

Stage de M2 : Probabilités et Statistiques  
École Normale Supérieure Paris-Saclay



Centre de Mathématiques et de leurs Applications

Discipline : Mathématiques

---

Échelonnement optimal de l'algorithme MALA  
avec loi cible Laplace

---

PAR : Pablo JIMENEZ

Sous la direction de ALAIN DURMUS,

Date de soutenance : 16 septembre 2019

# Contents

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
1.1	Les méthodes de Monte Carlo par chaîne de Markov . . . . .	3
1.2	L'algorithme de Metropolis-Hastings . . . . .	4
1.3	Le problème de l'échelonnement optimal . . . . .	6
1.3.1	Échelonnement de la chaîne . . . . .	7
1.3.2	Échelonnement optimal de RWM pour des densités régulières . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Échelonnement de l'algorithme MALA</b>	<b>10</b>
2.1	Échelonnement optimal de MALA pour des densités régulières . . . . .	10
2.2	Résultats principaux . . . . .	11
2.3	Expériences numériques . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Preuve de l'échelonnement</b>	<b>14</b>
<b>4</b>	<b>Convergence du taux d'acceptation</b>	<b>21</b>
4.1	Tableau de martingales . . . . .	21
4.2	Application au taux d'acceptation . . . . .	22
4.2.1	Première hypothèse, la condition de Lindeberg . . . . .	22
4.2.2	Les autres hypothèses . . . . .	28
4.2.3	Le résultat . . . . .	29
4.3	Convergence du taux d'acceptation . . . . .	29
<b>5</b>	<b>Convergence vers une diffusion de Langevin</b>	<b>30</b>
5.1	Tension de la suite de processus . . . . .	30
5.2	Caractérisation de la limite : EDS, diffusion et problème de martingale associé . . . . .	39
<b>6</b>	<b>Annexe</b>	<b>52</b>

# 1 Introduction

## 1.1 Les méthodes de Monte Carlo par chaîne de Markov

Les méthodes de Monte Carlo par chaîne de Markov (MCMC) fournissent un cadre générique pour répondre au problème d'approcher une intégrale de la forme

$$\mathfrak{J} = \int_{\mathbb{R}^d} h(x)\pi(x)\mu(dx), \quad (1)$$

où  $d \in \mathbb{N}^*$ ,  $\mu$  est une mesure sur  $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ ,  $\pi$  est une densité de probabilité et  $h : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction intégrable par rapport à  $\pi$ . Par la suite on effectuera l'abus de langage qui est de confondre une densité et la loi de probabilité associée, et toutes les lois considérées seront absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^d$ , qui est notre choix de  $\mu$ . L'idée est de construire une chaîne de Markov ergodique  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  admettant pour probabilité stationnaire  $\pi$ , et alors approcher  $\mathfrak{J}$  par la moyenne empirique jusqu'au rang  $N \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\mathfrak{J}_N = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} h(X_n).$$

En effet, sous certaines hypothèses, on a presque sûrement  $\lim_{N \rightarrow +\infty} \mathfrak{J}_N = \mathbb{E}_\pi[h(X)] = \mathfrak{J}$ . On peut citer deux raisons pour lesquelles cette méthode est avantageuse. Tout d'abord elle ne nécessite souvent que la connaissance de  $\pi$  à une constante multiplicative près. C'est-à-dire que  $\pi$  peut s'exprimer, pour tout  $x \in \mathbb{R}^d$  par :

$$\pi(x) = \tilde{\pi}(x)/Z,$$

où

$$Z = \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{\pi}(x)dx,$$

et  $\tilde{\pi} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$  est positive, intégrable et peut être évaluée, mais  $Z$  n'est pas connue.

D'une autre part, elle est souvent moins coûteuse en temps de calcul, puisqu'elles ne font pas appel à un échantillon i.i.d. de loi  $\pi$ , ce qui peut être computationnellement difficile à simuler, voire impossible. Avec les méthodes MCMC, non seulement notre échantillon n'est pas indépendant ni identiquement distribué, il ne suit de plus qu'une loi *approximant*  $\pi$ . Cette liberté repose sur des propriétés asymptotiques sur les chaînes de Markov ergodiques plus fines que la loi forte des grands nombres, qui est utilisée dans le cas d'un échantillon i.i.d..

Ces méthodes ont été mises en valeur dans les années 90 par des statisticiens, qui leur ont permis de progresser notamment dans des problèmes d'inférence bayésienne, pour lesquels les modèles sont très complexes.

Au sein des méthodes MCMC, l'algorithme de Metropolis-Hastings brille autant par sa simplicité que par sa généralité.

## 1.2 L'algorithme de Metropolis-Hastings

L'algorithme de Metropolis-Hastings permet de créer une chaîne de Markov qui approche en loi la cible  $\pi$ . À l'étape  $n + 1$  de la chaîne, en partant d'un point  $X_n^d \in \mathbb{R}^d$ , on simule  $Y_{n+1}^d$  selon une loi auxiliaire  $q(X_n^d, \cdot)$  appelée proposition. On calcule ensuite la probabilité d'acceptation  $\alpha(X_n^d, Y_{n+1}^d)$ , où

$$\alpha(x, y) = 1 \wedge \frac{\pi(y) q(y, x)}{\pi(x) q(x, y)}.$$

Pour savoir si on choisit le point courant ou le point proposé comme valeur suivante de la chaîne, on introduit une variable aléatoire  $U_{n+1}$ , de loi uniforme sur  $[0, 1]$ , et l'évènement d'acceptation  $A_{n+1}^d$  par

$$A_{n+1}^d = \left\{ U_{n+1} \leq \alpha(X_n^d, Y_{n+1}^d) \right\}.$$

Finalement on construit la valeur suivante de la chaîne  $X_{n+1}^d$  par

$$X_{n+1}^d = Y_{n+1}^d \mathbb{1}_{A_{n+1}^d} + X_n^d (1 - \mathbb{1}_{A_{n+1}^d}).$$

Pour comprendre la dynamique, regardons de plus près le cas où la proposition est symétrique : lorsque pour tout  $x, y$  dans  $\mathbb{R}^d$ ,  $q(x, y) = q(y, x)$ . Dans ce cas le nouveau point  $Y_{n+1}^d$  est toujours accepté lorsque  $\pi(Y_{n+1}^d) \geq \pi(X_n^d)$ . Ceci veut dire que l'on se déplace toujours si la proposition est plus vraisemblable. Si au contraire  $\pi(Y_{n+1}^d) < \pi(X_n^d)$ , on accepte la proposition avec probabilité  $\pi(Y_{n+1}^d)/\pi(X_n^d)$ , s'assurant de visiter les zones de faible densité, mais avec une fréquence plus faible. La figure 1 illustre ceci.

Afin d'éviter des considérations plus compliquées que nécessaires, on suppose dès maintenant que  $q$  et  $\pi$  sont des densités strictement positives sur  $\mathbb{R}^d$ . On se réfère à l'article [7] pour voir que sous ces hypothèses, cet algorithme crée bien une chaîne ergodique ayant  $\pi$  comme loi invariante. On introduit maintenant deux choix de propositions que l'on étudie plus précisément par la suite.

**Exemple 1** (Metropolis à marche aléatoire). *Un premier choix naturel de proposition  $q^d$  sur  $\mathbb{R}^d$  est celle donnée par la loi normale centrée au point courant  $x^d$ , et de matrice de covariance  $\sigma_d^2 \mathbb{I}_d$ . On note cette loi  $N(x^d, \sigma_d^2 \mathbb{I}_d)$ , et pour  $y^d$  dans  $\mathbb{R}^d$  son expression est :*

$$q^d(x^d, y^d) = (2\pi \sigma_d^2)^{-d/2} \exp \left\{ -\|y^d - x^d\|^2 / (2\sigma_d^2) \right\}.$$

*Cette méthode est appelée Metropolis à marche aléatoire - random walk Metropolis ou RWM - puisque la proposition consiste à ajouter au point courant une gaussienne centrée. L'avantage de cette méthode est qu'elle demande le moins de calibration possible, puisque le seul paramètre à régler en fonction de  $\pi$  est la variance  $\sigma_d^2$ . La figure 1 met en œuvre deux étapes de cette méthode.*

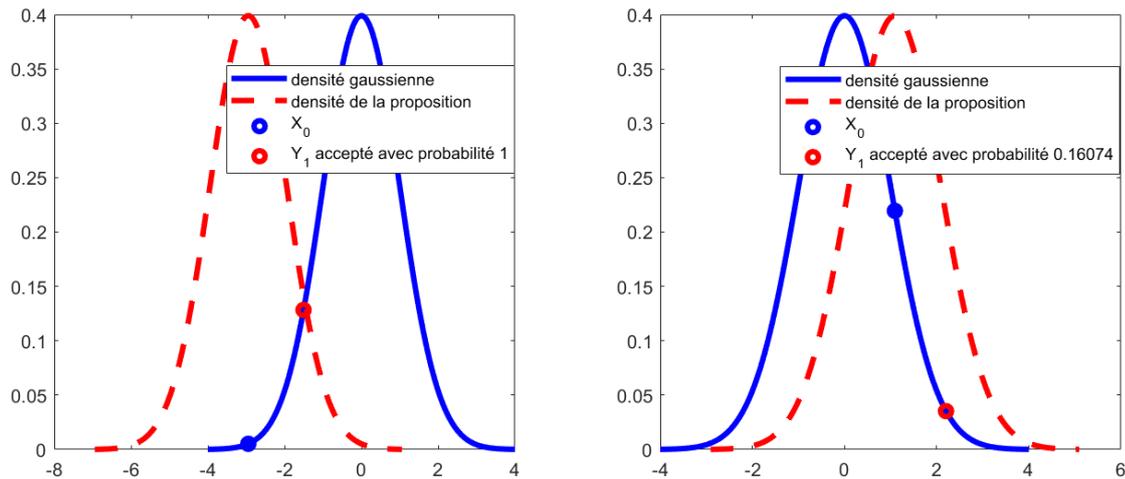


Figure 1: Exemple de deux itérations de l'algorithme de Metropolis Hastings. Ici  $\pi$  est la loi normale standard et la proposition  $q(x, \cdot)$  est la loi normale centrée en  $x$ , réduite.

**Exemple 2** (Algorithme de Langevin ajusté). *On suppose pour cette méthode qu'il existe une fonction continûment différentiable  $V : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  telle que pour tout  $x^d$  dans  $\mathbb{R}^d$ ,*

$$\pi(x^d) = \exp(-V(x^d)) / \int_{\mathbb{R}^d} \exp(-V(\tilde{x}^d)) d\tilde{x}^d. \quad (2)$$

*L'algorithme de Langevin ajusté - Metropolis adjusted Langevin algorithm ou MALA - est basé sur la diffusion de Langevin, qui est définie comme solution de l'équation différentielle stochastique suivante :*

$$d\mathbf{X}_t^d = -\nabla V(\mathbf{X}_t^d) dt + \sqrt{2}d\mathbf{B}_t^d,$$

*où  $\mathbf{B}^d$  est un mouvement brownien standard sur  $\mathbb{R}^d$ . D'après [5, Théorème 2.1], si  $\nabla V$  est continûment différentiable et à croissance lente en dehors d'un compact, le processus markovien  $(\mathbf{X}_t^d)_{t \geq 0}$  converge en loi vers  $\pi^d$  qui est une distribution invariante de la diffusion. Si ce processus peut convenir à l'estimation d'une intégrale comme (1) en considérant une moyenne temporelle jusqu'au temps  $T > 0$  de la forme*

$$\mathfrak{J}_T = 1/T \int_0^T h(\mathbf{X}_t^d) dt,$$

*il est bien plus difficile de simuler un processus à temps continu sur tout un intervalle. On décide alors de discrétiser le temps et de considérer un schéma numérique, ce qui nous donnera accès à une approximation de notre processus à des valeurs de temps discrètes. Nous introduisons la discrétisation  $(\mathbf{X}_k^d)_{k \geq 0}$*

d'Euler–Maruyama de pas  $\sigma_d^2 > 0$  :

$$X_{k+1}^d = X_k^d - \sigma_d^2 \nabla V(X_k^d) + \sqrt{2\sigma_d^2} Z_{k+1}^d, \quad (3)$$

où  $\{(Z_k^d)_{k \geq 1}, d \in \mathbb{N}^*\}$  est une famille de suites indépendantes de v.a. telles que pour tout  $d \in \mathbb{N}^*$ ,  $(Z_k^d)_{k \geq 1}$  est une suite de vecteurs gaussiens de loi  $N(0, I_d)$  indépendants. On précise qu'il s'agit d'une chaîne de Markov, cependant cette approximation n'admet pas  $\pi$  comme loi invariante. Cependant, on peut utiliser cette dynamique comme proposition dans l'algorithme de Metropolis-Hastings. On a noté le pas  $\sigma_d^2$  pour mieux visualiser le parallèle avec Metropolis à marche aléatoire.

D'après (3), la proposition de la méthode MALA, pour  $x^d$  et  $y^d$  dans  $\mathbb{R}^d$ , est donnée par

$$q^d(x^d, y^d) = (4\pi\sigma_d^2)^{-d/2} \exp\left(-\|y^d - x^d + \sigma_d^2 \nabla V(x^d)\|^2 / (4\sigma_d^2)\right). \quad (4)$$

Cette méthode utilise plus d'information sur  $\pi$  que la précédente, ce qui la rend un peu plus difficile à implémenter. Cependant, son intérêt est que la proposition n'est pas centrée au point courant. On a ajouté une dérive à la proposition, qui correspond à une étape de descente de gradient de  $V$ , nous approchant des plus grandes valeurs de  $\pi$ . On verra par la suite que ceci se traduit par une meilleure performance du MALA contre le RWM.

La question que l'on se pose dans la suite concerne les deux exemples ci-dessus et peut se résumer alors par : si on se donne une suite de lois cible  $(\pi^d)_{d \in \mathbb{N}^*}$  où  $\pi^d$  est une loi sur  $\mathbb{R}^d$ , comment choisir  $\sigma_d^2$  en fonction de  $d$  pour avoir une convergence optimale de ces méthodes dans la limite  $d \rightarrow +\infty$  ?

### 1.3 Le problème de l'échelonnement optimal

Étant donnée une cible  $\pi$  sur  $\mathbb{R}$ , on construit la suite  $(\pi^d)_{d \in \mathbb{N}^*}$  de façon à ce que les projections restent compatibles *i.e.* si  $d_1 < d_2$ , alors la mesure image par projection orthogonale sur  $\mathbb{R}^{d_1}$  de  $\pi^{d_2}$  est égale à  $\pi^{d_1}$ . Ceci se traduit en

$$\pi^d(x^d) = \prod_{i=1}^d \pi(x_i^d). \quad (5)$$

On démarre alors toutes les chaînes à l'équilibre, *i.e.*  $X_0^d$  suit la loi  $\pi^d$  pour tout  $d$ . On considère l'une des deux propositions  $q^d$  en exemple, ce qui nous permet de construire les chaînes de Markov  $\{(X_n^d)_{n \in \mathbb{N}} \mid d \in \mathbb{N}^*\}$  par l'algorithme de Metropolis-Hastings. Il nous reste à calibrer le paramètre  $\sigma_d^2 > 0$  avec la dimension. La nécessité de calibrer  $\sigma_d^2$  en fonction de  $d$  est visible dans la figure 2. En

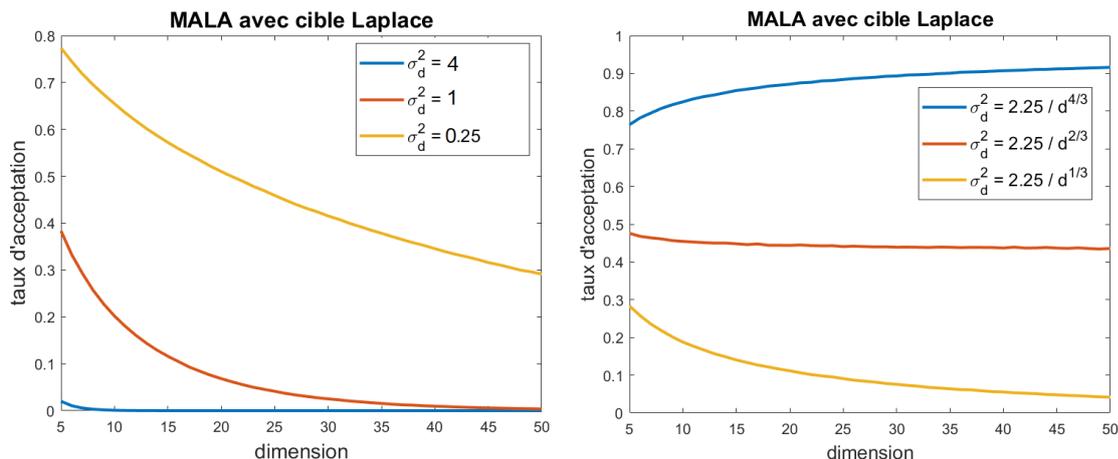


Figure 2: Estimation empirique du taux d'acceptation pour différents choix de  $\sigma_d^2$ .

effet, on observe à gauche que lorsque ce paramètre est constant, l'acceptation tend vers zéro lorsque  $d$  augmente. Ceci est un comportement à éviter, les méthodes MCMC sont efficaces dans des problèmes de grande dimension, et une acceptation très faible rend la méthode inutile. À l'inverse, une acceptation proche de 1 nous informe que le pas de la chaîne est très proche de zéro, ce qui est encore une fois à éviter. On comprend alors qu'il faut choisir la suite  $(\sigma_d^2)_d$  décroissante avec  $d$  pour que l'acceptation reste constante. Encore dans la figure 2, à droite, on a présenté différents choix de la forme  $\sigma_d^2 = \ell^2 / d^\alpha$ , et on observe que même si le paramètre décroît, on peut trouver que l'acceptation croît vers 1, reste constante, ou tend vers zéro. Nos objectifs d'un point de vue théorique sont doubles : à quelle vitesse doit tendre  $\sigma_d^2$  vers zéro avec  $d$  pour que l'algorithme reste intéressant à la limite ? parmi tous les choix de  $\sigma_d^2$  avec la *bonne vitesse*, existe-t-il un choix optimal ?

Nous devons d'abord donner du sens à ces deux questions pour pouvoir y répondre. Pour cela, on considère la forme suivante pour la variance :

$$\sigma_d^2 = \ell^2 / d^\alpha, \quad (6)$$

où  $\ell > 0$  et  $\alpha > 0$ . Le paramètre  $\alpha$  permet de calibrer la vitesse, et son choix est lié à la première question. La deuxième question est liée au choix de  $\ell$ .

### 1.3.1 Échelonnement de la chaîne

On explique ce qui est un cas dégénéré, qui correspond à un mauvais choix de  $\alpha$ .

**Definition 3.** On dit que l'acceptation est dégénérée asymptotiquement lorsque

$$\lim_{d \rightarrow +\infty} \mathbb{P} [A_1^d] = 0, \text{ ou } \lim_{d \rightarrow +\infty} \mathbb{P} [A_1^d] = 1.$$

Sans avoir cherché à prouver le résultat suivant en toute généralité, on a observé dans les exemples traités la disjonction de cas suivante. Il existe une valeur  $\alpha_0 > 0$  (qui dépend de la régularité de  $\pi$ ) telle que :

- si  $0 < \alpha < \alpha_0$ , l'acceptation est dégénérée avec, pour tout  $\ell > 0$ ,

$$\lim_{d \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left[ \mathbf{A}_1^d \right] = 0,$$

- si  $\alpha_0 < \alpha$ , l'acceptation est dégénérée avec, pour tout  $\ell > 0$ ,

$$\lim_{d \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left[ \mathbf{A}_1^d \right] = 1,$$

- si  $\alpha = \alpha_0$ , l'acceptation n'est pas dégénérée, et il existe une fonction  $a : \mathbb{R}_+^* \rightarrow ]0, 1[$  telle que pour tout  $\ell > 0$ ,

$$\lim_{d \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left[ \mathbf{A}_1^d \right] = a(\ell).$$

Ceci est illustré par la figure 2, où  $\alpha_0 = 2/3$ , dans le cadre précis de MALA avec cible Laplace. On dit alors que l'échelonnement optimal de  $\pi$  est en  $1/d^{\alpha_0}$ .

Une autre conséquence de l'échelonnement est qu'il nous permet d'avoir des résultats de convergence faible. Ceux-ci nous permettent de trouver un comportement limite de la méthode, lorsque la dimension tend vers l'infini, qui sera une très bonne approximation pour des problèmes en grande dimension. Dans les cas des deux exemples (RWM et MALA) plus haut, on a le résultat suivant. On suppose que l'on a choisi le bon échelonnement  $\alpha = \alpha_0$ . On construit un processus continu  $(\mathbf{Y}_t^d)_{t \geq 0}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ , en interpolant linéairement les valeurs de la chaîne  $X^d$  et en échelonnant le temps :

$$\mathbf{Y}_t^d = (\lceil d^{\alpha t} \rceil - d^{\alpha t}) X_{\lfloor d^{\alpha t} \rfloor}^d + (d^{\alpha t} - \lfloor d^{\alpha t} \rfloor) X_{\lceil d^{\alpha t} \rceil}^d, \quad (7)$$

où  $\lfloor x \rfloor$  et  $\lceil x \rceil$  sont les uniques entiers tels que  $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x < \lceil x \rceil \leq x + 1$ .

Alors il existe une fonction  $h : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  telle que la première composante de  $\mathbf{Y}^d$  converge faiblement vers une diffusion de Langevin  $\mathbf{Y}$  unidimensionnelle, définie comme solution de l'équation différentielle stochastique :

$$d\mathbf{Y}_t = h(\ell) (\log \pi)'(\mathbf{Y}_t) dt + \sqrt{2h(\ell)} d\mathbf{B}_t, \quad (8)$$

où  $\mathbf{B}$  est un mouvement brownien standard sur  $\mathbb{R}$ . On appelle  $h(\ell)$  la vitesse de la diffusion. On peut montrer, par unicité faible des solutions de l'EDS, que si on se donne en plus  $\mathbf{Y}^{(1)}$  une diffusion de Langevin de vitesse unitaire, alors on a

$$\left( \mathbf{Y}_{h(\ell)t}^{(1)} \right)_t \stackrel{\text{loi}}{=} \left( \mathbf{Y}_t \right)_t.$$

Ce résultat nous donne une première raison de vouloir maximiser  $h(\ell)$  : une plus grande valeur de  $h$  revient à accélérer le temps, ce qui permet d'accélérer la convergence vers la cible  $\pi$ , et donc d'avoir de meilleures approximations. D'un autre côté, le fait d'avoir accéléré le temps d'un facteur  $d^\alpha$  pour trouver une limite en loi nous informe que l'ordre de grandeur d'étapes à réaliser de cette méthode est  $d^\alpha$ . Ceci permet de comparer différentes méthodes entre elles, et les plus rapides seront celles qui ont les plus petits  $\alpha$ .

On peut donner maintenant une autre raison pour laquelle maximiser  $h$  est intéressant. Pour obtenir les meilleures simulations de la loi  $\pi$ , on souhaite que la méthode puisse faire de grands mouvements lors d'une nouvelle étape. Ceci permet de minimiser la corrélation entre un état de la chaîne et le suivant, se rapprochant le plus possible d'un échantillon indépendant. La quantité que l'on cherche à maximiser par le choix de  $\ell$  dans  $\sigma_d^2$ , est ce qu'on appelle l'efficacité d'ordre un, elle est définie pour notre chaîne démarée à l'équilibre  $(X_n^d)_{n \geq 0}$  par

$$\mathbb{E} \left[ \left( X_0^d - X_1^d \right)^2 \right].$$

Cette quantité est à la fois une mesure de la variance de la loi  $\pi$  et de la corrélation entre deux états successifs. Or, grâce au résultat de convergence faible, on peut montrer que

$$\lim_{d \rightarrow +\infty} d^\alpha \mathbb{E} \left[ \left( X_0^d - X_1^d \right)^2 \right] = 2h(\ell).$$

Ainsi, en grande dimension, maximiser l'efficacité revient à maximiser  $h(\ell)$ . Comme nos méthodes sont intéressantes en grande dimension, et qu'en plus la convergence ci-dessus a lieu assez vite (voir figure 4), on cherchera la valeur de  $\ell$  qui optimise  $h(\ell)$ .

En pratique, plutôt que connaître la valeur de  $\ell$  qui maximise  $h$ , on donne la valeur de l'acceptation  $a(\ell)$  qui correspond à la valeur maximale de  $h(\ell)$ . En effet, la valeur de  $\ell$  peut dépendre des conventions prises vis-à-vis de  $\sigma_d^2$ , mais l'acceptation permet de contourner ce problème. Ainsi, il est convenable de tracer la valeur de l'efficacité en fonction de l'acceptation, comme dans la figure 4.

