ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Programmes d'Approfondissement
Communication networks,
Algorithms and
Probability Theory

Petite Classe n° 5
October 12, 2011

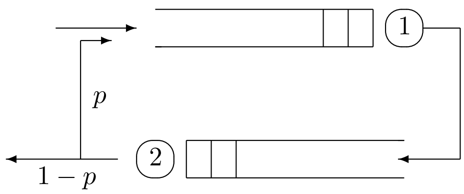
Product Form Networks

Exercice 1

Une pile est une file d'attente à un serveur et capacité infinie, où le serveur s'occupe exclusivement du dernier arrivé, quitte à abandonner un client en service. Il y a c classes de clients (les clients à l'intérieur d'une classe étant indiscernables). Pour $1 \leq i \leq c$, les clients de type i arrivent suivant un processus de Poisson de taux $\lambda_i > 0$ et requièrent une durée de service exponentielle de paramètre $\mu_i > 0$. Soit $\rho_i = \lambda_i/\mu_i$ et $\rho = \rho_1 + \cdots + \rho_c$.

1. Donnez un processus de Markov de sauts représentant la file d'attente. Explicitez sa matrice de sauts.
2. Montrez que le processus a une probabilité invariante si et seulement si $\rho < 1$ et, dans ce cas, trouvez sa distribution stationnaire. Déduisez-en la loi stationnaire du nombre de clients dans la file, et commentez.

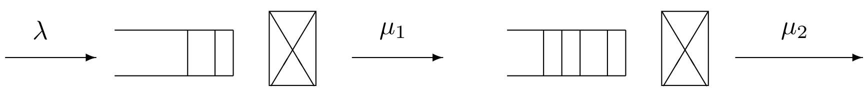
Exercice 2



Les arrivées au réseau ci-dessus sont Poisson d'intensité λ et les services sont exponentiels de paramètre respectifs μ_1 et μ_2. La quantité p désigne la probabilité de reboucler dans le réseau à la sortie de la file 2. La discipline de service aux files d'attente est FIFO.

1. Donner la matrice de sauts du processus de Markov $(L(t) = (L_1(t), L_2(t))$ associé à ce réseau.
2. Calculer, quand elle existe, sa probabilité invariante.

Exercice 3



On suppose que les arrivées à la file en tandem ci-dessus sont Poisson d'intensité λ et que les services sont exponentiels.

1. Donner la matrice de sauts du processus de Markov $(L(t) = (L_1(t), L_2(t))$ associé. À quelle condition celui-ci a-t-il une probabilité invariante ?
2. Montrer qu'à l'équilibre le nombre de clients à l'instant t de la file 1 est indépendant du nombre de départs de cette file avant cet instant.
3. En déduire une nouvelle démonstration de la forme produit de la probabilité invariante.

Exercice 4

Deux types de clients arrivent à une unité de service : les clients de classe 1 [resp. de classe 2] arrivent suivant un processus de Poisson de paramètre λ_1 [resp. λ_2] et demandent un service de durée exponentielle de paramètre μ_1 [resp. μ_2]. Pour $i = 1$, 2, on note $L_i(t)$ le nombre de clients de type à l'instant $t \geq 0$. Le nombre total de serveurs vaut S, les clients qui ne trouvent pas de serveur disponible sont rejetés par le système.

1. Donner la matrice de sauts du processus de Markov $L(t) = (L_1(t), L_2(t))$.
2. Si $S = +\infty$,
   a) calculer la probabilité invariante de $(L(t))$. Le processus est-il réversible ?
   b) Quelle est, à l'équilibre, la loi du processus des départs des clients de classe 2 ?
3. En déduire la probabilité invariante quand $S < +\infty$.
4. Si $0 \leq S_2 \leq S < +\infty$, on suppose *pour cette question* qu'un client de classe 2 qui trouve S_2 clients de classe 2 dans le système est rejeté. Quel est l'intérêt d'une telle politique de service (dite de “trunk reservation”) ? Exprimer la mesure invariante du processus de Markov associé.

Exercice 5

Processor-Sharing multiclasse.
On considère une file d'attente de capacité infinie avec un serveur et c classes de clients. Les clients de classe $i \in \{1, \dots, c\}$ arrivent suivant un processus de Poisson d'intensité λ_i, et ont des demandes de service distribuées selon une loi exponentielle de paramètre μ_i. La discipline de service est de type “Processor-Sharing”.

1. Donner la matrice de sauts du processus de Markov $X(t) = (X_1(t), \dots, X_c(t))$, $t \geq 0$, décrivant le nombre des clients dans chacune des classes du système.
2. Écrire les équations de probabilité invariante associée à ce processus de Markov. Si $\rho_i = \lambda_i/\mu_i$ et $\rho = \rho_1 + \cdots + \rho_c$, à quelle condition ces équations ont elles une solution ?