C. R. Acad. Sci. Paris, t. 332, Série I, p. 587–592, 2001
Problèmes mathématiques de la mécanique/*Mathematical Problems in Mechanics*

Une justification partielle du modèle de plaque en flexion par Γ-convergence

Olivier PANTZ

Laboratoire d'analyse numérique, Université Pierre-et-Marie-Curie, boîte courrier 187, 75252 Paris cedex 05, France
Courriel : pantz@ann.jussieu.fr

(Reçu et accepté le 15 janvier 2001)

Résumé. On considère un solide tridimensionnel cylindrique formé d'un matériau de Saint Venant–Kirchhoff dont on fait tendre l'épaisseur vers zéro. Après changement d'échelle, les quasi-minimiseurs de l'énergie élastique convergent vers des minimiseurs de la Γ-limite de l'énergie tridimensionnelle. Pour des forces volumiques de l'ordre de grandeur du carré de l'épaisseur, quitte à effectuer des restrictions sur l'ensemble des déformations admissibles, on montre que la Γ-limite de l'énergie est minorée par l'énergie de flexion non linéaire obtenue, grâce à un calcul formel, par Fox, Raoult et Simo (1993). D'autre part, on obtient l'égalité des deux fonctionnelles pour les déformations de classe C^2. © 2001 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

On the justification of the nonlinear inextensional plate model

Abstract. *We consider a cylindrical three-dimensional body, made of a St Venant–Kirchhoff material, and we let its thickness go to zero. After a change of scale, the quasi-minimizers of the elastic energy converge towards minimizers of the* Γ*-limit of the three-dimensional energy. For body force densities of the order of the square of the thickness, with appropriate restrictions on the set of admissible deformations, we show that the* Γ*-limit is bounded below by the nonlinear flexion energy obtained by Fox, Raoult and Simo* (1993)*. We also prove the equality for deformations of class* C^2. © 2001 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Abridged English version

For all $\varepsilon > 0$, let $\Omega_\varepsilon = \omega \times]-\varepsilon, \varepsilon[$, where ω is an open, bounded, regular subset of $\mathbb{R}^2$, be the reference configuration of the plate. Let W be the stored energy function. For a Saint Venant–Kirchhoff material, $W(\mathrm{D}\psi) = \frac{1}{2}\mathbb{C}^{ijk\ell}E_{ij}(\mathrm{D}\psi)E_{k\ell}(\mathrm{D}\psi)$, where $E(\mathrm{D}\psi) = \frac{1}{2}\left(D\psi^{\mathrm{T}}\mathrm{D}\psi - I\right)$ is the Green–St Venant tensor, $\mathbb{C}^{ijk\ell} = \lambda\delta^{ij}\delta^{k\ell} + \mu(\delta^{ik}\delta^{j\ell} + \delta^{i\ell}\delta^{jk})$, λ et μ are the Lamé moduli, assumed to be independent of the thickness 2ε and such that $\mu > 0$ and $\lambda \geqslant 0$. We define the set of admissible deformations as

$$V_\varepsilon^\phi = \big\{\psi^\varepsilon \in \mathrm{W}^{1,4}\big(\Omega_\varepsilon;\mathbb{R}^3\big) : \psi^\varepsilon \text{ is a } \mathrm{C}^1\text{-diffeomorphism on } R(x,\varepsilon)\cap\Omega_\varepsilon \text{ for all } x\in\Omega_\varepsilon;$$
$$\big\|E_{\psi^\varepsilon}(x)\big\| < \delta \text{ for all } x\in\Omega_\varepsilon;\ \psi^\varepsilon(x) = x \text{ on } \Gamma_\varepsilon^\phi\big\},$$

Note présentée par Philippe G. CIARLET.