### 1.3.2 Échelonnement optimal de RWM pour des densités régulières

Les premiers résultats sur l'échelonnement optimal ont été montrés dans l'article [3] pour les densités cibles  $\pi$  régulières dans le cas du Métropolis à marche aléatoire. Il s'agit du théorème suivant.

**Theorem 4.** *Supposons l'existence d'une fonction de classe  $C^3$ ,  $V : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant (2), et supposons que  $V(X)$  admet un moment d'ordre 8 fini et  $V'(X)$  admet un moment d'ordre 4 fini, où  $X$  est une variable aléatoire de loi  $\pi$ . Alors*

la valeur de l'échelonnement optimal de  $\pi$  est  $\alpha = 1$ , et la première composante du processus défini en (7) converge faiblement vers la diffusion décrite en (8). On connaît de plus les expressions de  $h(\ell)$  et  $a(\ell)$ . Si on note

$$I_\pi = \mathbb{E}_\pi \left[ V(X)^2 \right],$$

et si  $\Phi$  est la fonction de répartition de la loi  $N(0, 1)$ , alors pour tout  $\ell > 0$

$$\begin{aligned} \lim_{d \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left[ A_1^d \right] &= a(\ell) = 2\Phi \left( -\ell \sqrt{I_\pi/2} \right), \\ \lim_{d \rightarrow +\infty} d \mathbb{E} \left[ \left( X_0^d - X_1^d \right)^2 \right] / 2 &= h(\ell) = \ell^2 \Phi \left( -\ell \sqrt{I_\pi/2} \right). \end{aligned}$$

Maintenant que l'on a expliqué les problématiques de l'échelonnement optimal, on peut passer plus précisément à l'échelonnement de MALA.

## 2 Échelonnement de l'algorithme MALA

Les premiers résultats sur l'échelonnement s'appuient sur de fortes hypothèses de régularité sur la cible. Ceux-ci montrent que l'algorithme de Langevin ajusté est plus rapide que le Métropolis à marche aléatoire que l'on a présenté ci-dessus. On présente ensuite l'étude menée ici. Il s'agit d'un cas particulier d'échelonnement où la densité cible est continue mais pas dérivable en un point.

### 2.1 Échelonnement optimal de MALA pour des densités régulières

Suite aux résultats sur l'échelonnement du Métropolis à marche aléatoire, la même étude fût menée pour l'algorithme de Langevin ajusté, il s'agit de l'article [4]. Voici le résultat principal.

**Theorem 5.** *Supposons l'existence d'une fonction de classe  $C^8$ ,  $V : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant (2). Supposons que  $V$  et, pour tout  $1 \leq i \leq 8$ , ses dérivées successives, les  $V^{(i)}$ , sont bornées par une fonction polynomiale sur  $\mathbb{R}$ . On suppose de plus que la loi  $\pi$  admet des moments finis de tous ordres. Alors la valeur de l'échelonnement optimal de  $\pi$  est  $\alpha = 1/3$ , et la première composante du processus défini en (7) converge faiblement vers la diffusion décrite en (8). On connaît de plus les expressions de  $h(\ell)$  et  $a(\ell)$ . Si on note*

$$K_\pi = 48^{-1/2} \mathbb{E}_\pi \left[ 5V^{(3)}(X)^2 + 3V^{(2)}(X)^3 \right]^{1/2},$$

et si  $\Phi$  est la fonction de répartition de la loi  $N(0, 1)$ , alors pour tout  $\ell > 0$

$$\lim_{d \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left[ \mathbf{A}_1^d \right] = a(\ell) = 2\Phi \left( -K_\pi \ell^3 / 2 \right),$$

$$\lim_{d \rightarrow +\infty} d^{1/3} \mathbb{E} \left[ \left( X_0^d - X_1^d \right)^2 \right] / 2 = h(\ell) = \ell^2 \Phi \left( -K_\pi \ell^3 / 2 \right).$$

Ce résultat permet de confirmer que MALA, avec un échelonnement pour les densités régulières en  $\alpha = 1/3$ , est plus efficace que RWM, qui pour des densités régulières admet un échelonnement en  $\alpha = 1$ .

La question que l'on se pose ensuite est si ces échelonnements restent vrais avec moins d'hypothèses de régularité. La réponse est affirmative dans le cas du Métropolis à marche aléatoire, c'est le travail fait dans l'article [1]. Pour des hypothèses de différentiabilité en moyenne  $L^p$  (plus faibles que celles du cas régulier), la valeur de l'échelonnement est toujours  $\alpha = 1$  et les résultats de convergence faible vers une diffusion de Langevin restent vrais. Dans le cas de MALA, on cherche à établir un résultat similaire.

## 2.2 Résultats principaux

En voulant considérer des cibles  $\pi$  qui ne sont plus continûment différentiables en tout point, on a étudié en détail le cas de la loi cible Laplace, dont la densité s'écrit pour  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\pi(x) = e^{-|x|} / 2.$$

On définit  $V : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  qui vérifie (2), par  $V : x \mapsto |x|$ . Pour pouvoir mettre en place MALA, on considère sa dérivée presque partout  $\nabla V$  qui est la fonction signe définie par :  $\text{sgn} : x \mapsto \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x) - \mathbb{1}_{\mathbb{R}_-}(x)$ . On suppose par la suite construites les chaînes  $(X_n^d)_{n \in \mathbb{N}}$ , où  $d \in \mathbb{N}^*$  par MALA et on se place dans le contexte de l'échelonnement optimal que l'on vient de présenter.

Dans ce mémoire, on montre que l'échelonnement n'est plus en  $\alpha = 1/3$  comme pour les densités régulières, mais en  $\alpha = 2/3$  dans ce cas. On explicite ensuite la forme limite de l'acceptation, ce qui est résumé dans le premier résultat.

**Theorem 6.** *Si  $\sigma_d^2 = \ell^2 / d^\alpha$ , avec  $\alpha = 2/3$ , et si  $\Phi$  est la fonction de répartition de la loi  $N(0, 1)$ , alors on a  $\lim_{d \rightarrow +\infty} \mathbb{P}[\mathbf{A}_1^d] = a(\ell)$ , avec  $a(\ell) = 2\Phi(-\ell^{3/2} / (3\pi^{1/2})^{1/2})$ .*

Ce théorème est démontré en section 4.3.

On montre aussi un résultat de convergence faible, qui contient l'expression de  $h$  que l'on veut maximiser.

**Theorem 7.** *On choisit  $\alpha = 2/3$  et on se donne  $(\mathbf{Y}_t^d)_{t \geq 0}$  défini par (7). On définit de plus  $(\mathbf{Y}_t)_{t \geq 0}$  comme solution de l'EDS*

$$d\mathbf{Y}_t = h(\ell) \text{sgn}(\mathbf{Y}_t) dt + \sqrt{2h(\ell)} d\mathbf{B}_t,$$

où  $\mathbf{B}$  est un mouvement brownien standard sur  $\mathbb{R}$ . Alors la suite de processus  $\{(\mathbf{Y}_{t,1}^d)_{t \geq 0} \mid d \in \mathbb{N}^*\}$  converge faiblement vers  $(\mathbf{Y}_t)_{t \geq 0}$ .

De plus,

$$\lim_{d \rightarrow +\infty} d^{2/3} \mathbb{E} \left[ (X_0^d - X_1^d)^2 \right] / 2 = h(\ell) = \ell^2 \Phi(-\ell^{3/2} / (3\pi^{1/2})^{1/2}),$$

et admet un maximum pour la valeur de  $\ell$  telle que  $a(\ell) = 0.360$ , où  $a$  est définie dans le théorème 6.

Ce théorème est démontré en section 5.

Il est intéressant de comparer ces résultats avec ceux de [4], que l'on a résumé dans le théorème 5 qui utilise aussi MALA. Le cas de la loi cible Laplace présente un échelonnement plus conséquent, *i.e.* une valeur de  $\alpha$  plus élevée,  $\alpha = 2/3$  dans notre cas contre  $\alpha = 1/3$  pour les densités régulières. Ceci veut dire que la méthode converge plus lentement pour certaines densités qui présentent moins de régularités. Ce comportement n'a pas lieu pour la méthode RWM.

On trouve aussi de nouvelles expressions de  $a$  et  $h$ , ce qui se traduit en une nouvelle valeur optimale de  $a$  pour maximiser  $h$ . Dans notre étude, il s'agit de  $a(\ell) = 0.360$  (il s'agit d'un arrondi), alors que dans le cas régulier étudié en [4] c'est  $a(\ell) = 0.574$ .

## 2.3 Expériences numériques

On présente deux figures illustrant les convergences décrites dans les théorèmes 6 et 7.

La figure 3 illustre la convergence du taux d'acceptation du théorème 6. On observe que la convergence est assez rapide, en effet dès  $d = 50$ , la courbe se rapproche uniformément de la limite.

Pour la figure 4, les estimations pour plusieurs valeurs de la dimension permettent d'observer la convergence de ces courbes vers une courbe limite, celle de  $2h$  en fonction de  $a$ . On illustre ainsi le dernier point du théorème 7 sur la maximisation de  $h$ . Bien que l'on ait l'impression que la convergence est plus lente que pour la figure 3, ce qui nous intéresse est que si on prend  $a = 0.360$  la valeur qui maximise  $h$ , alors les valeurs de l'efficacité sont proches du maximum pour toute valeur de  $d$  assez grande. On peut apprécier que c'est le cas, ce qui justifie l'heuristique de chercher à avoir un taux d'acceptation  $a = 0.360$  pour avoir le meilleur échantillonnage. Il est intéressant de remarquer que si l'utilisateur n'arrive pas à calibrer son taux d'acceptation exactement à 0.360, la méthode ne perd pas beaucoup en efficacité pour des taux d'acceptation entre 0.2 et 0.5.

Avant de passer aux démonstrations, on voudrait préciser que ce mémoire mène naturellement à se demander si le comportement observé ici est commun à toute

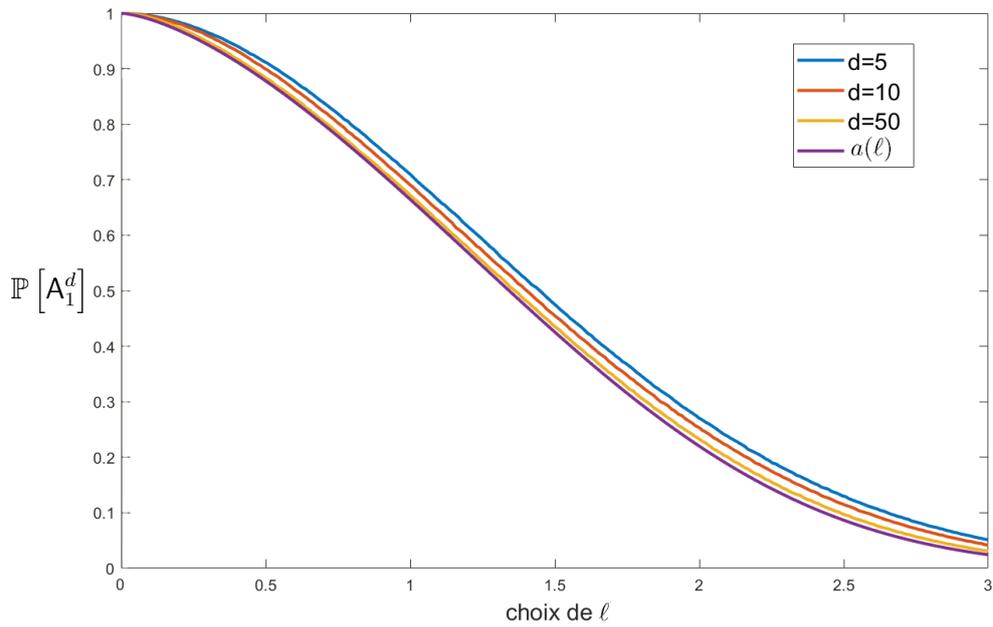


Figure 3: Taux d'acceptation en fonction de  $\ell$  pour MALA avec cible Laplace.

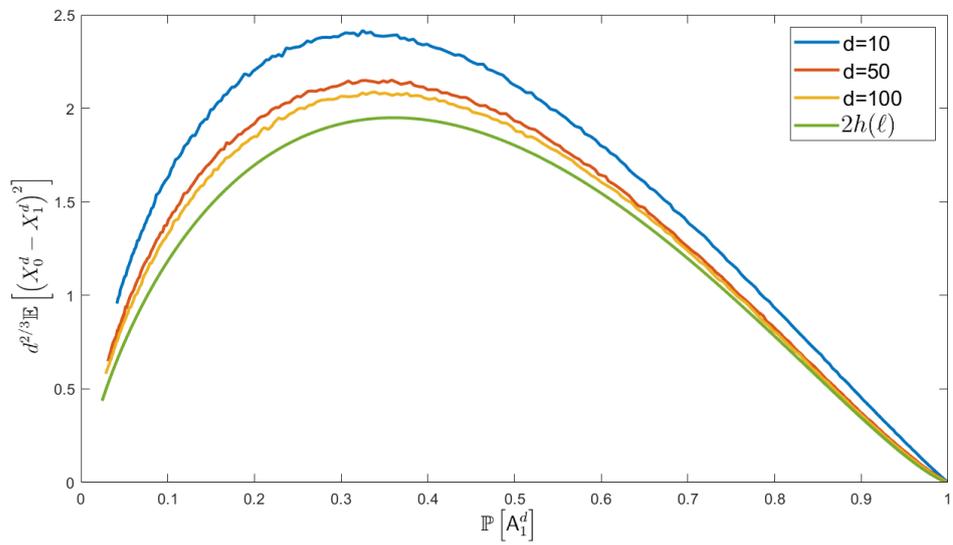


Figure 4: Efficacité d'ordre un multipliée par  $d^{2/3}$  en fonction du taux d'acceptation, pour MALA avec cible Laplace.

une classe de densités dérivables presque partout mais pas continûment différentiables.

### 3 Preuve de l'échelonnement

On veut trouver toutes les valeurs  $\alpha$  telles que l'acceptation ne soit pas *dégénérée asymptotiquement* lorsque la chaîne est démarrée à stationnarité. On conserve les notations introduites dans les sections précédentes, comme (4), (5) et (6).

**Proposition 8.** *La valeur de l'échelonnement optimal pour l'algorithme MALA avec loi cible Laplace est  $\alpha_0 = 2/3$ .*

On commence par plusieurs lemmes qui nous permettent de nourrir l'intuition, et de conjecturer en fin de section ce choix  $\alpha_0 = 2/3$ . Nous pousserons l'étude plus loin en section 4.3, où l'on montrera un théorème à partir duquel on peut déduire la proposition ci-dessus. On rappelle que chacune des composantes  $1 \leq i \leq d$  de la proposition de MALA à l'étape  $n + 1 \in \mathbb{N}^*$  partant de  $X_n^d = (X_{n,1}^d, \dots, X_{n,d}^d)$  est donnée par

$$Y_{n+1,i}^d = X_{n,i}^d - \frac{\ell^2}{d^\alpha} \operatorname{sgn}(X_{n,i}^d) + \sqrt{2} \frac{\ell}{d^{\alpha/2}} Z_{n+1,i}^d,$$

où pour tout  $d \in \mathbb{N}^*$ ,  $(Z_k^d)_{k \in \mathbb{N}^*}$  est une suite indépendante de vecteurs gaussiens de loi  $N(0, I_d)$ , et  $\operatorname{sgn} : x \mapsto \mathbb{1}_{x>0} - \mathbb{1}_{x \leq 0}$ . Avec une suite  $(U_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  de variables i.i.d. de loi uniforme sur  $[0, 1]$ , l'événement d'acceptation en dimension  $d$  est :

$$A_{n+1}^d = \left\{ U_{n+1} \leq \alpha^d \left( X_{n,i}^d, X_{n,i}^d - \frac{\ell^2}{d^\alpha} \operatorname{sgn}(X_{n,i}^d) + \sqrt{2} \frac{\ell}{d^{\alpha/2}} Z_{n+1,i}^d \right) \right\}, \quad (9)$$

où

$$\alpha^d : (x^d, y^d) \mapsto 1 \wedge \frac{\pi^d(y^d) q^d(y^d, x^d)}{\pi^d(x^d) q^d(x^d, y^d)},$$

avec

$$\pi^d : x^d \mapsto 1/2^d \prod_{i=1}^d \exp(-|x_i^d|),$$

et

$$q^d : (x^d, y^d) \mapsto (d^\alpha / (4\pi\ell))^{d/2} \prod_{i=1}^d \exp \left\{ -\frac{d^\alpha}{4\ell^2} \left( y_i^d - x_i^d + \frac{\ell^2}{d^\alpha} \operatorname{sgn}(x_i^d) \right)^2 \right\}.$$

On définit la fonction suivante sur  $\mathbb{R}^2$  :

$$\begin{aligned} \phi_d : (x, z) \mapsto & \left| x - \frac{\ell^2}{d^\alpha} \operatorname{sgn}(x) + \sqrt{2} \frac{\ell}{d^{\alpha/2}} z \right| \\ & + \frac{d^\alpha}{4\ell^2} \left\{ \left[ \left( x - \frac{\ell^2}{d^\alpha} \operatorname{sgn}(x) + \sqrt{2} \frac{\ell}{d^{\alpha/2}} z \right) - x + \frac{\ell^2}{d^\alpha} \operatorname{sgn}(x) \right]^2 \right. \\ & \left. - \left[ x - \left( x - \frac{\ell^2}{d^\alpha} \operatorname{sgn}(x) + \sqrt{2} \frac{\ell}{d^{\alpha/2}} z \right) + \frac{\ell^2}{d^\alpha} \operatorname{sgn} \left( x - \frac{\ell^2}{d^\alpha} \operatorname{sgn}(x) + \sqrt{2} \frac{\ell}{d^{\alpha/2}} z \right) \right]^2 \right\}. \end{aligned} \quad (10)$$

Cette définition permet de réécrire  $\alpha^d$  dans l'équation (9) :

$$A_{n+1}^d = \left\{ U_{n+1} \leq 1 \wedge \exp \left[ \sum_{i=1}^d \phi_d \left( X_{n,i}^d, Z_{n+1,i}^d \right) \right] \right\}. \quad (11)$$

On commence par trouver une expression plus simple de  $\phi_d$ .

**Lemme 9.** *Pour tout  $x, z \in \mathbb{R}$  :*

$$\phi_d(x, z) = \left( 2|x| - \frac{\ell^2}{d^\alpha} + \operatorname{sgn}(x) \frac{\sqrt{2}\ell}{d^{\alpha/2}} z \right) \mathbb{1}_{T_d}(x, z), \quad (12)$$

où

$$T_d = \left\{ (\tilde{x}, \tilde{z}) : \operatorname{sgn} \left( \tilde{x} - \frac{\ell^2}{d^\alpha} \operatorname{sgn}(\tilde{x}) + \frac{\sqrt{2}\ell}{d^{\alpha/2}} \tilde{z} \right) \neq \operatorname{sgn}(\tilde{x}) \right\}. \quad (13)$$

La preuve est reportée à la section 6. Pour mieux comprendre  $\phi_d$ , on continue par exprimer  $T_d$  d'une façon plus explicite.

**Lemme 10.** *L'ensemble  $T_d$  défini en (13) s'écrit :*

$$T_d = \left\{ (\tilde{x}, \tilde{z}) : 0 < \tilde{x} \leq \frac{\ell^2}{d^\alpha} - \frac{\sqrt{2}\ell}{d^{\alpha/2}} \tilde{z} \right\} \cup \left\{ (\tilde{x}, \tilde{z}) : -\frac{\ell^2}{d^\alpha} - \frac{\sqrt{2}\ell}{d^{\alpha/2}} \tilde{z} < \tilde{x} \leq 0 \right\}. \quad (14)$$

Cette preuve se trouve aussi à la section 6. Maintenant on va évaluer  $\phi_d$  sur un couple de variables aléatoires  $(X, Z)$  qui suit la même loi que les couples  $(X_{n,i}^d, Z_{n+1,i}^d)$ , où  $1 \leq i \leq d$  et  $n \in \mathbb{N}$ , comme dans l'expression (11).

**Lemme 11** (Premier moment de  $\phi_d$ ). *Soit  $X$  une v.a. de loi Laplace et  $Z$  de loi  $N(0, 1)$ , indépendantes. Alors*

$$\lim_{d \rightarrow +\infty} d^{3\alpha/2} \mathbb{E}[\phi_d(X, Z)] = -2\ell^3 / (3\sqrt{\pi}),$$

où  $\phi_d$  est donné par (12).

*Preuve.* Reprenons (12) en utilisant la réécriture (14).

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\phi_d(X, Z)] &= \mathbb{E} \left[ \left( 2|X| - \frac{\ell^2}{d^\alpha} + \operatorname{sgn}(X) \frac{\sqrt{2}\ell}{d^{\alpha/2}} Z \right) \left( \mathbb{1}_{\left\{0 < X \leq \frac{\ell^2}{d^\alpha} - \frac{\sqrt{2}\ell}{d^{\alpha/2}} Z\right\}} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \mathbb{1}_{\left\{-\frac{\ell^2}{d^\alpha} - \frac{\sqrt{2}\ell}{d^{\alpha/2}} Z < X \leq 0\right\}} \right) \right], \\
&= \mathbb{E} \left[ \left( 2X - \frac{\ell^2}{d^\alpha} + \frac{\sqrt{2}\ell}{d^{\alpha/2}} Z \right) \mathbb{1}_{\left\{0 < X \leq \frac{\ell^2}{d^\alpha} - \frac{\sqrt{2}\ell}{d^{\alpha/2}} Z\right\}} \right] \\
&\quad + \mathbb{E} \left[ \left( -2X - \frac{\ell^2}{d^\alpha} - \frac{\sqrt{2}\ell}{d^{\alpha/2}} Z \right) \mathbb{1}_{\left\{-\frac{\ell^2}{d^\alpha} - \frac{\sqrt{2}\ell}{d^{\alpha/2}} Z < X \leq 0\right\}} \right]. \tag{15}
\end{aligned}$$

Dans le terme (15), on utilise l'égalité en loi  $-X = X$ .

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E} \left[ \left( -2X - \frac{\ell^2}{d^\alpha} - \frac{\sqrt{2}\ell}{d^{\alpha/2}} Z \right) \mathbb{1}_{\left\{-\frac{\ell^2}{d^\alpha} - \frac{\sqrt{2}\ell}{d^{\alpha/2}} Z < X \leq 0\right\}} \right] \\
&= \mathbb{E} \left[ \left( 2X - \frac{\ell^2}{d^\alpha} - \frac{\sqrt{2}\ell}{d^{\alpha/2}} Z \right) \mathbb{1}_{\left\{-\frac{\ell^2}{d^\alpha} - \frac{\sqrt{2}\ell}{d^{\alpha/2}} Z < -X \leq 0\right\}} \right], \\
&= \mathbb{E} \left[ \left( 2X - \frac{\ell^2}{d^\alpha} - \frac{\sqrt{2}\ell}{d^{\alpha/2}} Z \right) \mathbb{1}_{\left\{0 \leq X < \frac{\ell^2}{d^\alpha} + \frac{\sqrt{2}\ell}{d^{\alpha/2}} Z\right\}} \right].
\end{aligned}$$

On utilise ensuite l'égalité en loi  $Z = -Z$ .

