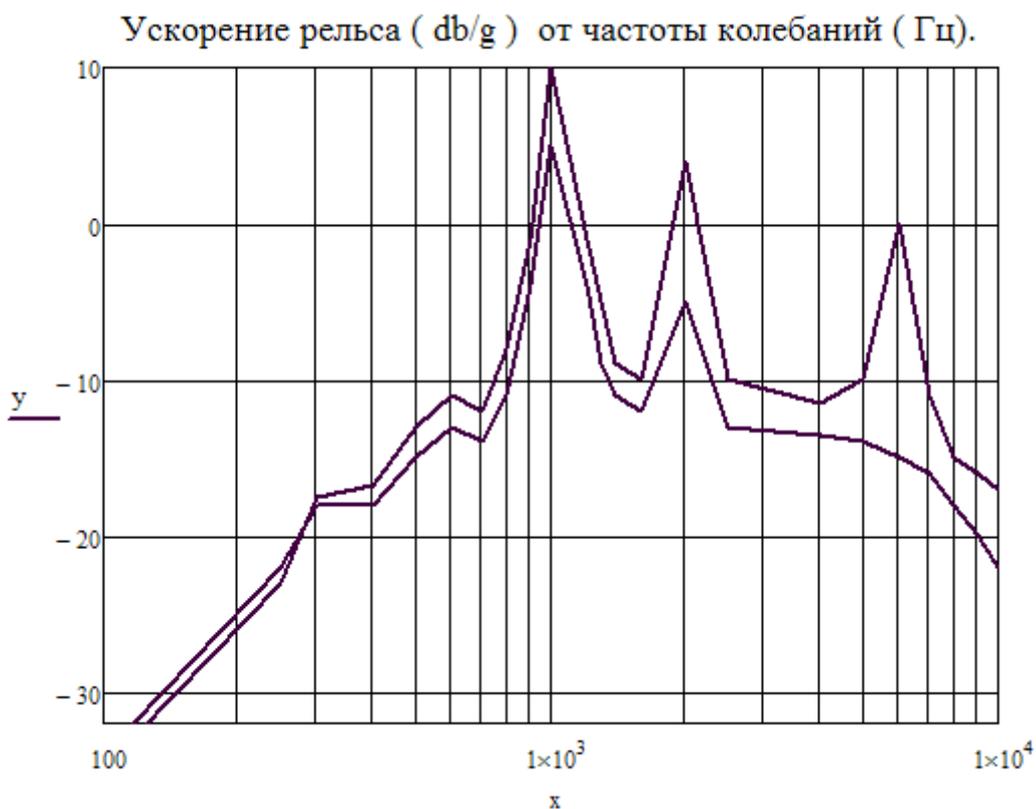


Рис. 1.

В качестве примера один из простых спектров колебаний и зависимость ускорения от частоты и наличия различных дефектов приведены на рис. 1. Анализ этих и других подобных кривых позволяет сделать вывод, что существует два главных, базовых резонанса, появление которых объясняется в данной работе существованием нескольких, вычисленных ниже, базовых частот. Итак, существует два резонанса. Первый резонанс значительно сильнее выражен. Верхняя кривая соответствует случаю когда имеются две подвешенные шпалы. Появляется дополнительный резонанс (максимум) на кривой огибающей спектра и дисперсия в окрестности главных максимумов увеличивается. Суммируя результаты других вариантов численного математического моделирования, можно сделать вывод, что обнаружен важный эффект: с увеличением числа шпал, «висящих» на рельсе, то есть лишенных опоры, дисперсия в окрестности частот главных резонансов увеличивается и появляются дополнительные резонансы на более высоких частотах.

Нижняя кривая на рис. 1 отражает идеальную ситуацию, когда отсутствуют дефекты. Верхняя кривая соответствует наличию двух «подвешенных» шпал, без опоры на балласт. Аналогичные кривые спектров при прочих дефектах имеются в других упоминавшихся выше, цитируемых работах.

Сложность проблемы заключается в том, что эффекты от разных дефектов нелинейно отражаются в спектре колебаний и нет однозначного соответствия им. Разные дефекты могут вызывать похожие максимумы. Но можно оценить степень опасности дефекта по интегральным оценкам спектра в сравнении с эталонным спектром на этом же участке.

Замечание 3. При численном моделировании специалистами используются неявные разностные схемы и вариационный метод Рунге для краевых задач. При аналитическом построении решения, в линейном случае, методом разложения в ряды Фурье [7] авторы сетуют на то, что для варианта с достаточной точностью необходимо суммировать 32000 слагаемых. То есть ряд Фурье сходится медленно и расчеты идут дольше.

Замечание 4. Вычислительные эксперименты по решению прямых многомерных задач были описаны в ряде указанных работ. Большое разнообразие свойств, геологических, географических, связанных с инфраструктурой окружающего пространства и как следствие многообразие возможных краевых условий делает динамические математические «прямые» модели малоэффективными. Решение «обратных» задач такой сложности является еще более трудной проблемой.

Замечание 5. Новым элементом с точки зрения математической физики и механики балок является факторизация уравнений с частными производными модели «балки Тимошенко». Если читатель знает о работах, где реализована подобная факторизация, то просим сообщить авторам. Молодое поколение, не зная аналитических операторных методов, сразу бросается к компьютеру.

Замечание 6. *Исследование максимальных возможных прогибов в зависимости от скорости движения в обоих моделях, рассмотренных в линейном приближении методом преобразования Фурье было проведено в цикле работ авторов [15]. Этими же авторами исследованы аналогичные задачи для плит. В настоящее время уже используются технологии укладки скоростных железнодорожных магистралей на железобетонные плиты. В первой половине двадцатого столетия в работе С.П. Тимошенко отмечает, что величина критической скорости распространения волн Рэлея в грунте (для обсуждаемых моделей порядка $Cr = 120 \text{ [м/с]} = 432 \text{ [км/ч]}$) « велика и на практике вряд ли достижима». При современном высокоскоростном движении и скоростях порядка 1500 [км/ч] полученных в экспериментах движения грузов в вакуумной трубе, вибрации создаваемые поездами существенно возрастают.*

Процедура факторизации дает возможность объединить большое количество задач, которые отличаются значениями параметров (из-за различия значений физических констант) и рядом слагаемых в них, величину и влияние которых на решение можно регулировать с помощью безразмерных параметров и краевых условий. Формулы получаются компактные, легко обозримые (всего шесть интегральных слагаемых) и позволяющие сравнить влияние различных краевых условий. Получение численных результатов сводится к вычислению интегралов с помощью классических формул.

В данном докладе доказано, что модели балок Тимошенко и Рэлея, методом факторизации [12] в линейном приближении приводятся к последовательности классических задач для неоднородного линейного гиперболического уравнения (ЛГУсЧП) и неоднородного линейного уравнения Клейна-Гордона-Фока (ЛурКГФ) и показано, что в задаче имеют место два базовых масштаба, две характерные скорости, две базовые частоты. (В нелинейном случае системы факторизованных уравнений нелинейные.)

