

Cours n°2

Chaînes de Markov et Processus de Poisson

Mercredi 23 Septembre 2009

<http://www.cmap.polytechnique.fr/~probert>

2009 — <http://www.cmap.polytechnique.fr/~probert>

Cours MAP 554: Réseaux de Communication, Algorithmes et Probabilités

Table des matières

1	Propriété de Markov fort	3
2	Propriété de Markov fort	7
3	Loi de Poisson Loi exponentielle	15
4	Le processus de Poisson	32
5	Propriétés des processus de Poisson	38
6	Propriétés temporelles	49

2009 — <http://www.cmap.polytechnique.fr/~probert>

Cours MAP 554: Réseaux de Communication, Algorithmes et Probabilités

Rappels

Passé avant l'instant t :

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{P}(\{M_0 = x_0, M_1 = x_1, \dots, M_t = x_t\}, x_0, \dots, x_t \in \mathcal{S})$$

Propriété de Markov :

$\forall A \subset \mathcal{S}, n \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}(M_{n+1} \in A \mid \mathcal{F}_n) = \mathbb{P}(M_{n+1} \in A \mid M_n)$$

2009 — <http://www.cmap.polytechnique.fr/~probert>

2009 — <http://www.cmap.polytechnique.fr/~probert>

1. Propriété de Markov fort

Rappels (II)

Une chaîne de Markov est déterminée par

1. ν la loi initiale : $\mathbb{P}(M_0 = x_0) = \nu(x_0)$,
2. sa matrice de transition $P = (p(x, y))$

$$p(x, y) = \mathbb{P}(M_1 = y \mid M_0 = x).$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(M_0 = x_0, M_1 = x_1, \dots, M_n = x_n) \\ = \nu(x_0)p(x_0, x_1)p(x_1, x_2) \cdots p(x_{n-1}, x_n). \end{aligned}$$

Rappels (III)

Une probabilité $(\pi(x) : x \in \mathcal{S})$ sur \mathcal{S} est invariante pour la matrice de transition $(p(x, y))$ si

$$\pi(x) = \sum_y \pi(y)p(y, x), \quad \forall x \in \mathcal{S}.$$

Si (M_n) est irréductible et apériodique avec une proba. invariante π , alors M_n converge en distribution vers π :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_y(M_n = x) = \pi(x), \quad \forall x \in \mathcal{S}$$

2. Propriété de Markov fort

Définition : Les temps d'arrêts

(Poly. page 93)

T variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ est un temps d'arrêt si,

$$\{T = n\} \in \mathcal{F}_n, \quad n \geq 1,$$

Traduction :

Un observateur qui observe les états successifs de la trajectoire de (M_n) , sait s'arrêter à l'instant T .

Exemples de temps d'arrêt

- $p \geq 0$, $T \equiv p$;
- Temps d'atteinte d'un sous-ensemble :
 $F \subset \mathcal{S}$,

$$T_F = \inf\{n : M_n = F\}$$

si $x \in \mathcal{S}$,

$$T_x = \inf\{n : M_n = x\}$$

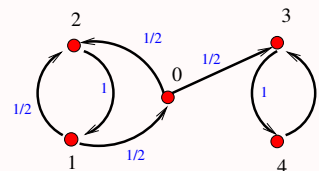
- Si \mathcal{S} fini : Temps de recouvrement

$$\tau = \inf\{n : \{M_0, M_1, \dots, M_n\} = \mathcal{S}\}$$

2009 — <http://www.cmap.polytechnique.fr/~probert>

Cours MAP 554: Réseaux de Communication, Algorithmes et Probabilités

Contre-exemple



$$M_0 = 0, \quad L = \sup\{n : M_n = 0\}$$

n'est pas un temps d'arrêt.

2009 — <http://www.cmap.polytechnique.fr/~probert>

Cours MAP 554: Réseaux de Communication, Algorithmes et Probabilités

Le passé avant un temps d'arrêt T

$$\mathcal{F}_T = \bigcup_{t=0}^{+\infty} \bigcup_{x_0, \dots, x_t \in \mathcal{S}}$$

$$\mathcal{P}(\{M_0 = x_0, M_1 = x_1, \dots, M_t = x_t, T \geq t\})$$

\mathcal{F}_T : tous les événements avant l'instant T

2009 — <http://www.cmap.polytechnique.fr/~probert>

Markov fort

Une chaîne de Markov (M_n) (Poly. page 94)

vérifie toujours la propriété de Markov fort :

Si T temps d'arrêt :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(M_{T+n} = y \mid T < +\infty, M_T = x_T, \dots, M_0 = x_0) \\ = \mathbb{P}(M_{T+n} = y \mid T < +\infty, M_T = x_T). \end{aligned}$$

Propriété de Markov à des instants non déterministes : les temps d'arrêt.

