Sorbonne Université 2022-2023
P. Jiménez pablo.jimenez@sorbonne-universite.fr

Sciences des Données
Groupe 11.2

Exercice 1.5 : jeu de Passe Dix
Guide pour chercher l'exercice

Au jeu de Passe Dix, on jette trois dés. La partie est gagnée si le total des points montrés est (strictement) supérieur à 10. Quelle est la probabilité de gagner ?

Indication : On pourra montrer et utiliser le fait que l'application

$$\Phi : \begin{cases} \{1, \ldots, 6\}^3 & \longrightarrow & \{1, \ldots, 6\}^3 \\ (a, b, c) & \longmapsto & (7-a, 7-b, 7-c) \end{cases}$$

est une bijection.

En arrivant du lycée, on n'a pas toujours été confronté à un exercice avec un énoncé si court. Trois phrases à peine constituent l'énoncé, et ensuite une indication qui peut sembler mystérieuse, remplie de symboles qui ne font pas appel aux termes de l'énoncé. Comment faire face à cette adversité ? J'ai essayé de me mettre à votre place, en décomposant *étape par étape* tout ce qui se passe dans ma tête quand je raisonne sur un exercice comme celui-ci. Vous trouverez des questions intermédiaires numérotées et des commentaires entre les questions.

Comment chercher l'exercice ?

Avant de voir l'indication, on lit l'énoncé. On parle de trois dés et d'un jeu. La question ensuite parle de calculer une probabilité de gagner.

Comment calculer cette probabilité s'il n'y a pas une seule définition mathématique dans l'énoncé ?

1 Modélisation

Il faut commencer par une étape dite de *modélisation*, ça correspond à traduire le problème écrit en français dans un problème décrit en *termes mathématiques*. C'est la seule façon pour qu'on puisse y apporter une réponse mathématique.

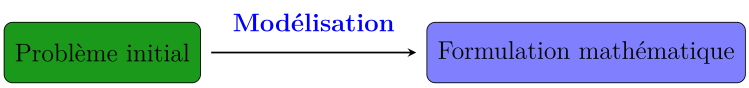

Figure 1 – Première étape vers la résolution : la modélisation

C'est comme si quelqu'un vous pose une question en hongrois, et on vous demande de répondre en français. Vous pouvez commencer par *traduire* la question en français avant d'y répondre.

On commence par donner un nom à l'issue de chacun des dés, disons X, Y, Z sont les issues des dés. On dit que ce sont des *variables aléatoires*.

1. Quelles valeurs peuvent prendre les variables X, Y et Z ?

Ensuite, il faut savoir donner une probabilité à chacune des issues possibles pour X, Y, Z. Le meilleure stratégie, si possible, c'est de donner la *loi jointe*, c'est-à-dire la loi du triplet (X, Y, Z).

2. Quelle hypothèse peut-on faire sur la loi de (X, Y, Z) ? En d'autres termes, pour (a, b, c) une issue possible du triplet (X, Y, Z), quelle est la probabilité $\mathbb{P}((X, Y, Z) = (a, b, c))$?

Les réponses aux questions ci-dessus consistent à comprendre les *sous-entendus* de l'énoncé. Un exemple serait que, sauf mention du contraire, l'on suppose que nos dés sont des dés cubiques, équilibrés, avec les faces "classiques". Si on arrive à répondre à ces deux questions, on est munis des outils nécessaires pour interpréter le jeu dans le contexte mathématique que l'on s'est donné.

3. Exprimer la phrase *"le total des points montrés est (strictement) supérieur à 10"* en un évènement qui fasse intervenir (X, Y, Z) (i.e. un ensemble de valeurs possibles pour (X, Y, Z)). On appellera cet ensemble de valeurs possibles A.

On a construit des objets mathématiques qui correspondent aux termes du sujet. On peut maintenant s'intéresser à la question posée par l'énoncé.