Задачи для неоднородного линейного гиперболического уравнения (ЛГУсЧП) и неоднородного линейного уравнения Клейна-Гордона-Фока (ЛурКГФ) изучены в цикле работ автора [9] и других авторов, ссылки на работы которых приведены в справочниках [10–11]. Математик Адамара «предложил замечательно простую и точную конструкцию (фундаментальное решение)» [9, с. 1]. В данной работе найдена возможность использовать конструкции Адамара в модели «балки Тимошенко», т.е. появилась возможность решать задачи Коши для неоднородных уравнений в частных производных второго порядка. Автор [9] рассмотрел случай движущихся с переменной скоростью источник высокочастотных колебаний для уравнений ЛГУсЧП и ЛурКГФ, а также влияние большого параметра на колебания в функции источника – диссипации последнего уравнения. Фундаментальные решения и функции Грина, для большого количества разных классических задач связанных с ЛГУсЧП и ЛурКГФ, приведены в [10-11].

2. Постановка задачи

Уравнения, описывающие колебания в модели «балки Тимошенко», имеют вид системы [2, с. 1538]:

$$\begin{aligned}
 EI \frac{\partial^2 \vartheta(x,t)}{\partial x^2} + kAG \frac{\partial Z(x,t)}{\partial x} - \vartheta(x,t) - mr^2 \frac{\partial^2 \vartheta(x,t)}{\partial t^2} + P \vartheta(x,t) &= 0, \\
 \frac{\partial}{\partial x} kAG \frac{\partial Z(x,t)}{\partial x} - \vartheta(x,t) - m \frac{\partial^2 Z(x,t)}{\partial t^2} &= f(x,t).
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Здесь $Z(x,t)$, $\vartheta(x,t)$ – функции отклонения срединной линии и угла поворота сечения соответственно;

E – модуль упругости на сжатие [H/m^2];

I – приведенный полярный момент инерции сечения [m^4]; стр.34 в [14]

k – безразмерный коэффициент Тимошенко;

A – площадь поперечного сечения [m^2];

G – модуль упругости на сдвиг [H/m^2];

$m=I\rho/r^2$ – распределенная плотность [$кг/м$];

ρ – плотность [$кг/м^3$],

P – продольная сила, приложенная к балке.

Отметим, что между размерностями функций $Z(x,t)$, $\vartheta(x,t)$ справедливо соотношение $[\vartheta(x,t)] = [Z(x,t)] / [M]$. Для системы (1) в цитируемых работах рассматриваются смешанные краевые задачи в разных ситуациях.

3. Расщепление системы (1)

Покажем, что смешанные задачи для системы (1) имеют точное решение.

Теорема 1. Пусть дана математическая модель «балки Тимошенко» (1).

Тогда, одна из функций явно выражается через другую:

$$Z(x, t) = h(t) + [kAG - P] \Phi(x, t) + mr^2 \frac{\partial^2 \Phi(x, t)}{\partial t^2} - EI \frac{\partial^2 \Phi(x, t)}{\partial x^2} / (kAG),$$

$$\vartheta(x, t) = \frac{\partial \Phi(x, t)}{\partial x}.$$

(2)

Здесь $h(t)$ – произвольная непрерывно-дифференцируемая функция.

Для определения функции $\Phi(x,t)$ надо решить задачу с краевыми условиями и начальными условиями для неоднородного линейного уравнения четвертого порядка с частными производными:

$$m[kAG - P] \frac{\partial^2 \Phi(x, t)}{\partial t^2} + kAGP \frac{\partial^2 \Phi(x, t)}{\partial x^2} + m^2 r^2 \frac{\partial^4 \Phi(x, t)}{\partial t^4} -$$

$$- m(EI + kAGr^2) \frac{\partial^4 \Phi(x, t)}{\partial x^2 \partial t^2} + kAGEI \frac{\partial^4 \Phi(x, t)}{\partial x^4} = F_0(x, t).$$

(3)

Здесь $F_0(x, t) = -kAG(mh''(t) + f(x, t))$.

Доказательство.

Краевые условия для системы (1) могут быть первого, второго или третьего рода. Так как первое уравнение системы (1) неоднородное, а функция $f(x,t)$ содержит сумму обобщенных дельта-функций Дирака в неподвижных и в подвижных точках $x=v_0(t)t$, которая движется неравномерно, то процедура вывода уравнения четвертого порядка отличается от вывода в случае однородного второго уравнения системы (1). Второе уравнение нельзя дифференцировать. Продифференцируем первое уравнение системы (1) по

переменной x и выразим вторую переменную $\frac{\partial^2 Z(x,t)}{\partial x^2}$. Сделаем замену

$\vartheta(x,t) = \frac{\partial \Phi(x,t)}{\partial x}$ и получим

$$k A G \frac{\partial^2 Z(x,t)}{\partial x^2} + [P - k A G] \frac{\partial^2 \Phi(x,t)}{\partial x^2} - m r^2 \frac{\partial^4 \Phi(x,t)}{\partial x^2 \partial t^2} + E I \frac{\partial^4 \Phi(x,t)}{\partial x^4} = 0.$$

(4)

Интегрируем (4) дважды по переменной x и получим формулу (2).

Функция $h(t)$ возникает при интегрировании. Одну из констант интегрирования положим равной нулю. Таким образом, одна из функций в системе (1) выражена через другую – формуле (2). После дифференцирования (2) по переменной t и подстановки во второе уравнение (1) следует уравнение (3).

4. Применение факторизации к уравнению (3).

Большой вклад в развитие операторных методов внесли В. П. Маслов, М. В. Карасев, В. Г. Данилов и другие авторы, ссылки на работы которых приведены в [8].

В [8], [10] и цитируемых в них работах приведены примеры применения метода факторизации в разных задачах.

Целью процедуры факторизации является представление уравнения (3) в виде

$$L_1 \circ [L_2 Y(x,t)] = F_0(x,t). \text{ Конкретные линейные операторы}$$

L_1, L_2 $i = 1, 2$ в случае модели (1), определены ниже.

Замечание 6.

В книгах и статьях специалистов по распространению волн, например [13], [14] много внимания уделяется кругу проблем связанных с явлением

дисперсии. Это объясняется вниманием к решениям из семейства, которое обобщается понятием солитоны. Поэтому процедуру обезразмеривания задач в этой литературе они проводят связывая её с различными характерными скоростями волн. В данной работе нас уединенные волны не интересуют, а нам приходится объяснять результаты исследований специалистам работающим в различных областях связанных с железнодорожным транспортом. Здесь наработана своя, специфическая культура обозначений, удобных для этих специалистов комплексов физических констант и понятий. Поэтому, мы проводим свою, отличающуюся от процедуры предложенной в работах [13], [14] процедуру обезразмеривания задачи, удобную для наших поставленных целей. Необходимо донести до этих специалистов результаты работы.

Проведем процедуру обезразмеривания уравнения (3). Обозначим через $x=x_0 \chi$, $t=t_0 \tau$ и ψ характерный размер, время и характерное значение функции $\Phi(x,t)$ соответственно.

