Cours n°5

Réseaux à forme produit

Mercredi 14 octobre 2009

http ://www.cmap.polytechnique.fr/∼probert

Cours MAP 554: Réseaux de Communication, Algorithmes et Probabilités

École Polytechnique Philippe Robert

Table des matières

2009 — http://www.cmap.polytechnique.fr/∼probert

Cours MAP 554: Réseaux de Communication, Algorithmes et Probabilités

École Polytechnique Philippe Robert

1. Rappels

2009 — http://www.cmap.polytechnique.fr/∼probert

Cours MAP 554: Réseaux de Communication, Algorithmes et Probabilités

École Polytechnique Philippe Robert

Probabilité invariante

(Poly. page 199)

Une probabilité π sur $\mathcal{S}$ vérifie les équations de mesure invariante pour le processus de sauts de matrice $Q = (q(x,y))$ si

Équation de balance globale :

$$\underbrace{\pi(x)\left(\sum_{y\neq x} q(x,y)\right)}_{x\,\longrightarrow} = \underbrace{\sum_{y\neq x} \pi(y)q(y,x)}_{\longrightarrow\, x}$$

π probabilité invariante.

2009 — http://www.cmap.polytechnique.fr/∼probert

Stationnarité

π **proba. invariante de** $(X(t))$.

$X(0) \stackrel{\text{dist}}{=} \pi$ **entraîne :**

$\forall s \geq 0 \qquad (X(s+t), t \geq 0) \stackrel{\text{dist.}}{=} (X(t), t \geq q0).$

Dans ce cas $(X(t))$ **est un processus de Markov stationnaire.**

Cours MAP 554: Réseaux de Communication, Algorithmes et Probabilités

2. Réversibilité

École Polytechnique Philippe Robert
2009 — http://www.cmap.polytechnique.fr/~probert

Cours MAP 554: Réseaux de Communication, Algorithmes et Probabilités

Renversement du temps

(Poly. page 208)

Le processus renversé : $T > 0$,

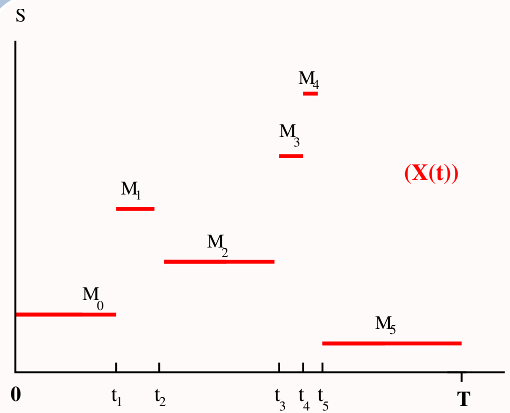
$$(X^*(t), t \geq 0) = (X(T-t), t \geq 0)$$

Si $(X(t))$ **visite successivement** M_0, M_1, ..., M_{n-1}, M_n **sur** $[0, T]$

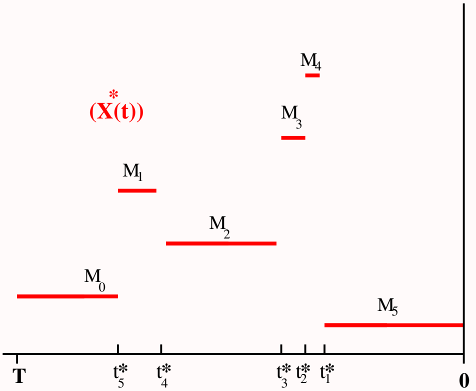
$\Rightarrow$ $(X^*(t))$ **visite** M_n, M_{n-1}, ..., M_0.