S0764-4442(01)01875-4/FLA
© 2001 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés

where $\Gamma_\varepsilon^\phi = \partial\Omega_\varepsilon \cap \partial(\omega_\phi \times]-\varepsilon,\varepsilon[)$ is the subset of $\partial\Omega_\varepsilon$ where the plate is clamped, δ is a small enough constant and $R(x,\varepsilon)$ is the cube centered on x with edges of length 2ε parallel to the axes. If the plate is submitted to body force densities f_ε, the energy of a deformation $\psi^\varepsilon : \Omega_\varepsilon \to \mathbb{R}^3$ is defined by

$$J_\varepsilon(\psi^\varepsilon) = \begin{cases} \displaystyle\int_{\Omega_\varepsilon} W(\mathrm{D}\psi^\varepsilon) - \psi^\varepsilon \cdot f_\varepsilon \,\mathrm{d}x & \text{for } \psi^\varepsilon \in V_\varepsilon^\phi, \\ +\infty & \text{for } \psi^\varepsilon \notin V_\varepsilon^\phi. \end{cases} \tag{1}$$

The purpose of this Note is to study the behavior of diagonal minimizing sequences φ^ε as the thickness goes to zero when the volume force densities are of the order of the square of the thickness. More specifically, we assume that $J_\varepsilon(\varphi^\varepsilon) \leqslant \inf_{\psi\in \mathrm{L}^4(\Omega_\varepsilon;\mathbb{R}^3)} J_\varepsilon(\psi) + h(\varepsilon)$ with $\varepsilon^{-3}h(\varepsilon) \to 0$ when $\varepsilon \to 0$. To this effect, it is convenient to rescale the problem. We set $\Omega = \Omega_1$ and define a rescaling operator $\pi(\varepsilon) : \Omega \to \Omega_\varepsilon$ by $\pi(\varepsilon)(x_1,x_2,x_3) = (x_1,x_2,\varepsilon x_3)$, and the rescaled energies $I(\varepsilon) : \mathrm{L}^4(\Omega) \to \mathbb{R}$ by $I(\varepsilon)(\psi(\varepsilon)) = J_\varepsilon(\psi^\varepsilon)/\varepsilon^3$, where $\psi(\varepsilon) = \psi^\varepsilon \circ \pi(\varepsilon)$. For simplicity we assume that $\varepsilon^{-2} f_\varepsilon \circ \pi(\varepsilon) = f$ is independent of ε. We set $\varphi(\varepsilon) = \varphi^\varepsilon \circ \pi(\varepsilon)$. The asymptotic behavior of $\varphi(\varepsilon)$ is characterized by the Γ-limit I_0 of the sequence $I(\varepsilon)$ for the strong topology of $\mathrm{L}^4(\Omega)$; *cf.* De Giorgi and Franzoni [2]. As the sequence $\varphi(\varepsilon)$ is relatively compact for the topology of $\mathrm{L}^4(\Omega;\mathbb{R}^3)$, its limit points φ are minimizers of the limit energy I_0.

Let $V_F(\omega)$ be the set of isometric deformations of ω with normal to the associated deformed middle surfaces in $\mathrm{H}^1(\omega;S^2)$ and displacement equal to zero on ω_ϕ,

$$V_F(\omega) = \big\{\psi \in \mathrm{W}^{1,\infty}\big(\omega;\mathbb{R}^3\big) : \mathrm{D}\psi^{\mathrm{T}}\mathrm{D}\psi = I_2;\ n(\psi) = \partial_1\psi \wedge \partial_2\psi \in \mathrm{H}^1(\omega);\ \psi(x) = x \text{ on } \omega_\phi\big\}.$$

For all $\psi \in V_F(\omega)$, $n(\psi)$ is the normal to the deformed surface and $b_{\alpha\beta}(\psi) = \partial_\alpha\psi \cdot \partial_\beta n(\psi)$ is the second fundamental form. We recall the expression of the nonlinear bending energy $J_F(\psi)$ of an isometric deformation ψ (*cf.* Fox, Raoult and Simo [3]),

$$J_F(\psi) = \int_\omega \frac{1}{3}\overline{\mathbb{C}}^{\alpha\beta\gamma\delta} b_{\alpha\beta} b_{\gamma\delta} - f(x)\cdot\psi(x)\,\mathrm{d}x, \quad \text{where } \overline{\mathbb{C}}^{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{2\mu\lambda}{\lambda+2\mu}\,\delta^{\alpha\beta}\delta^{\gamma\delta} + \mu\big(\delta^{\alpha\gamma}\delta^{\beta\delta} + \delta^{\alpha\delta}\delta^{\beta\gamma}\big).$$

We prove the following theorem (*see* [7] for a complete proof).