2009 — <http://www.cmap.polytechnique.fr/~probert>

Markov fort (II)

Traduction :

$$\begin{aligned} P(M_{T+n} \in \cdot \mid \mathcal{F}_T, T < +\infty) \\ = \mathbb{P}(M_{T+n} \in \cdot \mid M_T, T < +\infty) \end{aligned}$$

Exemple

Si $x \in \mathcal{S}$, $T_x = \inf\{n : M_n = x\}$

En supposant $T_x < +\infty$ \mathbb{P} -p.s.

Markov fort :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(M_{T_x+n} \in A \mid M_{T_x}, \dots, M_0) \\ = \mathbb{P}(M_{T_x+n} \in A \mid M_{T_x} = x) \\ = \mathbb{P}(M_n \in A \mid M_0 = x). \end{aligned}$$

La suite (M_{n+T_x}) est indépendante des variables M_{T_x-1}, \dots, M_0 .

Décomposition en cycles indépendants.

3. Loi de Poisson Loi exponentielle

Loi de Poisson

Définition

(Poly. page 136)

Définition. Une variable aléatoire ν suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, si pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(\nu = n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$$

Moyenne :

$$\mathbb{E}(\nu) = \sum_{n \in \mathbb{N}} n \mathbb{P}(\nu = n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} n \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = \lambda$$

Modèles d'accès à un réseau de communication

Le cadre :

- N stations.
- Stations indépendantes.

p_N : Proba. d'émission par station par unité de temps;

Hypothèse : N grand et p_N petit.

Variance :

$$\mathbb{E}(\nu^2) - \mathbb{E}(\nu)^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} n^2 \mathbb{P}(\nu = n) - \lambda^2 = \lambda$$

Fonction génératrice : $|u| \leq 1$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(u^\nu) &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(\nu = n) u^n \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} u^n = e^{-\lambda(1-u)} \end{aligned}$$

Rayon de convergence infini.

ν : le nombre d'émissions par unité de temps.

$$\nu = \sum_{i=1}^N \mathbf{1}_{E_i}$$

E_i : la station i émet un message.

Hypothèse $p_N = \mathbb{P}(E_1) \sim \lambda/N$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\nu = k) &= C_N^k \left(\frac{\lambda}{N}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{N}\right)^{N-k} \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} \times \frac{N!}{(N-k)! N^k} \times e^{(N-k) \log(1-\lambda/N)} \sim \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \end{aligned}$$

ν suit une loi de Poisson de paramètre λ .

Propriétés générales

Addition (Poly. page 137)

Si pour $i = 1, 2$,– X_i : loi de Poisson de paramètre λ_i ;– X_1 et X_2 sont indépendantes ;alors $X_1 + X_2$ loi de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(u^{X_1+X_2}\right) &= \mathbb{E}\left(u^{X_1}\right) \mathbb{E}\left(u^{X_2}\right) \\ &= \exp(-(\lambda_1 + \lambda_2)(1 - u)),\end{aligned}$$

2009 — <http://www.cmap.polytechnique.fr/~probert>

Cours MAP 554: Réseaux de Communication, Algorithmes et Probabilités

Propriétés générales (II)

Effacement : Si

– X loi de Poisson de paramètre λ ;– (B_i) Bernoulli i.i.d. paramètre p $B_i \in \{0, 1\}$ et $\mathbb{P}(B_1 = 1) = p$,alors $S = B_1 + B_2 + \dots + B_X$ suit une loi de Poisson de paramètre λp .2009 — <http://www.cmap.polytechnique.fr/~probert>

Cours MAP 554: Réseaux de Communication, Algorithmes et Probabilités

Propriétés générales (III)

Effacement (II) : Si

– X loi de Poisson de paramètre λ ;– (B_i) Bernoulli i.i.d. paramètre p $B_i \in \{0, 1\}$ et $\mathbb{P}(B_1 = 1) = p$,

alors

 $B_1 + B_2 + \dots + B_X$ et $X - (B_1 + B_2 + \dots + B_X)$

sont des variables indépendantes,

de loi de Poisson de paramètre λp et $\lambda(1-p)$.2009 — <http://www.cmap.polytechnique.fr/~probert>

Loi des petits nombres

Cas indépendant (Poly. page 137)

Si B_i^n , $1 \leq i \leq N_n$ Bernoulli indépendantes

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_i \mathbb{P}(B_i^n = 1) = 0$;

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_i \mathbb{P}(B_i^n = 1) = \lambda < +\infty$,

alors

$$S_n = B_1^n + B_2^n + \dots + B_{N_n}^n \xrightarrow{\text{Loi}} \text{Pois}(\lambda)$$

2009 — <http://www.cmap.polytechnique.fr/~probert>

Avantage de la cv vers une loi de Poisson

Simplification d'expressions combinatoires complexes par une fonctionnelle de la loi de Poisson.