École Polytechnique Philippe Robert
2009 — http://www.cmap.polytechnique.fr/~probert

Cours MAP 554: Réseaux de Communication, Algorithmes et Probabilités



École Polytechnique Philippe Robert
2009 — http://www.cmap.polytechnique.fr/~probert



Matrice de sauts du processus renversé

(Poly. page 208)

Si $(X(t))$ Markov stationnaire,

1. $\Rightarrow (X^*(t))$ Markov

2. matrice de sauts $Q^* = (q^*(x,y))$

$$q^*(x,y) = q(y,x)\frac{\pi(y)}{\pi(x)}$$

$Q^* = (q^*(x,y))$ ne dépend pas de T.

Un contre-exemple

– $\mathcal{S} = \{0,1\}$

– $q(0,1) = \lambda$ et $q(1,0) = 0$.

– $X(0) = 0$.

Processus non-stationnaire.

Un contre-exemple (II)

Taux de saut de 1 à 0 :

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\mathbb{P}(X^*(t+h)=0 \mid X^*(t)=1) = \lambda\frac{\exp(-\lambda(T-t))}{1-\exp(-\lambda(T-t))}$$

– Le processus $(X^*(t))$ est Markov.

– Le processus n'est pas homogène en temps : Transitions dépendent du temps.

Réversibilité

(Poly. page 210)

Un processus est réversible si $(X^*(t)) \stackrel{\text{dist.}}{=} (X(t))$

$$(X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n))$$
$$\stackrel{\text{dist.}}{=} (X(T-t_1), X(T-t_2), \ldots, X(T-t_n)),$$

$\forall t_1 \leq \ldots \leq t_n \leq T$ et $\forall T$.

Critère de réversibilité

(Poly. page 210)

Un processus de sauts avec proba. invariante π est réversible ssi

$$\pi(x)q(x,y) = \pi(y)q(y,x), \forall x, y \in \mathcal{S}$$

Équations de balance locale.

Balance locale

Équations de balance locale.

$$\pi(x)q(x,y) = \pi(y)q(y,x), \forall x, y \in \mathcal{S}$$

En sommant sur $y \in \mathcal{S}$, $y \neq x$

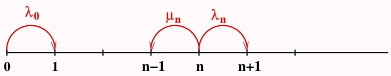
$$\pi(x) \sum_{y \neq x} q(x,y) = \sum_{y \neq x} \pi(y)q(y,x)$$

Réversibilité $\Rightarrow$ Équations de balance globale.

Exemple : Les processus de vie et de mort

(Poly. page 211)

Processus de Markov sur $\mathbb{N}$, sauts ± 1,



Exemple : Les processus de vie et de mort

Équations d'équilibre : (avec $\lambda_{-1}=\mu_0=0$),

$$(\lambda_n+\mu_n)\pi(n)=\lambda_{n-1}\pi(n-1)+\mu_{n+1}\pi(n+1),$$
$$\lambda_0\pi(0)=\mu_1\pi(1)$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} a_n = & \lambda_n\pi(n)-\mu_{n+1}\pi(n+1) \\ & = \lambda_{n-1}\pi(n-1)-\mu_n\pi(n) = a_{n-1} \end{aligned}$$

$a_1=0$.

Cours MAP 554: Réseaux de Communication, Algorithmes et Probabilités

Les processus de vie et de mort

Conclusion : $n\geq 0$,

$$\lambda_n\pi(n)=\mu_{n+1}\pi(n+1)$$

(Réversibilité)

$$\pi(n)=\pi(0)\prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i},\quad n\geq 0.$$

Candidat pour mesure invariante.

2009 — http://www.cmap.polytechnique.fr/~probert

École Polytechnique — Philippe Robert

Cours MAP 554: Réseaux de Communication, Algorithmes et Probabilités

Les processus de vie et de mort (III)

Équilibre $\Longleftrightarrow \displaystyle\sum_n\prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}<+\infty$

et $\displaystyle\sum_n\prod_{i=1}^{n}\frac{\mu_i}{\lambda_i}=+\infty$

(Condition de non-explosion)

Un processus de vie et de mort
à l'équilibre est toujours réversible.