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E} \left[ \left( 2X - \frac{\ell^2}{d^\alpha} - \frac{\sqrt{2}\ell}{d^{\alpha/2}} Z \right) \mathbb{1}_{\left\{0 \leq X < \frac{\ell^2}{d^\alpha} + \frac{\sqrt{2}\ell}{d^{\alpha/2}} Z\right\}} \right] \\
&= \mathbb{E} \left[ \left( 2X - \frac{\ell^2}{d^\alpha} + \frac{\sqrt{2}\ell}{d^{\alpha/2}} Z \right) \mathbb{1}_{\left\{0 \leq X < \frac{\ell^2}{d^\alpha} - \frac{\sqrt{2}\ell}{d^{\alpha/2}} Z\right\}} \right].
\end{aligned}$$

On utilise finalement le fait que  $X$  est une loi à densité, ainsi un évènement de la forme  $(a \leq X < b)$  est égal p.s. à  $(a < X < b)$  ou encore à  $(a < X \leq b)$ . Cela permet de reconnaître que le terme (15) est égal à celui de la ligne d'avant. En injectant ceci dans l'écriture de  $\mathbb{E}[\phi_d(X, Z)]$ , on obtient :

$$\mathbb{E}[\phi_d(X, Z)] = 2\mathbb{E} \left[ \left( 2X - \frac{\ell^2}{d^\alpha} + \frac{\sqrt{2}\ell}{d^{\alpha/2}} Z \right) \mathbb{1}_{\left\{0 < X < \frac{\ell^2}{d^\alpha} - \frac{\sqrt{2}\ell}{d^{\alpha/2}} Z\right\}} \right]. \tag{16}$$

On peut maintenant utiliser la connaissance de la loi jointe de  $(X, Z)$  pour continuer le calcul. On introduit la notation  $\kappa(\ell, d, z) = \ell^2/d^\alpha - \sqrt{2}\ell z/d^{\alpha/2}$ .

$$\mathbb{E}[\phi_d(X, Z)] = 2/(2\sqrt{2\pi}) \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(\kappa(\ell, d, z)) e^{-z^2/2} \int_0^{\kappa(\ell, d, z)} (2x - \kappa(\ell, d, z)) e^{-x} dx dz.$$

Intéressons nous à l'intégrale en  $x$ , à  $z$  fixé. Par une intégration par parties,

$$\begin{aligned} \int_0^{\kappa(\ell, d, z)} (2x - \kappa(\ell, d, z)) e^{-x} dx &= [(\kappa(\ell, d, z) - 2x) e^{-x}]_0^{\kappa(\ell, d, z)} + \int_0^{\kappa(\ell, d, z)} 2e^{-x} dx, \\ &= -\kappa(\ell, d, z) (1 + e^{-\kappa(\ell, d, z)}) + 2 (1 - e^{-\kappa(\ell, d, z)}). \end{aligned}$$

Puis, par la formule de Taylor-Lagrange pour  $f : x \mapsto -x(1 + e^{-x}) + 2(1 - e^{-x})$  à l'ordre 4, pour tout  $\ell > 0$ ,  $d \in \mathbb{N}^*$  et  $z \in \mathbb{R}$  tels que  $\kappa(\ell, d, z) > 0$ , il existe  $\gamma(\ell, d, z) \in [0, \kappa(\ell, d, z)]$  tel que :

$$\int_0^{\kappa(\ell, d, z)} (2x - \kappa(\ell, d, z)) e^{-x} dx = -\kappa(\ell, d, z)^3 / 3! + \kappa(\ell, d, z)^4 f^{(4)}(\gamma(\ell, d, z)) / 4!,$$

où  $f^{(4)} : x \mapsto (2 - x)e^{-x}$ . On remarque que  $f^{(4)}$  est une fonction bornée sur  $\mathbb{R}_+$ . En revenant à (16) on a :

$$\begin{aligned} d^{3\alpha/2} \mathbb{E} [\phi_d(X, Z)] &= -1 / (\sqrt{2\pi} 3!) \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(\kappa(\ell, d, z)) e^{-z^2/2} \kappa(\ell, d, z)^3 d^{3\alpha/2} dz \\ &\quad + 1 / (\sqrt{2\pi} 4!) \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(\kappa(\ell, d, z)) e^{-z^2/2} \kappa(\ell, d, z)^4 d^{3\alpha/2} f^{(4)}(\gamma(\ell, d, z)) dz. \end{aligned}$$

Appelons  $I_d$  la première intégrale, et  $J_d$  la deuxième. On veut trouver leurs limites par le théorème de convergence dominée. On rappelle que  $\kappa(\ell, d, z) = \ell^2/d^\alpha - \sqrt{2}\ell z/d^{\alpha/2}$ . On commence par simplifier l'indicatrice :  $0 < \kappa(\ell, d, z)$  si et seulement si  $z < \ell/(\sqrt{2}d^{\alpha/2})$ . Si on s'intéresse d'abord à  $J_d$ , on majore l'intégrand, pour tout  $z \in \mathbb{R}$ ,  $d \in \mathbb{N}^*$  et  $\ell > 0$  :

$$\begin{aligned} \left| \mathbb{1}_{\{z < \ell/(\sqrt{2}d^{\alpha/2})\}} e^{-z^2/2} \kappa(\ell, d, z)^4 d^{3\alpha/2} f^{(4)}(\gamma(\ell, d, z)) \right| &\leq e^{-z^2/2} C (\ell^2/d^\alpha - \sqrt{2}\ell z)^4, \\ &\leq 8e^{-z^2/2} C (\ell^8 + \sqrt{2}\ell z^4), \end{aligned}$$

où  $C$  est une borne de  $f^{(4)}$  sur  $\mathbb{R}_+$ , on a aussi utilisé l'inégalité triangulaire et l'inégalité de Hölder. Cette quantité est bien intégrable sur  $\mathbb{R}$ , passons ensuite à la limite de l'intégrand. Pour tout  $z \in \mathbb{R}$ ,  $d \in \mathbb{N}^*$  et  $\ell > 0$  :

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_{\{z < \ell/(\sqrt{2}d^{\alpha/2})\}} e^{-z^2/2} \kappa(\ell, d, z)^4 d^{3\alpha/2} f^{(4)}(\gamma(\ell, d, z)) \\ = \mathbb{1}_{\{z < \ell/(\sqrt{2}d^{\alpha/2})\}} e^{-z^2/2} (\ell^2/d^\alpha - \sqrt{2}\ell z)^4 f^{(4)}(\gamma(\ell, d, z)) / d^{\alpha/2}, \end{aligned}$$

et la limite, pour tout  $z \in \mathbb{R}$  et  $\ell > 0$  :

$$\lim_{d \rightarrow +\infty} \mathbb{1}_{\{z < \ell/(\sqrt{2}d^{\alpha/2})\}} e^{-z^2/2} (\ell^2/d^\alpha - \sqrt{2}\ell z)^4 f^{(4)}(\gamma(\ell, d, z)) / d^{\alpha/2} = 0.$$

Donc, par le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{d \rightarrow +\infty} J_d = 0. \quad (17)$$

De façon similaire, on commence par majorer l'intégrand de  $I_d$ . Pour tout  $z \in \mathbb{R}$ ,  $d \in \mathbb{N}^*$  et  $\ell > 0$  :

$$\begin{aligned} \left| \mathbb{1}_{\{0 < \kappa(\ell, d, z)\}} e^{-z^2/2} \kappa(\ell, d, z)^3 d^{3\alpha/2} \right| &\leq e^{z^2/2} |\ell^2/d^{\alpha/2} - \sqrt{2} \ell z|^3, \\ &\leq e^{-z^2/2} (\ell^2 + \sqrt{2} \ell |z|)^3, \\ &\leq 4e^{-z^2/2} (\ell^6 + 2^{3/2} \ell^3 |z|^3), \end{aligned}$$

qui est bien intégrable sur  $\mathbb{R}$ . D'une autre part, calculons la limite simple de l'intégrand, pour tout  $z \in \mathbb{R}$ ,  $d \in \mathbb{N}^*$  et  $\ell > 0$  :

$$\mathbb{1}_{\{0 < \kappa(\ell, d, z)\}} e^{-z^2/2} \kappa(\ell, d, z)^3 d^{3\alpha/2} = \mathbb{1}_{\{0 < \kappa(\ell, d, z)\}} e^{-z^2/2} (\ell^2/d^{\alpha/2} - \sqrt{2} \ell z)^3.$$

On a pour tout  $z \in \mathbb{R}$  et  $\ell > 0$  :

$$\lim_{d \rightarrow +\infty} \mathbb{1}_{\{0 < \kappa(\ell, d, z)\}} e^{-z^2/2} (\ell^2/d^{\alpha/2} - \sqrt{2} \ell z)^3 = -\mathbb{1}_{\{z < 0\}} e^{-z^2/2} 2^{3/2} \ell^3 z^3.$$

Ainsi, par le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{d \rightarrow +\infty} I_d = 2^{3/2} \ell^3 / (\sqrt{2\pi} 3!) \int_{-\infty}^0 e^{-z^2/2} z^3 dz.$$

Or, par une intégration par parties,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 e^{-z^2/2} z^3 dz &= \left[ -z^2 e^{-z^2/2} \right]_{-\infty}^0 + \int_{-\infty}^0 2z e^{-z^2/2} dz, \\ &= 0 + \left[ -2e^{-z^2/2} \right]_{-\infty}^0, \\ &= -2. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\lim_{d \rightarrow +\infty} I_d = -2\ell^3 / (3\sqrt{\pi}). \quad (18)$$

En regroupant (17) et (18), on trouve le résultat voulu :

$$\lim_{d \rightarrow +\infty} d^{3\alpha/2} \mathbb{E}[\phi_d(X, Z)] = -2\ell^3 / (3\sqrt{\pi}).$$

□

On passe ensuite au calcul de la variance, celui-ci se fait de manière analogue à celui de l'espérance.

**Lemme 12** (Deuxième moment de  $\phi_d$ ). *Soit  $X$  une v.a. de loi Laplace et  $Z$  de loi  $N(0, 1)$ , indépendantes. Alors*

$$\lim_{d \rightarrow +\infty} d^{3\alpha/2} \text{Var}(\phi_d(X, Z)) = 4\ell^3 / (3\sqrt{\pi}) ,$$

où  $\phi_d$  est donné par (12).

*Preuve.* On se sert de la décomposition

$$\text{Var}(\phi_d(X, Z)) = \mathbb{E} [\phi_d(X, Z)^2] - \mathbb{E} [\phi_d(X, Z)]^2 .$$

D'après le lemme 11,

$$\lim_{d \rightarrow +\infty} d^{3\alpha/2} \mathbb{E} [\phi_d(X, Z)]^2 = 0 .$$

On doit donc montrer que

$$\lim_{d \rightarrow +\infty} d^{3\alpha/2} \mathbb{E} [\phi_d(X, Z)^2] = 4\ell^3 / (3\sqrt{\pi}) .$$

On commence par la même réécriture de  $T_d$  que celle de la preuve précédente :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\phi_d(X, Z)^2] &= \mathbb{E} \left[ \left( 2|X| - \frac{\ell^2}{d^\alpha} + \text{sgn}(X) \frac{\sqrt{2}\ell}{d^{\alpha/2}} Z \right)^2 \mathbb{1}_{T_d}(X, Z) \right] , \\ &= \mathbb{E} \left[ \left( 2X - \frac{\ell^2}{d^\alpha} + \frac{\sqrt{2}\ell}{d^{\alpha/2}} Z \right)^2 \mathbb{1}_{\{0 < X < \frac{\ell^2}{d^\alpha} - \frac{\sqrt{2}\ell}{d^{\alpha/2}} Z\}} \right] \\ &\quad + \mathbb{E} \left[ \left( -2X - \frac{\ell^2}{d^\alpha} - \frac{\sqrt{2}\ell}{d^{\alpha/2}} Z \right)^2 \mathbb{1}_{\{-\frac{\ell^2}{d^\alpha} - \frac{\sqrt{2}\ell}{d^{\alpha/2}} Z < X < 0\}} \right] . \end{aligned}$$

En faisant les mêmes transformations que dans la preuve précédente et en se servant de  $\kappa(\ell, d, z) = \ell^2/d^\alpha - \sqrt{2}\ell z/d^{\alpha/2}$ , on obtient une forme très similaire à (16),

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\phi_d(X, Z)^2] &= 2\mathbb{E} \left[ \left( 2X - \frac{\ell^2}{d^\alpha} + \frac{\sqrt{2}\ell}{d^{\alpha/2}} Z \right)^2 \mathbb{1}_{\{0 < X < \frac{\ell^2}{d^\alpha} - \frac{\sqrt{2}\ell}{d^{\alpha/2}} Z\}} \right] , \\ &= 2\mathbb{E} \left[ (2X - \kappa(\ell, d, Z))^2 \mathbb{1}_{\{0 < X < \kappa(\ell, d, Z)\}} \right] . \end{aligned}$$

Développons avec la loi du couple  $(X, Z)$ ,

$$\mathbb{E} [\phi_d(X, Z)^2] = 1/\sqrt{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-z^2/2} \mathbb{1}_{\{z < \ell/(\sqrt{2}d^{\alpha/2})\}} \int_0^{\kappa(\ell, d, z)} (2x - \kappa(\ell, d, z))^2 e^{-x} dx dz . \quad (19)$$

Étudions l'intégrale en  $x$ , à  $z$  fixé. Par une intégration par parties, on fait apparaître l'intégrale calculée dans le lemme 11,

$$\begin{aligned} \int_0^{\kappa(\ell, d, z)} (2x - \kappa(\ell, d, z))^2 e^{-x} dx &= \left[ -(2x - \kappa(\ell, d, z))^2 e^{-x} \right]_0^{\kappa(\ell, d, z)} \\ &\quad + 4 \int_0^{\kappa(\ell, d, z)} (2x - \kappa(\ell, d, z)) e^{-x} dx, \\ &= \kappa(\ell, d, z)^2 (1 - e^{-\kappa(\ell, d, z)}) \\ &\quad - 4\kappa(\ell, d, z) (1 + e^{-\kappa(\ell, d, z)}) + 8 (1 - e^{-\kappa(\ell, d, z)}) . \end{aligned}$$

Puis, par la formule de Taylor-Lagrange pour  $g : x \mapsto (x^2 + 8)(1 - e^{-x}) - 4x(1 + e^{-x})$  à l'ordre 4, pour tout  $\ell > 0$ ,  $d \in \mathbb{N}^*$  et  $z \in \mathbb{R}$  tels que  $\kappa(\ell, d, z) > 0$ , il existe  $\gamma(\ell, d, z) \in [0, \kappa(\ell, d, z)]$  tel que:

$$\int_0^{\kappa(\ell, d, z)} (2x - \kappa(\ell, d, z))^2 e^{-x} dx = 5\kappa(\ell, d, z)^3/3! + g^{(4)}(\gamma(\ell, d, z)) \kappa(\ell, d, z)^4/4!,$$

avec  $g^{(4)}(x) = e^{-x}(-x^2 + 4x - 4)$  sur  $\mathbb{R}$ . On introduit ce résultat dans l'expression (19),

$$\begin{aligned} d^{3\alpha/2} \mathbb{E} [\phi_d(X, Z)^2] &= 2 / (3! \sqrt{2\pi}) \int_{-\infty}^{\ell/(\sqrt{2}d^{\alpha/2})} e^{-z^2/2} \kappa(\ell, d, z)^3 d^{3\alpha/2} dz \\ &\quad + 1 / (4! \sqrt{2\pi}) \int_{-\infty}^{\ell/(\sqrt{2}d^{\alpha/2})} e^{-z^2/2} \kappa(\ell, d, z)^4 d^{3\alpha/2} g^{(4)}(\gamma(\ell, d, z)) dz . \end{aligned}$$

On reconnaît la première intégrale qui est  $-2I_d$ , dont on a déjà calculé la limite en (18). Pour la deuxième intégrale, on montre qu'elle tend vers 0 de la même façon que pour  $J_d$  en (17), en effet on a encore  $g^{(4)}$  bornée sur  $\mathbb{R}_+$ . Ainsi,

$$\lim_{d \rightarrow +\infty} d^{3\alpha/2} \mathbb{E} [\phi_d(X, Z)^2] = 4\ell^3 / (3\sqrt{\pi}) .$$

Par le raisonnement mené au début de la preuve, on a

$$\lim_{d \rightarrow +\infty} d^{3\alpha/2} \text{Var}(\phi_d(X, Z)) = 4\ell^3 / (3\sqrt{\pi}) .$$

□

Pour revenir à l'expression de l'acceptation (11), on définit sur  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$  la fonction

$$F_d : (x^d, z^d) \mapsto \sum_{i=1}^d \phi_d(x_i^d, z_i^d) .$$

Les variables aléatoires qui nous intéressent sont donc les  $F_d(X_n^d, Z_{n+1}^d)$  où  $n \in \mathbb{N}$ . On a alors par indépendance et stationnarité :

$$\text{Var} \left( F_d(X_n^d, Z_{n+1}^d) \right) = \sum_{i=1}^d \text{Var} \left( \phi_d \left( X_{n,i}^d, Z_{n+1,i}^d \right) \right) = d \text{Var} \left( \phi_d(X_{0,1}^d, Z_{1,1}^d) \right) .$$

Pour que la variance de  $F_d$  soit bornée et ne tende pas vers 0, il faut avoir  $d^{3\alpha/2} = d$ , i.e.  $\alpha = 2/3$ , ce qui nous permet de conjecturer qu'il s'agit de la valeur de l'échelonnement. Avec ce choix de  $\alpha$ , on obtient pour tout  $n \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned} \lim_{d \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \left[ F_d(X_n^d, Z_{n+1}^d) \right] &= -2\ell^3 / (3\sqrt{\pi}) , \\ \lim_{d \rightarrow +\infty} \text{Var} \left( F_d(X_n^d, Z_{n+1}^d) \right) &= 4\ell^3 / (3\sqrt{\pi}) . \end{aligned}$$

À partir de maintenant, on supposera toujours  $\alpha = 2/3$ .

## 4 Convergence du taux d'acceptation

### 4.1 Tableau de martingales

**Definition 13.** Soit  $(k_n)$  une suite d'entiers positifs qui tend vers l'infini. Une suite  $(S_{n,i}, \mathcal{F}_{n,i})_{1 \leq i \leq k_n, n \in \mathbb{N}^*}$  est appelée tableau de martingales lorsque pour tout  $i \leq k_n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $S_{n,i}$  est une variable aléatoire centrée et de carré intégrable, et que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$   $(S_{n,i})_{1 \leq i \leq k_n}$  est une martingale par rapport à la filtration  $(\mathcal{F}_{n,i})_{1 \leq i \leq k_n}$ .

Si  $(S_{n,i}, \mathcal{F}_{n,i})_{1 \leq i \leq k_n, n \in \mathbb{N}^*}$  est un tableau de martingales, on définit alors les différences de la martingale par  $X_{n,i} = S_{n,i} - S_{n,i-1}$  en utilisant la convention  $S_{n,0} = 0$ .

Cette définition provient de [2, p. 51]. Le théorème suivant utilise cette définition pour avoir un résultat de convergence en loi, il est tiré du théorème 3.2 et de son corollaire 3.1 de [2, p. 58-59].

**Theorem 14.** Soit  $(S_{n,i}, \mathcal{F}_{n,i})_{1 \leq i \leq k_n, n \in \mathbb{N}^*}$  un tableau de martingales (donc centré et de carré intégrable) ayant  $(X_{n,i})_{1 \leq i \leq k_n, n \in \mathbb{N}^*}$  pour différences et supposons :

**H1.** (i) pour tout  $\varepsilon > 0$ ,

$$\sum_{i=1}^{k_n} \mathbb{E} \left[ X_{n,i}^2 \mathbb{1}_{|X_{n,i}| > \varepsilon} \middle| \mathcal{F}_{n,i-1} \right] \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} 0 ,$$

(ii) il existe  $\eta^2$  une variable aléatoire réelle finie p.s. telle que

$$\sum_{i=1}^{k_n} \mathbb{E} \left[ X_{n,i}^2 \middle| \mathcal{F}_{n,i-1} \right] \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} \eta^2 ,$$

(iii) pour tout  $n \geq 1$  et  $1 \leq i \leq k_n$ ,  $\mathcal{F}_{n,i} \subseteq \mathcal{F}_{n+1,i}$ .

Alors

$$S_{n,k_n} = \sum_{i=1}^{k_n} X_{n,i} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{loi}} Z$$

où  $Z$  est une variable aléatoire de fonction caractéristique  $\Phi_Z(t) = \mathbb{E} \left[ e^{-\eta^2 t^2 / 2} \right]$ .

## 4.2 Application au taux d'acceptation

Dans le cadre de cette étude, on pose pour tout  $d \geq 1$  et  $0 \leq i \leq d$ ,  $\mathcal{F}_{d,i} = \sigma((X_j, Z_j); 1 \leq j \leq i)$  la filtration naturelle des variables  $X$  et  $Z$ . Posons aussi  $\mu_d = \mathbb{E} [\phi_d(X_1, Z_1)]$ . Alors la suite

$$\left( S_{d,i} = \sum_{j=1}^i (\phi_d(X_j, Z_j) - \mu_d), \mathcal{F}_{d,i} \right)_{d \geq 1, 1 \leq i \leq d}$$

est un tableau de martingales. Pour le vérifier, notons  $W_{d,i} = \phi_d(X_i, Z_i) - \mu_d$ . Ces variables sont centrées, de carré intégrable et  $W_{d,i}$  est indépendante de  $W_{d,j}$  dès que  $i \neq j$ . Ceci nous montre pour tout  $d \geq 1$  et tout  $1 \leq i \leq d$ , que  $S_{d,i}$  est centrée et de carré intégrable, de plus,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [S_{d,i} | \mathcal{F}_{d,i-1}] &= S_{d,i-1} + \mathbb{E} [W_{d,i} | \mathcal{F}_{d,i-1}] , \\ &= S_{d,i-1} + \mathbb{E} [W_{d,i}] , \\ &= S_{d,i-1} . \end{aligned}$$

Ainsi  $(S_{d,i}, \mathcal{F}_{d,i})_{d \geq 1, 1 \leq i \leq d}$  s'agit bien d'un tableau de martingales. Vérifions ensuite les conditions **H1(i)**, **H1(ii)** et **H1(iii)** pour pouvoir appliquer le théorème ci-dessus.