THEOREM 1. – *For all $\psi^0 \in \mathrm{L}^4(\Omega;\mathbb{R}^3)$ such that $I_0(\psi^0) < +\infty$, there exists $\psi \in V_F(\omega)$ such that $\psi^0(x_1,x_2,x_3) = \psi(x_1,x_2)$ and*

$$I_0\big(\psi^0\big) \geqslant J_F(\psi).$$

Furthermore, if $\psi^0 \in \mathrm{C}^2(\Omega;\mathbb{R}^3)$, then

$$I_0\big(\psi^0\big) = J_F(\psi).$$

It seems to be difficult to completely compute the Γ-limit I_0. This could be achieved if we would prove that regular isometric deformations are dense in $V_F(\omega)$.

Remark 1. – D. Coutand [1] proved the existence of minimizers of J_F over the space of isometric deformations H^2. It is not known whether this space is equal to V_F.

Remark 2. – In the definition of V_ε^ϕ, we make assumptions on the set of admissible deformations. The introduction of such assumptions is necessary to obtain a correct bending energy. This is due to the fact that compressing a Saint Venant–Kirchhoff material to zero volume does not require any energy. However, part of the results remain valid with weaker restrictions.

Dans cette Note, on cherche à déterminer le comportement d'une plaque soumise à des forces volumiques de l'ordre de grandeur du carré de l'épaisseur. Notre approche est basée sur la notion de Γ-convergence déjà utilisée avec succès pour ce problème lorsque les forces volumiques sont indépendantes de l'épaisseur [6]. On adopte la convention de sommation standard sur les indices répétés. Les indices latins prennent les valeurs 1, 2 ou 3, les indices grecs 1 ou 2. On note δ^{ij} et $\delta_{k\ell}$ les symboles de Kronecker. L'ensemble des matrices orthogonales d'ordre n est noté $\mathrm{O}(n)$. Enfin, $R(x,r)$ désigne le cube de centre x, de côtés $2r$, dont les arêtes sont parallèles aux axes de coordonnées.

On rappelle tout d'abord un résultat dû à F. John [4]. Pour toute application ψ de classe C^1, d'un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, on pose $E_\psi = (\mathrm{D}\psi^{\mathrm{T}}\mathrm{D}\psi) - I$. Le champ de tenseurs E_ψ est nul si et seulement si ψ est une isométrie. Réciproquement, F. John a montré que, si E_ψ est petit, ψ est proche d'une isométrie. Pour tout $\delta > 0$, on pose

$$I_{\Omega,\delta} = \big\{\psi : \Omega \to \mathbb{R}^n : \psi \text{ est un } \mathrm{C}^1\text{-difféomorphisme et } \big\|E_\psi(x)\big\| < \delta \text{ pour tout } x \in \Omega\big\}.$$

THÉORÈME (F. John). – *Pour tout $p > 1$, il existe $\delta = \delta(p,n) > 0$, $C = C(p,n)$ tels que si Ω est un cube de $\mathbb{R}^n$, et $\psi \in I_{\Omega,\delta}$, alors il existe une matrice $G \in \mathrm{O}(n)$ telle que*

$$\|\mathrm{D}\psi - G\|_{\mathrm{L}^p(\Omega)} \leqslant C(p,n)\|E_\psi\|_{\mathrm{L}^p(\Omega)}.$$