2009 — http://www.cmap.polytechnique.fr/~probert

École Polytechnique — Philippe Robert

Cours MAP 554: Réseaux de Communication, Algorithmes et Probabilités

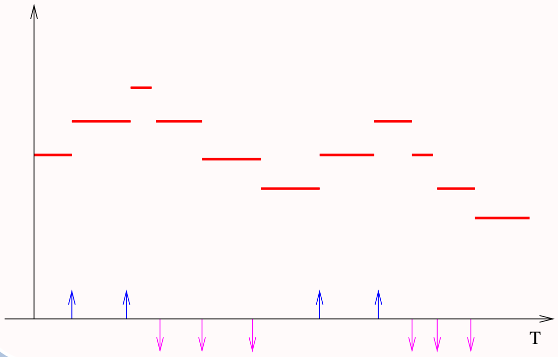
Applications (I)

- Si $\lambda<\mu$ la file $M/M/1$ est réversible ;
- La file $M/M/\infty$ est réversible.
- La file $M/M/K/C$ est réversible ;

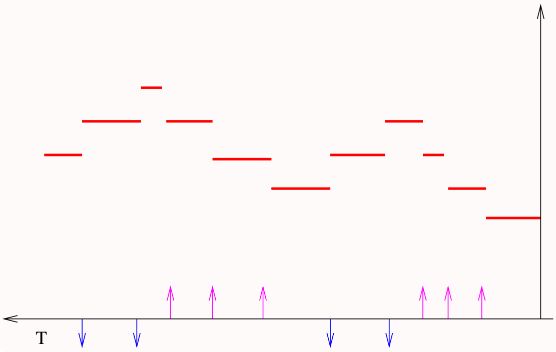
2009 — http://www.cmap.polytechnique.fr/~probert

École Polytechnique — Philippe Robert

Applications (II) : $M/M/1$



Applications (II) : $M/M/1$



(Poly. page 73)

À l'équilibre, les départs d'une file d'attente $M/M/1$ forment un processus de Poisson d'intensité λ.

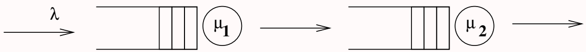
Théorème de Burke

Applications (III)

- La file $M/M/\infty$ est réversible.
  Départs Poisson : OK
- La file $M/M/K/C$ est réversible ;
  Départs Poisson : NON

Réversibilité

Contre-Exemple : Files d'attente en tandem



$q([1,0],[0,1]) = \mu_1$ et $q([0,1],[1,0]) = 0$

La relation

$$\pi([1,0])q([1,0],[0,1]) = \pi([0,1])q([0,1],[1,0])$$

est impossible $\Rightarrow$ pas réversible.

Cours MAP 554: Réseaux de Communication, Algorithmes et Probabilités

École Polytechnique Philippe Robert

Les réseaux

2009 — http://www.cmap.polytechnique.fr/~probert

Cours MAP 554: Réseaux de Communication, Algorithmes et Probabilités

École Polytechnique Philippe Robert

Réseaux : Un bref aperçu historique

- 1909 : Réseaux téléphoniques.
- 1960 : Réseaux informatiques.
  - Serveur central.
  - Machines parallèles.
- 1980 : Systèmes distribués.
  - Protocoles d'accès.
  - Internet.