### 4.2.1 Première hypothèse, la condition de Lindeberg

La condition **H1(i)** est souvent appelée condition de Lindeberg. Soit  $\varepsilon > 0$ , commençons par simplifier la somme : par indépendance de  $W_{d,i}$  par rapport à la tribu  $\mathcal{F}_{d,i-1}$ ,

$$\sum_{i=1}^d \mathbb{E} \left[ W_{d,i}^2 \mathbb{1}_{|W_{d,i}| > \varepsilon} | \mathcal{F}_{d,i-1} \right] = \sum_{i=1}^d \mathbb{E} \left[ W_{d,i}^2 \mathbb{1}_{|W_{d,i}| > \varepsilon} \right] ,$$

ces variables ayant même loi,

$$= d \mathbb{E} \left[ W_{d,1}^2 \mathbb{1}_{|W_{d,1}| > \varepsilon} \right] .$$

Ainsi pour montrer **H1(i)**, il suffit de montrer que

$$\lim_{d \rightarrow +\infty} d \mathbb{E} \left[ (\phi_d(X_1, Z_1) - \mu_d)^2 \mathbb{1}_{|\phi_d(X_1, Z_1) - \mu_d| > \varepsilon} \right] = 0.$$

On a cependant,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ W_{d,1}^2 \mathbb{1}_{|W_{d,1}| > \varepsilon} \right] &= \mathbb{E} \left[ (\phi_d(X_1, Z_1)^2 - 2\phi_d(X_1, Z_1)\mu_d + \mu_d^2) \mathbb{1}_{|\phi_d(X_1, Z_1) - \mu_d| > \varepsilon} \right], \\ &= \mathbb{E} \left[ \phi_d(X_1, Z_1)^2 \mathbb{1}_{|\phi_d(X_1, Z_1) - \mu_d| > \varepsilon} \right] \end{aligned} \quad (\text{L1})$$

$$- 2 \mathbb{E} \left[ \phi_d(X_1, Z_1) \mathbb{1}_{|\phi_d(X_1, Z_1) - \mu_d| > \varepsilon} \right] \mathbb{E} [\phi_d(X_1, Z_1)] \quad (\text{L2})$$

$$+ \mathbb{P} (|\phi_d(X_1, Z_1) - \mu_d| > \varepsilon) \mathbb{E} [\phi_d(X_1, Z_1)]^2. \quad (\text{L3})$$

Traisons ensuite les trois termes séparément. En ce qui concerne (L3), on a :

$$d \mathbb{E} [\phi_d(X_1, Z_1)]^2 = 1/d (d \mathbb{E} [\phi_d(X_1, Z_1)])^2,$$

or le terme entre parenthèses converge vers une limite finie, ainsi

$$\lim_{d \rightarrow +\infty} d \mathbb{E} [\phi_d(X_1, Z_1)]^2 = 0.$$

De plus  $\mathbb{P}(|\phi_d(X_1, Z_1) - \mu_d| > \varepsilon) \in [0, 1]$ , alors

$$\lim_{d \rightarrow +\infty} d \mathbb{P} (|\phi_d(X_1, Z_1) - \mu_d| > \varepsilon) \mathbb{E} [\phi_d(X_1, Z_1)]^2 = 0.$$

Intéressons nous maintenant à (L2), on sait déjà que

$$\lim_{d \rightarrow +\infty} d \mathbb{E} [\phi_d(X_1, Z_1)] = -2\ell^3 / (3\sqrt{\pi}).$$

Il suffit donc de montrer que

$$\lim_{d \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \left[ \phi_d(X_1, Z_1) \mathbb{1}_{|\phi_d(X_1, Z_1) - \mu_d| > \varepsilon} \right] = 0.$$

On commence par la même réécriture de  $\mathbf{A}_1^d$  que celle faite pour les lemmes 11 et 12 :

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \left[ \phi_d(X_1, Z_1) \mathbb{1}_{|\phi_d(X_1, Z_1) - \mu_d| > \varepsilon} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \left( 2|X_1| - \ell^2/d^{2/3} + \text{sgn}(X_1)\sqrt{2}\ell Z_1/d^{1/3} \right) \mathbb{1}_{\mathbf{A}_1^d} \mathbb{1}_{|\phi_d(X_1, Z_1) - \mu_d| > \varepsilon} \right], \\ &= 2 \mathbb{E} \left[ \left( 2X_1 - \ell^2/d^{2/3} + \sqrt{2}\ell Z_1/d^{1/3} \right) \mathbb{1}_{0 < X_1 < \kappa(\ell, d, Z_1)} \mathbb{1}_{|2X_1 - \ell^2/d^{2/3} + \sqrt{2}\ell Z_1/d^{1/3} - \mu_d| > \varepsilon} \right], \end{aligned}$$

où  $\kappa(\ell, d, z) = \ell^2/d^{2/3} - \sqrt{2}\ell z/d^{1/3}$ . On a pu changer  $\mathbb{1}_{|\phi_d(X_1, Z_1) - \mu_d| > \varepsilon}$  en  $\mathbb{1}_{|2X_1 - \ell^2/d^{2/3} + \sqrt{2}\ell Z_1/d^{1/3} - \mu_d| > \varepsilon}$  en prenant  $d$  suffisamment grand pour que  $|\mu_d| < \varepsilon$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[ \phi_d(X_1, Z_1) \mathbb{1}_{|\phi_d(X_1, Z_1) - \mu_d| > \varepsilon} \right] \\ &= 1/\sqrt{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{0 < \kappa(\ell, d, z)} e^{-z^2/2} \int_0^{\kappa(\ell, d, z)} e^{-x} (2x - \kappa(\ell, d, z)) \mathbb{1}_{|2x - \kappa(\ell, d, z) - \mu_d| > \varepsilon} dx dz, \\ &= 1/\sqrt{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{0 < \kappa(\ell, d, z)} e^{-z^2/2} \left( \int_0^{\kappa(\ell, d, z)} e^{-x} (2x - \kappa(\ell, d, z)) \mathbb{1}_{2x - \kappa(\ell, d, z) - \mu_d > \varepsilon} dx \right. \\ & \quad \left. + \int_0^{\kappa(\ell, d, z)} e^{-x} (2x - \kappa(\ell, d, z)) \mathbb{1}_{2x - \kappa(\ell, d, z) - \mu_d < -\varepsilon} dx \right) dz. \end{aligned} \quad (20)$$

On va maintenant étudier les intégrales en  $x$  à  $z$  fixé. On note la première  $A_1$  et la deuxième  $B_1$ . On commence par trouver les intervalles d'intégration,

$$\begin{aligned} & \{x, z \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \kappa(\ell, d, z)\} \cap \{x, z \in \mathbb{R} \mid 2x - \kappa(\ell, d, z) - \mu_d > \varepsilon\} \\ &= \{x, z \in \mathbb{R} \mid 0 \vee (\varepsilon + \kappa(\ell, d, z) + \mu_d)/2 < x < \kappa(\ell, d, z)\}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & \{x, z \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \kappa(\ell, d, z)\} \cap \{x, z \in \mathbb{R} \mid 2x - \kappa(\ell, d, z) - \mu_d < -\varepsilon\} \\ &= \{x, z \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \kappa(\ell, d, z) \wedge (\kappa(\ell, d, z) - \varepsilon + \mu_d)/2\}, \end{aligned}$$

où on utilise les notations  $\vee$  pour le maximum et  $\wedge$  pour le minimum. Or, comme  $\lim_{d \rightarrow +\infty} \mu_d = 0$  et que l'on se place là où  $\kappa(\ell, d, z) > 0$ , quitte à prendre  $d$  suffisamment grand, on a  $(\varepsilon + \kappa(\ell, d, z) + \mu_d)/2 > 0$ . De même, comme  $\lim_{d \rightarrow +\infty} d \mu_d = -2\ell^3/(3\sqrt{\pi})$ , alors pour tout  $d$  assez grand  $\mu_d < 0$ . Ainsi  $-\varepsilon + \mu_d < 0$  et donc  $(\kappa(\ell, d, z) - \varepsilon + \mu_d)/2 < \kappa(\ell, d, z)$ . En conclusion, quitte à prendre  $d$  assez grand,

$$\begin{aligned} A_1 &:= \int_{0 \vee (\varepsilon + \kappa(\ell, d, z) + \mu_d)/2}^{\kappa(\ell, d, z)} e^{-x} (2x - \kappa(\ell, d, z)) dx, \\ &= \int_{(\varepsilon + \kappa(\ell, d, z) + \mu_d)/2}^{\kappa(\ell, d, z)} e^{-x} (2x - \kappa(\ell, d, z)) dx, \end{aligned}$$

en intégrant par parties,

$$\begin{aligned} &= \left[ -e^{-x} (2x - \kappa(\ell, d, z)) \right]_{(\varepsilon + \kappa(\ell, d, z) + \mu_d)/2}^{\kappa(\ell, d, z)} + \int_{(\varepsilon + \kappa(\ell, d, z) + \mu_d)/2}^{\kappa(\ell, d, z)} 2e^{-x} dx, \\ &= e^{-(\varepsilon + \mu_d)/2} e^{-(\kappa(\ell, d, z))/2} (\varepsilon + \kappa(\ell, d, z) + \mu_d - \kappa(\ell, d, z)) \\ & \quad - \kappa(\ell, d, z) e^{-\kappa(\ell, d, z)} + 2 \left( e^{-(\kappa(\ell, d, z) + \varepsilon + \mu_d)/2} - e^{-\kappa(\ell, d, z)} \right). \end{aligned}$$

On rappelle que  $\kappa(\ell, d, z) = \ell^2/d^{2/3} - \sqrt{2}\ell z/d^{1/3}$ . Ainsi la limite de l'expression ci-dessus est, pour tout  $\ell > 0$  et  $z \in \mathbb{R}$  tel que pour tout  $d \in \mathbb{N}^*$ ,  $\kappa(\ell, d, z) > 0$ ,

$$\lim_{d \rightarrow +\infty} A_1 = 2 \left( e^{-\varepsilon/2} - 1 \right) + \varepsilon e^{-\varepsilon/2}. \quad (21)$$

Effectuons ensuite un calcul similaire pour la deuxième intégrale de (20) :

$$\begin{aligned} B_1 &:= \int_0^{\kappa(\ell, d, z) \wedge (\kappa(\ell, d, z) - \varepsilon + \mu_d)/2} e^{-x} (2x - \kappa(\ell, d, z)) dx, \\ &= \int_0^{(\kappa(\ell, d, z) - \varepsilon + \mu_d)/2} e^{-x} (2x - \kappa(\ell, d, z)) dx, \\ &= \left[ -e^{-x} (2x - \kappa(\ell, d, z)) \right]_0^{(\kappa(\ell, d, z) - \varepsilon + \mu_d)/2} + 2 \int_0^{(\kappa(\ell, d, z) - \varepsilon + \mu_d)/2} e^{-x} dx, \\ &= 2 - \kappa(\ell, d, z) - e^{\varepsilon/2} (2 - \varepsilon + \mu_d) e^{-(\kappa(\ell, d, z) + \mu_d)/2}. \end{aligned}$$

Ce qui nous permet de calculer la limite de  $B_1$ , pour tout  $\ell > 0$  et  $z \in \mathbb{R}$  avec  $\kappa(\ell, d, z) > 0$  pour tout  $d \in \mathbb{N}^*$  :

$$\lim_{d \rightarrow +\infty} B_1 = -2 \left( e^{\varepsilon/2} - 1 \right) + \varepsilon e^{\varepsilon/2}. \quad (22)$$

Regroupons (21) et (22) dans (20). On remarque que l'on fait apparaître des fonctions indicatrices qui assurent que l'intégration s'effectue dans l'ordre voulu (*i.e.* l'intervalle d'intégration est bien dans le sens que l'on a écrit):

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \left[ \phi_d(X_1, Z_1) \mathbb{1}_{|\phi_d(X_1, Z_1) - \mu_d| > \varepsilon} \right] \\ &= 1/\sqrt{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{0 < \kappa(\ell, d, z)} e^{-z^2/2} \left( \mathbb{1}_{\kappa(\ell, d, z) > \varepsilon + \mu_d} A_1 + \mathbb{1}_{\kappa(\ell, d, z) > \varepsilon - \mu_d} B_1 \right) dz. \end{aligned}$$

Quitte à prendre  $d$  suffisamment grand,  $\varepsilon \pm \mu_d > 0$ . On réduit alors l'écriture des deux évènements dans les indicatrices :

$$\begin{aligned} &\{z \in \mathbb{R} \mid \kappa(\ell, d, z) > 0\} \cap \{z \in \mathbb{R} \mid \kappa(\ell, d, z) > \varepsilon \pm \mu_d\} \\ &= \{z \in \mathbb{R} \mid \kappa(\ell, d, z) > \varepsilon \pm \mu_d\} = \left\{ z \in \mathbb{R} \mid z < 1/\sqrt{2} \left( \ell/d^{1/3} - (\varepsilon - \mu_d) d^{1/3}/\ell \right) \right\}. \end{aligned}$$

Or  $-\frac{d^{1/3}}{\ell} \varepsilon \xrightarrow{d \rightarrow +\infty} -\infty$ , ainsi pour tout  $z \in \mathbb{R}$ , on a

$$\mathbb{1}_{z < \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{\ell}{d^{1/3}} - d^{1/3} \frac{\varepsilon}{\ell} - \frac{d^{1/3}}{\ell} \mu_d \right)} \xrightarrow{d \rightarrow +\infty} 0.$$

De plus,  $A_1 e^{-z^2/2}$  est bornée en  $d$  et intégrable, on peut donc appliquer le théorème de convergence dominée qui nous assure

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{z < \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{\ell}{d^{\frac{1}{3}}} - d^{\frac{1}{3}} \frac{\varepsilon}{\ell} - \frac{d^{\frac{1}{3}}}{\ell} \mu_d \right)} A_1 \frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dz \xrightarrow{d \rightarrow +\infty} 0.$$

Et, par le même raisonnement,

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{z < \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{\ell}{d^{\frac{1}{3}}} - d^{\frac{1}{3}} \frac{\varepsilon}{\ell} + \frac{d^{\frac{1}{3}}}{\ell} \mu_d \right)} B_1 \frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dz \xrightarrow{d \rightarrow +\infty} 0.$$

En regroupant ces deux résultats,

$$\mathbb{E} \left[ \phi_d(X_1, Z_1) \mathbb{1}_{|\phi_d(X_1, Z_1) - \mu_d| > \varepsilon} \right] \stackrel{=}{=} o(1)$$

ce qui nous permet d'avoir, en revenant à (L2),

$$- 2 \mathbb{E} \left[ \phi_d(X_1, Z_1) \mathbb{1}_{|\phi_d(X_1, Z_1) - \mu_d| > \varepsilon} \right] \mathbb{E} [\phi_d(X_1, Z_1)] \stackrel{=}{=} o\left(\frac{1}{d}\right).$$

Traitons finalement (L1), on réutilise la plupart des calculs faits pour (L2) :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[ \phi_d(X_1, Z_1)^2 \mathbb{1}_{|\phi_d(X_1, Z_1) - \mu_d| > \varepsilon} \right] \\ &= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{0 < \kappa(\ell, d, z)} \frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\kappa(\ell, d, z)} e^{-x} (2x - \kappa(\ell, d, z))^2 \mathbb{1}_{|2x - \kappa(\ell, d, z) - \mu_d| > \varepsilon} dx dz \\ &= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{0 < \kappa(\ell, d, z)} \frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \left( \int_0^{\kappa(\ell, d, z)} e^{-x} (2x - \kappa(\ell, d, z))^2 \mathbb{1}_{2x - \kappa(\ell, d, z) - \mu_d > \varepsilon} dx \right. \\ & \quad \left. + \int_0^{\kappa(\ell, d, z)} e^{-x} (2x - \kappa(\ell, d, z))^2 \mathbb{1}_{2x - \kappa(\ell, d, z) - \mu_d < -\varepsilon} dx \right) dz. \end{aligned}$$

Notons  $A_2$  et  $B_2$  les intégrales en  $x$  à  $z$  fixé. On a

$$A_2 := \int_0^{\kappa(\ell, d, z)} e^{-x} (2x - \kappa(\ell, d, z))^2 \mathbb{1}_{2x - \kappa(\ell, d, z) - \mu_d > \varepsilon} dx$$

quitte à prendre  $d$  suffisamment grand

$$\begin{aligned} &= \int_{\frac{\varepsilon + \kappa(\ell, d, z) + \mu_d}{2}}^{\kappa(\ell, d, z)} e^{-x} (2x - \kappa(\ell, d, z))^2 dx \\ &= \left[ -e^{-x} (2x - \kappa(\ell, d, z))^2 \right]_{\frac{\varepsilon + \kappa(\ell, d, z) + \mu_d}{2}}^{\kappa(\ell, d, z)} + 2 \int_{\frac{\varepsilon + \kappa(\ell, d, z) + \mu_d}{2}}^{\kappa(\ell, d, z)} e^{-x} (2x - \kappa(\ell, d, z)) dx \\ &= -e^{-\kappa(\ell, d, z)} \kappa(\ell, d, z)^2 + e^{-\frac{\varepsilon + \kappa(\ell, d, z) + \mu_d}{2}} (\varepsilon + \mu_d)^2 + 2A_1 \\ &\stackrel{=}{=} e^{-\frac{\varepsilon}{2}} \varepsilon^2 + 4 \left( e^{-\frac{\varepsilon}{2}} - 1 \right) + e^{-\frac{\varepsilon}{2}} \varepsilon + o(1). \end{aligned}$$

$A_2$  est donc borné en  $d$ , et intégrable en  $z$  contre la densité gaussienne. Par le même calcul pour  $B_2$ ,

$$\begin{aligned}
B_2 &:= \int_0^{\min(\kappa(\ell, d, z), \frac{\kappa(\ell, d, z) - \varepsilon + \mu_d}{2})} e^{-x} (2x - \kappa(\ell, d, z))^2 dx \\
&= \int_0^{\frac{\kappa(\ell, d, z) - \varepsilon + \mu_d}{2}} e^{-x} (2x - \kappa(\ell, d, z))^2 dx \\
&= \left[ -e^{-x} (2x - \kappa(\ell, d, z))^2 \right]_0^{\frac{\kappa(\ell, d, z) - \varepsilon + \mu_d}{2}} + 2 \int_0^{\frac{\kappa(\ell, d, z) - \varepsilon + \mu_d}{2}} e^{-x} (2x - \kappa(\ell, d, z)) dx \\
&= -e^{-\frac{\kappa(\ell, d, z) - \varepsilon + \mu_d}{2}} (-\varepsilon + \mu_d)^2 + \kappa(\ell, d, z)^2 + 2B_1 \\
&= 4 \left( 1 - e^{\frac{\varepsilon}{2}} \right) + e^{\frac{\varepsilon}{2}} (2\varepsilon - \varepsilon^2) + o(1).
\end{aligned}$$

Ainsi  $B_2$  est aussi borné en  $d$  et intégrable en  $z$  contre la densité gaussienne. Revenons à l'expression de (L1) :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E} \left[ \phi_d(X_1, Z_1)^2 \mathbb{1}_{|\phi_d(X_1, Z_1) - \mu_d| > \varepsilon} \right] \\
&= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{0 < \kappa(\ell, d, z)} \frac{e^{z^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \left( \mathbb{1}_{\kappa(\ell, d, z) > \varepsilon + \mu_d} A_2 + \mathbb{1}_{\kappa(\ell, d, z) > \varepsilon - \mu_d} B_2 \right) dz
\end{aligned}$$

quitte à prendre  $d$  suffisamment grand,

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{z < \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{\ell^2}{d^{2/3}} - \frac{d^{1/3}}{\ell} \varepsilon - \frac{d^{1/3}}{\ell} \mu_d \right)} A_2 \frac{e^{z^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dz \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{z < \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{\ell^2}{d^{2/3}} - \frac{d^{1/3}}{\ell} \varepsilon + \frac{d^{1/3}}{\ell} \mu_d \right)} B_2 \frac{e^{z^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dz.
\end{aligned}$$

On va montrer que chacune des deux intégrales est bien un  $o\left(\frac{1}{d}\right)$  par le même calcul.

**Lemme 15.** Soit  $\beta \in \mathbb{R}$ , alors pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\int_{-\infty}^{\beta} e^{-z^2/2} dz \underset{\beta \rightarrow -\infty}{=} o\left(\frac{1}{\beta^n}\right)$$

*Démonstration.* Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Pour  $z \leq \beta < 0$ , on a  $-z^2 \leq -z\beta$  donc par croissance de l'exponentielle :

$$\begin{aligned}
|\beta^n| \int_{-\infty}^{\beta} e^{-z^2/2} dz &\leq |\beta^n| \int_{-\infty}^{\beta} e^{-\frac{1}{2}z\beta} dz \\
&= |\beta^n| \left[ -\frac{2}{\beta} e^{-\frac{1}{2}z\beta} \right]_{-\infty}^{\beta} \\
&= 2|\beta^{n-1}| e^{-\beta^2/2} \xrightarrow{\beta \rightarrow -\infty} 0.
\end{aligned}$$

□

On applique le lemme avec  $\beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{\ell^2}{d^{2/3}} - \frac{d^{1/3}}{\ell} \varepsilon \mp \frac{d^{1/3}}{\ell} \mu_d \right)$  et  $n = 3$ . On obtient bien, lorsque  $d \rightarrow +\infty$  :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{z < \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{\ell^2}{d^{2/3}} - \frac{d^{1/3}}{\ell} \varepsilon - \frac{d^{1/3}}{\ell} \mu_d \right)} A_2 \frac{e^{z^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dz &= o \left( \frac{1}{\left( \frac{\ell^2}{d^{2/3}} - \frac{d^{1/3}}{\ell} \varepsilon - \frac{d^{1/3}}{\ell} \mu_d \right)^3} \right) \\ &= o \left( \frac{1}{d} \right) \end{aligned}$$

et de même,

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{z < \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{\ell^2}{d^{2/3}} - \frac{d^{1/3}}{\ell} \varepsilon + \frac{d^{1/3}}{\ell} \mu_d \right)} B_2 \frac{e^{z^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dz = o \left( \frac{1}{d} \right).$$

Ainsi

$$\mathbb{E} \left[ \phi_d(X_1, Z_1)^2 \mathbb{1}_{|\phi_d(X_1, Z_1) - \mu_d| > \varepsilon} \right] \underset{d \rightarrow +\infty}{=} o \left( \frac{1}{d} \right).$$

Ceci donne la condition de Lindeberg en regroupant les termes (L1), (L2) et (L3).

#### 4.2.2 Les autres hypothèses

L'hypothèse **H1(ii)** est facile à vérifier grâce à l'étude précédente sur la variance de  $\phi_d$ . Par indépendance des  $(X_i, Z_i)_{1 \leq i \leq d}$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^d \mathbb{E} \left[ (\phi_d(X_i, Z_i) - \mu_d)^2 | \mathcal{F}_{d,i-1} \right] &= \sum_{i=1}^d \text{Var}(\phi_d(X_i, Z_i)) \\ &= d \text{Var}(\phi_d(X_1, Z_1)) \\ &= d \left( \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \frac{\ell^3}{d} + o \left( \frac{1}{d} \right) \right) \\ &= \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \ell^3 + o(1). \end{aligned}$$

On a donc vérifié la condition **H1(ii)** avec  $\eta^2 = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \ell^3$ .

La dernière hypothèse **H1(iii)** est bien vérifiée puisque  $\mathcal{F}_{d,i} = \mathcal{F}_{d+1,i} = \sigma((X_j, Z_j); 1 \leq j \leq i)$ .

### 4.2.3 Le résultat

Grâce au théorème 14, on a la convergence en loi

$$S_{d,d} = \sum_{i=1}^d (\phi_d(X_i, Z_i) - \mathbb{E}[\phi_d(X_i, Z_i)]) \xrightarrow[d \rightarrow +\infty]{\text{loi}} \tilde{Z},$$

où  $\tilde{Z}$  est une v.a. de fonction caractéristique  $\exp\left(-\frac{1}{2}t^2 \frac{4}{3\sqrt{\pi}}\ell^3\right)$ . On reconnaît ainsi que  $\tilde{Z}$  est de loi  $\mathcal{N}\left(0, \frac{4}{3\sqrt{\pi}}\ell^3\right)$ . Par le lemme de Slutsky, en ajoutant la suite  $\mathbb{E}[F_d(X, Z)] \rightarrow -\frac{2}{3\sqrt{\pi}}\ell^3$ , on a

$$F_d(X, Z) \xrightarrow[d \rightarrow +\infty]{\text{loi}} \tilde{F} \text{ de loi } \mathcal{N}\left(-\frac{2}{3\sqrt{\pi}}\ell^3, \frac{4}{3\sqrt{\pi}}\ell^3\right). \quad (23)$$

Maintenant que l'on a montré la convergence en loi de  $F_d$  vers une loi normale, on utilise une proposition bien connue pour avoir la convergence du taux d'acceptation.

### 4.3 Convergence du taux d'acceptation

Grâce à l'étude de  $F_d$ , on a un premier résultat intéressant sur le taux de convergence du MALA.

**Theorem 16.** *On a  $\lim_{d \rightarrow +\infty} \mathbb{P}[A_1^d] = a(\ell)$ , avec  $a(\ell) = 2\Phi\left(-\frac{\ell^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{3\sqrt{\pi}}}\right)$ .*

On rappelle un résultat bien utile, tiré de la proposition 2.4 de [3].

**Proposition 17.** *Si  $A$  est de loi  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ , alors*

$$\mathbb{E}[1 \wedge e^A] = \Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right) + \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) \Phi\left(-\sigma - \frac{\mu}{\sigma}\right)$$

où  $\Phi(\cdot)$  est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

*Démonstration.* On rappelle aussi que la fonction  $x \mapsto 1 \wedge e^x$  est 1-Lipschitz. Ainsi, par (23),

$$\mathbb{P}(A_1^d) = \mathbb{E}[1 \wedge e^{F_d(X,Z)}] \xrightarrow[d \rightarrow +\infty]{} \mathbb{E}[1 \wedge e^{\tilde{F}}],$$

et par la proposition 17,

$$\begin{aligned}
\lim_{d \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(\mathbf{A}_1^d) &= \Phi\left(-\frac{2}{3\sqrt{\pi}}\ell^3\sqrt{\frac{3\sqrt{\pi}}{4\ell^3}}\right) \\
&\quad + \exp\left(-\frac{2}{3\sqrt{\pi}}\ell^3 + \frac{2}{3\sqrt{\pi}}\ell^3\right) \Phi\left(-\sqrt{\frac{4\ell^3}{3\sqrt{\pi}}} + \frac{2}{3\sqrt{\pi}}\ell^3\sqrt{\frac{3\sqrt{\pi}}{4\ell^3}}\right) \\
&= 2\Phi\left(-\frac{\ell^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{3\sqrt{\pi}}}\right).
\end{aligned}$$

□

## 5 Convergence vers une diffusion de Langevin

Le deuxième résultat que l'on cherche ici pour avoir les mêmes résultats d'échelonnement que dans [1], [3] ou [4] est une convergence du processus (à compléter) vers une diffusion de Langevin.