1. Le problème tridimensionnel

Soit ω un ouvert borné à frontière lipschitzienne de $\mathbb{R}^2$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on définit $\Omega_\varepsilon = \omega \times]-\varepsilon,\varepsilon[$ comme étant la configuration de référence d'un solide constitué d'un matériau de Saint Venant–Kirchhoff de densité d'énergie interne

$$W(\mathrm{D}\psi) = \frac{1}{2}\,\mathbb{C}^{ijk\ell}E_{ij}(\mathrm{D}\psi)E_{k\ell}(\mathrm{D}\psi),$$

où $E(\mathrm{D}\psi) = \frac{1}{2}\,(\mathrm{D}\psi^{\mathrm{T}}\mathrm{D}\psi - I)$ est le tenseur de Green–Saint Venant, $\mathbb{C}^{ijk\ell} = \lambda\delta^{ij}\delta^{k\ell} + \mu(\delta^{ik}\delta^{j\ell} + \delta^{i\ell}\delta^{jk})$, λ et μ sont les coefficients de Lamé supposés indépendants de ε et tels que $\mu > 0$ et $\lambda \geqslant 0$. Soit ω_ϕ un ouvert non vide de ω. On définit l'ensemble des déformations admissibles par

$$V_\varepsilon^\phi = \big\{\psi^\varepsilon \in \mathrm{W}^{1,4}\big(\Omega_\varepsilon;\mathbb{R}^3\big) \ : \psi^\varepsilon \text{ est un } \mathrm{C}^1\text{-difféomorphisme sur } R(x,\varepsilon)\cap\Omega_\varepsilon \text{ pour tout } x \in \Omega_\varepsilon;$$
$$\big\|E_{\psi^\varepsilon}(x)\big\| < \delta \text{ pour tout } x \in \Omega_\varepsilon;\ \psi^\varepsilon(x) = x \text{ sur } \Gamma_\varepsilon^\phi\big\},$$

où $\Gamma_\varepsilon^\phi = \partial\Omega_\varepsilon \cap \partial(\omega_\phi \times]-\varepsilon,\varepsilon[)$ est la partie du bord de Ω_ε sur laquelle la plaque est encastrée et $\delta = \delta(2,3)$, où $\delta(2,3)$ est la constante issue du théorème de F. John rappelé précédemment.

Remarque 1. – Il est absolument nécessaire de restreindre l'ensemble des déformations admissibles afin d'espérer obtenir une énergie de flexion correcte. Ceci est dû au fait qu'il est possible de comprimer un solide constitué d'un matériau de Saint Venant–Kirchhoff avec une énergie nulle. Une partie des résultats présentés reste valable sous des hypothèses plus faibles portant sur l'ensemble des déformations admissibles. Ce travail est à paraître dans [7]. À cet effet, on utilise des estimations dûes à R.V. Kohn [5] du même type que celles obtenues par F. John [4]. Une autre alternative serait d'effectuer la même analyse pour un solide constitué d'un matériau hyperélastique plus réaliste.

Si Ω_ε est soumis à des forces volumiques $f_\varepsilon \in \mathrm{L}^1(\Omega_\varepsilon;\mathbb{R}^3)$, le problème d'équilibre tridimensionnel consiste à minimiser sur $\mathrm{L}^4(\Omega_\varepsilon)$ l'énergie $J_\varepsilon : \mathrm{L}^4(\Omega_\varepsilon) \to \overline{\mathbb{R}}$ définie par

$$J_\varepsilon(\psi^\varepsilon) = \begin{cases} \displaystyle\int_{\Omega_\varepsilon} W(\mathrm{D}\psi^\varepsilon) - \psi^\varepsilon \cdot f_\varepsilon \,\mathrm{d}x & \text{pour } \psi^\varepsilon \in V_\varepsilon^\phi, \\ +\infty & \text{pour } \psi^\varepsilon \notin V_\varepsilon^\phi. \end{cases} \tag{2}$$

Ce problème n'a en général pas de solution exacte mais admet toujours des minimiseurs approchés. Le but de cette Note est de déterminer partiellement le comportement asymptotique du corps élastique lorsque l'épaisseur 2ε tend vers zéro sous l'hypothèse que les forces appliquées sont telles que $f^\varepsilon = \varepsilon^2 f$, avec f indépendant de ε. On s'intéresse à des suites diagonales extraites des suites minimisantes de J_ε. On note φ^ε une famille de déformations telles que

$$J_\varepsilon(\varphi^\varepsilon) \leqslant \inf_{\psi\in \mathrm{L}^4(\Omega_\varepsilon;\mathbb{R}^3)} J_\varepsilon(\psi) + h(\varepsilon),$$

avec $\varepsilon^{-3}h(\varepsilon) \to 0$ lorsque $\varepsilon \to 0$.