2009 — http://www.cmap.polytechnique.fr/~probert

Cours MAP 554: Réseaux de Communication, Algorithmes et Probabilités

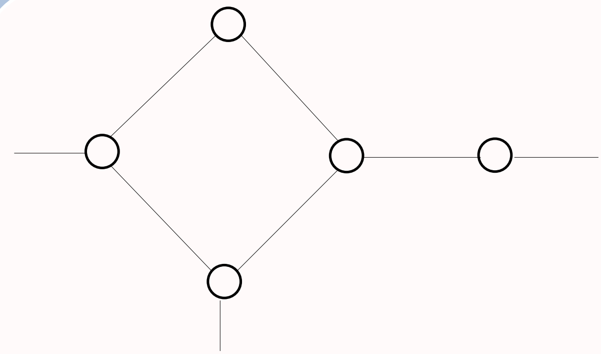
École Polytechnique Philippe Robert

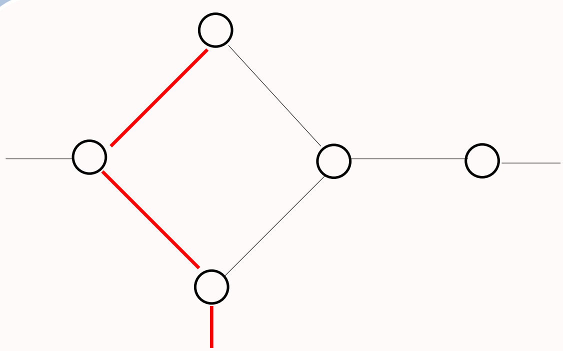
Réseaux et Mathématiques : Les pionniers

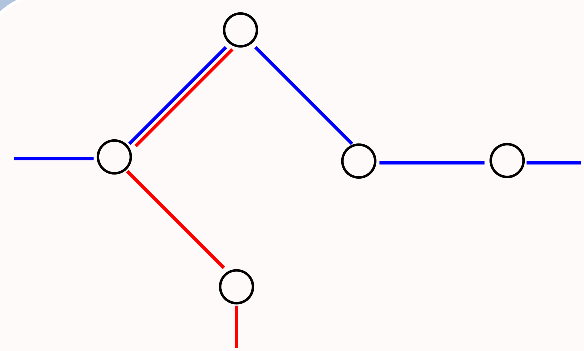
- Erlang (1909).
- Engset (1865-1943)
- Palm (1907-1951)
- Pollaczek (1892-1981)
- Kolmogorov (1903-1987)
- Khinchin (1894-1959).

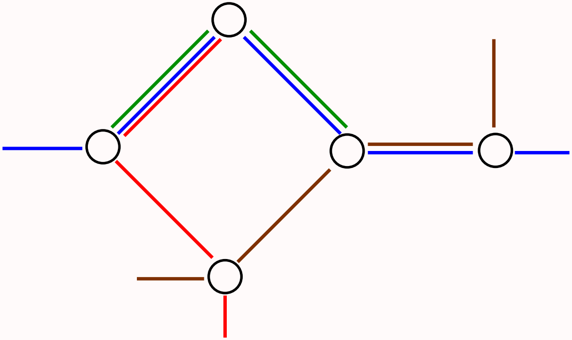
2009 — http://www.cmap.polytechnique.fr/~probert

3. Les réseaux avec perte









- **Le réseau téléphonique :**
  Réseau à commutation de circuits.

- $\neq$ **Réseaux à commutation de paquets. (Internet).**

Cas sans contrainte

Réseau : N nœuds **(Poly. page 68)**

Espace des routes

$$\mathcal{R} = \{r = (r_1, r_2, \ldots, r_p) : r_i \in \{1, \ldots, N\}\}$$

Espace d'états

$$\mathcal{S} = \left\{n = (n_r) \in \mathbb{N}^R\right\}, \qquad R = |\mathcal{R}|$$

Hypothèses probabilistes

- **Arrivées Poisson, λ_r, sur la route $r \in \mathcal{R}$**

- **Durée d'une communication sur la route r exponentielle, μ_r.**

Cas sans contrainte

Processus de Markov

$$L(t) = (L_r(t), r \in \mathcal{R})$$

$L_r(t)$ nombre de communications sur route r.

Transitions

– Taux d'arrivées sur la route r :

$$q(n, n + e_r) = \lambda_r.$$

– Taux de résidence

$$q(n, n - e_r) = n_r \mu_r.$$

Cas sans contrainte

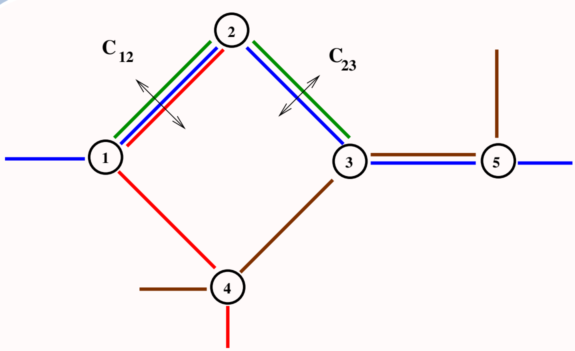
Réseau : $|\mathcal{R}|$ files $M/M/\infty$ indépendantes.