2009 — <http://www.cmap.polytechnique.fr/~probert>

Cours MAP 554: Réseaux de Communication, Algorithmes et Probabilités

La loi exponentielle

2009 — <http://www.cmap.polytechnique.fr/~probert>

Cours MAP 554: Réseaux de Communication, Algorithmes et Probabilités

Définition

(Poly. page 139)

Pour $\lambda > 0$, X suit une distribution exponentielle de paramètre λ si

$$\mathbb{E}(f(X)) = \int_0^{+\infty} f(x) \lambda e^{-\lambda x} dx,$$

$$\mathbb{P}(X \geq x) = \exp(-\lambda x), \quad x \geq 0.$$

2009 — <http://www.cmap.polytechnique.fr/~probert>

Moyenne :

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}$$

Variance :

$$\mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

Transformée de Laplace :

$$\mathbb{E}(e^{-\xi X}) = \frac{\lambda}{\lambda + \xi}, \quad \operatorname{Re}(\xi) \geq 0.$$

2009 — <http://www.cmap.polytechnique.fr/~probert>

Modèles d'accès à un réseau de communication (II)

Le cadre :

– Faible probabilité d'émission par station par unité de temps : $p_N = \lambda/N$.

τ_N première unité de temps où une station fixée émet un message.

$$\mathbb{P}(\tau_N \geq k) = (1 - \lambda/N)^k,$$

$$\mathbb{P}\left(\frac{\tau_N}{N} \geq x\right) = (1 - \lambda/N)^{\lceil Nx \rceil} \sim e^{-\lambda x}$$

$$\frac{\tau_N}{N} \rightarrow X, \text{ où } X \text{ exp. param. } \lambda.$$

2009 — <http://www.cmap.polytechnique.fr/~probert>

Cours MAP 554: Réseaux de Communication, Algorithmes et Probabilités

La propriété d'oubli

Si X v.a. exp para. λ , alors

$$\mathbb{P}(X - x \geq y \mid X \geq x) = e^{-\lambda y} = \mathbb{P}(X \geq y).$$

Preuve :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X - x \geq y \mid X \geq x) &= \frac{\mathbb{P}(X \geq x + y)}{\mathbb{P}(X \geq x)} \\ &= \frac{e^{-\lambda(x+y)}}{e^{-\lambda x}} = e^{-\lambda y}. \end{aligned}$$

Propriété élémentaire mais cruciale.

Seule loi continue avec cette propriété.

2009 — <http://www.cmap.polytechnique.fr/~probert>

Cours MAP 554: Réseaux de Communication, Algorithmes et Probabilités

Les horloges exponentielles

(Poly. page 140)

(E_1, \dots, E_N) , v.a. indép. exponentielles λ_i .

E_i : instant de sonnerie de la i -ième horloge.

La variable

$$\min(E_1, E_2, \dots, E_N)$$

suit une loi exponentielle de paramètre

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_N.$$

L'instant de première sonnerie correspond à une horloge exponentielle.

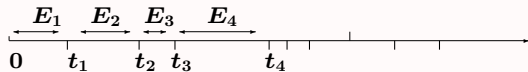
2009 — <http://www.cmap.polytechnique.fr/~probert>

4. Le processus de Poisson

2009 — <http://www.cmap.polytechnique.fr/~probert>

Définition

- (E_i) v.a. i.i.d. exponentielles de par. λ ;
- $t_n = E_1 + \dots + E_n$;

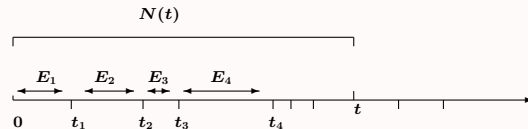


$\{t_n, n \geq 1\}$: Processus de Poisson
d'intensité/paramètre λ .

2009 — <http://www.cmap.polytechnique.fr/~probert>

Cours MAP 554: Réseaux de Communication, Algorithmes et Probabilités

De façon équivalente : f_n croissante $t \rightarrow N(t)$,
– $N(t)$: nombre de points t_n entre 0 et t .



$N(0) = 0$ et $N(t) - N(t-) \in \{0, 1\}$;

$(N(t))$ est la mesure de comptage
du processus de Poisson.