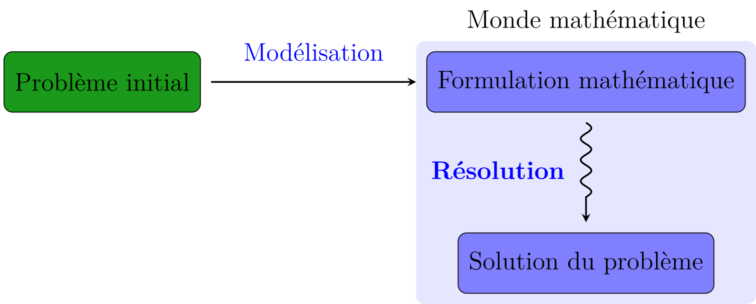

FIGURE 2 – Deuxième étape : résoudre le problème mathématique posé

4. Exprimer la *probabilité de gagner* au jeu de passe dix avec les objets définis précédemment. Arrivez-vous à la calculer directement ?

2 Premiers calculs

Précision calculatoire : Pour calculer la probabilité d'un évènement A, connaissant la loi du triplet (X, Y, Z), la formule générale est

$$\mathbb{P}\left((X, Y, Z) \in A\right) = \sum_{(a,b,c)\in A} \mathbb{P}\left((X, Y, Z) = (a, b, c)\right) .$$

Si l'évènement A est "grand", on peut chercher à regrouper les $(a, b, c) \in A$ selon leur probabilité. Ensuite, il faut compter combien de triplets de A ont cette même probabilité d'occurence. On définit $E \subset [0,1]$ l'ensemble des probabilités possibles, alors ces considérations reviennent à faire le changement d'indice suivant,

$$\begin{aligned}\sum_{(a,b,c)\in A} \mathbb{P}\left((X,Y,Z)=(a,b,c)\right) &= \sum_{x\in E} \sum_{\substack{(a,b,c)\,\in\, A \\ \mathbb{P}((X,Y,Z)\,=\,(a,b,c))\,=\,x}} \mathbb{P}\left((X,Y,Z)=(a,b,c)\right) \\ &= \sum_{x\in E} x\left|\{(a,b,c)\in A \,:\, \mathbb{P}((X,Y,Z)=(a,b,c))=x\}\right|,\end{aligned}$$

où l'on a noté le *cardinal* d'un ensemble fini B par $|B|$.
Précision sur ce calcul : Si ce changement d'indice est allé trop vite pour vous, et vous voulez vérifier qu'il s'agit bien d'une égalité entre les deux sommes à la première ligne, je vous invite à montrer que pour chaque triplet $(a,b,c)\in A$ qui apparaît dans la somme de gauche, soit il apparaît aussi exactement une fois dans la double somme de droite, soit il est de probabilité nulle, i.e. $\mathbb{P}((X,Y,Z)=(a,b,c))=0$. Ensuite, il faut montrer que tout triplet qui apparaît dans la somme de droite apparaît bien exactement une fois dans celle de gauche.

Maintenant, si vous avez bien répondu aux questions précédentes, vous devriez trouver que E est un *singleton*, c'est-à-dire qu'il s'écrit de la forme $E=\{x\}$, ou encore qu'il a une seule valeur.

A cette étape, on a réussi à réduire l'exercice à compter le nombre d'élèments dans A. On n'a pas trouvé la solution, mais on s'y approche !

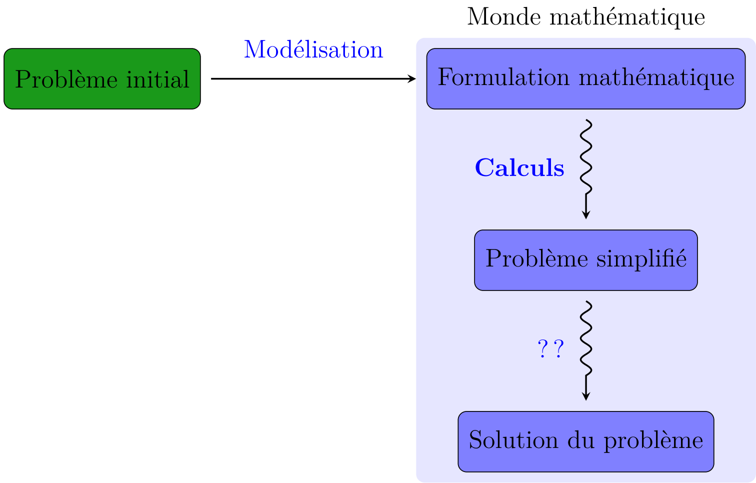

Figure 3 – Deuxième étape bis : la résolution est plus compliquée que prévu

C'est ici que l'indication va être utile.

