École Polytechnique
Programmes d'Approfondissement
Réseaux de Communication,
Algorithmes et Probabilités

Petite Classe n° 1
September 14, 2011

Markovian Modeling

Exercice 1

Si P est la matrice de transition sur $\{1, 2, 3\}$ définie par

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \\ p & 1-p & 0 \end{pmatrix}$$

Dessiner le graphe de cette chaîne de Markov.

1. À quelle condition cette matrice est elle irréductible ?
2. Calculer sa probabilité invariante.

Exercice 2

Si P est la matrice de transition sur $\mathbb{N}$ définie par, pour $x \in \mathbb{N}$,

$$p(x, x+1) = \lambda/(\lambda + x\mu) \qquad \text{et} \qquad p(x, x-1) = x\mu/(\lambda + x\mu).$$

1. Montrer que si $\lambda > 0$ et $\mu > 0$ la chaîne de Markov associée est irréductible.
2. Montrer que la probabilité invariante est donnée par $\pi(x) = C_0\, (\lambda/\mu)^x\, (\lambda + x\mu)/x!$

Exercice 3

L'urne d'Ehrenfest (Exemple 7 page 84 du cours) est décrite par une chaîne de Markov (M_n) sur $\{0, 1, \ldots, N\}$ dont la matrice de transition est définie par $p(x, x-1) = x/N$ et $p(x, x+1) = 1 - x/N$.

1. Montrer que cette chaîne de Markov est irréductible dès que $N \geq 2$.
2. Montrer qu'il existe une probabilité invariante π donnée par

$$\pi(x) = \frac{C_N^x}{2^N}, \quad x = 0, \ldots, N.$$

Exercice 4

La distribution de la durée de fonctionnement (en unité de temps) d'une machine est donnée par une probabilité $(\mu(x), x \geq 1)$ sur $\mathbb{N}$.

1. La durée de la réparation est supposée égale à une unité de temps. Donner un modèle markovien de ce système en précisant la matrice de transition.
2. À quelle condition est-elle irréductible sur $\mathbb{N}$?
3. Donner l'équation d'équilibre de la chaîne de Markov, à quelle condition a-t-elle une solution ?
4. La durée R de réparation est maintenant aléatoire de loi $(\nu(x), x \geq 1)$ sur $\mathbb{N}$. Même question.

Exercice 5

Les épreuves d'un livre sont lues successivement par une suite infinie de lecteurs. À chaque fois le lecteur corrige les erreurs avec probabilité $p > 0$ mais introduit un nombre aléatoire E de nouvelles erreurs. On note h la fonction génératrice de la variable E, $h(z) = \mathbb{E}(z^E)$.

1. Décrivez ceci par une chaîne de Markov (X_n). Sous quelles conditions est-elle irréductible?
2. Calculez $g_n(z) = \mathbb{E}(z^{X_n})$ en fonction de g_{n-1} et de h.
3. Lorsque le nombre de nouvelles erreurs suit une loi de Poisson de paramètre λ, donnez une expression pour la fonction génératrice de la loi invariante de (X_n).

Exercice 6

Records. Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ i.i.d. telle que $\mathbb{P}(X_i = 1) = p$ et $\mathbb{P}(X_i = 0) = q$ avec $p + q = 1$, et R_n le plus grand nombre de 1 consécutifs observés dans $(X_1, \ldots, X_n)$.

1. Justifier que (R_n) n'est pas une chaîne de Markov.
2. Soit $X_0 = 0$ et $D_n = \inf\{\, k \geq 0 : X_{n-k} = 0 \,\}$ pour $n \geq 0$. Montrer que $(D_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov, et donner sa matrice de transition.
3. Soit $k \geq 0$, $T_k = \inf\{\, n \geq 0, D_n = k \,\}$, et $Z_n = D_n$ si $n \leq T_k$ et $Z_n = k$ sinon. Montrer que $(Z_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov sur $\{0, 1, \ldots, k\}$, et donner sa matrice P_k.
4. Exprimer $\mathbb{P}(R_n \geq k)$ en fonction de Z_n, puis de P_k. En déduire la loi de R_n en fonction des P_k.

Exercice 7

Modèles de génétique Chez une espèce, un certain gène peut être présent sous deux formes différentes, appelées allèles, et nous nous intéressons à l'évolution de leur fréquence. Nous étudions deux modèles simplifiés pour la reproduction, où la taille $N \geq 1$ de la population reste fixe:

Synchrone

La population tout entière est remplacée par sa descendance. De façon i.i.d., chaque nouvel individu a une probabilité de porter l'allèle $a \in \{1, 2\}$ qui est proportionnelle au nombre d'anciens individus d'allèle a ;

Asynchrone

Un individu choisi uniformément est remplacé par un nouvel individu. La probabilité que ce dernier porte l'allèle $a \in \{1, 2\}$ est proportionnelle au nombre d'individus d'allèle a parmi l'ancienne population.

Deux représentations de la situation sont considérées:

Microscopique

L'état $(a_i)_{1\leq i\leq N}$ dans l'espace d'état $\{1, 2\}^N$ signifie que l'individu i porte l'allèle a_i, les individus étant numérotés arbitrairement;

Macroscopique

L'espace d'états est $\{\, n : 0 \leq n \leq N \,\}$ et compte le nombre d'individus d'allèle 1.

1. Comment obtient-on la représentation macroscopique à partir de celle microscopique ? Dans ces quatre cas, montrer que l'on obtient une chaîne de Markov, en donner la matrice, et trouver les états absorbants.