Сделаем замену $\Phi(x,t) = \Theta(\frac{x}{x_0}, \frac{t}{t_0}) / \psi$. Обозначим гиперболический оператор Даламбера с параметром μ , который определяет базовую скорость волн и базовую частоту:

$$\Pi_\mu = \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \mu^2 \frac{\partial^2}{\partial \chi^2}, \quad (5)$$

Из последующего анализа выясняется, что существуют два безразмерных параметра

$$a^2 = \frac{E t_0^2}{x_0^2 \rho} [[\text{кг м/с}^2] / \text{м}^2] \text{с}^2 / (\text{м}^2 * \text{кг/м}^3),$$

$$\mu^2 = \frac{A G k r^2 t_0^2}{I x_0^2 \rho} [\text{м}^2 [\text{кг м/с}^2] / \text{м}^2] \text{м}^2 \text{с}^2 / (\text{м}^4 \text{м}^2 * \text{кг/м}^3). \quad (6)$$

Теорема 2. Пусть дано уравнение (3) и определены параметры (6). Тогда для построения решения уравнения (3) в безразмерном виде необходимо

решить последовательно две стандартные смешанные задачи, а именно: для линейного гиперболического уравнения с частными производными

$$\begin{aligned} \Pi_a Y(\chi, \tau) &= F_1(\chi, \tau), \\ F_1(\chi, \tau) &= M_0 (a^2 - \mu^2) \psi [t_0^2 E I h''(t_0 \tau) + (a r x_0)^2 f(x_0 \chi, t_0 \tau)] / (E I \mu^2) \end{aligned} \quad (7)$$

и смешанную задачу для уравнения Клейна-Гордона-Фока

$$\Pi_\mu \Theta(\chi, \tau) - x_0^2 \mu^4 \Theta(\chi, \tau) / (r^2 (a^2 - \mu^2)) = - x_0^2 \mu^4 Y(\chi, \tau) / (M_0 r^2 (a^2 - \mu^2)). \quad (8)$$

Здесь $M_0 = \text{const} \neq 0$.

Во втором варианте метод факторизации дает демонстрируемый далее результат.

Теорема 3. Пусть дано уравнение (3) и два безразмерных параметра (6). Тогда для построения решения уравнения (3) в безразмерном виде необходимо решить последовательно две стандартные смешанные задачи, а именно: для уравнения Клейна-Гордона-Фока

$$\begin{aligned} \Pi_\mu Y(\chi, \tau) - x_0^2 \mu^4 Y(\chi, \tau) / (r^2 (a^2 - \mu^2)) &= F_2(\chi, \tau), \\ F_2(\chi, \tau) &= x_0^2 \mu^4 c_0 \psi [E I t_0^2 h''(t_0 \tau) + (a r x_0)^2 f(x_0 \chi, t_0 \tau)] / (a^2 r^4 (\mu^2 - a^2)) \end{aligned} \quad (9)$$

и смешанную задачу для линейного гиперболического уравнения

$$\Pi_a \Theta(\chi, \tau) = a^2 r^2 (a^2 - \mu^2) Y(\chi, \tau) / (\mu^2 c_0 E I) \quad (10).$$

Здесь $c_0 = \text{const} \neq 0$.

Доказательство теорем 2, 3. Рассмотрим уравнение Клейна-Гордона-Фока для функции $\Theta(\chi, \tau)$ с неопределенными постоянными коэффициентами $M_0, c_0 P, j_0$. Найдем вторую производную по переменной τ :

$$\frac{\partial^2 \Theta(\chi, \tau)}{\partial \tau^2} = [c_0 P \frac{\partial^2 \Theta(\chi, \tau)}{\partial \chi^2} - M_0 \Theta(\chi, \tau) + Y(\chi, \tau)] / j_0.$$

При этом $Y(\chi, \tau)$ – функция, которая определяется задачей для уравнения (7) или (9).

После вычисления четвертых производных от функции $\Phi(\chi, t) = \Theta(\chi/x_0, t/t_0) / \psi$ получим

$$\frac{\partial^4 \Phi(x,t)}{\partial t^4} = \frac{\partial^4 \Theta(\chi,\tau)}{\partial \tau^4} \frac{1}{t_0^4 \psi}, \quad \frac{\partial^4 \Phi(x,t)}{\partial x^4} = \frac{\partial^4 \Theta(\chi,\tau)}{\partial \chi^4} \frac{1}{x_0^4 \psi},$$

$$\frac{\partial^4 \Phi(x,t)}{\partial x^2 \partial t^2} = \frac{\partial^4 \Theta(\chi,\tau)}{\partial \chi^2 \partial \tau^2} \frac{1}{x_0^2 t_0^2 \psi}.$$

Подставляем в уравнение (3) – и в первом случае (для теоремы 2) имеем

$$j_0 = \frac{m c_0 P x_0^2}{k A G t_0^2}, \quad c_0 = \frac{M_0 (k A G r^2 - E I)}{(k A G P x_0^2)}, \quad P = \frac{k A G E I}{(E I - k A G r^2)}, \quad m = \frac{I \rho}{r^2}. \quad (11)$$

После введения параметров (6) следуют уравнения (7), (8).

Во втором случае (для теоремы 3) получаем

$$j_0 = \frac{m c_0 P r^2 x_0^2}{E I t_0^2}, \quad M_0 = 0, \quad P = \frac{k A G E I}{(E I - k A G r^2)}, \quad m = \frac{I \rho}{r^2}. \quad (12)$$

После введения параметров (6) следуют уравнения (9), (10).

Далее надо задать краевые и начальные условия и проводить вычисления интегралов свертки с правой частью и граничными условиями аналитическими и численными методами. Вычисления при значениях констант, относящихся к железнодорожному пути [2, 3], показывают, что отношение параметров (скоростей волн и частот) $\mu / a > 50$. Коэффициент $a^2 - \mu^2 < 0$.

В $f(x_0 \chi, t_0 \tau)$ входят дельта функции Дирака, поэтому интеграл с ними легко вычисляется. Характерен случай описанный в теореме 2, когда на первом этапе решается смешанная задача (7) меньшим параметром a . Тогда вычисление решения первой задачи дает возможность получить огибающую низкочастотных колебаний. Вычисление интегралов свертки второй задачи (8) «набивает» полученную структуру высокочастотными колебаниями и мало меняет кривую огибающей низкочастотных колебаний. Таким образом, объясняется аналогия с амплитудно модулированной структурой, имеющей две базовые частоты, два масштаба [9].

В [11, с. 260] (пункт 4.1. 2-6) приведены формулы третьей краевой задачи для линейного гиперболического уравнения со скоростью a в случае стержня с упруго закрепленными концами с разными коэффициентами жесткости k_1, k_2 и начальными условиями $0 \leq \chi \leq l$.