On introduit donc  $(\mathbf{Y}_t^d)_{t \geq 0}$  l'interpolation linéaire de la chaîne de Markov  $(X_k^d)_{k \geq 0}$  après accélération du temps d'un facteur  $d^\alpha = d^{2/3}$ . Si  $t \geq 0$  et  $d \in \mathbb{N}^*$ , alors

$$\begin{aligned}
\mathbf{Y}_t^d &= \left(\lceil d^{2/3}t \rceil - d^{2/3}t\right) X_{\lfloor d^{2/3}t \rfloor}^d + \left(d^{2/3}t - \lfloor d^{2/3}t \rfloor\right) X_{\lceil d^{2/3}t \rceil}^d, \\
&= X_{\lfloor d^{2/3}t \rfloor}^d + \left(d^{2/3}t - \lfloor d^{2/3}t \rfloor\right) \left[\frac{\sqrt{2}\ell}{d^{1/3}} Z_{\lceil d^{2/3}t \rceil}^d - \frac{\ell^2}{d^{2/3}} \operatorname{sgn}\left(X_{\lfloor d^{2/3}t \rfloor}^d\right)\right] \mathbb{1}_{\mathbf{A}_{\lfloor d^{2/3}t \rfloor}^d}, \\
&= X_{\lceil d^{2/3}t \rceil}^d - \left(\lceil d^{2/3}t \rceil - d^{2/3}t\right) \left[\frac{\sqrt{2}\ell}{d^{1/3}} Z_{\lceil d^{2/3}t \rceil}^d - \frac{\ell^2}{d^{2/3}} \operatorname{sgn}\left(X_{\lceil d^{2/3}t \rceil}^d\right)\right] \mathbb{1}_{\mathbf{A}_{\lceil d^{2/3}t \rceil}^d}.
\end{aligned}$$

On notera  $\mathbf{Y}_{t,1}^d$  la première composante de  $\mathbf{Y}_t^d$ , c'est sur celle-ci que l'on va montrer un résultat de convergence. On note aussi  $(\nu_d)_{d \geq 1}$  la suite de lois de  $\{(\mathbf{Y}_{t,1}^d)_{t \geq 0} \mid d \in \mathbb{N}^*\}$ .

### 5.1 Tension de la suite de processus

Le premier résultat à montrer est la tension de la suite  $\{(\mathbf{Y}_{t,1}^d)_{t \geq 0} \mid d \in \mathbb{N}^*\}$ .

**Theorem 18.** *La suite  $(\nu_d)_{d \geq 1}$  est tendue dans  $\mathbf{M}^1(\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}))$ , l'espace des lois de probabilité sur  $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ .*

*Démonstration.* On va se servir du critère de Kolmogorov-Chentsov pour montrer la tension. Plus précisément, on veut montrer qu'il existe  $\gamma : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  une

fonction croissante telle que pour tout  $d \geq 1$  et pour tous  $0 \leq s \leq t$ ,

$$\mathbb{E} \left[ \left( \mathbf{Y}_{t,1}^d - \mathbf{Y}_{s,1}^d \right)^4 \right] \leq \gamma(t)(t-s)^2.$$

Commençons par traiter le cas où  $t$  et  $s$  sont proches. Si  $\lfloor d^{2/3}t \rfloor = \lfloor d^{2/3}s \rfloor$ , les deux points sont sur un même segment de droite et c'est facile à majorer,

$$\mathbf{Y}_{t,1}^d - \mathbf{Y}_{s,1}^d = \left( d^{2/3}t - d^{2/3}s \right) \mathbb{1}_{\mathcal{A}_{\lfloor d^{2/3}t \rfloor}^d} \left( \frac{\sqrt{2}\ell}{d^{1/3}} Z_{\lfloor d^{2/3}t \rfloor,1}^d - \frac{\ell^2}{d^{2/3}} \text{sgn} \left( X_{\lfloor d^{2/3}t \rfloor,1}^d \right) \right),$$

et donc,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \left( \mathbf{Y}_{t,1}^d - \mathbf{Y}_{s,1}^d \right)^4 \right] &= \left( d^{2/3}t - d^{2/3}s \right)^4 \frac{\ell^4}{d^{4/3}} \\ &\quad \mathbb{E} \left[ \mathbb{1}_{\mathcal{A}_{\lfloor d^{2/3}t \rfloor}^d} \left( \sqrt{2} Z_{\lfloor d^{2/3}t \rfloor,1}^d - \frac{\ell}{d^{1/3}} \text{sgn} \left( X_{\lfloor d^{2/3}t \rfloor,1}^d \right) \right)^4 \right]. \end{aligned}$$

On majore l'indicatrice par 1 et on applique l'inégalité de Hölder suivante  $(\sum_{i=1}^n a_i)^p \leq n^{p-1} \sum_{i=1}^n (a_i)^p$  (valable pour  $p \geq 1$  et les  $a_i \geq 0$ ), ce qui nous donne

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \left( \mathbf{Y}_{t,1}^d - \mathbf{Y}_{s,1}^d \right)^4 \right] &\leq 2^3 \frac{\left( d^{2/3}t - d^{2/3}s \right)^4}{d^{4/3}} \ell^4 \mathbb{E} \left[ 4 \left( Z_{\lfloor d^{2/3}t \rfloor,1}^d \right)^4 + \frac{\ell^4}{d^{4/3}} \right], \\ &\leq C \frac{\left( d^{2/3}t - d^{2/3}s \right)^4}{d^{4/3}}, \end{aligned} \tag{24}$$

car  $Z_{\lfloor d^{2/3}t \rfloor,1}^d$  suit la loi  $N(0, 1)$ , son moment d'ordre quatre est égal à trois, il est donc borné. De plus,  $\lfloor d^{2/3}s \rfloor = \lfloor d^{2/3}t \rfloor$  nous donne  $\left( d^{2/3}t - d^{2/3}s \right)^4 \leq \left( d^{2/3}t - d^{2/3}s \right)^2$ . Ainsi,

$$\mathbb{E} \left[ \left( \mathbf{Y}_{t,1}^d - \mathbf{Y}_{s,1}^d \right)^4 \right] \leq C \frac{d^{4/3}}{d^{4/3}} (t-s)^2 = C(t-s)^2.$$

Ce qui donne le résultat voulu dans ce premier cas.

Passons maintenant au cas où  $t$  et  $s$  sont séparés par un nombre entier. Si  $\lfloor d^{2/3}s \rfloor \leq \lfloor d^{2/3}t \rfloor$ , on va faire apparaître les termes en  $\lfloor d^{2/3}s \rfloor$  et en  $\lfloor d^{2/3}t \rfloor$  qui seront plus simples à comparer entre eux. Les termes restants seront faciles à majorer. On a

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_{t,1}^d - \mathbf{Y}_{s,1}^d &= X_{\lfloor d^{2/3}t \rfloor,1}^d - X_{\lfloor d^{2/3}s \rfloor,1}^d \\ &\quad + \left( d^{2/3}t - \lfloor d^{2/3}t \rfloor \right) \mathbb{1}_{\mathcal{A}_{\lfloor d^{2/3}t \rfloor}^d} \left( \frac{\sqrt{2}\ell}{d^{1/3}} Z_{\lfloor d^{2/3}t \rfloor,1}^d - \frac{\ell^2}{d^{2/3}} \text{sgn} \left( X_{\lfloor d^{2/3}t \rfloor,1}^d \right) \right) \\ &\quad + \left( \lfloor d^{2/3}s \rfloor - d^{2/3}s \right) \mathbb{1}_{\mathcal{A}_{\lfloor d^{2/3}s \rfloor}^d} \left( \frac{\sqrt{2}\ell}{d^{1/3}} Z_{\lfloor d^{2/3}s \rfloor,1}^d - \frac{\ell^2}{d^{2/3}} \text{sgn} \left( X_{\lfloor d^{2/3}s \rfloor,1}^d \right) \right). \end{aligned}$$

Alors en appliquant à nouveau l'inégalité de Hölder,

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left[ \left( \mathbf{Y}_{t,1}^d - \mathbf{Y}_{s,1}^d \right)^4 \right] \\
& \leq 2^3 \mathbb{E} \left[ \left( X_{\lfloor d^{2/3}t \rfloor,1}^d - X_{\lfloor d^{2/3}s \rfloor,1}^d \right)^4 \right] \\
& \quad + 2^3 \mathbb{E} \left[ \left( \left( d^{2/3}t - \lfloor d^{2/3}t \rfloor \right) \mathbb{1}_{\mathbf{A}_{\lfloor d^{2/3}t \rfloor}^d} \left( \frac{\sqrt{2}\ell}{d^{1/3}} Z_{\lfloor d^{2/3}t \rfloor,1}^d - \frac{\ell^2}{d^{2/3}} \text{sgn} \left( X_{\lfloor d^{2/3}t \rfloor,1}^d \right) \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \left( \lceil d^{2/3}s \rceil - d^{2/3}s \right) \mathbb{1}_{\mathbf{A}_{\lceil d^{2/3}s \rceil}^d} \left( \frac{\sqrt{2}\ell}{d^{1/3}} Z_{\lceil d^{2/3}s \rceil,1}^d - \frac{\ell^2}{d^{2/3}} \text{sgn} \left( X_{\lceil d^{2/3}s \rceil,1}^d \right) \right) \right)^4 \right].
\end{aligned}$$

En utilisant encore une fois l'inégalité de Hölder, on majore le terme en deuxième et troisième ligne par

$$\begin{aligned}
& 2^6 \mathbb{E} \left[ \frac{\left( d^{2/3}t - \lfloor d^{2/3}t \rfloor \right)^4}{d^{4/3}} \mathbb{1}_{\mathbf{A}_{\lfloor d^{2/3}t \rfloor}^d} \ell^4 \left( \sqrt{2} Z_{\lfloor d^{2/3}t \rfloor,1}^d - \frac{\ell}{d^{1/3}} \text{sgn} \left( X_{\lfloor d^{2/3}t \rfloor,1}^d \right) \right)^4 \right. \\
& \quad \left. + \frac{\left( \lceil d^{2/3}s \rceil - d^{2/3}s \right)^4}{d^{4/3}} \mathbb{1}_{\mathbf{A}_{\lceil d^{2/3}s \rceil}^d} \ell^4 \left( \sqrt{2} Z_{\lceil d^{2/3}s \rceil,1}^d - \frac{\ell}{d^{1/3}} \text{sgn} \left( X_{\lceil d^{2/3}s \rceil,1}^d \right) \right)^4 \right] \\
& \leq 2^9 \left( \frac{\left( d^{2/3}t - \lfloor d^{2/3}t \rfloor \right)^2}{d^{4/3}} + \frac{\left( \lceil d^{2/3}s \rceil - d^{2/3}s \right)^2}{d^{4/3}} \right) \left( 12 + \frac{\ell^4}{d^{4/3}} \right).
\end{aligned}$$

On a fait le même raisonnement que dans les deux dernières lignes avant (24) pour factoriser le moment d'ordre quatre de la gaussienne. On a aussi majoré une puissance quatre par un carré car les termes à l'intérieur sont inférieurs à un. Ensuite, il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[ \left( \mathbf{Y}_{t,1}^d - \mathbf{Y}_{s,1}^d \right)^4 \right] & \leq C \left( \mathbb{E} \left[ \left( X_{\lfloor d^{2/3}t \rfloor,1}^d - X_{\lfloor d^{2/3}s \rfloor,1}^d \right)^4 \right] \right. \\
& \quad \left. + \frac{\left( d^{2/3}t - \lfloor d^{2/3}t \rfloor \right)^2 + \left( \lceil d^{2/3}s \rceil - d^{2/3}s \right)^2}{d^{4/3}} \right).
\end{aligned}$$

Ensuite  $d^{2/3}s \leq \lceil d^{2/3}s \rceil \leq \lfloor d^{2/3}t \rfloor \leq d^{2/3}t$ , ainsi  $(d^{2/3}t - \lfloor d^{2/3}t \rfloor)^2 \leq (d^{2/3}t - d^{2/3}s)^2$  et aussi  $(\lceil d^{2/3}s \rceil - d^{2/3}s)^2 \leq (d^{2/3}t - d^{2/3}s)^2$ . Il existe donc une constante  $C' > 0$  telle que

$$\mathbb{E} \left[ \left( \mathbf{Y}_{t,1}^d - \mathbf{Y}_{s,1}^d \right)^4 \right] \leq C' \left( \mathbb{E} \left[ \left( X_{\lfloor d^{2/3}t \rfloor,1}^d - X_{\lfloor d^{2/3}s \rfloor,1}^d \right)^4 \right] + (t - s)^2 \right).$$

En admettant le lemme 19 ci-dessous pour l'instant, finissons la démonstration. On a ainsi l'existence d'une constante  $C > 0$  telle que,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \left( \mathbf{Y}_{t,1}^d - \mathbf{Y}_{s,1}^d \right)^4 \right] &\leq C \left( (t-s)^2 + \sum_{p=2}^4 \frac{\left( \lfloor d^{2/3}t \rfloor - \lceil d^{2/3}s \rceil \right)^p}{d^{2p/3}} \right), \\ &\leq C(t-s)^2 + C \sum_{p=2}^4 \frac{d^{2p/3} (t-s)^p}{d^{2p/3}}, \\ &\leq C(2+t+t^2)(t-s)^2. \end{aligned}$$

On a bien trouvé, pour  $\gamma(t) = 2C + Ct + Ct^2$  le critère de Kolmogorov, donnant ainsi la tension de la suite  $(\nu_d)_{d \geq 1}$ .  $\square$

Voici le lemme qui nous a permis de finir la preuve.

**Lemme 19.** *Il existe  $C > 0$  tel que pour tout  $0 \leq k_1 < k_2$ ,*

$$\mathbb{E} \left[ \left( X_{k_2,1}^d - X_{k_1,1}^d \right)^4 \right] \leq C \sum_{p=2}^4 \frac{(k_2 - k_1)^p}{d^{2p/3}}.$$

*Démonstration.* On commence par faire apparaître tous les termes d'acceptation ou rejet entre  $k_1$  et  $k_2$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \left( X_{k_2,1}^d - X_{k_1,1}^d \right)^4 \right] &= \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{k=k_1+1}^{k_2} \left( \frac{\sqrt{2}\ell}{d^{1/3}} Z_{k,1}^d - \frac{\ell^2}{d^{2/3}} \operatorname{sgn} \left( X_{k-1,1}^d \right) \right) \mathbb{1}_{A_k^d} \right)^4 \right] \\ &= \frac{4\ell^4}{d^{4/3}} \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{k=k_1+1}^{k_2} \left\{ Z_{k,1}^d - \frac{\ell}{\sqrt{2}d^{1/3}} \operatorname{sgn} \left( X_{k-1,1}^d \right) \right\} - \sum_{k=k_1+1}^{k_2} \left\{ Z_{k,1}^d - \frac{\ell}{\sqrt{2}d^{1/3}} \operatorname{sgn} \left( X_{k-1,1}^d \right) \right\} \mathbb{1}_{(A_k^d)^c} \right)^4 \right]. \end{aligned}$$

En appliquant Hölder, on va devoir majorer deux termes. Pour le premier on réutilise Hölder pour faire intervenir une gaussienne et une somme de termes  $\pm 1$ ,

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \left[ \left( \sum_{k=k_1+1}^{k_2} Z_{k,1}^d - \frac{\ell}{\sqrt{2}d^{1/3}} \operatorname{sgn} \{ X_{k-1,1}^d \} \right)^4 \right] \\ &\leq 2^3 \left\{ \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{k=k_1+1}^{k_2} Z_{k,1}^d \right)^4 \right] + \frac{\ell^4}{4d^{4/3}} \left[ \sum_{k=k_1+1}^{k_2} \operatorname{sgn} \left( X_{k-1,1}^d \right) \right]^4 \right\} \\ &\leq 2^3 \left\{ 3(k_2 - k_1)^2 + \frac{\ell^4}{4d^{4/3}} (k_2 - k_1)^4 \right\}. \end{aligned}$$

Comme ce terme est multiplié par  $C/d^{4/3}$ , on a la forme voulue pour le terme qui ne prend pas en compte le rejet.

Traitons maintenant le terme de rejet en développant la puissance :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{k=k_1+1}^{k_2} \left\{ Z_{k,1}^d - \frac{\ell}{\sqrt{2}d^{1/3}} \operatorname{sgn} \left( X_{k-1,1}^d \right) \right\} \mathbb{1}_{(\mathbf{A}_k^d)^c} \right)^4 \right] \\ = \sum \mathbb{E} \left[ \prod_{i=1}^4 \left\{ Z_{m_i,1}^d - \frac{\ell}{\sqrt{2}d^{1/3}} \operatorname{sgn} \left( X_{m_i-1,1}^d \right) \right\} \mathbb{1}_{(\mathbf{A}_{m_i}^d)^c} \right], \quad (25) \end{aligned}$$

où la somme porte sur les quadruplets  $(m_i)_{1 \leq i \leq 4}$  avec  $m_i \in \{k_1 + 1, \dots, k_2\}$ . On va les séparer selon leur cardinal :

$$\mathcal{I}_j = \left\{ (m_1, \dots, m_4) \in \{k_1 + 1, \dots, k_2\}^4 : \# \{m_1, \dots, m_4\} = j \right\}.$$

Ensuite, pour faire apparaître l'indépendance des  $(U_{m_j}, Z_{m_j}^d)$ , on introduit, à  $(m_1, \dots, m_4) \in \{k_1 + 1, \dots, k_2\}^4$  fixés,  $(\tilde{X}_k^d)_{k \geq 0}$  par :

$$\tilde{X}_0^d = X_0^d \text{ et } \tilde{X}_{k+1}^d = \tilde{X}_k^d + \mathbb{1}_{k \in \{m_1-1, \dots, m_4-1\}^c} \mathbb{1}_{\tilde{\mathbf{A}}_k^d} \left( \frac{\ell}{d^{1/3}} Z_{k+1}^d - \frac{\ell^2}{d^{2/3}} \operatorname{sgn} \{ \tilde{X}_k^d \} \right),$$

et

$$\tilde{\mathbf{A}}_k^d = \left\{ U_k \leq \exp \left[ F_d \left( \tilde{X}_k^d, Z_{k+1}^d \right) \right] \right\}.$$

On note  $\mathcal{F}$  la tribu engendrée par le processus  $\tilde{X}^d$ . On remarque que sur l'évènement  $\bigcap_{j=1}^4 (\mathbf{A}_{m_j}^d)^c$ ,  $X^d$  et  $\tilde{X}^d$  coïncident.

(a) Si  $(m_1, \dots, m_4) \in \mathcal{I}_4$  alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \prod_{j=1}^4 \left( Z_{m_j,1}^d - \frac{\ell}{\sqrt{2}d^{1/3}} \operatorname{sgn} \left( X_{m_j-1,1}^d \right) \right) \mathbb{1}_{(\mathbf{A}_{m_j}^d)^c} \middle| \mathcal{F} \right] \\ = \mathbb{E} \left[ \prod_{j=1}^4 \left( Z_{m_j,1}^d - \frac{\ell}{\sqrt{2}d^{1/3}} \operatorname{sgn} \left( \tilde{X}_{m_j-1,1}^d \right) \right) \mathbb{1}_{(\tilde{\mathbf{A}}_{m_j}^d)^c} \middle| \mathcal{F} \right]. \end{aligned}$$

Or,  $\left\{ \left( Z_{m_j,1}^d - \frac{\ell}{\sqrt{2}d^{1/3}} \operatorname{sgn} \left( \tilde{X}_{m_j-1,1}^d \right) \right) \mathbb{1}_{(\tilde{\mathbf{A}}_{m_j}^d)^c} \right\}_{j=1, \dots, 4}$  sont indépendants condition-

nellement à  $\mathcal{F}$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[ \prod_{j=1}^4 \left( Z_{m_j,1}^d - \frac{\ell}{\sqrt{2d^{1/3}}} \operatorname{sgn}(\tilde{X}_{m_j-1,1}) \right) \mathbb{1}_{(\tilde{A}_{m_j}^d)^c} \middle| \mathcal{F} \right] \\ &= \prod_{j=1}^4 \mathbb{E} \left[ \left( Z_{m_j,1}^d - \frac{\ell}{\sqrt{2d^{1/3}}} \operatorname{sgn}(\tilde{X}_{m_j-1,1}) \right) \mathbb{1}_{(\tilde{A}_{m_j}^d)^c} \middle| \mathcal{F} \right] \\ &= \prod_{j=1}^4 \mathbb{E} \left[ \left( Z_{m_j,1}^d - \frac{\ell}{\sqrt{2d^{1/3}}} \operatorname{sgn}(\tilde{X}_{m_j-1,1}) \right) (1 - \exp(F_d(\tilde{X}_{m_j-1}^d, Z_{m_j}^d)))_+ \middle| \mathcal{F} \right], \end{aligned}$$

en intégrant par rapport aux variables uniformes  $U_{m_j}$ . Séparons l'espérance du produit par linéarité et majorons les deux termes. Pour le second :

$$\begin{aligned} & \left| \mathbb{E} \left[ \frac{\ell}{\sqrt{2d^{1/3}}} \operatorname{sgn}(\tilde{X}_{m_j-1,1}) (1 - \exp(F_d(\tilde{X}_{m_j-1}^d, Z_{m_j}^d)))_+ \middle| \mathcal{F} \right] \right| \\ & \leq \frac{\ell}{\sqrt{2d^{1/3}}} \mathbb{E} \left[ \left| (1 - \exp(F_d(\tilde{X}_{m_j-1}^d, Z_{m_j}^d)))_+ \right| \middle| \mathcal{F} \right] \leq \frac{\ell}{\sqrt{2d^{1/3}}}. \quad (26) \end{aligned}$$

De même, pour le premier,

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[ Z_{m_j,1}^d \left( 1 - \exp \left( \sum_{i=1}^d \phi_d(\tilde{X}_{m_j-1,i}^d, Z_{m_j,i}^d) \right) \right)_+ \middle| \mathcal{F} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \mathcal{G} \left( \tilde{X}_{m_j-1,1}^d, \sum_{i=2}^d \phi_d(\tilde{X}_{m_j-1,i}^d, Z_{m_j,i}^d) \right) \middle| \mathcal{F} \right], \end{aligned}$$

Où  $\mathcal{G}(a, b) = \mathbb{E} \left[ Z (1 - \exp(\phi_d(a, Z) + b))_+ \right]$  avec  $Z$  de loi  $N(0, 1)$ . Pour l'étude de  $\mathcal{G}$ , on utilise le fait que  $x \mapsto (1 - \exp(x))_+$  est 1-Lipschitz,

$$\begin{aligned} \left| \mathbb{E} \left[ Z (1 - \exp(\phi_d(a, Z) + b))_+ \right] - \mathbb{E} \left[ Z (1 - \exp(b))_+ \right] \right| &\leq \mathbb{E} [|Z| |\phi_d(a, Z)|], \\ &\leq \mathbb{E} [Z^2]^{1/2} \mathbb{E} [\phi_d(a, Z)^2]^{1/2}, \\ &\leq \mathbb{E} [\phi_d(a, Z)^2]^{1/2}, \\ &\leq \frac{C}{d^{1/3}}, \end{aligned}$$

d'après le lemme 20. Or on remarque que  $\mathbb{E} \left[ Z (1 - \exp(b))_+ \right] = \mathbb{E} [Z] (1 - \exp(b))_+ = 0$ , ainsi

$$\left| \mathbb{E} \left[ \mathcal{G} \left( \tilde{X}_{m_j-1,1}^d, \sum_{i=2}^d \phi_d(\tilde{X}_{m_j-1,i}^d, Z_{m_j,i}^d) \right) \middle| \mathcal{F} \right] \right| \leq \frac{C}{d^{1/3}}. \quad (27)$$

En reprenant les termes en (26) et (27),

$$\mathbb{E} \left[ \left( Z_{m_j,1}^d - \frac{\ell}{\sqrt{2}d^{1/3}} \operatorname{sgn}(\tilde{X}_{m_j-1,1}) \right) (1 - \exp(F_d(\tilde{X}_{m_j-1}^d, Z_{m_j}^d)))_+ \middle| \mathcal{F} \right] \leq \frac{C}{d^{1/3}}. \quad (28)$$

Ainsi, la somme en (25) donne dans le cas (a) :

$$\begin{aligned} & \sum_{(m_1, \dots, m_4) \in \mathcal{I}_4} \left| \mathbb{E} \left[ \prod_{i=1}^4 \left\{ Z_{m_i,1}^d - \frac{\ell}{\sqrt{2}d^{1/3}} \operatorname{sgn}(X_{m_i-1,1}^d) \right\} \mathbb{1}_{(A_{m_i}^d)^c} \right] \right| \\ & \leq \sum_{(m_1, \dots, m_4) \in \mathcal{I}_4} \mathbb{E} \left[ \prod_{j=1}^4 \frac{C}{d^{1/3}} \right] \\ & \leq \binom{k_2 - k_1}{4} \frac{C}{d^{4/3}} \\ & \leq C \frac{(k_2 - k_1)^4}{d^{4/3}}. \end{aligned} \quad (29)$$

(b) Si  $(m_1, \dots, m_4) \in \mathcal{I}_3$ , en reprenant les mêmes étapes que dans le cas (a), on trouve :

$$\begin{aligned} & \left| \mathbb{E} \left[ \prod_{j=1}^3 \left( Z_{m_j,1}^d - \frac{\ell}{\sqrt{2}d^{1/3}} \operatorname{sgn}(X_{m_j-1,1}) \right)^{1+\delta_{1,j}} \mathbb{1}_{(A_{m_j}^d)^c} \middle| \mathcal{F} \right] \right| \\ & = \prod_{j=1}^3 \left| \mathbb{E} \left[ \left( Z_{m_j,1}^d - \frac{\ell}{\sqrt{2}d^{1/3}} \operatorname{sgn}(\tilde{X}_{m_j-1,1}) \right)^{1+\delta_{1,j}} (1 - \exp(F_d(\tilde{X}_{m_j-1}^d, Z_{m_j}^d)))_+ \middle| \mathcal{F} \right] \right|. \end{aligned}$$

