École Polytechnique
Programmes d'Approfondissement
Rseaux de Communication,
Algorithmes et Probabilits

Petite Classe n° 3
September 28, 2011

Jump Processes

Exercice 1

On considère la chaîne de Markov (X_n) sur $\mathbb{N}$ de matrice

$$p(x, x+1) = p > 0\,, \quad p(x+1, x) = q = 1 - p > 0\,, \quad p(0,0) = q\,.$$

On pose $T = \inf\{\, n \geq 0 : X_n = 0 \,\}$ et $g_x(z) = \mathbb{E}_x(z^T)$ pour $x \in \mathbb{N}$ et $0 \leq z \leq 1$.

1. Donner une CNS pour qu'il y ait une loi invariante et la calculer.
2. Montrer que T est un temps d'arrêt, et que $g_x(z) = g_1(z)^x$.
3. Montrez que $g_0(z) = 1$ et $g_x(z) = pzg_{x+1}(z) + qzg_{x-1}(z)$. Déduisez-en

$$g_x(z) = \left(\frac{1 - \sqrt{1 - 4pqz^2}}{2pz} \right)^x .$$

Exercice 2

Deux lignes de bus A et B desservent le même arrêt, les instants de passage à cet arrêt de chacune de ces lignes sont des processus de Poisson indépendants. La durée moyenne entre deux bus de la ligne A [resp. B] est d'une heure [resp. une demi-heure].

1. En arrivant au hasard à l'arrêt, quel est le temps d'attente moyen pour voir un bus de la ligne A ?
2. Quelle est la probabilité de voir passer quatre bus en une heure ?
3. Quelle est la loi du nombre de bus de la ligne B que voit un passager de la ligne A en attendant son bus ?
4. Si lors d'une grève la moitié des bus sont indisponibles, quel est le temps d'attente moyen pour voir un bus ?

Exercice 3

Un électron dans un atome est soit au repos (état 1) soit excité (état 2). Il reste au repos pendant une durée exponentielle de paramètre λ avant de devenir excité. Il reste excité pendant une durée exponentielle de paramètre μ avant de passer au repos, et tout cela indépendamment du passé. On note $X(t)$ l'état de l'électron à l'instant $t \geq 0$.

1. Montrer que $(X(t))$ est un processus de Markov et en donner la matrice de sauts.
2. Donner les équations de Kolmogorov et les résoudre.

Exercice 4

Des demandes d'appel arrivent à un central téléphonique suivant un processus de Poisson d'intensité λ, les communications sont établies dès leur arrivée.

1. Quelle est la probabilité d'avoir deux appels arrivant simultanément ?
2. Si les communications ont une durée de loi exponentielle de paramètre μ et qu'à un instant donné il y a n communications en cours, quelle est la distribution du premier instant où l'une d'entre elles aura fini ?
3. Montrer que le nombre d'appels à l'instant t est un processus de sauts. Quelle est sa matrice de sauts ?
4. On suppose que les durées de communications sont constantes égales à $a > 0$. Calculer la distribution de $L(t)$ le nombre de communication en cours à l'instant t. Montrer que la variable $L(t)$ converge en distribution quand t tend vers l'infini.
5. Même question que précédemment quand la durée d'une communication a une distribution générale.

Exercice 5

Donner un modèle markovien des systèmes ci-dessous et calculer leur matrice de sauts associée.

1. *File d'attente en tandem.*
   Des clients arrivent suivant un flot de Poisson d'intensité λ au guichet 1 puis, une fois servis passent au guichet 2. Au guichet $i = 1, 2$, un client reçoit un service de durée exponentielle de paramètre μ_i. Le service se fait dans l'ordre des arrivées. On note $L_i(t)$ le nombre de clients en attente au guichet i à l'instant t.
2. *File d'attente prioritaire.*
   Une station reçoit deux types de messages (ou clients), A et B, les messages de type A [resp. B] arrivent suivant un processus de Poisson d'intensité λ_A [resp. λ_B] et la durée de la connexion est distribuée exponentiellement de paramètre μ_A [resp. μ_B]. Les clients de type A sont prioritaires, un message de type B ne peut être servi que s'il n'y a aucun message de type A. Un client B en service est interrompu quand un client A se présente à la file d'attente (service préemptif). Les traitements se font dans l'ordre des arrivées, les messages sont stockés dans un file d'attente.

Exercice 6

Des groupes de requêtes arrivent à une unité de traitement suivant un processus de Poisson de paramètre λ. Le n-ième groupe comprend X_n requêtes, on suppose que la suite (X_n) est i.i.d. et indépendante du processus d'arrivée. On note $Y(t)$ le nombre total de requêtes arrivées jusqu'à l'instant t.

1. Quelle est la distribution de ces instants d'arrivées des groupes d'au moins 10 requêtes ?
2. Quelle est la proba qu'entre 0 et t il n'arrive aucun groupe de taille ≥ 10 et 1 seul de taille 1 ?
3. Calculer la transformée de Laplace de $Y(t)$, $\mathbb{E}[\exp(-\xi Y(t))]$ pour $\xi \geq 0$.
4. Montrer que le processus $(Y(t))$ possède la propriété des accroissements indépendants: pour s, $t \geq 0$ $(Y(t+s) - Y(s), t \geq 0)$ est indépendant des
   variables $(Y(u), u \leq s$ et de même loi que $(Y(t), t \geq 0)$. Le processus $(Y(t))$ *est un processus de Poisson composé.*