Пусть заданы следующие начальные условия:

$$Y(\chi, 0) = f_0(\chi), \quad \frac{\partial Y(\chi, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = f_1(\chi) \quad (13)$$

и краевые условия

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y(\chi, \tau)}{\partial \chi} \Big|_{\chi=0} - k_1 Y(0, \tau) &= g_1(\tau), \\ \frac{\partial Y(\chi, \tau)}{\partial \chi} \Big|_{\chi=l} - k_2 Y(l, \tau) &= g_2(\tau). \end{aligned} \quad (14)$$

Решение $Y(\chi, \tau)$ определяется по формуле

$$\begin{aligned} Y(\chi, \tau) &= \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^l f_0(\xi) G(\chi, \xi, \tau) d\xi + \int_0^l f_1(\xi) G(\chi, \xi, \tau) d\xi + \int_0^\tau \int_0^l F_1(\xi, \tau) G(\chi, \xi, \tau - \theta) d\xi d\theta \\ &\quad - a^2 \int_0^\tau g_1(\tau) G(\chi, 0, \tau - \theta) d\theta + a^2 \int_0^\tau g_2(\tau) G(\chi, l, \tau - \theta) d\theta, \end{aligned}$$

а функция Грина – по формуле

$$\begin{aligned} G(\chi, \xi, \tau) &= \frac{1}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_n \|u_n\|^2)} \sin(\lambda_n \chi + \phi_n) \sin(\lambda_n \xi + \phi_n) \sin(\lambda_n a \tau), \\ \phi_n &= \arctan\left(\frac{\lambda_n}{k_1}\right), \quad \|u_n\|^2 = \frac{l}{2} + \frac{(\lambda_n^2 + k_1 k_2)(k_1 + k_2)}{2(\lambda_n^2 + k_1^2)(\lambda_n^2 + k_2^2)}, \end{aligned}$$

(16)

где λ_m – положительные корни трансцендентного уравнения $\text{ctg}(\lambda l) = (\lambda^2 - k_1 k_2) / (\lambda(k_1 + k_2))$. Главный член выражения для приближенного положительного собственного значения имеет вид

$$\lambda = \frac{\sqrt{k_1 + k_2 + k_1 k_2 l}}{\sqrt{l}}. \quad (17)$$

С другой стороны в случае колебания стержня, один конец которого жестко закреплен, а второй свободен, имеем смешанную краевую задачу. В [11, с. 261] приведены формулы для линейного гиперболического уравнения со скоростью a в области $0 \leq \chi \leq l$. Пусть заданы начальные условия (13) и краевые условия

$$\frac{\partial Y(\chi, \tau)}{\partial \chi} \Big|_{\chi=0} = g_1(\tau), \quad \frac{\partial Y(\chi, \tau)}{\partial \chi} \Big|_{\chi=l} = g_2(\tau). \quad (18)$$

Решение $Y(\chi, \tau)$ определяется по формуле, аналогичной (15), где четвертое

$$\text{слагаемое} \quad + a^2 \int_0^\tau g_1(\tau) \left. \frac{\partial}{\partial \xi} G(x, \xi, \tau - \theta) \right|_{\xi=0} d\theta.$$

Функция Грина в этом случае имеет вид

$$G(\chi, \xi, \tau) = \frac{2}{la} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \sin(\lambda_n \chi) \sin(\lambda_n \xi) \sin(\lambda_n a \tau). \quad (19)$$

где положительные $\lambda_n = \pi(2n+1)/(2l)$. Сравнивая последнее выражение с (16), находим очевидное различие в генерируемых частотах.

На рис. 2 приведено распределение ответного изгибного момента монолитной шпалы, лежащей на балласте [5]. Положительное направление оси ординат ориентировано вниз, чтобы привести графики в соответствие с физическим смыслом и изображениями 1 и 2. Первой кривой сплошной, верхней кривой соответствует идеальная опора шпалы без дефекта, при равномерной нагрузке на полотно (изображение 1). Нижней кривой 3 отвечают расчетные проектные значения момента, **когда 80% нагрузки распределяются на оба конца шпалы, а середина шпалы лишена опоры.** Кривая 2 соответствует изображению 2, когда 100% нагрузки распределяется на оба конца шпалы, а середина шпалы лишена опоры.

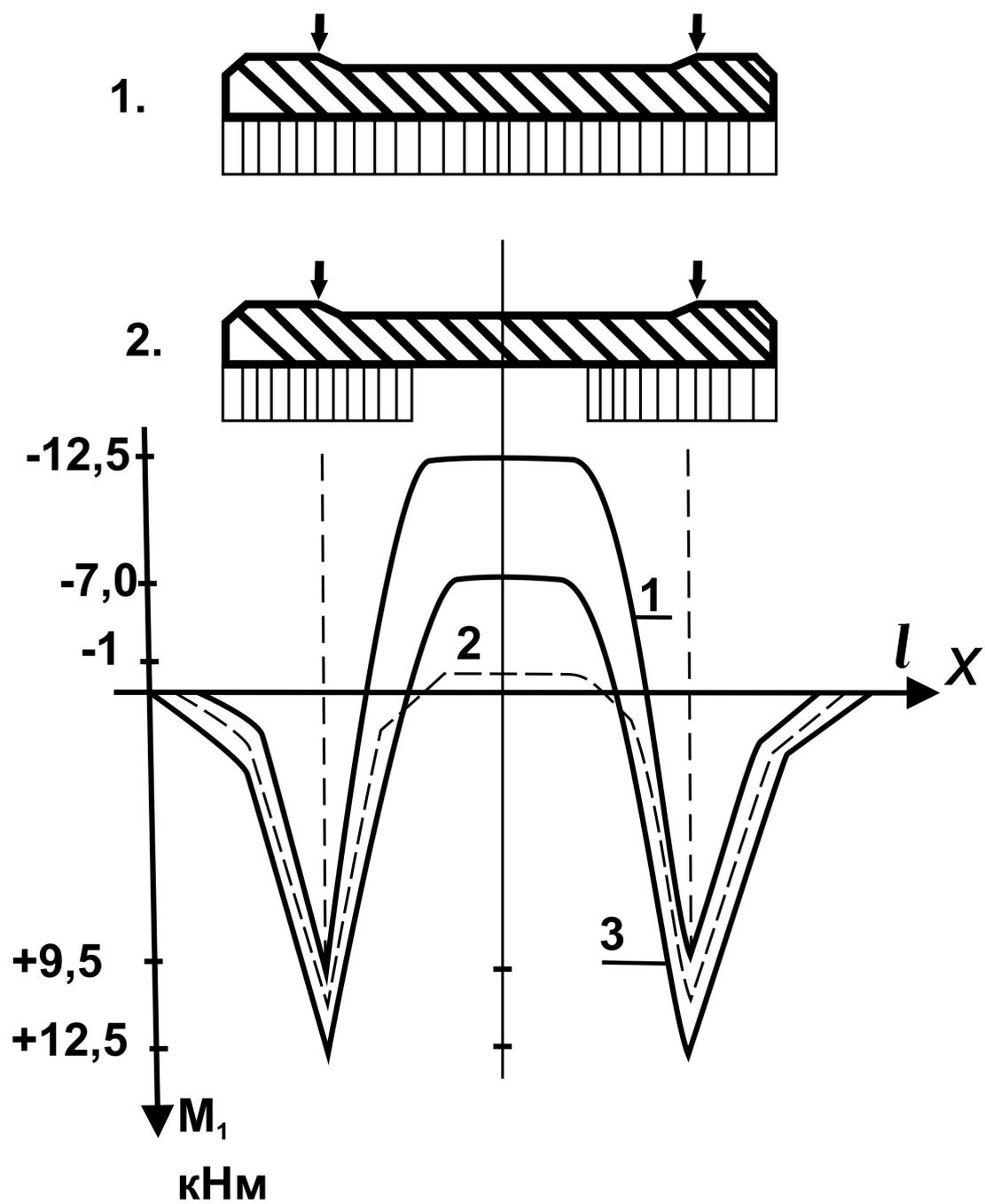


Рис. 2. Результаты расчетов в случае идеального, без наличия дефектов, взаимодействия шпалы с балластом.