2. Une formulation équivalente

Les fonctionnelles J_ε sont définies sur les espaces $\mathrm{L}^4(\Omega_\varepsilon)$. On effectue un changement d'échelle dans le but de se ramener à des fonctionnelles définies sur des espaces indépendants de l'épaisseur. À cet effet, on pose $\Omega = \Omega_1$ et on définit $\pi(\varepsilon) : \Omega \to \Omega_\varepsilon$ par $\pi(\varepsilon)(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, \varepsilon x_3)$, puis $I(\varepsilon) : \mathrm{L}^4(\Omega) \to \mathbb{R}$ par $I(\varepsilon)(\psi(\varepsilon)) = J_\varepsilon(\psi^\varepsilon)/\varepsilon^3$, où $\psi(\varepsilon) = \psi^\varepsilon \circ \pi(\varepsilon)$.

De la famille $I(\varepsilon)$, on peut extraire une sous-suite $I(\varepsilon_n)$ Γ-convergente pour la topologie $\mathrm{L}^4(\Omega)$. On note I_0 sa Γ-limite. Par la suite, on notera ε en lieu et place de ε_n. On a

$$I(\varepsilon)\big(\varphi(\varepsilon)\big) \leqslant \inf_{\psi\in \mathrm{L}^4(\Omega)} I(\varepsilon)(\psi) + h(\varepsilon),$$

où $\varphi(\varepsilon) = \varphi^\varepsilon \circ \pi(\varepsilon)$. Comme la suite de déformations $\varphi(\varepsilon)$ est bornée dans $\mathrm{W}^{1,4}(\Omega;\mathbb{R}^3)$, elle admet des valeurs d'adhérence pour la topologie $\mathrm{L}^4(\Omega;\mathbb{R}^3)$ forte. De plus, si φ est une de ces valeurs d'adhérence, alors

$$I_0(\varphi) = \inf_{\psi\in \mathrm{L}^4(\Omega;\mathbb{R}^3)} I_0(\psi).$$

En d'autres termes, les valeurs d'adhérence des quasi-minimiseurs de l'énergie élastique sont des minimiseurs de la Γ-limite I_0, qui permet donc de caractériser le comportement du solide lorsque l'épaisseur tend vers zéro (*voir* De Giorgi et Franzoni [2]).

3. Un calcul partiel de la Γ-limite

On note $V_F(\omega)$ l'ensemble des déformations isométriques de ω dont la normale à la surface déformée associée appartient à $\mathrm{H}^1(\omega;\mathrm{S}^2)$, vérifiant les conditions imposées à la plaque sur ω_ϕ,

$$V_F(\omega) = \big\{\psi \in \mathrm{W}^{1,\infty}\big(\omega;\mathbb{R}^3\big) : \mathrm{D}\psi^{\mathrm{T}}\mathrm{D}\psi = I_2;\ n(\psi) = \partial_1\psi \wedge \partial_2\psi \in \mathrm{H}^1(\omega);\ \psi(x) = x \text{ sur } \omega_\phi\big\}.$$

Pour tout $\psi \in V_F(\omega)$, $n(\psi)$ désigne la normale à la surface déformée et $b_{\alpha\beta}(\psi) = \partial_\alpha\psi \cdot \partial_\beta n(\psi)$ sa deuxième forme fondamentale. On rappelle l'expression de l'énergie de flexion non linéaire $J_F(\psi)$ d'une déformation isométrique ψ (*voir* [3])

$$J_F(\psi) = \int_\omega \frac{1}{3}\,\overline{\mathbb{C}}^{\alpha\beta\gamma\delta} b_{\alpha\beta} b_{\gamma\delta} - f(x)\cdot\psi(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \overline{\mathbb{C}}^{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{2\mu\lambda}{\lambda+2\mu}\,\delta^{\alpha\beta}\delta^{\gamma\delta} + \mu\big(\delta^{\alpha\gamma}\delta^{\beta\delta} + \delta^{\alpha\delta}\delta^{\beta\gamma}\big).$$

Remarque 2. – D. Coutand [1] a prouvé l'existence de minimiseurs de la fonctionnelle J_F sur l'ensemble des déformations isométriques $\mathrm{H}^2(\omega;\mathbb{R}^3)$, espace a priori différent de V_F. À notre connaissance, la question consistant à déterminer si ces espaces sont identiques est ouverte.