Pour le terme en  $j = 1$ , le carré nous suffit et on majore la probabilité de rejet par 1, pour les autres termes on utilise (28),

$$\begin{aligned} & \leq \mathbb{E} \left[ \left( Z_{m_1,1}^d - \frac{\ell}{\sqrt{2}d^{1/3}} \operatorname{sgn}(\tilde{X}_{m_1-1,1}) \right)^2 \middle| \mathcal{F} \right] \prod_{j=2}^3 \frac{C}{d^{1/3}} \\ & \leq \left( 1 + \frac{\ell^2}{2d^{2/3}} \right) \frac{C^2}{d^{2/3}} \\ & \leq C' \frac{1}{d^{2/3}}. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \sum_{(m_1, \dots, m_4) \in \mathcal{I}_3} \left| \mathbb{E} \left[ \prod_{i=1}^4 \left\{ Z_{m_i,1}^d - \frac{\ell}{\sqrt{2}d^{1/3}} \operatorname{sgn}(X_{m_i-1,1}^d) \right\} \mathbb{1}_{(A_{m_i}^d)^c} \right] \right| & \leq C \binom{k_2 - k_1}{3} \frac{1}{d^{2/3}} \\ & \leq C \frac{(k_2 - k_1)^3}{d^{2/3}}. \end{aligned} \quad (30)$$

(c) Si  $(m_1, \dots, m_4) \in \mathcal{I}_2$ , on a deux cas à traiter :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \mathbb{E} \left[ \prod_{j=1}^2 \left( Z_{m_j,1}^d - \frac{\ell}{\sqrt{2d^{1/3}}} \operatorname{sgn} (X_{m_j-1,1}) \right)^2 \mathbb{1}_{(\mathbf{A}_{m_j}^d)^c} \middle| \mathcal{F} \right] \right] \\ \leq \mathbb{E} \left[ \prod_{j=1}^2 \mathbb{E} \left[ \left( Z_{m_j,1}^d - \frac{\ell}{\sqrt{2d^{1/3}}} \operatorname{sgn} (\tilde{X}_{m_j-1,1}) \right)^2 \middle| \mathcal{F} \right] \right]. \end{aligned}$$

Comme, conditionnellement à  $\mathcal{F}$ ,  $Z_{m_j,1}^d - \ell \operatorname{sgn}(\tilde{X}_{m_j-1,1})/(\sqrt{2d^{1/3}})$  est de loi  $N(\ell \operatorname{sgn}(\tilde{X}_{m_j-1,1})/(\sqrt{2d^{1/3}}), 1)$ , on a :

$$\mathbb{E} \left[ \prod_{j=1}^2 \mathbb{E} \left[ \left( Z_{m_j,1}^d - \frac{\ell}{\sqrt{2d^{1/3}}} \operatorname{sgn} (\tilde{X}_{m_j-1,1}) \right)^2 \middle| \mathcal{F} \right] \right] \leq \left( 1 + \frac{\ell^2}{2d^{2/3}} \right)^2 \leq C_1.$$

L'autre cas se traite aisément aussi,

$$\begin{aligned} \left| \mathbb{E} \left[ \mathbb{E} \left[ \prod_{j=1}^2 \left( Z_{m_j,1}^d - \frac{\ell}{\sqrt{2d^{1/3}}} \operatorname{sgn} (X_{m_j-1,1}) \right)^{1+2\delta_{1,j}} \mathbb{1}_{(\mathbf{A}_{m_j}^d)^c} \middle| \mathcal{F} \right] \right] \right| \\ \leq \mathbb{E} \left[ \mathbb{E} \left[ \prod_{j=1}^2 \left| Z_{m_j,1}^d - \frac{\ell}{\sqrt{2d^{1/3}}} \operatorname{sgn} (\tilde{X}_{m_j-1,1}) \right|^{1+2\delta_{1,j}} \middle| \mathcal{F} \right] \right] \leq C_2. \end{aligned}$$

En effet, on a fait apparaître encore une fois une loi normale d'espérance et de variance bornés en  $d$ , donc ses moments d'ordre 1 et 3 sont bornés aussi. Ainsi en reprenant la somme,

$$\begin{aligned} \sum_{(m_1, \dots, m_4) \in \mathcal{I}_2} \left| \mathbb{E} \left[ \prod_{i=1}^4 \left\{ Z_{m_i,1}^d - \frac{\ell}{\sqrt{2d^{1/3}}} \operatorname{sgn} (X_{m_i-1,1}) \right\} \mathbb{1}_{(\mathbf{A}_{m_i}^d)^c} \right] \right| \\ \leq (3C_1 + 4C_4) (k_2 - k_1)(k_2 - k_1 - 1) \\ \leq C(k_2 - k_1)^2. \end{aligned} \quad (31)$$

(d) Si  $(m_1, \dots, m_4) \in \mathcal{I}_1$ , on majore l'indicatrice par 1 et on applique l'inégalité de Hölder,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \left\{ Z_{m_1,1}^d - \frac{\ell}{\sqrt{2d^{1/3}}} \operatorname{sgn} (X_{m_1-1,1}) \right\}^4 \mathbb{1}_{(\mathbf{A}_{m_1}^d)^c} \right] \leq 2^3 \left( \mathbb{E} \left[ (Z_{m_1,1}^d)^4 \right] + \mathbb{E} \left[ \frac{\ell^4}{4d^{4/3}} \right] \right) \\ \leq C. \end{aligned}$$

D'où

$$\sum_{(m_1, \dots, m_4) \in \mathcal{I}_2} \left| \mathbb{E} \left[ \prod_{i=1}^4 \left\{ Z_{m_i,1}^d - \frac{\ell}{\sqrt{2d^{1/3}}} \operatorname{sgn} (X_{m_i-1,1}) \right\} \mathbb{1}_{(\mathbf{A}_{m_i}^d)^c} \right] \right| \leq C(k_2 - k_1). \quad (32)$$

On obtient le résultat voulu en regroupant les termes (29), (30), (31) et (32) dans (25).  $\square$

**Lemme 20.** Soit  $Z$  de loi  $N(0, 1)$ . Il existe une constante  $C > 0$  telle que pour tout  $a \in \mathbb{R}$  et  $d \in \mathbb{N}^*$  :

$$\mathbb{E} \left[ \phi_d(a, Z)^2 \right] \leq \frac{C}{d^{2/3}}.$$

*Démonstration.* Tout d'abord, on va rappeler l'écriture de l'événement  $A_d$  pour  $X = a$  fixé, ce qui nous donne

$$\mathbb{1}_{A_d(a, z)} = \mathbb{1}_{a > 0} \mathbb{1}_{z \leq \frac{\ell}{\sqrt{2}d^{1/3}} - \frac{d^{1/3}a}{\sqrt{2}\ell}} + \mathbb{1}_{a \leq 0} \mathbb{1}_{z > -\frac{\ell}{\sqrt{2}d^{1/3}} - \frac{d^{1/3}a}{\sqrt{2}\ell}}.$$

Comme  $\phi_d(a, Z)$  dépend du signe de  $a$ , on va traiter le cas  $a > 0$  et  $a = 0$ . Le cas  $a < 0$  se traite de façon très similaire au premier.

Si  $a > 0$ , notons  $\alpha(a, d) = \frac{\ell}{\sqrt{2}d^{1/3}} - \frac{d^{1/3}a}{\sqrt{2}\ell}$ . On a

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \phi_d(a, Z)^2 \right] &= \int_{-\infty}^{\alpha(a, d)} \frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \left( 2a - \frac{\ell^2}{d^{2/3}} + \frac{\sqrt{2}\ell}{d^{1/3}} z \right)^2 dz \\ &= \frac{2\ell^2}{d^{2/3}} \int_{-\infty}^{\alpha(a, d)} \frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \left( z + \frac{\ell}{\sqrt{2}d^{1/3}} - 2\alpha(a, d) \right)^2 dz \\ &\leq \frac{4\ell^2}{d^{2/3}} \int_{-\infty}^{\alpha(a, d)} \frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \left[ \left( z + \frac{\ell}{\sqrt{2}d^{1/3}} \right)^2 + 4\alpha(a, d)^2 \right] dz. \end{aligned}$$

Ayant séparé l'intégrale en deux, on peut majorer le premier terme indépendamment de  $a > 0$  et de  $d \in \mathbb{N}^*$  car :

$$\mathbb{1}_{z \leq \alpha(a, d)} \frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \left( z + \frac{\ell}{\sqrt{2}d^{1/3}} \right)^2 \leq 2 \frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}} (z^2 + \ell^2),$$

ainsi,

$$\int_{-\infty}^{\alpha(a, d)} \frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \left( z + \frac{\ell}{\sqrt{2}d^{1/3}} \right)^2 dz \leq \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}} (z^2 + \ell^2) dz = 1 + \ell^2.$$

Pour le second terme on va utiliser une estimation de la queue gaussienne. Lorsque  $z < \alpha(a, d) < 0$ , on a  $1 < \frac{z}{\alpha(a, d)}$  et donc

$$\alpha(a, d)^2 \int_{-\infty}^{\alpha(a, d)} \frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dz \leq \alpha(a, d) \int_{-\infty}^{\alpha(a, d)} z \frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dz = \alpha(a, d) \frac{e^{-\alpha(a, d)^2/2}}{\sqrt{2\pi}}.$$

Or  $y \mapsto ye^{-y^2/2}$  est bornée sur  $\mathbb{R}$ , donc  $(a, d) \mapsto \alpha(a, d) \frac{e^{-\alpha(a, d)^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$  est bornée sur  $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{N}^*$ . Si  $\alpha(a, d) \geq 0$ , alors on a quand même  $\alpha(a, d) < \ell$  et donc on a la majoration

$$\alpha(a, d)^2 \int_{-\infty}^{\alpha(a, d)} \frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dz \leq \ell^2 \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dz = \ell^2.$$

Finalement,

$$\mathbb{E} \left[ \phi_d(a, Z)^2 \right] \leq \frac{4\ell^2}{d^{2/3}} (C + 1 + \ell^2) \leq \frac{C'}{d^{2/3}}.$$

D'où le résultat dans le cas  $a > 0$ .

Si  $a = 0$ , alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \phi_d(a, Z)^2 \right] &= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{z > -\frac{\ell}{d^{1/3}\sqrt{2}}} \frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{\ell^2}{d^{2/3}} + \frac{\sqrt{2}\ell}{d^{1/3}} z \right)^2 dz \\ &= \frac{1}{d^{2/3}} \int_{-\frac{\ell}{d^{1/3}\sqrt{2}}}^{+\infty} \frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{\ell^2}{d^{1/3}} + \sqrt{2}\ell z \right)^2 dz \\ &\leq \frac{2}{d^{2/3}} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{\ell^4}{d^{2/3}} + 2\ell^2 z^2 \right) dz \\ &\leq \frac{2}{d^{2/3}} (\ell^4 + 2\ell^2). \end{aligned}$$

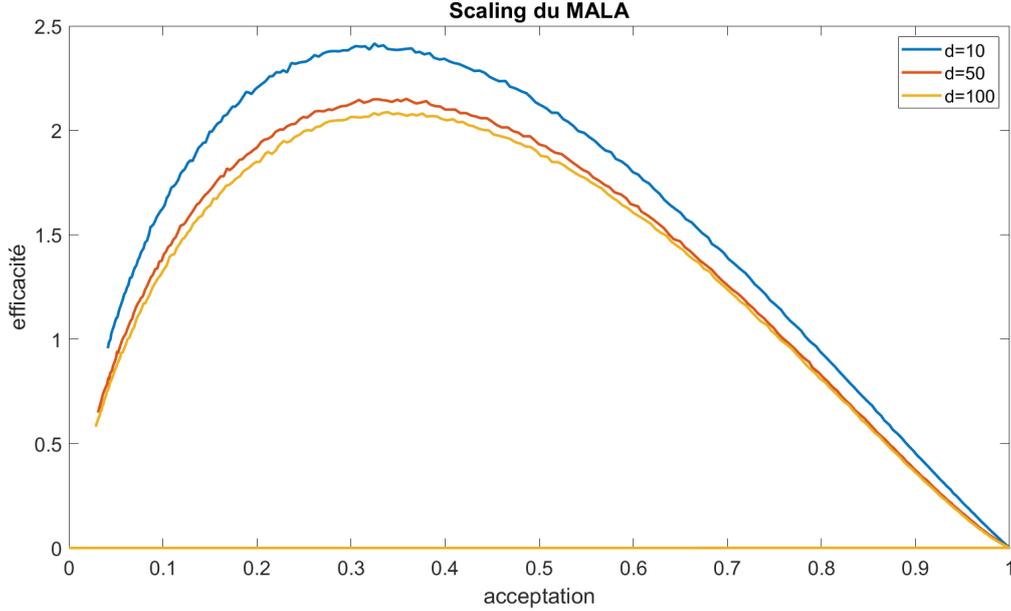
D'où le résultat dans le cas  $a = 0$ . □

## 5.2 Caractérisation de la limite : EDS, diffusion et problème de martingale associé

**Objectif** Maintenant que l'on a la tension de la suite  $\{(\mathbf{Y}_{t,1}^d)_{t \geq 0} \mid d \in \mathbb{N}^*\}$ , on sait par le théorème de Prohorov que toute suite extraite de celle-ci admet des valeurs d'adhérence pour la convergence faible. Notre but est de montrer que l'ensemble de ces valeurs d'adhérence est un singleton. Ceci nous permet d'avoir donc la convergence faible vers cette unique valeur d'adhérence. Pour caractériser ces valeurs d'adhérence, on va montrer qu'elles sont solution faible de cette équation différentielle stochastique :

$$d\mathbf{Y}_t = \sqrt{2h(\ell)} dB_t - h(\ell) \operatorname{sgn}(\mathbf{Y}_t) dt, \quad (33)$$

où la solution est la loi de  $(\mathbf{Y}_t)_{t > 0}$  et  $(\mathbf{Y}_t)_{t > 0}$  est un processus continu et adapté à la tribu canonique de  $(B_t)_{t > 0}$ , qui est un mouvement brownien. On précisera plus tard  $h(\ell)$ .



**Rappel théorique** L'équation (33) correspond à l'équation d'une diffusion, plus précisément à la diffusion ayant pour drift infinitésimal  $b(x) = -h(\ell) \operatorname{sgn}(x)$  et pour variance infinitésimale  $a(x) = 2h(\ell)$ . Or  $X$  est une diffusion  $(a, b)$ , si et seulement s'il est solution au problème de martingale suivant :

Pour toute  $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ,

$$\left( f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t Lf(u) du \right)_{t>0}$$

est une martingale, où  $Lf : x \mapsto a(x)f''(x)/2 + b(x)f'(x)$ . Pour plus de détails sur les diffusions et les liens avec le problème de martingale et avec les équations différentielles stochastiques, on se réfère à [6, chap. 5].

Dans la suite, on se place dans l'espace probabilisable canonique de  $\mathbf{W} = \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  où on note  $(W_t)_{t \geq 0}$  le processus canonique et  $(\mathcal{B}_t)_{t \geq 0}$  la filtration associée. Si  $\mu$  est une loi de probabilité sur  $\mathbf{W}$ , on note  $\mathbb{E}\mu$  l'espérance associée à  $\mu$ . On dit dans ce cas que  $\mu$  est solution du problème de martingale associé à (33) lorsque, sous  $\mu$ ,  $(W_t)_{t \geq 0}$  est une diffusion  $(2h(\ell), -h(\ell) \operatorname{sgn}(\cdot))$ .

**Theorem 21.** *La suite de processus  $\{(\mathbf{Y}_{t,1}^d)_{t \geq 0} \mid d \in \mathbb{N}^*\}$  converge faiblement dans  $\mathbf{W}$  vers  $(\mathbf{Y}_t)_{t \geq 0}$ , solution de l'équation (33), avec  $h(\ell) = \ell^2 \Phi(-\ell^{3/2}/(3\pi^{1/2})^{1/2})$ .*

*De plus, si  $a(\ell) = 0.360$ , alors  $h(\ell)$  atteint son maximum, où  $a$  est défini dans le théorème 16 (il s'agit d'un arrondi).*

Commençons par réduire le problème de martingale avec cette proposition inspirée de [1, Prop. 3].

**Proposition 22.** *Supposons que pour toute  $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ,  $m \in \mathbb{N}^*$ ,  $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  continue bornée et  $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_m \leq s \leq t$  :*

$$\lim_{d \rightarrow +\infty} \mathbb{E}^{\nu_d} \left[ \left( \phi(W_t) - \phi(W_s) - \int_s^t L\phi(W_u) du \right) g(W_{t_1}, \dots, W_{t_m}) \right] = 0.$$

*Alors toute valeur d'adhérence de  $(\nu_d)_{d \geq 1}$  sur  $\mathbf{W}$  est solution du problème de martingale associé à (33).*

On va se servir du lemme suivant.

**Lemme 23.** *Soit  $\nu$  une valeur d'adhérence de la suite de lois  $(\nu_d)_{d \geq 1}$  de  $\{(\mathbf{Y}_{t,1}^d)_{t \geq 0} \mid d \in \mathbb{N}^*\}$ . Alors pour tout  $t \geq 0$ , la loi image de  $\nu$  par  $W_t$  est  $\pi = \exp(-|x|)dx/2$ .*

*Démonstration du lemme 23.* On a

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[ \left| \mathbf{Y}_{t,1}^d - X_{\lfloor d^{2/3}t \rfloor, 1}^d \right| \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \left| \left( d^{2/3}t - \lfloor d^{2/3}t \rfloor \right) \left\{ \frac{\sqrt{2}\ell}{d^{1/3}} Z_{\lfloor d^{2/3}t \rfloor, 1}^d - \frac{\ell^2}{d^{2/3}} \operatorname{sgn} \left( X_{\lfloor d^{2/3}t \rfloor, 1}^d \right) \right\} \mathbb{1}_{\mathbb{A}_{\lfloor d^{2/3}t \rfloor}^d} \right| \right] \\ &\leq \left( d^{2/3}t - \lfloor d^{2/3}t \rfloor \right) \left\{ \frac{\sqrt{2}\ell}{d^{1/3}} \mathbb{E} \left[ \left| Z_{\lfloor d^{2/3}t \rfloor, 1}^d \right| \right] + \frac{\ell^2}{d^{2/3}} \mathbb{E} \left[ \left| \operatorname{sgn} \left( X_{\lfloor d^{2/3}t \rfloor, 1}^d \right) \right| \right] \right\} \\ &\leq \frac{\sqrt{2}\ell}{d^{1/3}} \mathbb{E} \left[ \left( Z_{\lfloor d^{2/3}t \rfloor, 1}^d \right)^2 \right]^{1/2} + \frac{\ell^2}{d^{2/3}}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\lim_{d \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \left[ \left| \mathbf{Y}_{t,1}^d - X_{\lfloor d^{2/3}t \rfloor, 1}^d \right| \right] = 0.$$

Donc pour toute  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  Lipschitz et bornée,

$$\lim_{d \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \left[ \left| \psi \left( \mathbf{Y}_{t,1}^d \right) - \psi \left( X_{\lfloor d^{2/3}t \rfloor, 1}^d \right) \right| \right] = 0.$$

De plus, comme  $(\nu_d)_{d \geq 1}$  converge faiblement vers  $\nu$ , alors pour toute fonction  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  Lipschitz et bornée,

$$\lim_{d \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \left[ \psi \left( \mathbf{Y}_{t,1}^d \right) \right] = \mathbb{E} \left[ \psi(W_t) \right],$$

et par le calcul précédent,

$$\lim_{d \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \left[ \psi \left( X_{\lfloor d^{2/3}t \rfloor, 1}^d \right) \right] = \mathbb{E}^\nu \left[ \psi(W_t) \right].$$

Or  $X_{\lfloor d^{2/3}t \rfloor, 1}^d$  est distribué selon  $\pi = \exp(-|x|)dx/2$  pour tout  $t \geq 0$  et  $d \in \mathbb{N}^*$ . Ainsi la suite  $(\mathbb{E}[\psi(X_{\lfloor d^{2/3}t \rfloor, 1}^d)])_{d \in \mathbb{N}^*}$  est constante égale à  $\pi(\psi)$ , et donc  $W_t$  suit la loi  $\pi$  sous  $\mathbb{P}^\nu$ .  $\square$

*Démonstration de la proposition 22.* Commençons par montrer que si  $\nu$  vérifie : pour tout  $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ,  $m \in \mathbb{N}^*$ ,  $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  continue bornée et  $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_m \leq s \leq t$ ,

$$\mathbb{E}^\nu \left[ \left( \phi(W_t) - \phi(W_s) - \int_s^t L\phi(W_u) du \right) g(W_{t_1}, \dots, W_{t_m}) \right] = 0, \quad (34)$$

alors  $\nu$  est solution du problème de martingale.

En effet, les variables aléatoires

$$\{g(W_{t_1}, \dots, W_{t_m}) \mid m \in \mathbb{N}^*, g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} \text{ continue bornée et } 0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_m \leq s\}$$

engendrent la tribu  $\mathcal{B}_s$ . Donc par caractérisation de l'espérance conditionnelle :

$$\mathbb{E}^\nu \left[ \phi(W_t) - \phi(W_s) - \int_s^t L\phi(W_u) du \mid \mathcal{B}_s \right] = 0,$$

i.e.

$$\mathbb{E}^\nu \left[ \phi(W_t) - \phi(W_0) - \int_0^t L\phi(W_u) du \mid \mathcal{B}_s \right] = \phi(W_s) - \phi(W_0) - \int_0^s L\phi(W_u) du.$$

Et donc  $\nu$  est solution du problème de martingale.

Pour montrer (34) avec l'hypothèse, il nous suffit de montrer que pour tout  $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ,  $m \in \mathbb{N}^*$ ,  $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  continue bornée et  $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_m \leq s \leq t$ , l'application suivante est continue :

$$\Psi_{s,t} : w \mapsto \left( \phi(w_t) - \phi(w_s) - \int_s^t L\phi(w_u) du \right) g(w_{t_1}, \dots, w_{t_m}).$$

Cependant on ne peut pas espérer un tel résultat car  $\text{sgn}$ , qui intervient dans la définition de  $L$ , n'est pas continue en 0. On va donc montrer que ces applications sont continues sur un évènement  $\nu$ -presque sûr. Soit

$$\mathbf{W}_{\dot{V}} = \{w \in \mathbf{W} \mid w_u \neq 0 \text{ pour presque tout } u \in [s, t]\}.$$

Montrons que  $\nu((\mathbf{W}_{\dot{V}})^c) = 0$ .

On remarque que  $w \in (\mathbf{W}_{\dot{V}})^c$  si et seulement si  $\int_s^t \mathbb{1}_{\{0\}}(w_u) du > 0$ . Or par le théorème de Fubini-Tonelli,

$$\mathbb{E}^\nu \left[ \int_s^t \mathbb{1}_{\{0\}}(W_u) du \right] = \int_s^t \mathbb{E}^\nu \left[ \mathbb{1}_{\{0\}}(W_u) \right] du,$$

et comme sous  $\mathbb{E}^\nu$ ,  $W_u$  suit la loi  $\pi$ ,

$$\mathbb{E}^\nu \left[ \int_s^t \mathbb{1}_{\{0\}}(W_u) du \right] = \int_s^t \pi(\{0\}) du = 0,$$

car  $\pi \ll \lambda$  la mesure de Lebesgue, et qu'un singleton est négligeable pour cette mesure. D'où  $\nu((\mathbf{W}_{\dot{V}})^c) = 0$ . Montrons maintenant que les applications  $\Psi_{s,t}$  sont continues sur  $\mathbf{W}_{\dot{V}}$ .