Из рис. 2 следует, что максимальный момент имеет место в окрестности крепления шпалы к рельсу и минимум в центре шпалы. Эти данные приводим с целью показать какого вида функции $f_0(x)$, $f_1(x)$ можно выбирать и выбирались нами в качестве начальных условий при модельных расчетах по формуле (13).

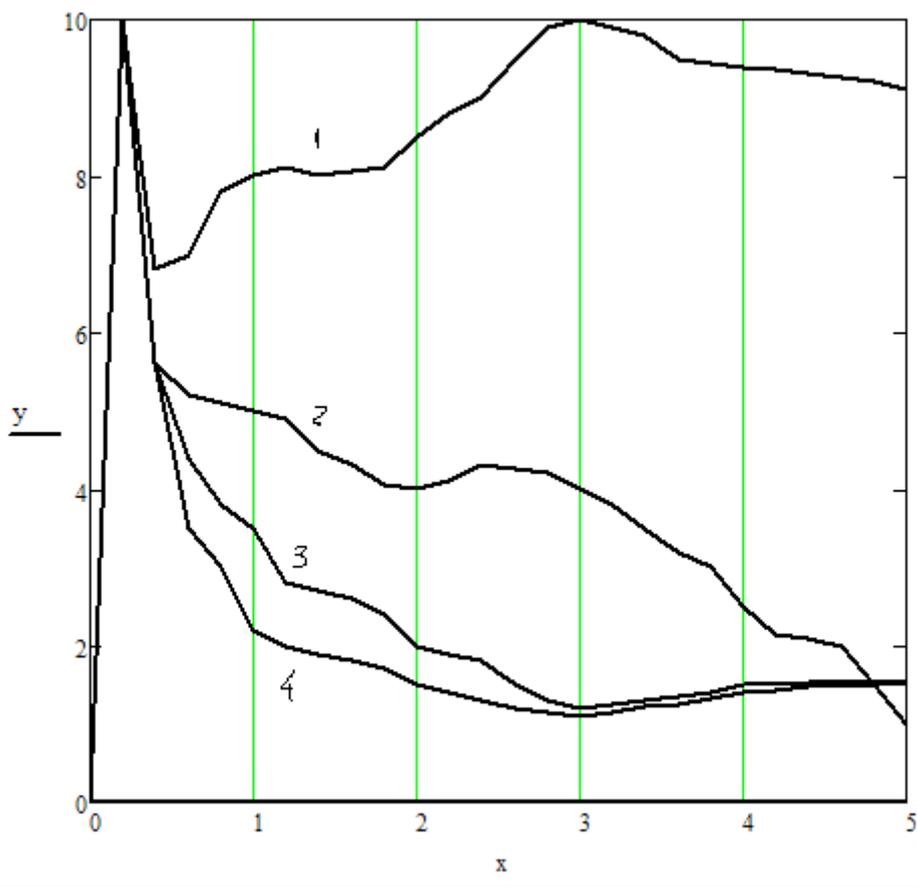


Рис.3. Распределение динамического момента на левой части шпалы.

Кривой 1, 2, 3 и 4 показано распределение когда правая часть шпалы не имеет опоры (нуль %), 20, 80 и сто процентов опоры, соответственно. Распределению момента когда правая сторона шпалы не опирается на полотно и фактически весит на рельсе соответствует кривая 1 (0 процентов).

Объясним смысл рис. 3 [5]. Для этого обратим внимание на изображение 2 на рис. 2, где середина шпалы не имеет опоры на балласт. Примем условно эпюру момента правой части опоры шпалы за сто процентов. На рис. 3 кривым 1, 2 и 3, 4 показано распределение, когда правая часть шпалы имеет опору нуль,

20, 80 и сто процентов соответственно. Нуль процентов опоры означает, что правая сторона шпала не опирается на полотно, а весит на рельсе. Видно, что различие краевых условий на 20 процентов и более уже существенно меняет характеристики, что сразу отражается на спектре колебаний.

Так как для уравнения задача линейная, то можно разделить при математическом моделировании краевые и начальные условия между составляющими, последовательно решаемыми задачами, например (7) и (8). То есть положить в первой задаче (7) нулевые краевые условия и решать задачу Коши. В этом случае последние два слагаемых в (15) обращаются в нуль.

Тогда для уравнения (8) можно положить равными нулю начальные условия и решать краевую задачу по формулам, аналогичным (15), которые приведены в [11, с. 263].

Дополнительный интерес к формулам решения задач для уравнения КГФ возникает, когда безразмерный параметр в функции диссипации (стока) $K^2 = \chi_0^2 \mu^4 / (r^2 (a^2 - \mu^4)) \gg 1$ большой. Вычисления значения K^2 при физических характеристиках соответствующих обсуждаемой железнодорожной тематике, в уравнениях (8) и (9) показывает, что имеет место именно подобный случай. И тогда реальна аномально быстрая осцилляция решений [9, с. 26].

Фундаментальное решение (функция Римана) для уравнения

$$P_\mu \Theta(\chi, \tau) + K^2 \Theta(\chi, \tau) = \delta(\chi, \tau) \quad (20)$$

имеет вид

$$\Theta(\chi, \tau) = \frac{1}{2} J_0(K \sqrt{\tau^2 - \chi^2}) \theta(\tau^2 - \chi^2). \quad (21)$$

Здесь j_0 – функция Бесселя, $\delta(\chi, \tau)$ – дельта-функция Дирака, θ – тета-функция Хевисайда, равная единице при $\tau^2 > \chi^2$ и нулю при $\tau^2 < \chi^2$. В [9] показано, что расстояние между ближайшими корнями – показатель *быстроты* осцилляций функций. При ограниченных значениях τ и χ и $\tau^2 - \chi^2 \geq \text{const} > 0$ это расстояние имеет порядок $1/K$, что следует из асимптотики функции Бесселя. Причем уровень осцилляции резко увеличивается в окрестности характеристик $\tau = \pm \chi$.