THÉORÈME 3.1. – *Pour tout $\psi^0 \in \mathrm{L}^4(\Omega;\mathbb{R}^3)$ tel que $I_0(\psi^0) < +\infty$, il existe $\psi : \omega \to \mathbb{R}^3$ tel que $\psi^0(x_1,x_2,x_3) = \psi(x_1,x_2)$. De plus, $\psi \in V_F(\omega)$ et*

$$I_0\big(\psi^0\big) \geqslant J_F(\psi).$$

Enfin, si $\psi^0 \in \mathrm{C}^2(\Omega;\mathbb{R}^3)$, alors

$$I_0\big(\psi^0\big) = J_F(\psi).$$

Une preuve complète de ce théorème est à paraître dans [7]. On donne ici les principales étapes de sa démonstration.

L'ensemble des déformations rigides d'une plaque

$$\mathrm{R}_\sigma = \big\{\gamma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : \gamma(x) = c\cdot x + b;\ c \in \mathrm{M}_{3,2};\ c^{\mathrm{T}}c = I_2;\ b \in \mathbb{R}^3\big\}$$

est canoniquement isomorphe à

$$\mathrm{R}_\Sigma = \big\{\overline{\gamma} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3;\ \overline{\gamma} = \gamma \circ p_2;\ \gamma \in \mathrm{R}_\sigma\big\},$$

où p_2 est la projection de $\mathbb{R}^3$ sur ses deux premières composantes.

LEMME 3.2. – *Il existe $C > 0$ tel que quel que soit $\psi(\varepsilon) \in \mathrm{W}^{1,4}(R_1;\mathbb{R}^3)$, suite convergente dans $\mathrm{L}^4(R_1)$ fort vers ψ^0, il existe $\gamma \in \mathrm{R}_\Sigma$ tel que*

$$\big\|\psi^0 - \gamma\big\|_{\mathrm{L}^2(R_1)} \leqslant C \liminf \left(\frac{\int_{R_\varepsilon} W(\mathrm{D}\psi^\varepsilon)\,\mathrm{d}x}{\varepsilon^3}\right)^{1/2},$$

où $R_\varepsilon =]-1;1[^2 \times]-\varepsilon,\varepsilon[$.

Ce lemme implique notamment que les déformations d'énergie interne nulle sont rigides. Combiné à un argument du type blow-up, ce lemme nous permet d'établir que les déformations d'énergie finie sont des isométries.

PROPOSITION 3.3. – *Soit $\psi^0 \in \mathrm{L}^4(\Omega)$ tel que $I_0(\psi^0) < \infty$, alors il existe $\psi \in \mathrm{W}^{1,4}(\omega)$ telle que $\psi^0(x_1,x_2,x_3) = \psi(x_1,x_2)$. De plus, ψ est une déformation isométrique, c'est-à-dire*

$$\mathrm{D}\psi^{\mathrm{T}}\mathrm{D}\psi = I_2.$$

On considère alors une suite $\psi(\varepsilon)$ convergeant vers ψ^0 dans $\mathrm{L}^4(\Omega;\mathbb{R}^3)$ fort telle que