$\Rightarrow$ À l'équilibre $(L(t)) = (L_i(t))$ réversible.

Proba. invariante

$$\tilde{\pi}(n) = \prod_{r \in \mathcal{R}} \frac{(\lambda_r/\mu_r)^{n_r}}{n_r!} e^{-\lambda_r/\mu_r},$$

pour $n = (n_r) \in \mathbb{N}^R$.



Cas avec capacité finie

Espace d'états

C_{ij} capacité du lien (i, j).

$$\mathcal{S} = \left\{ (n_r) : \sum_{r \in \mathcal{R}, (x_i, x_j) \in r} n_r \leq C_{ij}, \quad \forall i, j \right\}.$$

Transitions

Les arrivées de routes qui font sortir $(L(t))$ de $\mathcal{S}$ sont rejetées.

– Taux d'arrivées sur la route r :
$$q(n, n+e_r) = \lambda_r 1_{\{n+e_r \in \mathcal{S}\}}.$$

– Taux de sortie
$$q(n, n-e_r) = n_r \mu_r$$

Cours MAP 554: Réseaux de Communication, Algorithmes et Probabilités

Proba. invariante avec capacité finie

(Poly. page 69)

$$\tilde{\pi}_{\mathcal{S}}(n) = K_{\mathcal{S}} \prod_{r\in\mathcal{R}} \frac{(\lambda_r/\mu_r)^{n_r}}{n_r!},$$

$K_{\mathcal{S}}$: constante de normalisation,
$$K_{\mathcal{S}}^{-1} = \sum_{n\in\mathcal{S}} \prod_{r\in\mathcal{R}} (\lambda_r/\mu_r)^{n_r}/n_r!$$

Formule produit
Constante $K_{\mathcal{S}}$ difficile à exprimer.

2009 — http://www.cmap.polytechnique.fr/~probert

École Polytechnique Philippe Robert

Cours MAP 554: Réseaux de Communication, Algorithmes et Probabilités

Réseau avec perte à un lien

Capacité N
$\rho = \lambda/\mu$, pour $x \in \{0, \ldots, N\}$,
$$\pi(x) = \frac{\rho^x}{x!} \Big/ \sum_{k=0}^{N} \frac{\rho^k}{k!}$$

Proba de perte
$$\pi(N) = \frac{\rho^N}{N!} \Big/ \sum_{k=0}^{N} \frac{\rho^k}{k!}$$