3 Démontrer l'indication

Maintenant que l'on a fini l'étape de modélisation, les ensembles de départ et d'arrivée de la fonction Φ devraient être familiers.

5. Rappeler la définition d'une bijection.
6. Pour $(a,b,c)\in\{1,\ldots,6\}^3$, calculez un triplet $(d,e,f)\in\{1,\ldots,6\}^3$ tel que $\Phi(d,e,f)=(a,b,c)$.

7. Exprimer $\Phi^{-1} : \{1, \ldots, 6\}^3 \to \{1, \ldots, 6\}^3$, la fonction inverse de Φ.

8. Conclure par rapport à l'indication.

4 Se servir de l'indication

Pour se servir de l'indication, on n'a pas strictement besoin de comprendre son rôle du point de vue de la modélisation, mais ça peut nourrir notre intuition. Les questions naturelles que l'on se pose sont :

- Pourquoi s'intéresse-t-on à Φ dans le contexte du jeu de Passe Dix ?

Pour y répondre on peut se poser d'autres questions, plus précises, comme celles qui suivent.

- Quelle transformation effectue-t-on sur les dés si à chaque issue (X, Y, Z) on lui associe plutôt $\Phi(X, Y, Z)$?

- Comment cette transformation influe-t-elle sur l'issue de la partie du jeu de Passe Dix ?

En répondant à cette dernière question, on commence à comprendre l'intérêt de cette fonction. Essayez de répondre aux questions suivantes.

9. Déterminer $B = \Phi(A)$, l'image par Φ de A. Décrivez-le d'autant de façons que possible.

10. Déterminer les ensembles suivants $A \cup B \quad , \qquad A \cap B$.

11. Quel est le cardinal de B ? Si vous ne pouvez pas le calculer, vous pouvez l'exprimer en fonction du cardinal de A, en utilisant le fait que Φ est une bijection.

12. Calculer le cardinal de $A \cup B$ et en déduire le cardinal de A.

Après résoudre le problème mathématique posé, pour conclure l'exercice, il faut *interpréter* la réponse mathématique dans la terminologie du problème de départ.

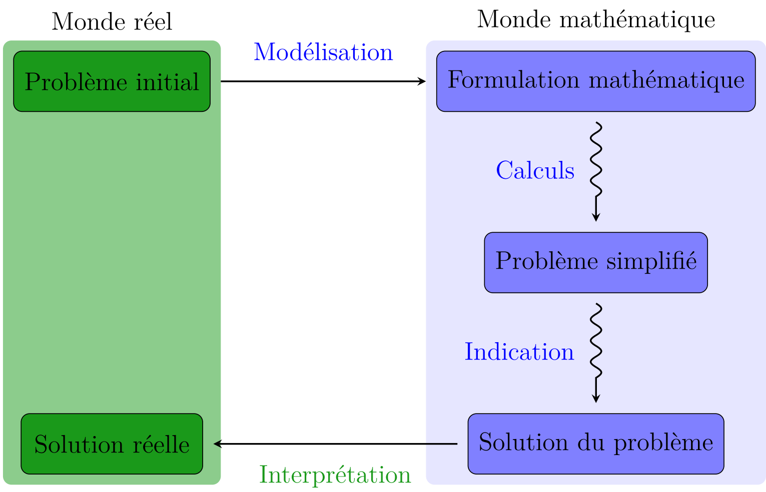

FIGURE 4 – Troisième étape : interprétation du résultat mathématique

13. En utilisant la question précédente et la conclusion de la partie 1, répondre à la question de l'énoncé.