В цитируемой работе [9] доказано, что расстояние между соседними корнями на прямой $\tau = \chi$ имеет порядок $O(1/K^2)$, что говорит об аномально быстрой осцилляции. Этот эффект присутствует и в обсуждаемой задаче.

5. Точное решение задачи качения колеса по рельсу с волнообразным износом

Во втором цикле работ, как балка исследователями рассматривается сам железнодорожный рельс с волнообразным износом. Изучается динамика в системе координат, движущейся с постоянной скоростью. Отмечается, что ещё одним источником колебаний являются горизонтальные и вертикальные неровности правого и левого рельсов. В «бесшовном» пути места сварки имеют большую твердость и изнашивается меньше, чем сам рельс, при этом создаются трамплины.

В [7] дельта-функция Дирака оценивается в точке, движущейся с постоянной скоростью, потому что для построения решения в этой работе используется переход в соответствующую систему координат и затем решение разлагается в ряды Фурье. Заметим, что на практике обеспечить равномерное движение колесной пары трудно.

В результате выведено уравнение, описывающее установившиеся вертикальные колебания рельса лежащего на упругом основании в линейном приближении, близкое к модели балки Рэлея (отсутствует четвертая смешанная производная). Обозначенное в нем через $y(x,t)$ направленное вверх поперечное отклонение рельса, который имеет изгибную жесткость $E I$ и поддерживается однородным основанием с жесткостью u (упругость) и вязкостью r , лежит в основе представленной формулы:

$$E I \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} + r \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} + u y(x,t) = F(x,t). \quad (22)$$

)

В данной работе функция $F(x,t)$ в отличие от [7] содержит дельта-функцию Дирака, которая задает положение сосредоточенной силы, приложенной в точке $x=v(t)t$ движущейся с переменной скоростью $v(t)$. Решение

задачи допускает анализ движения с переменной скоростью. При моделировании можно задавать разные законы изменения скорости и анализировать их влияние на спектр колебаний. В [7] через m обозначена линейная плотность распределенной массы рельса и балласта.

Теорема 4. Пусть дана смешанная задача с краевыми условиями для уравнения (22). Тогда решение имеет вид

$$y(x,t) = Z(x,t) \exp(rt/(2m)), \quad (23)$$

где функция $Z(x,t)$ является точным решением смешанной задачи для линейного стандартного гиперболического уравнения четвертого порядка

$$m \frac{\partial^2 Z(x,t)}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 Z(x,t)}{\partial x^4} + K Z(x,t) = \exp(-rt/(2\rho)) F(x,t). \quad (24)$$

)

Здесь $a^2 = EI$, $K = (4ur - r^2)/(4m^2)$.

Доказательство. В отличие от [7] частота колебаний рельса определяется нами решением сопряженной задачи на собственные значения λ_m для обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка $\varphi^{(IV)}(x) - \lambda^4 \varphi(x) = 0$ с соответствующими граничными условиями [11, с. 533]. Функция Грина имеет вид

$$G(x, \xi, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_n(x) \phi_n(\xi)}{\|\phi_n\|^2 \sqrt{a^2 \lambda_n^4 + K}} \sin(t \sqrt{a^2 \lambda_n^4 + K}), \quad (25)$$

$$\phi(x) = C_1 \exp(-x\lambda) + C_2 \exp(x\lambda) + C_3 \cos(x\lambda) + C_4 \sin(x\lambda),$$

$$\|\phi_n\|^2 = \int_0^l \phi_n^2 dx = \frac{l \phi_n^2}{4} + l \left[\phi_n'' \right]^2 / (4\lambda_n^4) - l \phi_n'(l) \phi_n'''(l) / (2\lambda_n^4).$$

)

Здесь константы $C_i, i=1, \dots, 4$ определяются из граничных условий. Норма собственной функции вычисляется по формуле Крылова. Отсюда следует частота колебаний $\sqrt{a^2 \lambda_n^4 + K}$, $n=1, 2, \dots$. При значениях физических констант: $\rho = 7 \cdot 10^3$ [кг/м³], $u = 34 \cdot 10^6$ [Н/м²], $E I = 4 \cdot 10^6$ [Н/м²], $r = 2 \cdot 10^4$ [Н с/м²], получим

значение параметра $K > 600$ по формуле (24). Следовательно, и в этом случае имеет место эффект аномально быстрой осцилляции.

6. Балка Рэлея лежащая на упругом основании в модели Винклера [15]

Как уже сказано выше, факт появления новых дефектов может быть обнаружен при анализе спектра колебаний возникающих при движении состава. Рассмотрим нелинейную модель «балки Рэлея» на упругом основании соответствии с гипотезой Винклера, то есть в модель добавляются кубические слагаемые.

Теория осциллятора с кубической нелинейностью (уравнение Дуффинга) приведена, например, в [14].

В данной работе показано, что методом ВКБ - Маслова для медленно меняющейся функции, которая описывает огибающую спектра колебаний асимптотическими формулами и удовлетворяет нелинейному уравнению Шредингера только при определенных соотношениях между параметрами исходной задачи. Появляется объяснение явлений перекачки энергии колебаний в область высоких частот за счет модуляционной неустойчивости, в которой образуются новые резонансные пики вызванные существующими трудно выявляемыми дефектами железнодорожного пути. Описана процедура факторизации уравнения балки Рэлея.

В следующем параграфе данной работы подробно выясняются условия применения НУШ в анализе обсуждаемой проблемы. В математической литературе НУШ записывают в виде

$$i \frac{\partial V(x,t)}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x^2} + |V|^2 V = 0 \quad (26)$$

Замечание 7

Нелинейное уравнение Шредингера (НУШ) выведено в различных областях физики. Оно возникает при описании аномальной дисперсии в задачах нелинейной оптики, при описании явления самофокусировки в нелинейной оптике, в физике плазмы, теории сверхпроводимости, физике низких температур, теории вихревого движения [13], [14], [17], [18], [19]. Большое количество ссылок по этой теме приведено в [14], [17], [19]. НУШ довольно хорошо изучено и обладает бесконечным числом точных решений и к нему

возможно применение аппарата обратной задачи рассеяния. Для НУШ известен эффект модуляционной неустойчивости, что позволяет объяснить эффект перекачки энергии в область более высоких частот. Все это привлекло внимание авторов данной работы, в связи с обнаружением такого эффекта при численных расчетах, экспериментах многих авторов [3-5] и на практике эксплуатации железных дорог. Обоснование появления уравнения НУШ в теории балки Рэлея в [13] проведено на физическом уровне строгости и ему уделено всего семь строк на странице 22 .

Оно просто приводится, как данность, указаны соотношения между производными, которые должны существовать, чтобы оно имело место, но не указывается явно, его связи с параметрами задачи.

Приведем уравнение описывающие колебания в модели «балки Рэлея» на упругом основании в предположении Винклера

$$\rho A \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + I E \frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} - \rho I \frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial^2 x \partial^2 t} + h u(x,t) + h_1 u(x,t)^3 = 0. \quad (27)$$

)

Напомним, что предположение о том, что угол поворота сечения балки $\vartheta(x,t)$ связан с поперечным отклонением $u(x,t)$, соотношением

$$\vartheta(x,t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x},$$

приводит к лагранжиану для модели балки Рэлея лежащей на упругом основании.