Comme  $w \mapsto w_u$  est continue pour tout  $u \geq 0$  alors  $w \mapsto \phi(w_u)$  et  $w \mapsto g(w_{t_1}, \dots, w_{t_m})$  sont aussi continues par composition. Il suffit donc de montrer que  $w \mapsto \int_s^t L\phi(w_u)du$  est continue. Utilisons la caractérisation séquentielle : soit  $(w^n)_{n \geq 0}$  une suite de  $\mathbf{W}$  qui tend vers  $w \in \mathbf{W}_{\dot{V}}$  uniformément sur tout compact. Soit  $u$  tel que  $w_u \neq 0$ , alors par continuité du signe en  $w_u$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} L\phi(w_u^n) = L\phi(w_u)$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} L\phi(w_u^n) = L\phi(w_u)$ , pour presque tout  $u \in [s, t]$ . De plus  $\phi$  étant bornée et à support compact,  $(L\phi(w_u^n))_n$  est bornée pour presque tout  $u$ . Ainsi, par le théorème de convergence dominée de Lebesgue,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_s^t L\phi(w_u^n)du = \int_s^t L\phi(w_u)du.$$

Ce qui montre la continuité des applications  $\Psi_{s,t}$  sur  $\mathbf{W}_{\dot{V}}$ , qui est  $\nu$ -presque sûr. D'où le résultat.  $\square$

Introduisons, pour  $n \in \mathbb{N}$   $\mathcal{F}_n^d = \sigma(\{X_k^d, k \leq n\})$  et pour  $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$$\begin{aligned} M_n^d(\phi) &= \frac{\ell}{d^{1/3}} \sum_{k=0}^{n-1} \phi'(X_{k,1}^d) \left\{ \left( \sqrt{2}Z_{k+1,1}^d - \frac{\ell}{d^{1/3}} \operatorname{sgn}(X_{k,1}^d) \right) \mathbb{1}_{\mathcal{A}_{k+1}^d} \right. \\ &\quad \left. - \mathbb{E} \left[ \left( \sqrt{2}Z_{k+1,1}^d - \frac{\ell}{d^{1/3}} \operatorname{sgn}(X_{k,1}^d) \right) \mathbb{1}_{\mathcal{A}_{k+1}^d} \middle| \mathcal{F}_k^d \right] \right\} \\ &\quad + \frac{\ell^2}{2d^{2/3}} \sum_{k=0}^{n-1} \phi''(X_{k,1}^d) \left\{ \left( \sqrt{2}Z_{k+1,1}^d - \frac{\ell}{d^{1/3}} \operatorname{sgn}(X_{k,1}^d) \right)^2 \mathbb{1}_{\mathcal{A}_{k+1}^d} \right. \\ &\quad \left. - \mathbb{E} \left[ \left( \sqrt{2}Z_{k+1,1}^d - \frac{\ell}{d^{1/3}} \operatorname{sgn}(X_{k,1}^d) \right)^2 \mathbb{1}_{\mathcal{A}_{k+1}^d} \middle| \mathcal{F}_k^d \right] \right\}. \quad (35) \end{aligned}$$

Cette suite de variables aléatoires va nous aider à démontrer le théorème 21.

**Proposition 24.** *Pour tous  $0 \leq s \leq t$ ,  $\phi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  on a*

$$\lim_{d \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \left[ \left| \phi(\mathbf{Y}_{t,1}^d) - \phi(\mathbf{Y}_{s,1}^d) - \int_s^t L\phi(\mathbf{Y}_{r,1}^d) dr - (M_{\lceil d^{2/3}t \rceil}^d(\phi) - M_{\lceil d^{2/3}s \rceil}^d(\phi)) \right| \right] = 0.$$

*Démonstration de la proposition 24.*  $(\mathbf{Y}_t^d)_{t \geq 0}$  est un processus affine par morceaux, donc à variation finie. On remarque que pour tout  $r \geq 0$ ,

$$d\mathbf{Y}_{r,1}^d = d^{2/3} \left( \frac{\sqrt{2}\ell}{d^{1/3}} Z_{\lceil d^{2/3}r \rceil, 1}^d - \frac{\ell^2}{d^{2/3}} X_{\lceil d^{2/3}r \rceil, 1}^d \right) \mathbb{1}_{\mathcal{A}_{\lceil d^{2/3}r \rceil}^d} dr.$$

Ainsi, par le théorème fondamental du calcul intégral pour les fonctions  $C^1$  par morceaux :

$$\begin{aligned} & \phi(\mathbf{Y}_{t,1}^d) - \phi(\mathbf{Y}_{s,1}^d) \\ &= \ell d^{1/3} \int_s^t \phi'(\mathbf{Y}_{r,1}^d) \left( \sqrt{2} Z_{[d^{2/3}r],1}^d - \frac{\ell}{d^{1/3}} \operatorname{sgn}(X_{[d^{2/3}r],1}^d) \right) \mathbb{1}_{\mathbf{A}_{[d^{2/3}r]}^d} dr. \end{aligned} \quad (36)$$

On effectue un développement de Taylor de  $\phi'$  entre  $\mathbf{Y}_{r,1}^d$  et  $X_{[d^{2/3}r],1}^d$ . Comme  $\phi$  est  $C^3$ , pour tout point  $r \in [s, t]$ , il existe  $\chi_r \in [X_{[d^{2/3}r],1}^d, \mathbf{Y}_{r,1}^d]$  tel que :

$$\begin{aligned} & \phi'(\mathbf{Y}_{r,1}^d) = \phi'(X_{[d^{2/3}r],1}^d) \\ &+ \frac{\ell}{d^{1/3}} (d^{2/3}r - [d^{2/3}r]) \phi''(X_{[d^{2/3}r],1}^d) \left( \sqrt{2} Z_{[d^{2/3}r],1}^d - \frac{\ell}{d^{1/3}} \operatorname{sgn}(X_{[d^{2/3}r],1}^d) \right) \mathbb{1}_{\mathbf{A}_{[d^{2/3}r]}^d} \\ &+ \frac{\ell^2}{2d^{2/3}} (d^{2/3}r - [d^{2/3}r])^2 \phi^{(3)}(\chi_r) \left( \sqrt{2} Z_{[d^{2/3}r],1}^d - \frac{\ell}{d^{1/3}} \operatorname{sgn}(X_{[d^{2/3}r],1}^d) \right)^2 \mathbb{1}_{\mathbf{A}_{[d^{2/3}r]}^d}. \end{aligned}$$

Injectons cette équation dans (36) :

$$\begin{aligned} & \phi(\mathbf{Y}_{t,1}^d) - \phi(\mathbf{Y}_{s,1}^d) \\ &= \ell d^{1/3} \int_s^t \phi'(X_{[d^{2/3}r],1}^d) \left( \sqrt{2} Z_{[d^{2/3}r],1}^d - \frac{\ell}{d^{1/3}} \operatorname{sgn}(X_{[d^{2/3}r],1}^d) \right) \mathbb{1}_{\mathbf{A}_{[d^{2/3}r]}^d} dr \\ &+ \ell^2 \int_s^t (d^{2/3}r - [d^{2/3}r]) \phi''(X_{[d^{2/3}r],1}^d) \left( \sqrt{2} Z_{[d^{2/3}r],1}^d - \frac{\ell}{d^{1/3}} \operatorname{sgn}(X_{[d^{2/3}r],1}^d) \right)^2 \mathbb{1}_{\mathbf{A}_{[d^{2/3}r]}^d} dr \\ &+ \frac{\ell^3}{2d^{1/3}} \int_s^t (d^{2/3}r - [d^{2/3}r])^2 \phi^{(3)}(\chi_r) \left( \sqrt{2} Z_{[d^{2/3}r],1}^d - \frac{\ell}{d^{1/3}} \operatorname{sgn}(X_{[d^{2/3}r],1}^d) \right)^3 \mathbb{1}_{\mathbf{A}_{[d^{2/3}r]}^d} dr. \end{aligned}$$

Occupons nous du troisième terme, par le théorème de Fubini-Tonelli et comme  $\phi^{(3)}$  est bornée,

$$\begin{aligned} & \frac{\ell^3}{2d^{1/3}} \mathbb{E} \left[ \left| \int_s^t (d^{2/3}r - [d^{2/3}r])^2 \phi^{(3)}(\chi_r) \left( \sqrt{2} Z_{[d^{2/3}r],1}^d - \frac{\ell}{d^{1/3}} \operatorname{sgn}(X_{[d^{2/3}r],1}^d) \right)^3 \mathbb{1}_{\mathbf{A}_{[d^{2/3}r]}^d} dr \right| \right] \\ & \leq \frac{\ell^3}{2d^{1/3}} \int_s^t C \mathbb{E} \left[ \left( \sqrt{2} |Z_{[d^{2/3}r],1}^d| + \frac{\ell}{d^{1/3}} \right)^3 \right] dr \xrightarrow{d \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

Pour le deuxième terme, la plupart de l'intégrand est constant par morceaux. En

effet, pour tout entier  $d^{2/3}s \leq k \leq d^{2/3}t - 1$ ,

$$\begin{aligned}
& \int_{k/d^{2/3}}^{(k+1)/d^{2/3}} \left( d^{2/3}r - \lfloor d^{2/3}r \rfloor \right) \phi'' \left( X_{\lfloor d^{2/3}r \rfloor, 1}^d \right) \left( \sqrt{2}Z_{\lfloor d^{2/3}r \rfloor, 1}^d - \frac{\ell}{d^{1/3}} \operatorname{sgn} \left( X_{\lfloor d^{2/3}r \rfloor, 1}^d \right) \right)^2 \mathbb{1}_{\mathbf{A}_{\lfloor d^{2/3}r \rfloor}^d} \, dr \\
&= \frac{1}{2d^{2/3}} \phi'' \left( X_{k, 1}^d \right) \left( \sqrt{2}Z_{k+1, 1}^d - \frac{\ell}{d^{1/3}} \operatorname{sgn} \left( X_{k, 1}^d \right) \right)^2 \mathbb{1}_{\mathbf{A}_{k+1}^d} \\
&= \int_{k/d^{2/3}}^{(k+1)/d^{2/3}} \phi'' \left( X_{\lfloor d^{2/3}r \rfloor, 1}^d \right) \left( \sqrt{2}Z_{\lfloor d^{2/3}r \rfloor, 1}^d - \frac{\ell}{d^{1/3}} \operatorname{sgn} \left( X_{\lfloor d^{2/3}r \rfloor, 1}^d \right) \right)^2 \mathbb{1}_{\mathbf{A}_{\lfloor d^{2/3}r \rfloor}^d} \, dr / 2 .
\end{aligned}$$

On écrit ainsi :

$$\begin{aligned}
I &= \int_s^t \left( d^{2/3}r - \lfloor d^{2/3}r \rfloor \right) \phi'' \left( X_{\lfloor d^{2/3}r \rfloor, 1}^d \right) \left( \sqrt{2}Z_{\lfloor d^{2/3}r \rfloor, 1}^d - \frac{\ell}{d^{1/3}} \operatorname{sgn} \left( X_{\lfloor d^{2/3}r \rfloor, 1}^d \right) \right)^2 \mathbb{1}_{\mathbf{A}_{\lfloor d^{2/3}r \rfloor}^d} \, dr \\
&= I_1 + I_2 ,
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{1}{2} \int_s^t \phi'' \left( X_{\lfloor d^{2/3}r \rfloor, 1}^d \right) \left( \sqrt{2}Z_{\lfloor d^{2/3}r \rfloor, 1}^d - \frac{\ell}{d^{1/3}} \operatorname{sgn} \left( X_{\lfloor d^{2/3}r \rfloor, 1}^d \right) \right)^2 \mathbb{1}_{\mathbf{A}_{\lfloor d^{2/3}r \rfloor}^d} \, dr , \\
I_2 &= \left[ \int_s^{\lfloor d^{2/3}s \rfloor / d^{2/3}} + \int_{\lfloor d^{2/3}t \rfloor / d^{2/3}}^t \right] \left( d^{2/3}r - \lfloor d^{2/3}r \rfloor - \frac{1}{2} \right) \phi'' \left( X_{\lfloor d^{2/3}r \rfloor, 1}^d \right) \\
&\quad \left( \sqrt{2}Z_{\lfloor d^{2/3}r \rfloor, 1}^d - \frac{\ell}{d^{1/3}} \operatorname{sgn} \left( X_{\lfloor d^{2/3}r \rfloor, 1}^d \right) \right)^2 \mathbb{1}_{\mathbf{A}_{\lfloor d^{2/3}r \rfloor}^d} \, dr .
\end{aligned}$$

Or  $I_2$  se calcule directement, on a :

$$\begin{aligned}
I_2 &= \frac{1}{2d^{2/3}} \left( d^{2/3}s - \lfloor d^{2/3}s \rfloor \right) \left( \lceil d^{2/3}s \rceil - d^{2/3}s \right) \phi'' \left( X_{\lfloor d^{2/3}s \rfloor, 1}^d \right) \\
&\quad \left( \sqrt{2}Z_{\lfloor d^{2/3}s \rfloor, 1}^d - \frac{\ell}{d^{1/3}} \operatorname{sgn} \left( X_{\lfloor d^{2/3}s \rfloor, 1}^d \right) \right)^2 \mathbb{1}_{\mathbf{A}_{\lfloor d^{2/3}s \rfloor}^d} \\
&\quad + \frac{1}{2d^{2/3}} \left( d^{2/3}t - \lfloor d^{2/3}t \rfloor \right) \left( \lceil d^{2/3}t \rceil - d^{2/3}t \right) \phi'' \left( X_{\lfloor d^{2/3}t \rfloor, 1}^d \right) \\
&\quad \left( \sqrt{2}Z_{\lfloor d^{2/3}t \rfloor, 1}^d - \frac{\ell}{d^{1/3}} \operatorname{sgn} \left( X_{\lfloor d^{2/3}t \rfloor, 1}^d \right) \right)^2 \mathbb{1}_{\mathbf{A}_{\lfloor d^{2/3}t \rfloor}^d} .
\end{aligned}$$

Et comme  $\phi''$  est bornée,  $\mathbb{E} [|I_2|] \xrightarrow{d \rightarrow +\infty} 0$ . Ainsi,

$$\mathbb{E} \left[ \left| \phi \left( \mathbf{Y}_{t, 1}^d \right) - \phi \left( \mathbf{Y}_{s, 1}^d \right) - I_{s, t} \right| \right] \xrightarrow{d \rightarrow +\infty} 0 ,$$

où

$$I_{s,t} = \int_s^t \left\{ \ell d^{1/3} \phi' \left( X_{[d^{2/3}r],1}^d \right) \left( \sqrt{2} Z_{[d^{2/3}r],1}^d - \frac{\ell}{d^{1/3}} \operatorname{sgn} \left( X_{[d^{2/3}r],1}^d \right) \right) \right. \\ \left. + \frac{\ell^2}{2} \phi'' \left( X_{[d^{2/3}r],1}^d \right) \left( \sqrt{2} Z_{[d^{2/3}r],1}^d - \frac{\ell}{d^{1/3}} \operatorname{sgn} \left( X_{[d^{2/3}r],1}^d \right) \right)^2 \right\} \mathbb{1}_{\mathbf{A}_{[d^{2/3}r]}^d} \, dr. \quad (37)$$

Ensuite, on écrit  $M_{[d^{2/3}t]}^d(\phi) - M_{[d^{2/3}s]}^d(\phi)$  sous forme d'une intégrale d'une fonction constante par morceaux :

$$M_{[d^{2/3}t]}^d(\phi) - M_{[d^{2/3}s]}^d(\phi) \\ = \int_s^t \left( \ell d^{1/3} \phi' \left( X_{[d^{2/3}r],1}^d \right) \left\{ \left( \sqrt{2} Z_{[d^{2/3}r],1}^d - \frac{\ell}{d^{1/3}} \operatorname{sgn} \left( X_{[d^{2/3}r],1}^d \right) \right) \mathbb{1}_{\mathbf{A}_{[d^{2/3}r]}^d} \right. \right. \\ \left. \left. - \mathbb{E} \left[ \left( \sqrt{2} Z_{[d^{2/3}r],1}^d - \frac{\ell}{d^{1/3}} \operatorname{sgn} \left( X_{[d^{2/3}r],1}^d \right) \right) \mathbb{1}_{\mathbf{A}_{[d^{2/3}r]}^d} \middle| \mathcal{F}_{[d^{2/3}r]}^d \right] \right\} \right. \\ \left. + \frac{\ell^2}{2} \phi'' \left( X_{[d^{2/3}r],1}^d \right) \left\{ \left( \sqrt{2} Z_{[d^{2/3}r],1}^d - \frac{\ell}{d^{1/3}} \operatorname{sgn} \left( X_{[d^{2/3}r],1}^d \right) \right)^2 \mathbb{1}_{\mathbf{A}_{[d^{2/3}r]}^d} \right. \right. \\ \left. \left. - \mathbb{E} \left[ \left( \sqrt{2} Z_{[d^{2/3}r],1}^d - \frac{\ell}{d^{1/3}} \operatorname{sgn} \left( X_{[d^{2/3}r],1}^d \right) \right)^2 \mathbb{1}_{\mathbf{A}_{[d^{2/3}r]}^d} \middle| \mathcal{F}_{[d^{2/3}r]}^d \right] \right\} \right) \, dr \\ - T_4^d - T_5^d, \quad (38)$$

où  $T_4^d$  et  $T_5^d$  rendent compte de la différence entre la somme et l'intégrale. Plus précisément :

$$T_4^d = -\frac{\ell}{d^{1/3}} \left( [d^{2/3}t] - d^{2/3}t \right) \phi' \left( X_{[d^{2/3}t],1}^d \right) \left\{ \left( \sqrt{2} Z_{[d^{2/3}t],1}^d - \frac{\ell}{d^{1/3}} \operatorname{sgn} \left( X_{[d^{2/3}t],1}^d \right) \right) \mathbb{1}_{\mathbf{A}_{[d^{2/3}t]}^d} \right. \\ \left. - \mathbb{E} \left[ \left( \sqrt{2} Z_{[d^{2/3}t],1}^d - \frac{\ell}{d^{1/3}} \operatorname{sgn} \left( X_{[d^{2/3}t],1}^d \right) \right) \mathbb{1}_{\mathbf{A}_{[d^{2/3}t]}^d} \middle| \mathcal{F}_{[d^{2/3}t]}^d \right] \right\} \\ - \frac{\ell^2}{2d^{2/3}} \left( [d^{2/3}t] - d^{2/3}t \right) \phi'' \left( X_{[d^{2/3}t],1}^d \right) \left\{ \left( \sqrt{2} Z_{[d^{2/3}t],1}^d - \frac{\ell}{d^{1/3}} \operatorname{sgn} \left( X_{[d^{2/3}t],1}^d \right) \right)^2 \mathbb{1}_{\mathbf{A}_{[d^{2/3}t]}^d} \right. \\ \left. - \mathbb{E} \left[ \left( \sqrt{2} Z_{[d^{2/3}t],1}^d - \frac{\ell}{d^{1/3}} \operatorname{sgn} \left( X_{[d^{2/3}t],1}^d \right) \right)^2 \mathbb{1}_{\mathbf{A}_{[d^{2/3}t]}^d} \middle| \mathcal{F}_{[d^{2/3}t]}^d \right] \right\},$$

et  $T_5^d$  s'écrit comme l'opposé de  $T_4^d$  en remplaçant les  $t$  par des  $s$ . Finalement on réécrit

$$\int_s^t \mathbf{L}\phi \left( \mathbf{Y}_{r,1}^d \right) \, dr = \int_s^t \left[ h(\ell) \phi'' \left( X_{[d^{2/3}r],1}^d \right) - h(\ell) \operatorname{sgn} \left( X_{[d^{2/3}r],1}^d \right) \phi' \left( X_{[d^{2/3}r],1}^d \right) \right] \, dr - T_3^d, \quad (39)$$

avec

$$T_3^d = \int_s^t \left( L\phi \left( X_{[d^{2/3}r],1}^d \right) - L\phi \left( \mathbf{Y}_{r,1}^d \right) \right) dr.$$

Maintenant, grâce à (37), (38) et (39),

$$I_{s,t} - \int_s^t L\phi \left( \mathbf{Y}_{r,1}^d \right) dr - \left( M_{[d^{2/3}t]}^d(\phi) - M_{[d^{2/3}s]}^d(\phi) \right) = T_1^d + T_2^d + T_3^d + T_4^d + T_5^d,$$

avec  $T_1^d$  qui factorise les termes avec  $\phi' \left( X_{[d^{2/3}r],1}^d \right)$ , et  $T_2^d$  ceux avec  $\phi'' \left( X_{[d^{2/3}r],1}^d \right)$  :

$$T_1^d = \int_s^t \phi' \left( X_{[d^{2/3}r],1}^d \right) \left\{ \ell d^{1/3} \mathbb{E} \left[ \left( \sqrt{2} Z_{[d^{2/3}r],1}^d - \frac{\ell}{d^{1/3}} \operatorname{sgn} \left( X_{[d^{2/3}r],1}^d \right) \right) \mathbb{1}_{\mathcal{A}_{[d^{2/3}r]}^d} \middle| \mathcal{F}_{[d^{2/3}r]}^d \right] + h(\ell) \operatorname{sgn} \left( X_{[d^{2/3}r],1}^d \right) \right\} dr,$$

$$T_2^d = \int_s^t \phi'' \left( X_{[d^{2/3}r],1}^d \right) \left\{ \frac{\ell^2}{2} \mathbb{E} \left[ \left( \sqrt{2} Z_{[d^{2/3}r],1}^d - \frac{\ell}{d^{1/3}} \operatorname{sgn} \left( X_{[d^{2/3}r],1}^d \right) \right)^2 \mathbb{1}_{\mathcal{A}_{[d^{2/3}r]}^d} \middle| \mathcal{F}_{[d^{2/3}r]}^d \right] - h(\ell) \right\} dr.$$

Pour avoir le résultat de cette proposition, il nous suffit donc de montrer que pour tout  $1 \leq i \leq 5$ ,  $\mathbb{E} \left[ |T_i^d| \right] \xrightarrow{d \rightarrow +\infty} 0$ . Les termes  $T_4^d$  et  $T_5^d$  se majorent facilement car  $\phi'$  et  $\phi''$  sont bornées. Si  $(i, u) \in \{(4, t), (5, s)\}$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ |T_i^d| \right] &\leq \frac{\ell}{d^{1/3}} 2C' \left\{ \sqrt{2} \mathbb{E} \left[ |Z_{[d^{2/3}u],1}^d| \right] + \frac{\ell}{d^{1/3}} \right\} + \frac{\ell^2}{2d^{2/3}} 4C'' \left\{ 2\mathbb{E} \left[ \left( Z_{[d^{2/3}u],1}^d \right)^2 \right] + \frac{\ell^2}{d^{2/3}} \right\} \\ &\leq \frac{C}{d^{1/3}} \\ &\xrightarrow{d \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

Pour  $T_3^d$ , écrivons  $T_3^d = h(\ell)(T_{3,1}^d - T_{3,2}^d)$ , avec

$$T_{3,1}^d = \int_s^t \left\{ \phi'' \left( X_{[d^{2/3}r],1}^d \right) - \phi'' \left( \mathbf{Y}_{r,1}^d \right) \right\} dr,$$

$$T_{3,2}^d = \int_s^t \left\{ \operatorname{sgn} \left( X_{[d^{2/3}r],1}^d \right) \phi' \left( X_{[d^{2/3}r],1}^d \right) - \operatorname{sgn} \left( \mathbf{Y}_{r,1}^d \right) \phi' \left( \mathbf{Y}_{r,1}^d \right) \right\} dr.$$

On a, par le théorème de Fubini-Tonelli,

$$\mathbb{E} \left[ |T_{3,1}^d| \right] \leq \int_s^t \mathbb{E} \left[ \left| \phi'' \left( X_{[d^{2/3}r],1}^d \right) - \phi'' \left( \mathbf{Y}_{r,1}^d \right) \right| \right] dr.$$

Or pour tout  $r \in [s, t]$ , en réutilisant le raisonnement du lemme 23, comme  $\phi''$  est Lipschitz et bornée,

$$\mathbb{E} \left[ \left| \phi'' \left( X_{\lfloor d^{2/3}r \rfloor, 1}^d \right) - \phi'' \left( \mathbf{Y}_{r,1}^d \right) \right| \right] \xrightarrow{d \rightarrow +\infty} 0.$$

De plus  $\mathbb{E} \left[ \left| \phi'' \left( X_{\lfloor d^{2/3}r \rfloor, 1}^d \right) - \phi'' \left( \mathbf{Y}_{r,1}^d \right) \right| \right] \leq 2C''$ , d'où par le théorème de convergence dominée :

$$\lim_{d \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \left[ \left| T_{3,1}^d \right| \right] = 0.$$

Ensuite, on réécrit  $T_{3,2}^d$  :

$$\begin{aligned} T_{3,2}^d &= \int_s^t \left\{ \operatorname{sgn} \left( X_{\lfloor d^{2/3}r \rfloor, 1}^d \right) - \operatorname{sgn} \left( \mathbf{Y}_{r,1}^d \right) \right\} \phi' \left( X_{\lfloor d^{2/3}r \rfloor, 1}^d \right) dr \\ &\quad + \int_s^t \operatorname{sgn} \left( \mathbf{Y}_{r,1}^d \right) \left\{ \phi' \left( X_{\lfloor d^{2/3}r \rfloor, 1}^d \right) - \phi' \left( \mathbf{Y}_{r,1}^d \right) \right\} dr. \end{aligned}$$