2009 — http://www.cmap.polytechnique.fr/~probert

École Polytechnique Philippe Robert

Cours MAP 554: Réseaux de Communication, Algorithmes et Probabilités

4. Les réseaux de Jackson

2009 — http://www.cmap.polytechnique.fr/~probert

École Polytechnique Philippe Robert

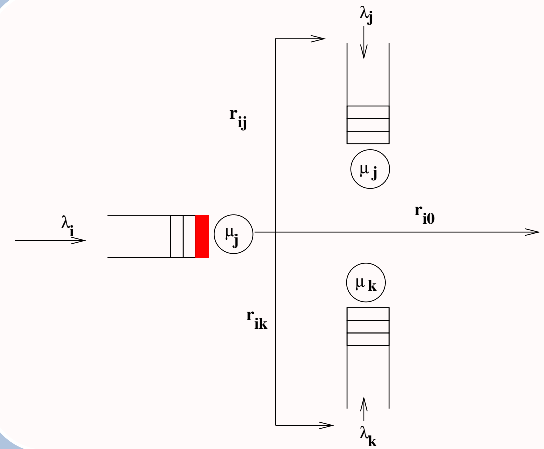
Les données

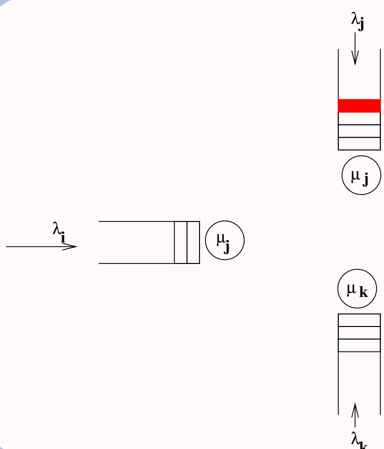
(Poly. page 72)

- N nœuds (files d'attente) : $\{1, 2, \ldots, N\}$.

- Au nœud i :
  Arrivées extérieures Poisson (λ_i)
  Services exponentiels (μ_i)

- r_{ij} proba nœud $i \longrightarrow$ nœud j après service.
- r_{i0} proba de quitter le réseau après nœud i.





Processus de Markov associé

- $L_i(t)$:
  nombre de clients au nœud i à l'instant t.

- $L(t) = (L_1(t), \ldots, L_N(t))$:
  processus de Markov.

- Espace d'états $\mathcal{S} = \mathbb{N}^N$.

Matrice de sauts

$n = (n_i) \in \mathcal{S} = \mathbb{N}^N$,
e_i : i-ième vecteur unité de $\mathcal{S}$

$$q(n, n + e_i) = \lambda_i$$
$$q(n, n + e_i - e_j) = \mu_j r_{ji} \qquad \text{si } n_j > 0$$
$$q(n, n - e_j) = \mu_j r_{j0} \qquad \text{si } n_j > 0$$

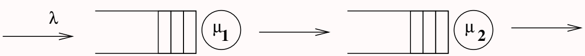
Hypothèse :

Les valeurs propres de la matrice $(r_{ij},\ 1 \leq i, j \leq N)$ de module < 1

$\Rightarrow$ Un client qui entre,
sort avec probabilité 1.

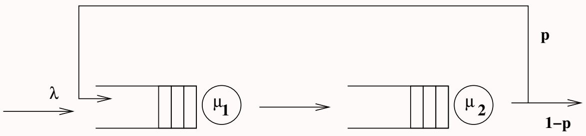
Exemples

Files d'attente en tandem



Exemples

Files d'attente en tandem avec bouclage



Les équations de trafic

(Poly. page 76)

Équations d'équilibre des flux

Il existe un unique vecteur $(\bar{\lambda}_i) \geq 0$ vérifiant

$$\bar{\lambda}_i = \lambda_i + \sum_{j=1}^{N} \bar{\lambda}_j r_{ji}.$$

$$\bar{\lambda} = \lambda(I - R)^{-1}$$

Équilibre

Si $\bar{\rho}_i = \bar{\lambda}_i / \mu_i$.

Si $\bar{\rho}_i < 1 \ \forall i$,

$$\pi(n) = \prod_{i=1}^{N} \bar{\rho}_i^{n_i}(1 - \bar{\rho}_i)$$

probabilité invariante du réseau de Jackson.

(Poly. page 77)

Équilibre (II)

À l'équilibre les variables $L_i(t)$, $1 \leq i \leq N$

– indépendantes ;

– distribution géométrique.

Preuve :
Vérifier les équations de balance globale.

Preuve

Équation à vérifier :

$$\sum_{y \neq x} q(x, y) \stackrel{?}{=} \sum_{y \neq x} \frac{\pi(y)}{\pi(x)} q(y, x)$$

Si $x = (x_i)$ avec $x_i > 0$, $\forall i$,

$$\begin{aligned}\sum_{y\neq x} q(x,y) &= \sum_{i,j=1}^{N} q(x, x+e_j-e_i)\\ &\quad + \sum_{i=1}^{N} q(x,x+e_i) + \sum_{i=1}^{N} q(x,x-e_i)\\ &= \sum_{i,j=1}^{N} \mu_i r_{ij} + \sum_{i=1}^{N} \lambda_i + \mu_i r_{i0}\\ &= \sum_{i=1}^{N} (\lambda_i + \mu_i)\end{aligned}$$