$$\liminf_\varepsilon J(\varepsilon)\big(\psi(\varepsilon)\big) < +\infty.$$

En utilisant la convexité uniforme de la boule unité de $\mathrm{W}^{1,4}(\Omega;\mathbb{R}^3)$, on déduit de la proposition 3.3 que $\psi(\varepsilon)$ converge vers ψ^0 en norme $\mathrm{W}^{1,4}(\Omega;\mathbb{R}^3)$ fort. Si $h(\varepsilon) = \mathrm{D}\psi^\varepsilon \circ \pi(\varepsilon)$, on obtient donc $h_\alpha(\varepsilon) \to \partial_\alpha\psi$ dans $\mathrm{L}^4(\Omega;\mathbb{R}^3)$ fort et par suite $h_3(\varepsilon) \to n = \partial_1\psi^0 \wedge \partial_2\psi^0$ dans $\mathrm{L}^2(\Omega;\mathbb{R}^3)$ fort. Pour tout α et β, la suite $E_{\alpha\beta}(\psi(\varepsilon))$ est bornée dans $\mathrm{L}^2(\Omega;M_3)$. Quitte à extraire une sous-suite, on peut donc supposer qu'elle est faiblement convergente. En utilisant la convergence de $h_3(\varepsilon)$ vers n, ainsi que le théorème de F. John, on montre qu'il existe un champ de tenseurs symétriques $w_{\alpha\beta}$ tel que

$$\frac{E_{\alpha\beta}(\varepsilon)}{\varepsilon} \rightharpoonup w_{\alpha\beta}(x_1,x_2) + \frac{x_3}{2}\big(n_{,\alpha}\cdot\psi^0{}_{,\beta} + n_{,\beta}\cdot\psi^0{}_{,\alpha}\big) \quad \text{dans } \mathrm{L}^2(\Omega;\mathbb{R}) \text{ faible.}$$

Pour tout tenseur symétrique F, $0 \leqslant \overline{\mathbb{C}}^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\alpha\beta} F_{\gamma\delta} \leqslant \mathbb{C}^{ijk\ell} F_{ij} F_{k\ell}$. Ainsi,

$$I(\varepsilon)\big(\psi(\varepsilon)\big) \geqslant \int_\Omega \overline{\mathbb{C}}^{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{E_{\alpha\beta}(\varepsilon)}{\varepsilon} \frac{E_{\gamma\delta}(\varepsilon)}{\varepsilon} - f \cdot \psi(\varepsilon)\, \mathrm{d}x.$$

On conclut que $I_0(\psi^0) \geqslant J_F(\psi)$ par un simple passage à la limite et par intégration en x_3. Afin d'obtenir l'égalité, il reste à prouver l'inégalité inverse, qui est relativement aisée à obtenir pour les isométries de classe C^2. L'analyse du cas général achoppe sur des problèmes de nature essentiellement géométrique. La densité des déformations isométriques et régulières dans l'espace $V_F(\omega)$ permettrait de conclure. Si cette propriété peut sembler naturelle, elle n'a rien d'évident et reste à établir ou à réfuter.

Références bibliographiques

[1] Coutand D., Existence d'un minimiseur pour le modèle « proprement invariant » de plaque « en flexion » non linéairement élastique, C.R. Acad. Sci. Paris, Série I 324 (2) (1997) 245–248.

[2] De Giorgi E., Franzoni T., Su un tipo di convergenza variazionale, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8) 58 (6) (1975) 842–850.

[3] Fox D.D., Raoult A., Simo J.C., A justification of nonlinear properly invariant plate theories, Arch. Rational Mech. Anal. 124 (2) (1993) 157–199.

[4] John F., Bounds for deformations in terms of average strains, in: Inequalities, III (Proc. Third Sympos., Univ. California, Los Angeles, Calif., 1969 dedicated to the memory of Theodore S. Motzkin), Academic Press, New York, 1972, pp. 129–144 .

[5] Kohn R.V., New integral estimates for deformations in terms of their nonlinear strains, Arch. Rational Mech. Anal. 78 (2) (1982) 131–172.

[6] Le Dret H., Raoult A., The nonlinear membrane model as variational limit of nonlinear three-dimensional elasticity, J. Math. Pures Appl. (9$^{\mathrm{e}}$ série) 74 (6) (1995) 549–578.

[7] Pantz O., Quelques problèmes de modélisation en élasticité non linéaire, Thèse de doctorat, Université Pierre-et-Marie-Curie, 2001.