2009 — <http://www.cmap.polytechnique.fr/~probert>

Cours MAP 554: Réseaux de Communication, Algorithmes et Probabilités

Exemple 1

Modèles d'accès à un réseau de communication

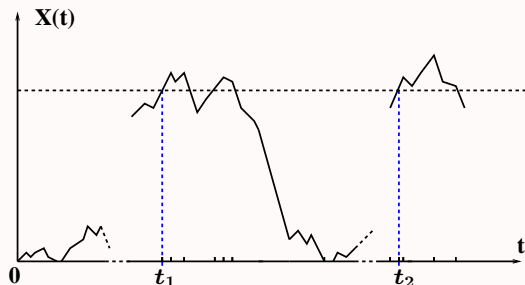
- Le cadre : (Poly. page 149)
- Proba. d'émission par station
par unité de temps : $p_N = \lambda/N$;
 - t_k^N : instant d'émission du k -ième message
d'une station fixée.

La suite de points $(t_k^N/N, k \geq 0)$ converge en
distribution vers un processus de Poisson (t_k)
de paramètre λ .

$$(t_k^N, k \geq 0) \stackrel{\text{dist}}{\sim} (Nt_k).$$

2009 — <http://www.cmap.polytechnique.fr/~probert>

Exemple 2 : Phénomènes de débordement



$(X(t))$: niveau d'une mémoire tampon.

2009 — <http://www.cmap.polytechnique.fr/~probert>

Exemple 3

Lancer de points sur la demi-droite réelle

$\lfloor \lambda N \rfloor$ points sont lancés au hasard sur $[0, N]$.
 t_i^N : position du i -ième point à partir de 0.

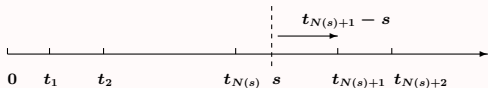
La suite $(t_i^N) \xrightarrow{\text{dist.}}$ processus de Poisson
 d'intensité λ sur \mathbb{R}_+ quand $N \rightarrow +\infty$.

Processus de Poisson :
 lancer de points au hasard sur \mathbb{R}_+

2009 — <http://www.cmap.polytechnique.fr/~probert>

Cours MAP 554: Réseaux de Communication, Algorithmes et Probabilités

Translation d'un processus de Poisson



Le processus de Poisson après l'instant s :

La variable $t_{N(s)+1} - s$ est exp. de paramètre λ

$t_{N(s)+1} - s$ est indépendante de $t_1, \dots, t_{N(s)}$

2009 — <http://www.cmap.polytechnique.fr/~probert>

5. Propriétés des processus de Poisson

2009 — <http://www.cmap.polytechnique.fr/~probert>

Cours MAP 554: Réseaux de Communication, Algorithmes et Probabilités

Translation d'un processus de Poisson (II)

Les points vus de s : $(t_{N(s)+k} - s, k \geq 0)$

- forment un processus de Poisson (λ)
- sont indépendants de $t_1, \dots, t_{N(s)}$.

⇒ proc. de Poisson invariant par translation

Preuve :
 Propriété d'oubli de la loi exponentielle

2009 — <http://www.cmap.polytechnique.fr/~probert>

Conséquences (II)

- nb de points dans $[0, s]$ indépendant
nb de points $[s, s + t]$
- $N(t + s) - N(s)$ a même loi que $N(t)$.

(Poly. page 148)

Accroissements indépendants

Si $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$, les variables

$N(a_1), N(a_2) - N(a_1), \dots, N(a_n) - N(a_{n-1})$

sont indépendantes.

2009 — <http://www.cmap.polytechnique.fr/~probert>

Cours MAP 554: Réseaux de Communication, Algorithmes et Probabilités

Modélisation Probabiliste

Deux processus fondamentaux :

- Le mouvement brownien.
Décrit les évolutions aléatoires continues.

$$dB(t)$$

- Le processus de Poisson.
Modèles aléatoires évoluant par sauts.

$$\Delta N(t) = N(t) - N(t-)$$

2009 — <http://www.cmap.polytechnique.fr/~probert>

Le processus de Poisson est l'unique processus à valeur entières tel que

- processus croissant avec des sauts $+1$;
- invariant par translation ;
- à accroissements indépendants.

2009 — <http://www.cmap.polytechnique.fr/~probert>

Cours MAP 554: Réseaux de Communication, Algorithmes et Probabilités

Opérations sur les processus de Poisson

Superposition

$M = (s_n)$, $N = (t_n)$ proc. Poisson indépendants d'intensité μ et λ , alors

$$P = M + N = (\{s_n\} \cup \{t_n\})$$

est un processus de Poisson d'intensité $\lambda + \mu$.