Здесь $u(x,t)$, $\vartheta(x,t)$ – функции отклонения срединной линии и угла поворота сечения соответственно; E – модуль упругости на сжатие [Н/м^2];

I – приведенный полярный момент инерции сечения [м^4]; стр.34 в [14]

A – площадь поперечного сечения [м^2]; ρ – плотность [кг/м^3],

h – коэффициент упругости основания [Н/м^2],

h_1 – поправка коэффициента упругости основания в модели Винклера.

Замечание 8

В работе [13] основной целью является сравнение дисперсионных свойств разных моделей балок. Относительно уравнения НУШ, которое может появиться в модели балки Рэлея лежащей на упругом основании в модели Винклера [15] лишь коротко приводится вид возможного решения

$$V(x,t) = A_0(\varepsilon x, \varepsilon t) \exp(i(\omega t - kx) + \text{комплекс. сопряж. выраж.}) \quad (28)$$

Здесь $\varepsilon \ll 1$ - малый параметр, ω и k – частота и волновое число удовлетворяющее дисперсионному уравнению полученному в [13] в линейном приближении. Приводятся условия, на физическом уровне строгости, которые по мнению авторов [13], должны быть выполнены в системе координат движущейся с групповой скоростью

$$\frac{\partial A_0}{\partial x} / (k A_0) \approx \frac{\partial A_0}{\partial t} / (\omega A_0) \approx \varepsilon \ll 1, \quad \frac{\partial^2 A_0}{\partial x^2} / (k A_0) \approx \frac{\partial^2 A_0}{\partial t^2} / (\omega A_0) \approx \varepsilon^2, \quad (29)$$

Вывода уравнения не приводится. При этом остается непонятным связано ли требование выполнения таких условий с коэффициентами уравнения модели балки Рэлея?

В соответствии с **замечанием 6** проведем обезразмеривание уравнения (27). Получим

$$\frac{\partial^2 V(X, \tau)}{\partial \tau^2} + \mu_1 \frac{\partial^4 V(X, \tau)}{\partial X^4} - \mu_0 \frac{\partial^4 V(X, \tau)}{\partial^2 X \partial^2 \tau} + \Omega^2 V(X, \tau) + \Omega_1^2 V(X, \tau)^3 = 0. \quad (30)$$

Здесь $V(X, \tau) = u(x, t) / U_0$ - безразмерная функции отклонения срединной линии, U_0 - характерное среднее значение поперечного отклонения срединной линии от положения равновесия. $X = x / x_0$, $\tau = t / t_0$ безразмерные координата и время, а x_0 , t_0 характерные значения задачи по пространственной координате и времени.

В уравнении (30)

$$\mu_0 = \frac{I}{(A x_0^2)}, \quad \mu_1 = \frac{E I t_0^2}{(A x_0^4 \rho)}, \quad \Omega^2 = \frac{h t_0^2}{(A \rho)}, \quad \Omega_1^2 = \frac{h_1 t_0^2 U_0^2}{(A \rho)}$$

- безразмерные параметры.

Отметим, что $h \geq |h_1|$ и $h_1 > 0$ называют в теории балки Рэлея «жестким» типом нелинейности, а случай $h_1 < 0$ называют «мягким» типом нелинейности.

Теорема 5.

Пусть дано уравнение модели балки Рэлея на упругом основании (30) и функции которая описывает один волновой пакет с медленно меняющимися в пространстве и во времени частотой и фазой вида

$$V(X, \tau) = \xi^\beta B(\sqrt{\xi} X, \xi^\alpha \tau) \exp(i(-k X + \omega \tau + V_{\text{групп}} \tau + K X)) + \text{комплекс. сопряж.} \quad (31)$$

выражение,

где $\theta = \xi^\alpha \tau$, $\chi = \sqrt{\xi} X$, а функция $B(\chi, \theta)$ имеет четыре раза непрерывно дифференцируемые производные по переменной χ и дважды непрерывно дифференцируемая по переменной θ .

Тогда выражение (31) является приближенным асимптотическим решением уравнения (30) и соответствующего

НУШ записанного в системе координат движущейся с постоянной групповой скоростью $V_{эпын}$

$$i \frac{\partial B(\chi, \theta)}{\partial \theta} + M_1 \frac{\partial^2 B(\chi, \theta)}{\partial \chi^2} + M_2 |B|^2 B = O(\xi^\gamma), \quad (32)$$

по малому параметру $\xi \ll 1$, и

$$M_1 = \xi^{(1-\alpha)} (12kK\mu_1 - 6k^2\mu_1 - 6K^2\mu_1 + (V_{эпын} + \omega)^2 \mu_0) / (2(V_{эпын} + \omega)Z),$$

$$Z = (1 + k^2\mu_0 - 2kK\mu_0 + K^2\mu_0), \quad M_2 = \xi^{(2\beta-\alpha)} \Omega_1^2 / (2(V_{эпын} + \omega)Z),$$

$$V_{эпын} = -\omega \pm \sqrt{2} \sqrt{\frac{-(\mu_1 \pm \sqrt{\mu_1(\mu_1 + \mu_0^2 \Omega^2)})}{\mu_0^2}}, \quad (33)$$

$$K = k \pm \sqrt{\frac{-(\mu_1 \pm \sqrt{\mu_1(\mu_1 + \mu_0^2 \Omega^2)})}{\mu_1 \mu_0}}$$

в случаях:

$$1) \beta = \frac{1}{2}, \alpha = 1, \gamma = \frac{1}{2}; \quad 2) \beta = 0, \alpha = 1, \Omega_1 = \xi^{(1/2)}, \gamma = \frac{1}{2};$$

$$3) \beta = 0, \alpha = \frac{1}{2}, \Omega_1 = \xi^{1/4}, \gamma = \xi^{1/4}, M_1 \approx \xi^{-1/2} \quad (34)$$

Доказательство.

Подставим заготовку решения (31) в уравнение (30). Так как решение комплексное, то получим в левой части НУШ (32) Анализ случаев возможных значений параметров α, β таких чтобы малый параметр исключался из коэффициентов M_1, M_2 , а правая часть содержала только большие степени малого параметра, дает только два варианта приведенных в теореме.

Наиболее интересен случай 2.

Замечание 8

Следует отметить, что вариант функции $A_0(\varepsilon x, \varepsilon t)$ с значением параметра $\beta = 0$ и с одинаковым вхождением малого параметра при обоих переменных невозможен, участия коэффициентов. Он реализуется в третьем случае.

Из теории параболических дифференциальных уравнений с частными производными, известно, что введение констант $K, V_{эпын}$ в экспоненциальную функцию в (31) позволяет перейти в подвижную систему координат движущуюся с постоянной скоростью $V_{эпын}$ и скрыть (убрать) из левой части уравнения слагаемые при первой производной $\frac{\partial B(\chi, \theta)}{\partial \chi}$ и линейной функции B . Этим распространенным приёмом, например, пользовались авторы [8], [10], [14],[17],[18].