Preuve (suite)

$$\begin{aligned}\sum_{y\neq x} \frac{\pi(y)}{\pi(x)} q(y,x) &= \sum_{i=1}^{N} \frac{\pi(x+e_i)}{\pi(x)} q(x+e_i, x)\\ &\quad + \sum_{i=1}^{N} \frac{\pi(x-e_i)}{\pi(x)} q(x-e_i, x)\\ &\quad + \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\pi(x+e_j-e_i)}{\pi(x)} q(x+e_j-e_i, x)\end{aligned}$$

Preuve (suite)

$$\begin{aligned}\sum_{y\neq x} \frac{\pi(y)}{\pi(x)} q(y,x) &= \sum_{i=1}^{N} \bar\rho_i \mu_i r_{i0}\\ &\quad + \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\bar\rho_i}\lambda_i\\ &\quad + \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\bar\rho_j}{\bar\rho_i} \mu_j r_{ji}\end{aligned}$$

Preuve (fin)

$$\sum_{y\neq x} \frac{\pi(y)}{\pi(x)} q(y,x) = \sum_{i=1}^{N} \bar\lambda_i r_{i0} + \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\bar\rho_i} \left(\lambda_i + \sum_{j=1}^{N} \bar\lambda_j r_{ji}\right)$$

Équations de trafic :

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\bar\rho_i} \left(\lambda_i + \sum_{j=1}^{N} \bar\lambda_j r_{ji}\right) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\bar\rho_i} \bar\lambda_i = \sum_{i=1}^{N} \mu_i$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N} \bar{\lambda}_i r_{i0} &= \sum_{i=1}^{N} \bar{\lambda}_i \left(1 - \sum_{j=1}^{N} r_{ij}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{N} \bar{\lambda}_i - \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{N} \bar{\lambda}_i r_{ij} \\
&= \sum_{i=1}^{N} \bar{\lambda}_i - \sum_{j=1}^{N} (\bar{\lambda}_j - \lambda_j) = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i
\end{aligned}$$

$$\sum_{y \neq x} \frac{\pi(y)}{\pi(x)} q(y,x) = \sum_{i=1}^{N} (\lambda_i + \mu_i) = \sum_{y \neq x} q(x,y)$$

5. Réseaux Gordon-Newel

Les paramètres

(Poly. page 78)

– Réseau fermé à N nœuds : $\{1, 2, \ldots, N\}$.

– M clients.

– Services exponentiels (μ_i) au nœud i.

– r_{ij} nœud i $\longrightarrow$ nœud j après service

$$r_{i1} + r_{i1} + \cdots + r_{iN} = 1.$$

Processus de Markov associé

– $L_i(t)$: nb de clients au nœud i à t.

– $L(t) = (L_1(t), \ldots, L_N(t))$,
processus de Markov.

– Espace d'états

$$\mathcal{S} = \left\{ n = (n_i) : \sum_i n_i = M \right\}$$

École Polytechnique Philippe Robert

Matrice de sauts

$$q(n, n - e_i + e_j) = \mu_i r_{ij} \qquad \text{si } n_i > 0$$

Hypothèse : La matrice $(r_{ij},\ 1 \leq i, j \leq N)$ est irréductible.

École Polytechnique Philippe Robert

Matrice de routage

R : matrice de transition irréductible sur $\{1, \ldots, N\}$

$\Rightarrow$ il existe (ν_i) tel que

$$\nu_i = \sum_1^N \nu_j r_{ji},$$

Équation de proba. invariante pour $R = (r_{ij})$.

École Polytechnique Philippe Robert

Proba invariante

Forme produit : si $\rho_i = \nu_i / \mu_i$,

$$\pi(n) = K \prod_1^N \rho_i^{n_i},$$

K est la constante de normalisation.