2009 — <http://www.cmap.polytechnique.fr/~probert>

Opérations sur les processus de Poisson

Effacement

Si (B_i) Bernoulli i.i.d. paramètre p , indép. de $N = \{t_n\}$, les points

$$M_1 = \{t_n : B_n = 1\}$$

forment un processus de Poisson d'intensité λp .

Opérations sur les processus de Poisson

Effacement (II)

Si (B_i) Bernoulli i.i.d. paramètre p , indép. de $N = \{t_n\}$, alors

$$M_1 = \{t_n : B_n = 1\} \text{ et } M_2 = \{t_n : B_n = 0\}$$

forment des processus de Poisson indépendants, d'intensités respectives λp et $\lambda(1 - p)$.

Calculs de lois

Sommes d'exponentielles.

La variable $t_n = E_1 + \dots + E_n$ a pour densité sur \mathbb{R}_+

$$g_n(x) = \lambda \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x}.$$

Le nb $N(t)$ de points dans $[0, t]$ suit une loi de Poisson de paramètre λt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N(t) = n) &= \mathbb{P}(t_n \leq t < t_{n+1}) \\ &= \mathbb{P}(t_n \leq t < t_n + E_{n+1}) \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^2} \mathbf{1}_{\{x \leq t \leq x+y\}} g_n(x) \lambda e^{-\lambda y} dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^2} \mathbf{1}_{\{x \leq t \leq x+y\}} \lambda \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} \lambda e^{-\lambda y} dx dy \\ &= e^{-\lambda t} \int_0^t \lambda \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} dx = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}. \end{aligned}$$

6. Propriétés temporelles

2009 — <http://www.cmap.polytechnique.fr/~probert>

Cours MAP 554: Réseaux de Communication, Algorithmes et Probabilités

Exemples de temps d'arrêt

- T constant égal à t ;
- Pour $n \geq 1$, t_n est un temps d'arrêt :
 $\{t_n \leq t\} = \{N(t) \geq n\}$
- $T = \inf\{t \geq 0 : N([0, t/2]) = N([t/2, t])\}$
 est un temps d'arrêt.

2009 — <http://www.cmap.polytechnique.fr/~probert>

Quelques définitions

\mathcal{F}_t : tribu des événements avant t
 Tribu des événements s'exprimant avec les variables $N(s)$, $s \leq t$.

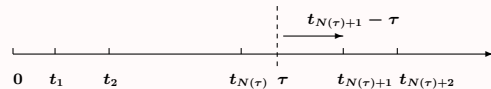
Temps d'arrêt :

Une v. aléatoire τ à valeurs dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$
 telle que $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$.

2009 — <http://www.cmap.polytechnique.fr/~probert>

Cours MAP 554: Réseaux de Communication, Algorithmes et Probabilités

Translation d'un processus de Poisson : II



τ temps d'arrêt

Le processus de Poisson translaté à τ est

- un processus de Poisson de même intensité ;
- indépendant des points avant τ .

2009 — <http://www.cmap.polytechnique.fr/~probert>

Translation d'un processus de Poisson

De façon équivalente,

$$(N(t + \tau) - N(\tau), t \geq 0) \perp \mathcal{F}_\tau,$$

$$(N(t + \tau) - N(\tau), t \geq 0) \stackrel{\text{dist.}}{=} (N(t), t \geq 0).$$

Propriété cruciale en pratique.

Propriétés infinitésimales

$$\text{Si } p_n(t) = \mathbb{P}(N(t) = n),$$

$$\begin{aligned} p_n(t + h) &= \mathbb{P}(N([0, t + h]) = n) \\ &= \mathbb{P}(N([0, t]) = n) \times \mathbb{P}(N([t, t + h]) = 0) \\ &\quad + \mathbb{P}(N([0, t]) = n - 1) \times \mathbb{P}(N([t, t + h]) = 1) \\ &\quad + \mathbb{P}(N([0, t + h]) = n) \times \mathbb{P}(N([t, t + h]) \geq 2) \end{aligned}$$

$$p_n(t + h) = p_n(t) \times (1 - \lambda h) + p_{n-1}(t) \times \lambda h + o(h)$$

Équations de Chapman-Kolmogorov

$t \rightarrow p_n(t) = \mathbb{P}(N(t) = n)$ vérifie

$$\frac{d}{dt} p_n(t) = \lambda p_{n-1}(t) - \lambda p_n(t), \quad n \geq 1.$$

$N(t)$ a loi de Poisson de paramètre λt

$$p_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$$

Équations C-K vraies pour les Processus de sauts markoviens.