Приведем слагаемые остающиеся в правой части уравнения (32)

$$\begin{aligned} & - \xi^\alpha \frac{\partial^2 B}{\partial \theta^2} \frac{1}{2(V_{эпын} + \omega)} + \xi^{1/2} \frac{\partial^2 B}{\partial \chi \partial \theta} \frac{(2(k(V_{эпын} - \omega) + K(V_{эпын} + \omega)))}{Z_1} - \\ & - \xi^{(1/2+\alpha)} \frac{\partial^3 B}{\partial \chi \partial \theta^2} \frac{i \mu_0 (k - K)}{Z_1} + \xi \frac{\partial^3 B}{\partial \chi^2 \partial \theta} \frac{i \mu_0}{Z} + \xi^{(1+\alpha)} \frac{\partial^4 B}{\partial \chi^2 \partial \theta^2} \frac{\mu_0}{2Z_1} + \\ & + \xi^{(3/2-\alpha)} \frac{\partial^3 B}{\partial \chi^3} \frac{i 2(k - K) \mu_1}{Z_1} - \xi^{2-\alpha} \frac{\partial^4 B}{\partial \chi^4} \frac{\mu_1}{2Z_1} \end{aligned} \quad (35)$$

Здесь $Z_1 = (V_{зрун} + \omega) Z$.

В заключении можно легко показать, стационарное решение уравнения

$$\frac{\partial^2 V(X, \tau)}{\partial \tau^2} + \mu_1 \frac{\partial^4 V(X, \tau)}{\partial X^4} - \mu_0 \frac{\partial^4 V(X, \tau)}{\partial^2 X \partial^2 \tau} + \Omega^2 V(X, \tau) + \Omega_1^2 |V|^2 V = 0$$

вида $V(X, \tau) = \exp(i\phi)$ неустойчиво относительно периодических по координате возмущений и строить комплексные точные решения.

Приведем результат факторизации уравнения (30), который поможет прогрессу в этом направлении.

Теорема 6. Пусть дано уравнение (30).

Тогда результатом факторизации является система двух уравнений с частными производными

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial \tau^2} - (\mu_1 / \mu_0) \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} - \frac{\mu_1}{\mu_0^2} V(X, \tau) &= \frac{\mu_1}{\mu_0} Y(X, \tau); \\ \frac{\partial^2 Y}{\partial X^2} - \frac{1}{\mu_0} Y(X, \tau) &= \frac{(\mu_1 + \mu_0^2 \Omega^2)}{\mu_1 \mu_0^2} V(X, \tau) + \frac{\Omega_1^2}{\mu_1} V^3. \end{aligned} \quad (36)$$

Доказательство.

Доказательство очевидно. Проверка проводится прямой подстановкой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Timoshenko S. P. Method of analysis of statical and dynamical stresses in rail / in «Proc. 2 nd Int. Congr. for Appl.Mech.» Zurich., 1927, pp. 407–418.
2. Zhu J. Y., Ahmed A. K., Rakheja S., Khajepour A. Development of a vehicle- track model assembly and numerical method for simulation of wheel - rail dynamic interaction due to unsupported sleepers. Vehicle System Dynamics: International Journal of Vehicle Mechanics and Mobility, 48, v.12, pp. 1535–1552.
3. Круглов В. М., Хохлов А. А., Саврухин А. В., Неклюдов А. Н. Метод оценки состояния железнодорожного пути // Мир транспорта. – 2012. – № 5. – С. 4–7.
4. Kang Y. S., Yang S. C., Lee H. S., Kim Y. B., Jang S. Y., Kim E. A Study of Track and train Dynamic Behavior of Transithior Zone Between Concrete Slab Track

and Ballasted Track. Korea Railroad Research Institute, Uiwang, South Korea, Sampyo E&C, Seoul, Seoul, South Korea. 2007.

5. Sakdirat Kaewenruen, Alex A. Remennikov, Akira Aikawa. A numerical study to evaluate dynamic responses of voided concrete railway sleepers to impact loading. Paper N 88, Proceeding of Acoustics 2011. 2-4 November 2011, Gold Coast, Australia.

6. Вакуленко С. П., Ларин О. Н., Лёвин С. Б. Теоретические аспекты механизмов взаимодействия в транспортных системах // Мир транспорта. – 2014. – № 6. – С. 14–27.

7. Белоцерковский П.М., Пугина Л.В. Качение колеса по рельсу с волнообразным износом// Прикладная математика и механика. – 2008. – Т. 72, вып. 3. – С. 421–430.

8. Danilov V. G., Maslov V. P., Volosov K. A. Mathematical Modelling of Heat and Mass Transfer Processes. Kluwer Academic publishers. Dordrecht. Boston. London, 1995. – 316 p.

9. Бабич В. М. Анзац Адамара, его аналоги, обобщения, приложения // Алгебра и анализ. – 1991. – Т. 3, вып. 5. – С. 1–37.

10. Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Справочник по дифференциальным уравнениям с частными производными: Точные решения. – М.: Международная программа образования, 1996. – 496 с.

11. Полянин А. Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики. – М.: Физико-математическая литература, 2001. – 575 с.

12. Волосова Н. К., Вакуленко С. П., Волосов К. А. К теории метода контроля качества состояния железнодорожного пути с движущегося состава. М.: МИИТ, Мир Транспорта. Т.64, н.3. 2016.

13. Ерофеев В.И., Лисенкова Е.Е., Семерикова Н.П. Дисперсионные зависимости и самомодуляция изгибных волн в балке Тимошенко// Проблемы машиностроения и надежности машин. 2006, вып. 4, с. 27- 31.

14. Ерофеев В.И., Кажаяев В.В., Семерикова Н.П. Волны в стержнях. Дисперсия, Диссипация. Нелинейность. М. ФИЗМАТЛИТ. 2002. 208 с.

15. Winkler E. Der Eisenbahn - Oberbau. Prag. 1871. p.250.

16. Курбацкий Е.Н. Нгуен Чонг Там. Определение критических скоростей и критических сил при движении постоянной силы по балкам на упругом основании. Известия высших учебных заведений. Строительство. 2014. н.5, с. 109-117.

17. Солитоны в действии. М.Мир. 1981. Под ред. К.Лонгрена, Э.Скотта. статья Г.Юэн. Б. Лэйк Теория нелинейных волн на глубокой воде. С. 103- 137.

18. Ахметьев Н.Н., Корнеев В.И. Модуляционная неустойчивость и периодические решения нелинейного уравнения Шредингера. ТМФ.,1986, т.69, н.2, 189-194.

19. Ахмедиев Н.Н., Анкевич А. Солитоны. перевод с англ. М. Физматлит. 2003. 300 с.

Координаты авторов: **Вакуленко С. П.** – k-gdsu@mail.ru, **Волосов К. А.,**
Волосова Н. К. – konstantinvolosov@yandex.ru.