La deuxième intégrale se traite comme  $T_{3,1}^d$  :

$$\mathbb{E} \left[ \left| \int_s^t \operatorname{sgn} \left( \mathbf{Y}_{r,1}^d \right) \left\{ \phi' \left( X_{\lfloor d^{2/3}r \rfloor, 1}^d \right) - \phi' \left( \mathbf{Y}_{r,1}^d \right) \right\} dr \right| \right] \leq \int_s^t \mathbb{E} \left[ \left| \phi' \left( X_{\lfloor d^{2/3}r \rfloor, 1}^d \right) - \phi' \left( \mathbf{Y}_{r,1}^d \right) \right| \right] dr, \quad (40)$$

qui tend vers zéro car  $\phi'$  est Lipschitz et bornée. Pour la première intégrale,

$$\mathbb{E} \left[ \left| \int_s^t \left\{ \operatorname{sgn} \left( X_{\lfloor d^{2/3}r \rfloor, 1}^d \right) - \operatorname{sgn} \left( \mathbf{Y}_{r,1}^d \right) \right\} \phi' \left( X_{\lfloor d^{2/3}r \rfloor, 1}^d \right) dr \right| \right] \leq \mathbb{E} \left[ \left| \operatorname{sgn} \left( X_{\lfloor d^{2/3}r \rfloor, 1}^d \right) - \operatorname{sgn} \left( \mathbf{Y}_{r,1}^d \right) \right| \right].$$

Or

$$\begin{aligned} \left| \operatorname{sgn} \left( X_{\lfloor d^{2/3}r \rfloor, 1}^d \right) - \operatorname{sgn} \left( \mathbf{Y}_{r,1}^d \right) \right| &= 2 \mathbb{1}_{\left\{ \operatorname{sgn} \left( X_{\lfloor d^{2/3}r \rfloor, 1}^d \right) \neq \operatorname{sgn} \left( \mathbf{Y}_{r,1}^d \right) \right\}} \\ &\leq 2 \mathbb{1}_{\left\{ \operatorname{sgn} \left( X_{\lfloor d^{2/3}r \rfloor, 1}^d \right) \neq \operatorname{sgn} \left( X_{\lfloor d^{2/3}r \rfloor, 1}^d \right) \right\}} \\ &\leq 2 \mathbb{1}_{T_d} \left( X_{\lfloor d^{2/3}r \rfloor, 1}^d, Z_{\lfloor d^{2/3}r \rfloor, 1}^d \right), \end{aligned}$$

où  $T_d$  est donné par (13). Or, par la symétrie des lois de  $X$  et  $Z$ , utilisée comme dans (14) et (16),

$$\mathbb{E} \left[ 2 \mathbb{1}_{T_d} \left( X_{\lfloor d^{2/3}r \rfloor, 1}^d, Z_{\lfloor d^{2/3}r \rfloor, 1}^d \right) \right] = 4 \mathbb{E} \left[ \mathbb{1}_{\{0 < X < \kappa(\ell, d, Z)\}} \right],$$

où  $(X, Z)$  est de loi  $e^{-|x|} dx / 2 \otimes \mathcal{N}(0, 1)$  et  $\kappa(\ell, d, z) = \ell^2 / d^{2/3} - \sqrt{2} \ell z / d^{1/3}$ ,

$$\begin{aligned} &= 2 / \sqrt{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{0 < \kappa(\ell, d, z)\}} e^{-z^2/2} \int_0^{\kappa(\ell, d, z)} e^{-|x|} dx dz, \\ &= 2 / \sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{\ell / (\sqrt{2} d^{1/3})} e^{-z^2/2} \left( 1 - e^{-\kappa(\ell, d, z)} \right) dz. \end{aligned}$$

On utilise ensuite la formule de Taylor-Lagrange. Pour tout  $\ell > 0, d \in \mathbb{N}^*$  et  $z < \ell/(\sqrt{2}d^{1/3})$ , il existe  $\gamma \in [0, \kappa(\ell, d, z)]$  tel que  $1 - e^{-\kappa(\ell, d, z)} = \kappa(\ell, d, z)e^{-\gamma}$ , ainsi

$$\mathbb{E} \left[ 2 \mathbb{1}_{T_d} \left( X_{[d^{2/3}r],1}^d, Z_{[d^{2/3}r],1}^d \right) \right] = 2/\sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{\ell/(\sqrt{2}d^{1/3})} e^{-z^2/2} \kappa(\ell, d, z) e^{-\gamma} dz,$$

qui tend vers zéro par le théorème de convergence dominée. D'où

$$\lim_{d \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \left[ \left| \int_s^t \left\{ \operatorname{sgn} \left( X_{[d^{2/3}r],1}^d \right) - \operatorname{sgn} \left( \mathbf{Y}_{r,1}^d \right) \right\} \phi' \left( X_{[d^{2/3}r],1}^d \right) dr \right| \right] = 0. \quad (41)$$

En regroupant (40) et (41), on trouve  $\lim_{d \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \left[ |T_{3,2}^d| \right] = 0$  et donc,

$$\lim_{d \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \left[ |T_3^d| \right] = 0.$$

Revenons sur  $T_1^d$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ |T_1^d| \right] &\leq \int_s^t C' \mathbb{E} \left[ \left| \ell d^{1/3} \mathbb{E} \left[ \left( \sqrt{2} Z_{[d^{2/3}r],1}^d - \frac{\ell}{d^{1/3}} \operatorname{sgn} \left( X_{[d^{2/3}r],1}^d \right) \right) \mathbb{1}_{\mathbf{A}_{[d^{2/3}r]}^d} \middle| \mathcal{F}_{[d^{2/3}r]}^d \right] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + h(\ell) \operatorname{sgn} \left( X_{[d^{2/3}r],1}^d \right) \right| \right] dr, \\ &\leq \int_s^t C' \{ \mathbb{E} [|D_{1,r}|] + \mathbb{E} [|D_{2,r}|] \} dr, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} D_{1,r} &= \sqrt{2} \ell d^{1/3} \mathbb{E} \left[ Z_{[d^{2/3}r],1}^d \mathbb{1}_{\mathbf{A}_{[d^{2/3}r]}^d} \middle| \mathcal{F}_{[d^{2/3}r]}^d \right], \\ D_{2,r} &= \operatorname{sgn} \left( X_{[d^{2/3}r],1}^d \right) \left\{ h(\ell) - \ell^2 \mathbb{E} \left[ \mathbb{1}_{\mathbf{A}_{[d^{2/3}r]}^d} \middle| \mathcal{F}_{[d^{2/3}r]}^d \right] \right\}. \end{aligned}$$

On écrit

$$D_{1,r} = \sqrt{2} \ell d^{1/3} \mathbb{E} \left[ Z_{[d^{2/3}r],1}^d \left( 1 \wedge \exp \left\{ \sum_{i=1}^d \phi_d \left( X_{[d^{2/3}r],i}^d, Z_{[d^{2/3}r],i}^d \right) \right\} \right) \middle| \mathcal{F}_{[d^{2/3}r]}^d \right],$$

puis on utilise l'indépendance des composantes de  $Z_{[d^{2/3}r]}^d$  pour remarquer que

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \left[ Z_{[d^{2/3}r],1}^d \left( 1 \wedge \exp \left\{ \sum_{i=2}^d \phi_d \left( X_{[d^{2/3}r],i}^d, Z_{[d^{2/3}r],i}^d \right) \right\} \right) \middle| \mathcal{F}_{[d^{2/3}r]}^d \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ Z_{[d^{2/3}r],1}^d \right] \mathbb{E} \left[ 1 \wedge \exp \left\{ \sum_{i=2}^d \phi_d \left( X_{[d^{2/3}r],i}^d, Z_{[d^{2/3}r],i}^d \right) \right\} \middle| \mathcal{F}_{[d^{2/3}r]}^d \right] = 0. \end{aligned}$$

Ceci nous permet de rajouter ce terme dans  $D_{1,r}$  et majorer :

$$\mathbb{E} [|D_{1,r}|] \leq \sqrt{2}\ell d^{1/3} \mathbb{E} \left[ \left| Z_{\lceil d^{2/3}r \rceil, 1}^d \right| \left| 1 \wedge \exp \left\{ \sum_{i=1}^d \phi_d \left( X_{\lceil d^{2/3}r \rceil, i}^d, Z_{\lceil d^{2/3}r \rceil, i}^d \right) \right\} - 1 \wedge \exp \left\{ \sum_{i=2}^d \phi_d \left( X_{\lceil d^{2/3}r \rceil, i}^d, Z_{\lceil d^{2/3}r \rceil, i}^d \right) \right\} \right| \right].$$

Cependant  $x \mapsto 1 \wedge \exp(x)$  est une fonction 1-Lipschitz, donc :

$$\mathbb{E} [|D_{1,r}|] \leq \sqrt{2}\ell d^{1/3} \mathbb{E} \left[ \left| Z_{\lceil d^{2/3}r \rceil, 1}^d \right| \left| \phi_d \left( X_{\lceil d^{2/3}r \rceil, 1}^d, Z_{\lceil d^{2/3}r \rceil, 1}^d \right) \right| \right]. \quad (42)$$

Calculons cette espérance. Pour simplifier les notations, introduisons  $(X, Z)$  de loi  $e^{-|x|} dx / 2 \otimes N(0, 1)$ , ainsi

$$\mathbb{E} \left[ \left| Z_{\lceil d^{2/3}r \rceil, 1}^d \right| \left| \phi_d \left( X_{\lceil d^{2/3}r \rceil, 1}^d, Z_{\lceil d^{2/3}r \rceil, 1}^d \right) \right| \right] = \mathbb{E} [|Z| |\phi_d(X, Z)|].$$

En injectant les expressions (12) et (14),

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [|Z| |\phi_d(X, Z)|] &= \mathbb{E} \left[ |Z| \left| 2X - \frac{\ell^2}{d^{2/3}} + \frac{\sqrt{2}\ell}{d^{1/3}} Z \right| \mathbb{1}_{\{0 < X \leq \kappa(\ell, d, Z)\}} \right] \\ &\quad + \mathbb{E} \left[ |Z| \left| -2X - \frac{\ell^2}{d^{2/3}} - \frac{\sqrt{2}\ell}{d^{1/3}} Z \right| \mathbb{1}_{\left\{-\frac{\ell^2}{d^{2/3}} - \frac{\sqrt{2}\ell}{d^{1/3}} Z < X \leq 0\right\}} \right], \end{aligned}$$

et par les égalités en loi  $X = -X$  et  $Z = -Z$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [|Z| |\phi_d(X, Z)|] &= 2\mathbb{E} \left[ |Z| \left| 2X - \frac{\ell^2}{d^{2/3}} + \frac{\sqrt{2}\ell}{d^{1/3}} Z \right| \mathbb{1}_{\{0 < X \leq \kappa(\ell, d, Z)\}} \right], \\ &= 1/\sqrt{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{0 < \kappa(\ell, d, z)\}} e^{z^2/2} |z| \int_0^{\kappa(\ell, d, z)} |2x - \kappa(\ell, d, z)| e^{-x} dx dz. \end{aligned}$$

Soit  $z < \ell/(\sqrt{2}d^{1/3})$ , alors évaluons l'intégrale par une intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^{\kappa(\ell, d, z)} |2x - \kappa(\ell, d, z)| e^{-x} dx &= \int_0^{\kappa(\ell, d, z)/2} (\kappa(\ell, d, z) - 2x) e^{-x} dx \\ &\quad + \int_{\kappa(\ell, d, z)/2}^{\kappa(\ell, d, z)} (2x - \kappa(\ell, d, z)) e^{-x} dx, \\ &= \left[ (2x - \kappa(\ell, d, z)) e^{-x} \right]_0^{\kappa(\ell, d, z)/2} - \int_0^{\kappa(\ell, d, z)/2} 2e^{-x} dx \\ &\quad + \left[ (\kappa(\ell, d, z) - 2x) e^{-x} \right]_{\kappa(\ell, d, z)/2}^{\kappa(\ell, d, z)} + \int_{\kappa(\ell, d, z)/2}^{\kappa(\ell, d, z)} 2e^{-x} dx \\ &= \kappa(\ell, d, z) \left( 1 - e^{-\kappa(\ell, d, z)} \right) - 2 \left( 1 - e^{-\kappa(\ell, d, z)/2} \right)^2. \end{aligned}$$

Par la formule de Taylor-Lagrange, pour tout  $\ell > 0, d \in \mathbb{N}^*$  et  $z < \ell/\sqrt{2}d^{1/3}$ , il existe  $\gamma \in [0, \kappa(\ell, d, z)]$  tel que

$$\kappa(\ell, d, z) \left(1 - e^{-\kappa(\ell, d, z)}\right) - 2 \left(1 - e^{-\kappa(\ell, d, z)/2}\right)^2 = \kappa(\ell, d, z)^2 e^{-\gamma} - \kappa(\ell, d, z)^2 e^{-\gamma/2} \left(e^{-\gamma/2} - 1/2\right).$$

Ainsi en revenant au membre de droite de (42) :

$$\begin{aligned} & \sqrt{2}\ell d^{1/3} \mathbb{E} [|Z| | \phi_d(X, Z)] \\ &= \ell d^{1/3} / \sqrt{\pi} \int_{-\infty}^{\ell/(\sqrt{2}d^{1/3})} e^{-z^2/2} |z| \kappa(\ell, d, z)^2 \left\{ e^{-\gamma} - e^{-\gamma/2} \left(e^{-\gamma/2} - 1/2\right) \right\} dz. \end{aligned}$$

On veut montrer maintenant que cette expression tend vers zéro. On commence par la condition de domination, pour tout  $z < \ell/(\sqrt{2}d^{1/3})$ , on a  $0 \leq \gamma \leq \kappa(\ell, d, z)$ , ainsi on a :

$$\begin{aligned} \ell d^{1/3} \mathbb{1}_{\{z < \ell/(\sqrt{2}d^{1/3})\}} e^{-z^2/2} |z| \kappa(\ell, d, z)^2 \left| e^{-\gamma} - e^{-\gamma/2} \left(e^{-\gamma/2} - 1/2\right) \right| \\ \leq 3e^{-z^2/2} |z| (\ell^4 + 2\ell^2 z^2), \end{aligned}$$

qui est bien intégrable. De plus, on a la convergence simple vers zéro : pour tout  $z < \ell/(\sqrt{2}d^{1/3})$ ,

$$\lim_{d \rightarrow +\infty} d^{1/3} e^{-z^2/2} |z| \left(\ell^2/d^{2/3} - \sqrt{2}\ell z/d^{1/3}\right)^2 \left\{ e^{-\gamma} - e^{-\gamma/2} \left(e^{-\gamma/2} - 1/2\right) \right\} = 0.$$

D'où, par le théorème de convergence dominée

$$\lim_{d \rightarrow +\infty} \sqrt{2}\ell d^{1/3} \mathbb{E} \left[ \left| Z_{\lceil d^{2/3}r \rceil, 1}^d \middle| \phi_d \left( X_{\lceil d^{2/3}r \rceil, 1}^d, Z_{\lceil d^{2/3}r \rceil, 1}^d \right) \right| \right] = 0,$$

et donc par (42), pour tout  $r \in [s, t]$ ,

$$\lim_{d \rightarrow +\infty} \mathbb{E} [|D_{1,r}|] = 0$$

Finalement, par une méthode analogue on montre  $\lim_{d \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[|D_{2,r}|] = 0$ .

On a donc  $\lim_{d \rightarrow +\infty} \mathbb{E} [|T_1^d|] = 0$ . Le calcul de  $T_2^d$  est à peine plus pénible, ce qui donne le résultat.  $\square$

*Démonstration du théorème 21.* Par le théorème 18, par les propositions 22 et 24, il nous suffit de montrer que pour tout  $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ,  $p \geq 1$ , tout  $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_p \leq s \leq t$  et toute fonction  $g : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  bornée et continue,

$$\lim_{d \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \left[ \left( M_{\lceil d^{2/3}t \rceil}^d(\phi) - M_{\lceil d^{2/3}s \rceil}^d(\phi) \right) g(\mathbf{Y}_{t_1}^d, \dots, \mathbf{Y}_{t_p}^d) \right] = 0,$$

où pour  $n \geq 1$ ,  $M_n^d(\phi)$  est défini en (35). Mais ceci est direct en prenant successivement l'espérance conditionnelle par rapport à  $\mathcal{F}_k$ , pour  $k = \lceil d^{2/3}t \rceil, \dots, \lceil d^{2/3}s \rceil$ .  $\square$

## 6 Annexe

On a regroupé ci-dessous les preuves qui ne nourrissent pas l'intuition et qui peuvent être lues en deuxième lecture.

*Preuve du lemme 9.* On commence par développer les carrés dans la définition de  $\phi_d$  donnée en (10) :

$$\begin{aligned} \phi_d(x, z) &= |x| - \left| x - \frac{\ell^2}{d^\alpha} \operatorname{sgn}(x) + \frac{\sqrt{2}\ell}{d^{\alpha/2}} z \right| + \frac{1}{2} z^2 \\ &\quad - \frac{\ell^4}{4\ell^2 d^{2\alpha}} \left[ \operatorname{sgn}(x) + \operatorname{sgn} \left( x - \frac{\ell^2}{d^\alpha} \operatorname{sgn}(x) + \frac{\sqrt{2}\ell}{d^{\alpha/2}} z \right) \right]^2 \\ &\quad + \frac{2\sqrt{2}\ell^3}{4\ell^2 d^{3\alpha/2}} z \left[ \operatorname{sgn}(x) + \operatorname{sgn} \left( x - \frac{\ell^2}{d^\alpha} \operatorname{sgn}(x) + \frac{\sqrt{2}\ell}{d^{\alpha/2}} z \right) \right] - \frac{1}{2} z^2. \end{aligned}$$

On observe d'abord que les termes en  $z^2$  se compensent. Regardons les autres de plus près, en séparant deux cas, donnés par l'ensemble :

$$T_d = \left\{ (\tilde{x}, \tilde{z}) : \operatorname{sgn} \left( \tilde{x} - \frac{\ell^2}{d^\alpha} \operatorname{sgn}(\tilde{x}) + \frac{\sqrt{2}\ell}{d^{\alpha/2}} \tilde{z} \right) \neq \operatorname{sgn}(\tilde{x}) \right\}.$$

Sur le complémentaire de  $T_d$ , réécrivons la première ligne de  $\phi_d$ . En se servant de la relation  $|x| = x \operatorname{sgn}(x)$ :

$$|x| - \left| x - \frac{\ell^2}{d^\alpha} \operatorname{sgn}(x) + \frac{\sqrt{2}\ell}{d^{\alpha/2}} z \right| = \frac{\ell^2}{d^\alpha} - \operatorname{sgn}(x) \frac{\sqrt{2}\ell}{d^{\alpha/2}} z.$$

D'une autre part, sur  $T_d$ , on a :

$$|x| - \left| x - \frac{\ell^2}{d^\alpha} \operatorname{sgn}(x) + \frac{\sqrt{2}\ell}{d^{\alpha/2}} z \right| = 2|x| - \frac{\ell^2}{d^\alpha} + \operatorname{sgn}(x) \frac{\sqrt{2}\ell}{d^{\alpha/2}} z.$$

En résumé :

$$\begin{aligned} |x| - \left| x - \frac{\ell^2}{d^\alpha} \operatorname{sgn}(x) + \frac{\sqrt{2}\ell}{d^{\alpha/2}} z \right| &= \left( \frac{\ell^2}{d^\alpha} - \operatorname{sgn}(x) \frac{\sqrt{2}\ell}{d^{\alpha/2}} z \right) (1 - \mathbb{1}_{T_d}(x, z)) \\ &\quad + \left( 2|x| - \frac{\ell^2}{d^\alpha} + \operatorname{sgn}(x) \frac{\sqrt{2}\ell}{d^{\alpha/2}} z \right) \mathbb{1}_{T_d}(x, z). \end{aligned}$$

La deuxième ligne de  $\phi_d(x, z)$  s'écrit :

$$- \frac{\ell^4}{4\ell^2 d^{2\alpha}} \left[ \operatorname{sgn}(x) + \operatorname{sgn} \left( x - \frac{\ell^2}{d^\alpha} \operatorname{sgn}(x) + \frac{\sqrt{2}\ell}{d^{\alpha/2}} z \right) \right]^2 = - \frac{\ell^2}{d^\alpha} (1 - \mathbb{1}_{T_d}(x, z)).$$

Et la troisième :

$$\begin{aligned} \frac{2\sqrt{2}\ell^3}{4} \frac{d^\alpha}{\ell^2 d^{3\alpha/2}} z \left[ \operatorname{sgn}(x) + \operatorname{sgn} \left( x - \frac{\ell^2}{d^\alpha} \operatorname{sgn}(x) + \frac{\sqrt{2}\ell}{d^{\alpha/2}} z \right) \right] \\ = \operatorname{sgn}(x) \frac{\sqrt{2}\ell}{d^{\alpha/2}} z (1 - \mathbb{1}_{T_d}(x, z)) . \end{aligned}$$

En reprenant toutes les lignes du calcul de  $\phi_d$ , on trouve le résultat :

$$\begin{aligned} \phi_d(x, z) &= \left( \frac{\ell^2}{d^\alpha} - \operatorname{sgn}(x) \frac{\sqrt{2}\ell}{d^{\alpha/2}} z - \frac{\ell^2}{d^\alpha} + \operatorname{sgn}(x) \frac{\sqrt{2}\ell}{d^{\alpha/2}} z \right) (1 - \mathbb{1}_{T_d}(x, z)) \\ &\quad + \left( 2|x| - \frac{\ell^2}{d^\alpha} + \operatorname{sgn}(x) \frac{\sqrt{2}\ell}{d^{\alpha/2}} z \right) \mathbb{1}_{T_d}(x, z) , \\ &= \left( 2|x| - \frac{\ell^2}{d^\alpha} + \operatorname{sgn}(x) \frac{\sqrt{2}\ell}{d^{\alpha/2}} z \right) \mathbb{1}_{T_d}(x, z) . \end{aligned}$$

□

*Preuve du lemme 10.* D'après (13),  $(x, z) \in T_d$  si et seulement si :

$$\left( x > 0 \text{ et } x - \frac{\ell^2}{d^\alpha} \operatorname{sgn}(x) + \frac{\sqrt{2}\ell}{d^{\alpha/2}} z \leq 0 \right) \text{ ou } \left( x \leq 0 \text{ et } x - \frac{\ell^2}{d^\alpha} \operatorname{sgn}(x) + \frac{\sqrt{2}\ell}{d^{\alpha/2}} z > 0 \right) .$$

En remplaçant le signe de  $x$  convenablement, on trouve le résultat annoncé. En effet  $(x, z) \in T_d$  si et seulement si :

$$\left( 0 < x \leq \frac{\ell^2}{d^\alpha} - \frac{\sqrt{2}\ell}{d^{\alpha/2}} z \right) \text{ ou } \left( -\frac{\ell^2}{d^\alpha} - \frac{\sqrt{2}\ell}{d^{\alpha/2}} z < x \leq 0 \right) .$$

□

## References

- [1] A. Durmus, S. Le Corff, E. Moulines, and G. Roberts. Optimal scaling of the random walk Metropolis algorithm under  $L_p$  mean differentiability. *Journal of Applied Probability*, 54(4):1233–1260, 2017.
- [2] P. Hall and C. Heyde. *Martingale Limit Theory and its Application*. Probability and Mathematical Statistics. Academic Press, 1980.
- [3] G. Roberts, A. Gelman, and W. Gilks. Weak convergence and optimal scaling of random walk Metropolis algorithms. *The Annals of Applied Probability*, 7(1):110–120, 1997.

- [4] G. Roberts and J. Rosenthal. Optimal scaling of discrete approximations to Langevin diffusions. *J. R. Statist. Soc. B*, 60:255–268, 1997.
- [5] G. O. Roberts and R. L. Tweedie. Exponential convergence of langevin distributions and their discrete approximations. *Bernoulli*, 2(4):341–363, 12 1996.
- [6] L. C. G. Rogers and D. Williams. *Diffusions, Markov processes, and martingales. Vol. 2*. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, 2000. Itô calculus, Reprint of the second (1994) edition.
- [7] L. Tierney. Markov chains for exploring posterior distributions. *Ann. Statist.*, 22(4):1701–1728, 12 1994.