

Markov Chains and Poisson Processes

Exercice 1

Les épreuves d'un livre sont lues successivement par une suite infinie de lecteurs. À chaque fois le lecteur corrige les erreurs avec probabilité $p > 0$ mais introduit un nombre aléatoire E de nouvelles erreurs. On note h la fonction génératrice de la variable E , $h(z) = \mathbb{E}(z^E)$.

1. Décrivez ceci par une chaîne de Markov (X_n) . Sous quelles conditions est-elle irréductible?
2. Calculez $g_n(z) = \mathbb{E}(z^{X_n})$ en fonction de g_{n-1} et de h .
3. Lorsque le nombre de nouvelles erreurs suit une loi de Poisson de paramètre λ , donnez une expression pour la fonction génératrice de la loi invariante de (X_n) .

Exercice 2

Automate de comptage.

Une chaîne infinie de 0 et de 1 est donnée par une suite (X_n) de v.a. i.i.d. avec $P(X_1 = 1) = p$ et $P(X_1 = 0) = 1 - p$.

On définit A_n comme le nombre d'occurrences du motif 010 dans la suite finie $X_1 \dots X_{10}$. Par exemple si $X_1 \dots X_n = 0010100101$, alors $A_n = 3$ les motifs commençant aux indices 2, 4 et 7

1. Montrer que la fréquence empirique asymptotique du motif, donnée par

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n/n,$$

existe \mathbb{P} -p.s. et la calculer.

2. Donner un résultat analogue quand les occurrences de 010 sont *sans chevauchement*. Dans l'exemple précédent $A_n = 2$, le motif du milieu n'est pas compté (indices 2 et 7).

Exercice 3

On considère la chaîne de Markov (X_n) sur \mathbb{N} de matrice

$$p(x, x+1) = p > 0, \quad p(x+1, x) = q = 1 - p > 0, \quad p(0, 0) = q.$$

On pose $T = \inf\{n \geq 0 : X_n = 0\}$ et $g_x(z) = \mathbb{E}_x(z^T)$ pour $x \in \mathbb{N}$ et $0 \leq z \leq 1$.

1. Donner une CNS pour qu'il y ait une loi invariante et la calculer.
2. Montrer que T est un temps d'arrêt, et que $g_x(z) = g_1(z)^x$.
3. Montrez que $g_0(z) = 1$ et $g_x(z) = pzg_{x+1}(z) + qzg_{x-1}(z)$. Déduisez-en

$$g_x(z) = \left(\frac{1 - \sqrt{1 - 4pqz^2}}{2pz} \right)^x.$$

4. Montrer que $\mathbb{P}_x(T < \infty) = \min\{1, (q/p)^x\}$ et que $\mathbb{E}_x(T) = x/(q-p)$ pour $p < q$ et $\mathbb{E}_x(T) = \infty$ pour $p \geq q$.

Exercice 4

Records. Soit $(X_i)_{i \geq 1}$ i.i.d. telle que $\mathbb{P}(X_i = 1) = p$ et $\mathbb{P}(X_i = 0) = q$ avec $p + q = 1$, et R_n le plus grand nombre de 1 consécutifs observés dans (X_1, \dots, X_n) .

1. Justifier que (R_n) n'est pas une chaîne de Markov.
2. Soit $X_0 = 0$ et $D_n = \inf\{k \geq 0 : X_{n-k} = 0\}$ pour $n \geq 0$. Montrer que $(D_n)_{n \geq 0}$ est une chaîne de Markov, et donner sa matrice de transition.
3. Soit $k \geq 0$, $T_k = \inf\{n \geq 0, D_n = k\}$, et $Z_n = D_n$ si $n \leq T_k$ et $Z_n = k$ sinon. Montrer que $(Z_n)_{n \geq 0}$ est une chaîne de Markov sur $\{0, 1, \dots, k\}$, et donner sa matrice P_k .
4. Exprimer $\mathbb{P}(R_n \geq k)$ en fonction de Z_n , puis de P_k . En déduire la loi de R_n en fonction des P_k .

Exercice 5

Deux lignes de bus A et B desservent le même arrêt, les instants de passage à cet arrêt de chacune de ces lignes sont des processus de Poisson indépendants. La durée moyenne entre deux bus de la ligne A [resp. B] est d'une heure [resp. une demi-heure].

1. En arrivant au hasard à l'arrêt, quel est le temps d'attente moyen pour voir un bus de la ligne A ?
2. Quelle est la probabilité de voir passer trois bus en une heure ?
3. Quelle est la loi du nombre de bus de la ligne B que voit un passager de la ligne A en attendant son bus ?
4. Si lors d'une grève la moitié des bus sont indisponibles, quel est le temps d'attente moyen pour voir un bus ?

Exercice 6

Des demandes d'appel arrivent à un central téléphonique suivant un processus de Poisson d'intensité λ , les communications sont établies dès leur arrivée.

1. Quelle est la probabilité d'avoir deux appels arrivant simultanément ?
2. Si, les communications ont une durée de loi exponentielle de paramètre μ et qu'à un instant donné il y a n communications en cours, quelle est la distribution du premier instant où l'une d'entre elles aura fini ?
3. On suppose que les durées de communications ne prennent que deux valeurs a et b ($a \leq b$) avec probabilité p et $1 - p$ respectivement. Calculer la distribution de $L(t)$, le nombre de communications à l'instant t . Montrer que la variable $L(t)$ converge en distribution quand t tend vers l'infini.
4. Même question quand la distribution de la durée d'un appel est générale de même moyenne.